

# MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: QCD UND COLLIDERPHYSIK

Prof. Dr. Zeppenfeld

Vorlesung Wintersemester 2008/2009

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 8. Februar 2009

Mitschrieb der Vorlesung QCD UND COLLIDERPHYSIK  
von Herrn Prof. Dr. ZEPPENFELD und Herrn Dr. im Wintersemester 2008/2009  
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.  
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an [Marco.Schreck@gmx.de](mailto:Marco.Schreck@gmx.de).



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einführung zur Colliderphysik</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2</b> | <b>Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik</b>  | <b>7</b>  |
| 2.1      | Die Quantenelektrodynamik (QED) . . . . .  | 7         |
| 2.2      | Die Quantenchromodynamik (QCD) . . . . .   | 8         |
| <b>3</b> | <b>Partonische Wirkungsquerschnitte</b>  | <b>13</b> |
| 3.1      | Beispiel: Elastische Streuung $q(p_1, i_1) + g(k_1, a_1) \rightarrow q(p_2, i_2)g(k_2, a_2)$ . . . . . | 13        |
| <b>4</b> | <b>Die elektroschwache Wechselwirkung</b>  | <b>17</b> |
| <b>5</b> | <b>Tiefinelastische Streuung</b>   | <b>23</b> |
| 5.1      | Lepton-Nukleon-Streuung . . . . .  | 23        |
| 5.2      | Elastische Elektron-Proton-Streuung . . . . .  | 24        |
| 5.3      | Inelastische Elektron-Proton-Streuung . . . . .  | 26        |
| 5.4      | Tief inelastische Streuung (DIS) im Partonmodell . . . . .   | 26        |
| 5.5      | QCD-Korrekturen zum naiven Partonmodell . . . . .  | 29        |
| 5.6      | Hadron-Hadron-Kollisionen . . . . .  | 37        |
| 5.7      | Faktorisierungstheorem . . . . .   | 38        |
| <b>6</b> | <b>Beschreibung von Hadron-Hadron-Kollisionen</b>  | <b>39</b> |
| 6.1      | W-Produktion und W-Zerfall . . . . .   | 43        |
| 6.2      | Grundlagen von Jet-Algorithmen . . . . .   | 48        |
| 6.2.1    | Das Cone-Schema . . . . .  | 49        |
| 6.2.2    | Rekombinationsalgorithmen: Inklusive $k_T$ -Algorithmen mit R-Separation . . . . .                     | 49        |
| 6.2.3    | Verfeinerung von Jet Algorithmen: $k_T$ - und JADE-Typ-Algorithmen . . . . .                           | 49        |
| 6.2.4    | Effekt einer Kontakt-Wechselwirkung . . . . .  | 51        |



# Kapitel 1

## Einführung zur Colliderphysik

Woran man als erstes denkt, sind die Hadroncollider:

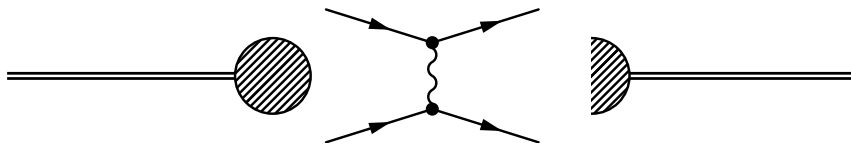
- Tevatron:  $p, \bar{p}$  bei 1,96 TeV
- LHC  $pp$ : 14 TeV

Es gibt natürlich auch andere Arten von Collidern:

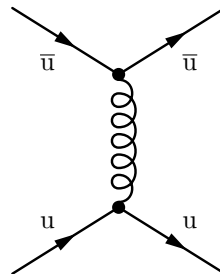
- LEP:  $e^+e^-$  bei  $\sim 200$  GeV

Der Vorteil ist, dass Elektronen und Positronen wirklich punktförmige Teilchen sind und die Energie von 200 GeV tatsächlich zur Verfügung steht. Leider ist die Energie niedriger als bei Hadronbeschleunigern. Beispielsweise konnten Top-Antitop-Paare bisher nur am Tevatron erzeugt werden.

Was bei Proton-(Anti)proton-Kollisionen passiert, ist die Streuung von Partonen.

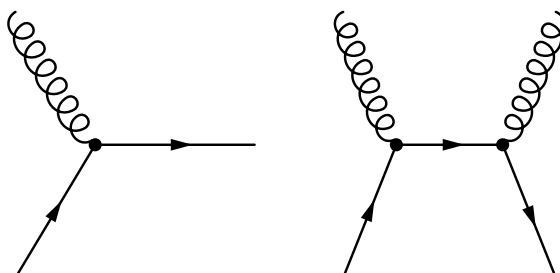


Bei hohen Energien, wo wir aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation bis zu kleinen Abständen vordringen können, handelt es sich um Kollisionen zwischen den einzelnen Partonen.

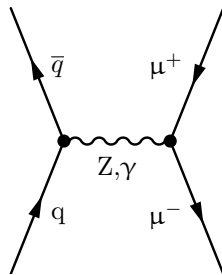


In der Realität ist ein Proton jedoch nicht nur ein Bindungszustand aus drei Quarks. Diese sogenannten Valenzquarks tragen nur etwa die Hälfte des Protonimpulses. Der Rest steckt in Gluonen und virtuellen Quark-Antiquark-Paare, die Bestandteil der Proton-Wellenfunktion sind. Insbesondere Gluonen kommen mit sehr großer Wahrscheinlichkeit vor. Bei hohen Energien, wie sie am LHC erreicht werden, ist ein Proton im Wesentlichen ein „Sack“ aus Gluonen. Im Folgenden müssen wir verstehen lernen, wie man Wahrscheinlichkeiten dafür berechnen kann, mit welchem Impuls ein einzelnes Parton im Proton anzutreffen ist. Hier werden die Partonverteilungen im Proton wichtig.

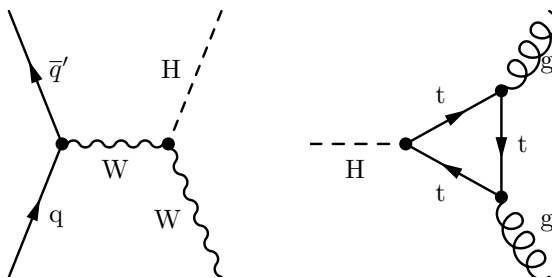
Der oben diskutierte Fall ist eine elastische Streuung zwischen einem  $u$ - und einem  $\bar{u}$ -Quark. Weiterhin gibt es auch noch Prozesse der Form



Ein anderer Prozess, der uns interessieren wird, ist die Lepton-Paar-Produktion:



Es tritt ein großer Peak auf bei der invarianten Masse des  $\mu^+ \mu^-$ -Paares bei etwa 91 GeV. Dies war der erste Hinweis für das Z-Boson. Sehr wichtig ist auch die Produktion des Higgs-Bosons:



# Kapitel 2

## Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Das Standardmodell ist eine Eichtheorie basierend auf der Eichgruppe  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Die  $SU(3)$  beschreibt die starke Wechselwirkung (QCD) und die  $SU(2) \times U(1)$  beschreibt sowohl elektromagnetische Physik (QED) als auch die schwache Wechselwirkung.

