

Analytische Mechanik in a Nutshell

Karsten Kirchgessner

Dezember 2007 - Januar 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Definitionen und Basisüberlegungen	1
2	Schlussfolgerungen aus dem d'Alembert'schen Prinzip	2
2.1	Holonome Zwangsbedingungen	2
2.2	Konservative Systeme	2
2.3	Konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen	2
2.4	Nicht-konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen	3
2.4.1	Verallgemeinertes Potenzial der Lorentz-Kraft	3
2.5	Kinetische Energie in unterschiedlichen Koordinatensystemen	3
3	Erhaltungssätze	4
4	Hamilton-Mechanik	5
4.1	Herleitung der Gesetzmäßigkeiten	5
4.2	Lösungsverfahren	6
4.3	Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im \vec{E} - und \vec{B} -Feld	6

kar-sten@gmx.de

1 Definitionen und Basisüberlegungen

- **Zwangsbedingungen** sind geometrische Bedingungen, die die Bewegung der Systemteilchen einschränken.
- **Zwangskräfte** bewirken Zwangsbedingungen und schränken somit also die freie Teilchenbewegung ein.
- **holonome Zwangsbedingungen** sind Verknüpfungen der Form $f_v(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$
- **holonom-skleronome Zwangsbedingungen** sind nicht explizit zeitabhängige holonome Zwangsbedingungen, d.h. es gilt $\frac{\partial f_v}{\partial t} = 0$.
- **holonom-rheonome Zwangsbedingungen** sind explizit zeitabhängige holonome Zwangsbedingungen, d.h. es gilt $\frac{\partial f_v}{\partial t} \neq 0$.

- Ein N-Teilchensystem hat $3N$ **Freiheitsgrade**, die um die Anzahl p der holonomen Zwangsbedingungen reduziert werden. So bleiben $S = 3N - p$ Freiheitsgrade übrig.
- Man führt voneinander unabhängige **generalisierte Koordinaten** q_j ein, die ein physikalisches System eindeutig beschreiben. Sie spannen den **Konfigurationsraum** auf. Bei den generalisierten Koordinaten handelt es sich nicht zwangsweise um Längen.
- Nicht-holonome Zwangsbedingungen, also solche, die sich nicht in der obigen Form darstellen lassen, wie z.B. Ungleichungen oder Zwangsbedingungen in differentieller, nicht integrierbarer Form, erlauben keine Eliminierung von überflüssigen Koordinaten.
- Die zeitlichen Ableitungen der generalisierten Koordinaten, \dot{q}_j , nennt man **generalisierte Geschwindigkeiten**.

- Eine **virtuelle Verrückung** $\delta\vec{r}_i$ ist eine willkürliche infinitesimale Koordinatenänderung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und momentan durchgeführt wird ($\delta t = 0$).

- Die **virtuelle Arbeit** ist definiert als $\delta W_i = -\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i$.

- Das **Prinzip der virtuellen Arbeit** besagt, dass $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ gilt.

- Die Tatsache, dass die virtuelle Arbeit der verlorenen Kräfte Null ist, führt zu einer ersten Formulierung des **d'Alembert'schen Prinzips**:

$$\sum_{i=1}^N (\vec{K}_i - \vec{p}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (1)$$

- Wir führen die **generalisierte Kraftkomponente** $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{K}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ ein, wobei stets '[$Q_j q_j$] = Energie' gelten soll.

- Durch diverse Rechnungen und Überlegungen finden wir eine weitere Formulierung des d'Alembert'schen Prinzips, siehe nächstes Kapitel ...

2 Schlussfolgerungen aus dem d'Alembert'schen Prinzip

Eine (noch) allgemeine Form des d'Alembert'schen Prinzips lautet:

$$\sum_{j=1}^S \left\{ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (2)$$

2.1 Holonome Zwangsbedingungen

Da unter holonomen Zwangsbedingungen alle Koordinaten q_j unabhängig voneinander sind, sind auch die Größen δq_j frei wählbar, sodass alle δq_j bis auf eine gleich Null gesetzt werden können. In (2) verschwindet daher schon jeder einzelne Summand:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3)$$

2.2 Konservative Systeme

Dadurch dass bei konservativen Systemen stets $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$ gilt und V nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, können wir statt (2) auch

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) \right] \delta q_j = 0 \quad (4)$$

schreiben. Mit der Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) = T(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) - V(q_1, \dots, q_S) \quad (5)$$

folgt dann:

$$\sum_{j=1}^S \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0 \quad (6)$$

2.3 Konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

Wenn wir unsere bisherigen Überlegungen kombinieren, führt dies zu den Lagrange-Gleichungen 2. Art, in denen nun alle Zwangskräfte bereits eliminiert sind:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (7)$$

Es handelt sich dabei um S Differenzialgleichungen zweiter Ordnung zu deren kompletter Lösung folglich $2S$ Anfangsbedingungen benötigt werden. Lagrange-Gleichungen sind forminvariant gegenüber Punkttransformationen.