### 2.1 Die Quantenelektrodynamik (QED)

In der QED hat man es im Wesentlichen mit einer Theorie von einem einzelnen Eichboson – dem Photon – zu tun. Dies wechselwirkt mit geladenen Leptonen und Quarks.

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_{\substack{\psi=e,\mu,\tau \\ u,d,s,\dots,t}} \bar{\psi}(iD^\mu\gamma_\mu - m_\psi)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Eichfix}}, \quad (2.1)$$

mit einem Eichfixierungsterm  $\mathcal{L}_{\text{Eichfix}}$  und den Massen  $m_\psi$  der Felder  $\psi$ . In der kovarianten Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu + iq_\psi e A^\mu, \quad (2.2)$$

steckt die Wechselwirkung der Felder.  $q_\psi$  sind die Ladungen der Felder  $\psi$  in Einheiten der Elementarladung  $e$ . Hierbei gilt  $q_\psi = -1$  für  $e^-$ ,  $\mu^-$ ,  $\tau^-$ ,  $q_\psi = 2/3$  für  $u$ ,  $c$ ,  $t$  und  $q_\psi = -1/3$  für  $d$ ,  $s$ ,  $b$ .  $F_{\mu\nu}$  ist der Feldstärketensor:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.3)$$

Der Wechselwirkungsterm mit dem Photonfeld  $A^\mu$  muss störungstheoretisch behandelt werden. Dies liefert

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_\psi \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \sum_\psi (-q_\psi e)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.4)$$

Die quadratischen Terme schlagen sich nieder in den Propagatoren. Die Terme mit mehr als drei Felder an einem Punkt geben die Vertizes der Feynman-Regeln. Eine Ebene-Wellen-Zerlegung für die  $\psi$

$$\psi(x) \sim \exp(-ip \cdot x)b(p)u(p), \quad (2.5)$$

liefert für den ersten Term  $i\not{\partial} - m \mapsto \not{p} - m$ . Der Fermionpropagator ist das Inverse dieser Matrix:

$$j \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \longrightarrow \\ \bullet \end{array} \xrightarrow{p} \bullet i : \quad \left( \frac{i}{\not{p} - m_\psi + i\epsilon} \right)_{ij}$$

Der zweite Summand liefert durch partielle Integration

$$\frac{1}{2}A_\nu \left( \partial_\mu \partial^\mu g^{\nu\alpha} - \partial^\nu \partial^\alpha + \frac{1}{\xi} \partial^\nu \partial^\alpha \right) A_\alpha, \quad (2.6)$$

was im Impulsraum

$$-k^2 g^{\nu\alpha} + k^\nu k^\alpha \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right), \quad (2.7)$$

lautet. Die Inverse dieser Matrix ist der Photonpropagator:

$$\mu \text{ --- } \text{wavy line} \text{ --- } \nu : \quad \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right)$$

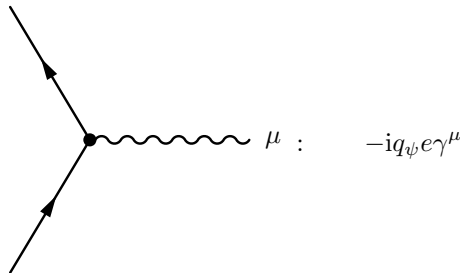
Der Faktor  $-i$  ist Konvention (je nachdem, wie man die Faktor  $i$  auf Propagatoren und Vertizes verteilt). Wir hatten gesehen, dass die S-Matrix geschrieben werden kann in der Form

$$S = T \exp \left( i \int d^4z \mathcal{L}_I(z) \right), \tag{2.8}$$

wobei  $\mathcal{L}_I(z)$  die Wechselwirkungs-Lagrangedichte ist. Im LSZ-Formalismus muss man im Wesentlichen  $\mathcal{L}_I$  mit äußeren Feldern  $\psi(x_1)$ ,  $\bar{\psi}(x_2)$  und  $A_\mu(x_3)$  kombinieren:

$$\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)A_\mu(x_3)i\mathcal{L}_I(z), \quad \mathcal{L}_I(z) = -iq_\psi e\bar{\psi}(z)\gamma^\alpha\psi(z)A_\alpha(z). \tag{2.9}$$

Felder, die doppelt auftreten, führen zu Zweipunktfunktionen, also den Propagatoren. Der Rest ergibt die Feynmanregel für den Vertex:



## 2.2 Die Quantenchromodynamik (QCD)

Die Eichgruppe ist hier die  $SU(3)$ .

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{\substack{\Psi=u,d,s \\ c,b,t}} \bar{\Psi}(i\not{D} - m_\Psi)\Psi + \mathcal{L}_{\text{Eich}}, \tag{2.10}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a. \tag{2.11}$$

Die  $T^a$  sind die Generatoren der irreduziblen Darstellung, in der Felder  $\Psi$  leben. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{2.12}$$

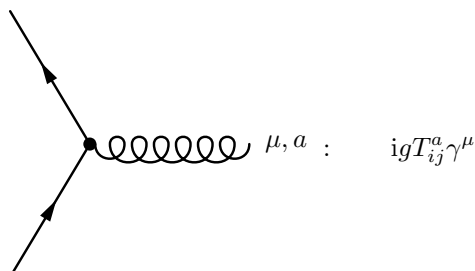
wobei die  $f^{abc}$  als Strukturkonstanten der  $SU(3)$  bezeichnet werden. Aus dem Experiment folgt, dass die bekannten Quarks in der fundamentalen Darstellung der  $SU(3)$  leben, also Triplets bilden bezüglich der Farbe:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}, \quad T_{ij}^a = \frac{\lambda_{ij}^a}{2}. \tag{2.13}$$

Der Wechselwirkungsterm für die Quarks ist gegeben durch

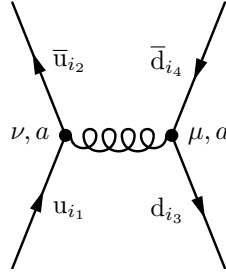
$$i\mathcal{L}_{q\bar{q}g}(z) = i\bar{\psi}(z)gT_{ij}^a\gamma^\mu\psi(z)A_\mu^a(z). \tag{2.14}$$

Daraus können wir den qqq-Vertex ablesen:



Betrachten wir als Beispiel folgendes Diagramm:





$$\bar{u}(p_3)igT_{i_3i_4}^a\gamma^\mu v(p_4)\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1+p_2)^2+i\epsilon}\right)\bar{v}(p_2)igT_{i_2i_4}^a\gamma^\nu u(p_1). \quad (2.15)$$

Man benötigt dann die Vollständigkeitsrelation der Generatoren. In der fundamentalen Darstellung der  $SU(N)$  lautet diese

$$\frac{\lambda_{ij}^a}{2}\frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right). \quad (2.16)$$

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes muss man über die einlaufenden Farben mitteln und über die auslaufenden summieren. Dies führt bei drei Farben zu einem Faktor  $1/9$  zusätzlich zu dem Faktor  $1/4$  von der Mittelung über die einlaufenden Spins.

Die Lagrangedichte für den klassischen Eichsektor ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{eich,kl}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}. \quad (2.17)$$

$F^{\mu\nu}$  kann in einer beliebigen Darstellung ausgedrückt werden durch Kommutatoren aus kovarianten Ableitungen:

$$F^{\mu\nu} = F^{a,\mu\nu}T^a = \frac{1}{g}[D^\mu, D^\nu], \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.18)$$

Dasselbe Eichfeld funktioniert für alle Darstellungen der Eichgruppe. Die Gluonen selbst transformieren sich unter der Oktett-Darstellung der  $SU(3)$  und nicht unter der fundamentalen Darstellung. Für die Quantisierung benötigt man zusätzlich einen Eichfixierungsterm:

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^{\text{quant.}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu,a}). \quad (2.19)$$

Die Eichfixierung bricht die Eichsymmetrie auf die Weise, dass es inkonsistente Ergebnisse gibt. Um die Variable zu fixieren, muss man eine Variablentransformation im Pfadintegralformalismus machen. Bei zusätzlich auftretende Jacobi-Determinante muss parametrisiert werden und dies geschieht sehr geschickt mittels der sogenannten Geistfelder. Der entsprechende Geistfeldterm für die QCD lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = -\bar{\eta}^a \partial^\mu D_\mu^{ab} \eta^b. \quad (2.20)$$

Dabei handelt es sich um unphysikalische Felder. Die erfüllen die Antivertauschungsrelation, besitzen jedoch keinen Spin! Die Felder  $\eta^a$  leben in der adjungierten Darstellung analog zu den Gluonfeldern.

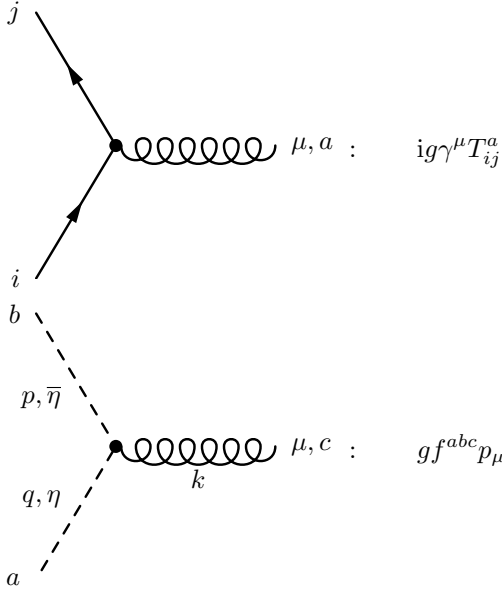
Mittels partieller Integration (unter Weglassen von Oberflächentermen) folgt für die Lagrangedichte der QCD:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & \frac{1}{2}A_\mu^a[\square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu + \frac{1}{\xi}\partial^\mu \partial^\nu]A_\nu^a - \bar{\eta}^a \square \eta^a + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu,a} \\ & - \frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu,d} A^{\nu,e} - gf^{abc}(\partial^\mu \bar{\eta}^a \eta^b A_\mu^c + g\bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi A_\mu^a). \end{aligned} \quad (2.21)$$

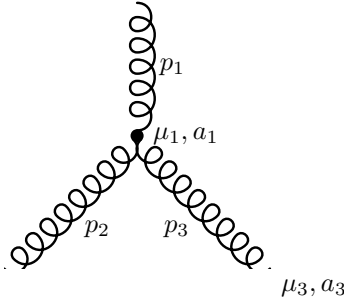
Kommen wir also zu den Feynman-Regeln der QCD. Die Propagatoren sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mu, a \text{ --- } \text{wavy line} \text{ --- } \nu, b & : \quad \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} \\ a \text{ --- } \text{dashed line} \text{ --- } b & : \quad \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \\ i \text{ --- } \text{dashed line} \text{ --- } j & : \quad \frac{i}{\not{p} - m} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Und nun zu den Vertizes:



Zur Herleitung des 3-Gluon-Vertex betrachten wir:



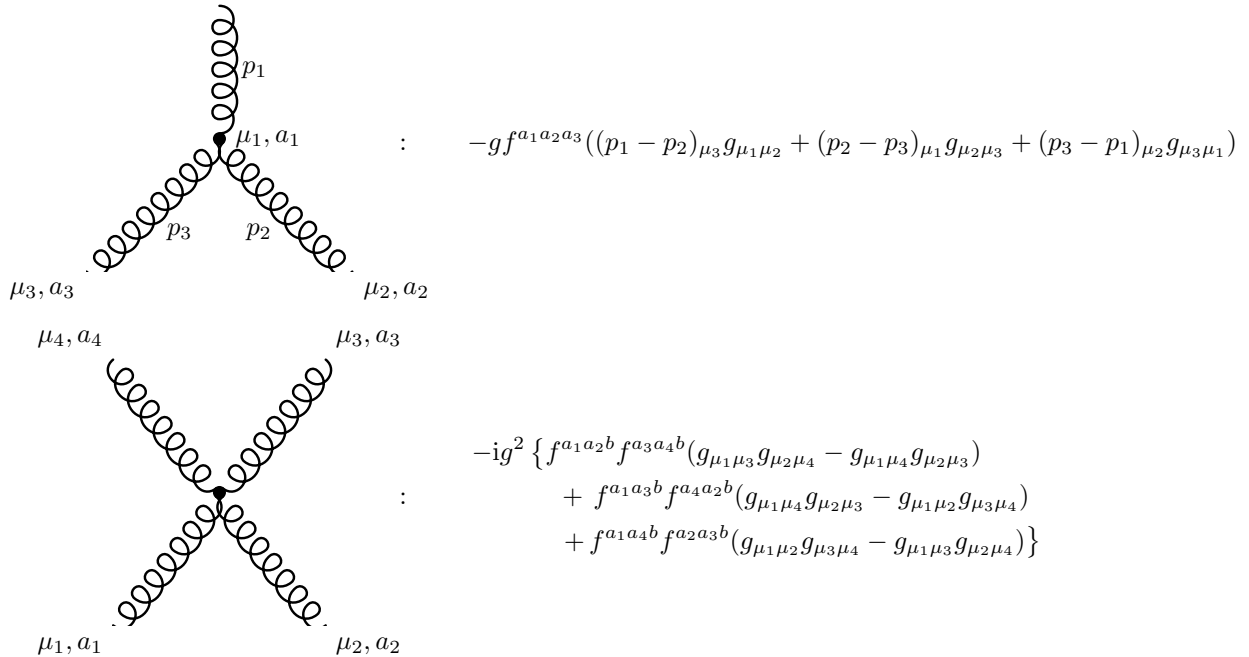
Alle Impulse seien als auslaufend gewählt.