2.4 Nicht-konservative Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen

Wenn man ein verallgemeinertes Potenzial U der Form

$$U = U(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) \quad (8)$$

findet, aus dem sich die generalisierten Kräfte Q_j mit

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (9)$$

ableiten lassen, so können wir mit der verallgemeinerten Lagrange-Funktion

$$L = T - U \quad (10)$$

wie gewohnt die Lagrange-Gleichungen lösen!

2.4.1 Verallgemeinertes Potenzial der Lorentz-Kraft

Auf ein sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem elektromagnetischen Feld bewegendes Teilchen der Ladung q wirkt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q [\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})] \quad (11)$$

Obwohl sie nicht konservativ ist, besitzt sie ein verallgemeinertes Potenzial U , das sich mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen zu

$$U = q (\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (12)$$

berechnen lässt, wobei (9) erfüllt wird. Wir kommen zu einer Lagrange-Funktion der Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + q(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - q\Phi \quad (13)$$

2.5 Kinetische Energie in unterschiedlichen Koordinatensystemen

$T = \frac{1}{2}mv^2$	eindimensional
$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$	kartesische Koordinaten
$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$	Polarkoordinaten
$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$	Zylinderkoordinaten
$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + r^2\dot{\theta}^2)$	Kugelkoordinaten

3 Erhaltungssätze

unter holonomen Zwangsbedingungen und bei konservativen Kräften

Wir definieren den **verallgemeinerten Impuls** p_i mit

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (14)$$

und die **zyklische Koordinate** q_j durch

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{const.} \quad \Leftrightarrow \quad q_j \text{ zyklisch} \quad (15)$$

die stets zu einem Erhaltungssatz führt, weswegen man generalisierte Koordinaten am besten so wählt, dass möglichst viele von ihnen zyklisch sind.

Bei dem Kepler-Problem erhalten wir beispielsweise mit dem Potenzial

$$V(x, y, z) = \frac{-\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{\alpha}{r} \quad (16)$$

in Kugelkoordinaten die Lagrange-Funktion

$$L(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r} \quad (17)$$

an der man sofort erkennt, dass die Koordinate φ zyklisch ist. Dies führt unmittelbar zur Erhaltung der z-Komponente des Drehimpulses:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = L_z = \text{const.} \quad (18)$$

Da die z-Richtung des Drehimpulses durch nichts ausgezeichnet ist, muss der vollständige Drehimpuls erhalten sein! Wir sprechen also von der **Drehimpulserhaltung**.

4 Hamilton-Mechanik

4.1 Herleitung der Gesetzmäßigkeiten

$$H(q_1, \dots, q_S, p_1, \dots, p_S, t) = \sum_{i=1}^S p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_S, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_S, t) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{i=1}^S (dp_i \dot{q}_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^S (\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^S (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (20)$$

$$dH = \sum_{i=1}^S \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (21)$$

$$\implies \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^S \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} + \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\implies \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (24)$$

4.2 Lösungsverfahren

- L aufstellen
- kanonische Impulse $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ berechnen (bzw. $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ *)
- $H(p_j, q_j, t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$ bestimmen (bzw. $H = T + V$ *)
- Hamilton'sche BGLen (2N DGLen 1. Ordnung statt N DGLen 2. Ordnung) aufstellen
 - $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_j} \rightarrow q_j(t)$
 - $\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \rightarrow p_j(t)$

*für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale und zeitunabhängige Transformationen

4.3 Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im \vec{E} - und \vec{B} -Feld

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - q\Phi + q(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) \quad \rightarrow \quad \vec{p} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \quad (25)$$

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + q\Phi = T + q\Phi \quad (\text{Gesamtenergie}) \quad (26)$$

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\Phi \quad (27)$$

Prinzip der minimalen Kopplung:

Ersetze in der Gegenwart eines magnetischen Feldes \vec{p} durch $\vec{p} - q\vec{A}$ in H .