$$[-igf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu,a}] A^{a_1} \cdot \varepsilon_1 A^{a_2} \cdot \varepsilon_2 A^{a_3} \cdot \varepsilon_3. \quad (2.22)$$

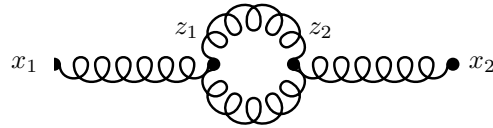
In der Wick-Entwicklung müssen wir alle möglichen Kontraktionen bilden mit den äußeren Feldern. Wick-Kontraktion:

$$A_\mu^b A_{\mu_1}^{a_1} \varepsilon_1^{\mu_1} \sim \delta^{ba_1} g_{\mu\mu_1} \varepsilon_1^{\mu_1}. \quad (2.23)$$

$$-igf^{a_3 a_1 a_2} i p_{3,\mu} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 - igf^{a_3 a_2 a_1} i p_{2,\mu_1} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 = gf^{a_1 a_2 a_3} ((p_3 - p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + \text{zyklisch}) \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \varepsilon_3^{\mu_3}. \quad (2.24)$$



Zur Vorsicht: In der QCD müssen (im Gegensatz zur QED) Zählerfaktoren beachtet werden! In der QED heben sich die  $1/n!$ -Faktoren von der Entwicklung der zweigeordneten Exponentialfunktion der Dyson-Reihe mit der Anzahl der möglichen Kontraktionen weg. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:



Dieser Graph entspricht Termen der Art  $A(x_1)A^3(z_1)A^3(z_2)A(x_2)$ . Führen wir nun die Wick-Kontraktion durch. Eine Kontraktion von  $A(x_1)$  mit  $A(z_1)$  liefert drei Kontraktionen, ebenso bei  $A(z_2)$  mit  $A(x_2)$ . Von  $A(z_1)$  und  $A(z_2)$  sind zwei weitere Kontraktionen möglich. Dies führt insgesamt auf  $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$  Wick-Kontraktionen. Die Feynman-Regel selbst liefert jedoch  $6 \cdot 6 = 36$  Terme, doppelt so viele wie es Wick-Kontraktionen gibt. Somit muss dieses Diagramm mit einem Zählerfaktor  $1/2$  multipliziert werden! Falsche Zählerfaktoren manifestieren darin, dass ein Ergebnis nicht eichinvariant ist.



# Kapitel 3

## Partonische Wirkungsquerschnitte

Wir betrachten einen Streuprozess  $a(p_a) + b(p_b) \rightarrow c_1(p_1) + c_2(p_2) + \dots + c_n(p_n)$ .

$$d\sigma = \frac{1}{2s} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 d\phi_n(p_a + p_b; p_1, \dots, p_n) S_n, \quad (3.1)$$

wobei das Phasenraumelement gegeben ist durch

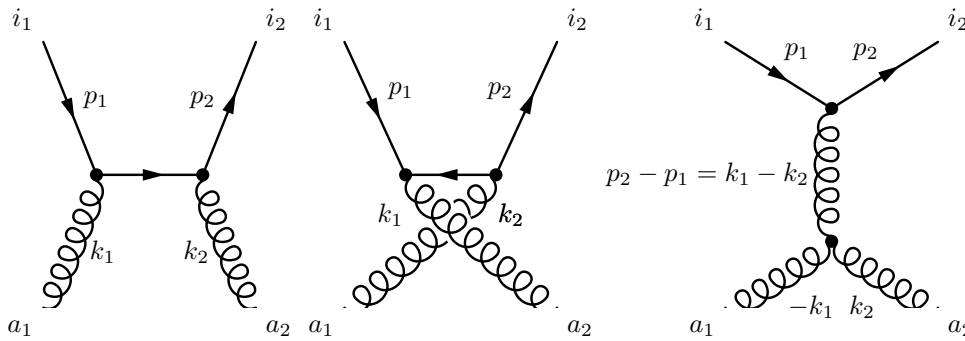
$$d\phi_n = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_a + p_b - \sum_{i=1}^n p_i \right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j}. \quad (3.2)$$

$S_n$  ist ein Symmetriefaktor, der  $1/k!$  für jeden Satz von  $k$  identischen Teilchen liefert.  $1/(2s)$  ist der Flussfaktor:

$$\frac{1}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} \stackrel{m_a=m_b=0}{=} \frac{1}{4p_a p_b} = \frac{1}{2(p_a + p_b)^2} = \frac{1}{2s}, \quad (3.3)$$

wobei wir die Masse der Strahteilchen vernachlässigt haben, was bei Hadronbeschleunigern möglich ist. (Auch das Partonmodell funktioniert nur richtig, wenn man die Massen der Teilchen vernachlässigt). Symbolisch steht  $\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2$  für den Durchschnitt über einlaufende Farben/Spins und die Summe über auslaufende Farben/Spins (unpolarisierte und farbsummierte Wirkungsquerschnitte).

### 3.1 Beispiel: Elastische Streuung $q(p_1, i_1) + g(k_1, a_1) \rightarrow q(p_2, i_2) g(k_2, a_2)$



Aus den Feynmanregeln folgt:

$$i\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p_2) i g \not{\epsilon}_2 T_{i_2 i_1}^{a_2} \frac{i}{\not{p}_1 + \not{k}_1} i g \not{\epsilon}_1 T_{i_1 i_1}^{a_1} u(p_1), \quad (3.4)$$

und damit

$$\mathcal{M}_1 = -g^2 (T^{a_2} T^{a_1})_{i_2 i_1} A_1, \quad A_1 = \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}_2 \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_1} \not{\epsilon}_1 u(p_1). \quad (3.5)$$

Analog gilt

$$\mathcal{M}_2 = -g^2 (T^{a_1} T^{a_2})_{i_2 i_1} A_2, \quad A_2 = \bar{u}(p_2) \not{\epsilon}_1 \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_2} \not{\epsilon}_2 u(p_1). \quad (3.6)$$

Wirklich neu in der QCD ist der Beitrag des dritten Diagrams aufgrund der nichtabelschen Wechselwirkung:

$$i\mathcal{M}_3 = \bar{u}(p_2)igT_{i_2i_1}^b\gamma^\mu u(p_1)\frac{-i}{(p_2-p_1)^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{(p_2-p_1)_\mu(p_2-p_1)_\nu}{(p_2-p_1)^2}\right]\times \\ \times (-g)f^{a_1a_2b}\{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(-k_1-k_2)^\nu + \varepsilon_2^\nu(k_2-p_2+p_1)\cdot\varepsilon_1 + \varepsilon_1^\nu(p_2-p_1+k_1)\cdot\varepsilon_2\}. \quad (3.7)$$

Das Ergebnis ist

$$\mathcal{M}_3 = ig^2f^{a_1a_2b}T_{i_2i_1}^b(-A_3), \quad (3.8)$$

mit

$$(-A_3) = \bar{u}(p_2)\gamma_\nu u(p_1)\frac{1}{(p_2-p_1)^2}\{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2(-k_1-k_2)^\nu + \varepsilon_2^\nu(k_2-p_2+p_1)\cdot\varepsilon_1 + \varepsilon_1^\nu(p_2-p_1+k_1)\cdot\varepsilon_2\}. \quad (3.9)$$

Hier kann man außerdem  $ig^2f^{a_1a_2b}T_{i_2i_1}^b = g^2[T^{a_1}, T^{a_2}]_{i_2i_1}$  schreiben.

Das gesamte Matrixelement ist somit gegeben durch:

$$\mathcal{M} = -g^2A_1(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1} - g^2A_2(T^{a_1}T^{a_2})_{i_2i_1} - g^2A_3[T^{a_1}, T^{a_2}]_{i_2i_1} = \\ = -g^2\{(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}(A_1 - A_3) + (T^{a_1}T^{a_2})_{i_2i_1}(A_2 + A_3)\} = \mathcal{M}(a_1, a_2, i_1, i_2; \lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2), \quad (3.10)$$

mit den Polarisierungen  $\lambda_i$  der Gluonen und den Spins  $\sigma_i$  der Quarks. Für eine  $SU(N)$ -Eichtheorie gilt:

$$\overline{\sum_{\substack{\text{Farbe} \\ \text{Spin}}}|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{d_F(N^2-1)}\frac{1}{4}\sum_{\substack{i_1, i_2, a_1, a_2 \\ \lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2}}, \quad (3.11)$$

wobei  $d_F$  die Dimension der Quark-Darstellung im Farbraum ist. In der QCD gilt  $d_F = N = 3$ .

$$\overline{\sum|\mathcal{M}|^2} = \frac{g^4}{4d_F(N^2-1)}\sum_{\substack{\text{Spins} \\ a_1, a_2}}\sum_{i_1, i_2}|(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}(A_1 - A_3) + (T^{a_1}T^{a_2})_{i_2i_1}(A_2 + A_3)|^2. \quad (3.12)$$

Schauen wir uns die drei verschiedenen Farbsummen an, die hier auftreten. Zur ersten:

$$\sum_{i_1, i_2, a_1, a_2}(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}^* = \sum_{i_1, i_2, a_1, a_2}(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}(T^{a_2}T^{a_1})_{i_1i_2}^\dagger = \\ = \sum_{i_1, i_2, a_1, a_2}(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}(T^{a_1}T^{a_2})_{i_1i_2} = \text{Sp}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_1}T^{a_2}). \quad (3.13)$$

Benutzen wir, dass  $T^aT^a$  ein Casimir-Operator ist, also  $T^aT^a = C_F\mathbb{1}$ , so ergibt sich:

$$\text{Sp}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_1}T^{a_2}) = C_F^2\text{Sp}(\mathbb{1}) = C_F^2d_F. \quad (3.14)$$

Für die fundamentale Darstellung der  $SU(N)$  gilt

$$C_F = \frac{N^2-1}{2N}. \quad (3.15)$$

Dies folgt aus

$$\frac{\lambda_{ij}^a}{2}\frac{\lambda_{jk}^a}{2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{jk}\right) = \delta_{ik}\frac{1}{2}\left(N - \frac{1}{N}\right). \quad (3.16)$$

Die zweite Farbsumme ergibt dasselbe Ergebnis. Schauen wir uns nun den Kreuzterm an:

$$(T^{a_2}T^{a_1})_{i_2i_1}(T^{a_1}T^{a_2})_{i_2i_1}^* = \text{Sp}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_2}T^{a_1}). \quad (3.17)$$

Hier tritt die folgende Struktur von Farbmatriizen auf:

$$T^aT^bT^a = T^aT^aT^b - T^a[T^bT^a] = C_FT^b + if^{bac}T^aT^c = C_FT^b + if^{bac}\left(\frac{1}{2}[T^a, T^b] + \frac{1}{2}\{T^a, T^b\}\right) = \\ = C_FT^b + \frac{1}{2}if^{bac}if^{acd}T^d = C_FT^b + \frac{1}{2}(-if^{abc})(-if^{acd})(-1) = C_FT^b - \frac{1}{2}(F^a)_{bc}(F^a)_{cd} = \\ = C_FT^b - \frac{1}{2}(F^a)_{bc}(F^a)_{cd} = C_FT^b - \frac{1}{2}(F^aF^a)_{bc} = \left(C_F - \frac{1}{2}C_A\right)T^b. \quad (3.18)$$

$C_A$  ist der Casimir-Operator in der adjungierten Darstellung einer beliebigen nicht-abelschen Gruppe. Speziell in der  $SU(N)$  gilt  $C_A = N$ . Damit folgt:

$$\text{Sp}(T^{a_2} T^{a_1} T^{a_2} T^{a_1}) = d_F C_F \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right), \quad (3.19)$$

und für  $d_F = N$  gilt:

$$C_F - \frac{1}{2} C_A = \frac{N^2 - 1}{2N} - \frac{N}{2} = -\frac{1}{2N} = -\frac{C_F}{N^2 - 1}. \quad (3.20)$$

Für die Quark-Gluon-Streuung gilt somit

$$\begin{aligned} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^4}{d_F(N^2 - 1)} \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \left\{ (|A_1 - A_3|^2 + |A_2 + A_3|^2) C_F^2 d_F \right\} \\ &\quad + 2\text{Re}(A_1 - A_3)(A_2 + A_3)^* d_F C_F \left( C_F - \frac{1}{2} C_A \right) \Big\} = \\ &= \frac{g^4 C_F^2}{N^2 - 1} \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} \left\{ |A_1 - A_3|^2 + |A_2 + A_3|^2 + 2\text{Re}(A_1 - A_3)(A_2 + A_3)^* \left( 1 - \frac{C_A}{2C_F} \right) \right\}, \quad (3.21) \end{aligned}$$

mit

$$1 - \frac{C_A}{2C_F} = -\frac{1}{N^2 - 1}. \quad (3.22)$$

Im Limes großer Darstellungen ( $(N \mapsto \infty)$ -Limes) sind gewisse Terme (in diesem Fall der Interferenzterm) oft unterdrückt. Eine Beschreibung von Streuprozessen von Protonen als Streuprozesse quasifreier Partonen funktioniert wegen der asymptotischen Freiheit bei großen Energien.





# Kapitel 4

## Die elektroschwache Wechselwirkung

Die zugehörige Eichgruppe ist die  $SU(2) \times U(1)$ . Materiefelder:

- 6 Quarks:  $(u, d)$ ,  $(c, s)$ ,  $(t, b)$
- 6 Leptonen:  $(\nu_e, e)$ ,  $(\nu_\mu, \mu)$ ,  $(\nu_\tau, \tau)$

Aus der Paritätsverletzung folgt, dass nur die linkshändigen Felder  $\psi_L$  an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen. Die Wechselwirkung ist vollständig festgelegt durch die irreduzible Darstellung der Materiefelder. Schauen wir uns das Ganze für die drei Eichgruppen  $SU(3)$ ,  $SU(2)$  und  $U(1)_Y$  ( $Y$ : Hyperladung) an. Definiere die Hyperladung so, dass  $Q_{el} = T_3 + Y$ .

|                        | SU(3) | SU(2) | U(1) <sub>Y</sub> |
|------------------------|-------|-------|-------------------|
| $Q_L = (u_L, d_L)$     | 3     | 2     | 1/6               |
| $u_R$                  | 3     | 1     | 2/3               |
| $d_R$                  | 3     | 1     | -1/3              |
| $L = (\nu_{e,L}, e_L)$ | 1     | 2     | -1/2              |
| $e_R$                  | 1     | 1     | -1                |
| $\nu_R$                | 1     | 1     | 0                 |
| $\phi$                 | 1     | 2     | 1/2               |

Indizes werden oft unterdrückt. Beispiel mit Indizes:  $Q_{\alpha,c,i,g}$  mit Spinorindex  $\alpha = 1, \dots, 4$ ; Farbindex  $c = 1, 2, 3$ ; Isospinindex  $i = 1, 2$  und Generationenindex  $g = 1, 2, 3$ .

$$\not{d}Q_L \stackrel{\wedge}{=} \not{d}_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \right)_{\beta\gamma} (Q_L)_{\gamma,c,i}, \quad T^a Q_L \stackrel{\wedge}{=} T_{c_1 c_2}^a (Q_L)_{\alpha,c_2,i}. \quad (4.1)$$

Damit ist es uns möglich, die Lagrangedichte für die Materiefelder auszudrücken durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s T^a G_\mu^a - ig_1 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig' Y B_\mu, \quad (4.2)$$

mit den  $SU(3)$ -,  $SU(2)$ - und  $U(1)_Y$ -Eichfeldern  $G_\mu^a$ ,  $W_\mu^i$  und  $B_\mu$ .

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \sum_\psi \bar{\psi} i \not{D} \psi, \quad (4.3)$$

wobei die Summe über  $\psi = Q_L, d_R, u_R, L, e_R, \nu_R$  (3 Generationen) läuft. Auf diesem Niveau können wir keine Fermionmassenterme  $m\bar{\psi}\psi$  einführen. Der Grund ist folgender:

$$m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi} \left\{ \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5) + \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \right\} \psi = m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L). \quad (4.4)$$

Die Quantenzahlen für die links- und rechtshändigen Felder sind unterschiedlich und brechen die Eichinvarianz explizit. (Es können mit den obigen Quantenzahlen keine Singulets unter  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$  konstruiert werden.) Der Eichsektor wird beschrieben durch

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W^{i,\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} G^{a,\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \mathcal{L}_{\text{Eichfixierung}} + \mathcal{L}_{\text{Geist}}. \quad (4.5)$$

Die  $W_\mu^i$  und  $B_\mu$  mischen und bilden die physikalischen W- und Z-Bosonen und das Photon nach der spontanen Symmetriebrechung, für die das Higgsfeld benötigt wird:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2}. \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \lambda \left( \phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (4.7)$$

Das Pluszeichen soll bedeuten dass die obere Komponente positiv geladen sein soll. Die untere Komponente soll keine Ladung tragen. Aus  $Q = T_3 + Y$  folgt, dass  $Y = 1/2$  sein muss. Die Quantenzahlen legen die kovariante Ableitung fest:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig' \frac{1}{2} B_\mu. \quad (4.8)$$

Damit können wir die Lagrangedichte für dieses skalare Dublettfeld aufschreiben. Das Potential soll invariant sein unter Eichtransformationen  $\phi(x) \mapsto U(x)\phi(x)$ .

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \lambda \left( \phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2. \quad (4.9)$$

Wenn die Theorie renormierbar sein soll, dann sind das erst einmal alle Terme, die man hinschreiben kann. Man kann noch nicht-renormierbare Terme hinzufügen, wie beispielsweise  $\sim 1/M^2 (\phi^\dagger \phi)^3$ . Bei Impulsen von der Größenordnung des Massenparameters  $M$  treten dann jedoch Schwierigkeiten mit der Unitarität auf. Phänomenologisch können sich solche zusätzlichen Terme durch ihren Einfluss auf den Wirkungsquerschnitt eines Prozesses äußern. Das Problem ist, dass bei Impulsen der Größenordnung des Massenparameters alle Terme dieser Reihe relevant werden und man unendlich viele Parameter bräuchte, um die Theorie zu beschreiben. Wir werden solche nicht-renormierbaren Terme deshalb zunächst nicht weiter betrachten. Die Symmetrie wird durch den Vakuumerwartungswert spontan gebrochen. Im Folgenden betrachtet man Quantenfluktuationen um den Vakuumerwartungswert, der gegeben ist durch:

$$\phi^\dagger \phi = \frac{v^2}{2} \Rightarrow \phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Der allgemeine Ausdruck wäre

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ (v + H + i\phi_3)/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

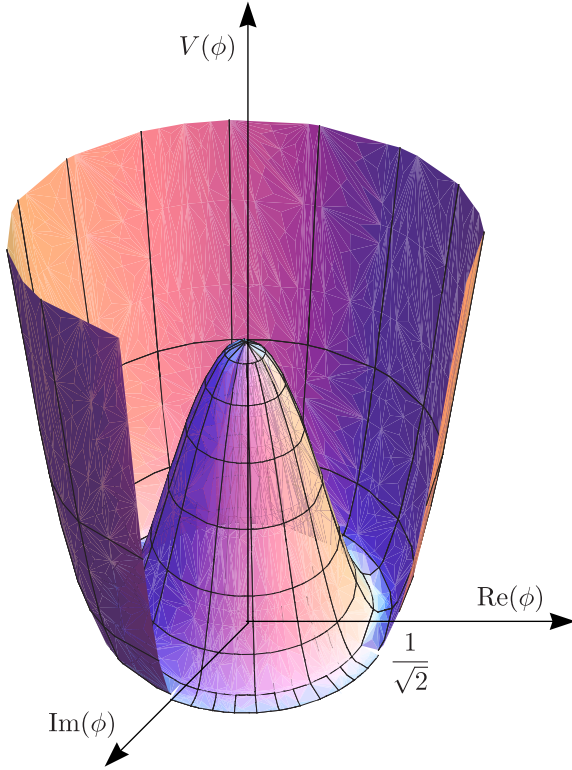
Wir benutzen jedoch die einfachere Darstellung (4.10). Man kann  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  und  $\phi_3$  in Polarkoordinaten der  $SU(2)$  transformieren und  $\phi(x)$  wie folgt parametrisieren:

$$\phi(x) = \exp\left(i \frac{\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\tau}}{v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ (v + H(x))/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Dies entspricht jedoch gerade einer Eichtransformation und man spricht von der unitären Eichung:

$$U(x) = \exp\left(i \frac{\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\tau}}{v}\right). \quad (4.13)$$

Der exponentielle Vorfaktor in (4.12) entspricht also einer Eichtransformation und lässt sich durch eine geeignete Eichwahl absorbieren. Ebenso sind verschiedene Punkte des Grundzustands durch eine Eichtransformation miteinander verbunden.



Wie erhalten nun die W- und Z-Bosonen Masse? Schauen wir uns dazu erneut die kovariante Ableitung an:

$$\begin{aligned}
 D_\mu \phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \partial_\mu H \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{ig'}{2} B_\mu \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \partial_\mu H \end{pmatrix} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(W_\mu^2 - iW_\mu^1)v \\ (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)v \end{pmatrix} \left( 1 + \frac{H}{v} \right). \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Kommen wir zur kinetischen Energie:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{8} \{ (gv)^2 (W_\mu^1 + iW_\mu^2)(W^{1,\mu} - iW^{2,\mu}) \\
 &\quad + (-g'B_\mu + gW_\mu^3)(-g'B^\mu + gW^{3,\mu}) \} \left( 1 + \frac{H}{v} \right). \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Setze

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \quad (4.16)$$

womit aus dem ersten Term in der Klammer der Massenterm für die physikalischen  $W^\pm$ -Bosonen folgt. Die kinetische Energie für die Felder  $W_\mu^i$  und  $B_\mu$  wird beschrieben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^{\text{kin}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_\mu^3 W^{3,\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu\nu}. \quad (4.17)$$

Die Masse des Z-Bosons kommt aus

$$gW_\mu^3 - g'B_\mu = NZ_\mu, \quad (4.18)$$

mit einer noch zu bestimmenden Normierungskonstanten  $N$ .  $N$  muss nun so gewählt werden, dass man  $gW_\mu^3 - g'B_\mu$  als orthogonale Transformation schreiben kann. Genau dann gibt es in  $\mathcal{L}_{\text{Eich}}^{\text{kin}}$  keine Mischterme. Damit lautet die Transformation:

$$Z_\mu = \cos \theta_w W_\mu^3 - \sin \theta_w B^\mu, \quad (4.19a)$$

$$A_\mu = \sin \theta_w W_\mu^3 + \cos \theta_w B^\mu, \quad (4.19b)$$

mit

$$\cos \theta_w = \frac{g}{N} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (4.20)$$

Man bezeichnet  $\theta_w$  als schwachen Mischungswinkel oder auch Weinberg-Winkel. Damit lautet schließlich der kinetische Term des Higgsfeldes:

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \left\{ \left( \frac{gv}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-,\mu} + \frac{1}{2} \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} Z_\mu Z^\mu \right\} \left( 1 + \frac{H}{v} \right)^2 = \mathcal{L}_\phi^{\text{Masse}}. \quad (4.21)$$

Die quadratischen Terme in den Feldern sind Massenterme und deren Koeffizienten sind die Massen der physikalischen W- und Z-Bosonen:

$$m_W = \frac{gv}{2} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2} = \cos \theta_w m_Z, \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2}. \quad (4.22)$$

Das  $A_\mu$ -Feld bleibt masselos, wird also mit dem physikalischen Photon identifiziert. Die W- und die Z-Masse hängen also zusammen, wobei die W-Masse um einen Faktor kleiner ist. Dieser Faktor folgt aus den Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$ . Durch die orthogonale Transformation mit  $\sin \theta_w$  ergibt sich folgender kinetischer Anteil für den Eichsektor:

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^{\text{kin}} = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu\nu}. \quad (4.23)$$

Dieser hat kanonische Form. In der unitären Eichung verschwinden die Pseudo-Goldstonebosonen, was der Tatsache entspricht, dass die von den massiven Eichbosonen als dritter Polarisationsfreiheitsgrad benötigt werden. Für die Massenterme der W- und Z-Bosonen wird nur der  $H/v$ -Term benötigt. Je nach Eichfixierung bekommen  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  und  $\phi_3$  Massenterme. Diese sind jedoch von der Eichung abhängig, während es die Massenterme der W- und Z-Bosonen natürlich nicht sind. Daran erkennt man, dass die Pseudo-Goldstonebosonen keine physikalischen Teilchen sein können. Im Wesentlichen wählt man durch die Eichtransformation eine bestimmte Richtung im  $SU(2)$ -Raum. Für andere Richtungen wird das Photon eine Linearkombination aller Komponenten der  $W^i$  sein.

Aus Messungen (LEP, Tevatron) lassen sich folgende Werte extrahieren:

$$m_Z = 91,188 \pm 0,002 \text{ GeV}, \quad m_W = 80,40 \pm 0,03 \text{ GeV}. \quad (4.24)$$

Hieraus folgt der Weinberg-Winkel:

$$\sin^2 \theta_w = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} = 0,222. \quad (4.25)$$

Wird die Messung über Kopplungen realisiert und radiative Korrekturen berücksichtigt, so ergibt sich

$$\sin^2 \theta_w = 0,231, \quad (4.26)$$

wobei man bei radiativen Korrekturen zwischen den verschiedenen Definitionen des Weinberg-Winkels unterscheiden muss.

Im nächsten Schritt geht es um die Kopplung an Fermionen. Wir wollen die kovariante Ableitung allgemeiner beschreiben und müssen dabei berücksichtigen, ob es sich bei den Fermionen um Dubletts oder Singulets bezüglich der  $SU(2)$  handelt. Wir behandeln im Folgenden Dubletts:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig' Y B_\mu = \partial_\mu - i \begin{pmatrix} g^2/2W_\mu^3 + g'YB_\mu & g/\sqrt{2}W_\mu^+ \\ g/\sqrt{2}W_\mu^- & -g/2W_\mu^3 + g'YB_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Diagonalterme führen zu  $\bar{u}_L \gamma^\mu X_\mu u_L$ ,  $\bar{e}_L \gamma^\mu X_\mu e_L$  usw. Wir setzen die orthogonale Rücktransformation in den ersten Diagonalterm ein und erhalten:

$$\begin{aligned} gT_3 W_\mu^3 + g'Y B_\mu &= gT_3 (\cos \theta_w Z_\mu + \sin \theta_w A_\mu) + g'Y (\cos \theta_w A_\mu - \sin \theta_w Z_\mu) = \\ &= A_\mu (gT_3 \sin \theta_w + g'Y \cos \theta_w) + Z_\mu (gT_3 \cos \theta_w - g'Y \sin \theta_w). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Wegen

$$g \sin \theta_w = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cos \theta_w = e > 0, \quad (4.29)$$

was man als Elementarladung  $e$  identifiziert, folgt zum ersten die Wechselwirkung für die Photonen:

$$A_\mu e(T_3 + Y) = A_\mu eQ, \quad (4.30)$$

wobei  $Q = T_3 + Y$  die Ladung des Fermions ist. Die Beziehung

$$\boxed{Q = T_3 + Y}, \quad (4.31)$$

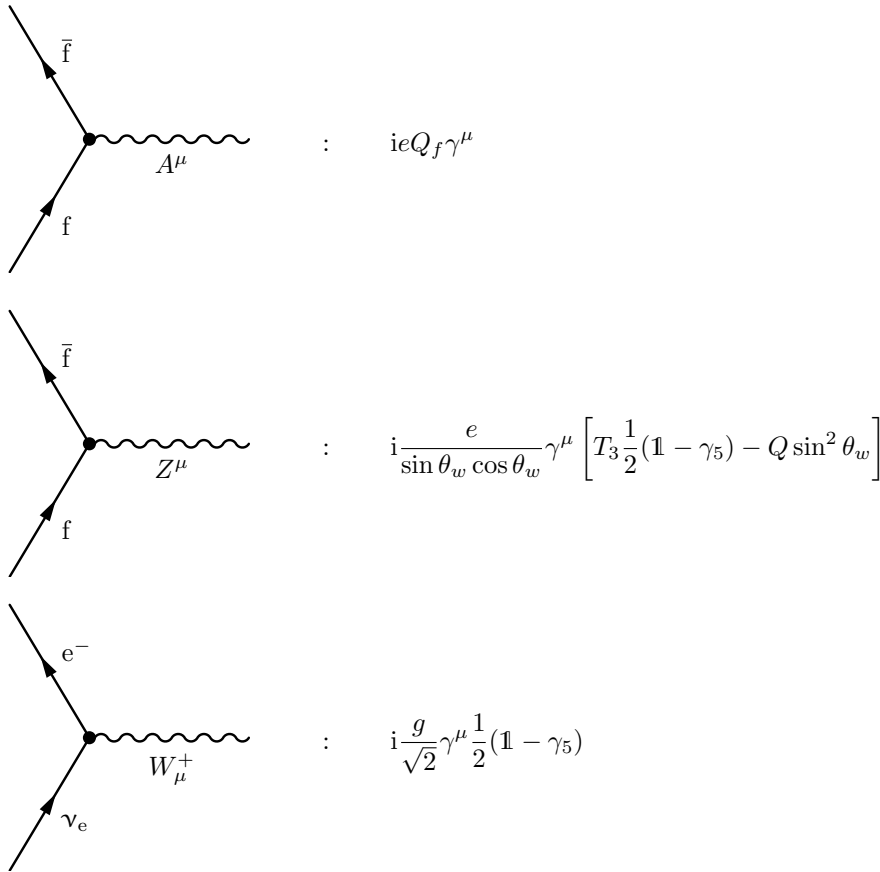
definiert als die Ladung. In der Z-Kopplung setzen wir  $Y = Q - T_3$  und des Weiteren

$$g = \frac{e}{\sin \theta_w}, \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_w}, \quad (4.32)$$

so dass letztendlich folgt:

$$eT_3 \left( \frac{\cos \theta_w}{\sin \theta_w} + \frac{\sin \theta_w}{\cos \theta_w} \right) - eQ \frac{\sin \theta_w}{\cos \theta_w} = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w} [T_3 - Q \sin^2 \theta_w]. \quad (4.33)$$

Für Singulets ergibt sich das analoge Ergebnis, aber mit  $T_3 = 0$ . An dieser Stelle lassen sich die Feynmanregeln gewinnen:



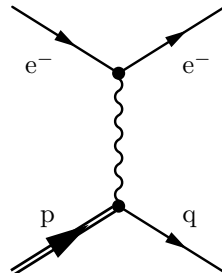
W-Bosonen koppeln nur an linkshändige Teilchen. Z-Bosonen koppeln unterschiedlich an links- und rechtshändige Fermionen; bei Photonen ist die Kopplung gleich.



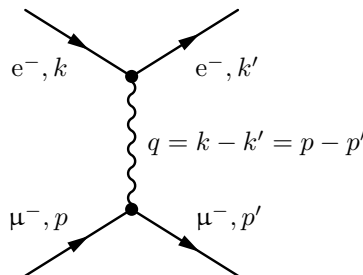
# Kapitel 5

## Tiefinelastische Streuung

### 5.1 Lepton-Nukleon-Streuung



Da dies ein sehr komplizierter Prozess ist, wollen wir der Einfachheit halber die Streuung von Elektronen an Myonen betrachten, also  $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ .



Wir werden zunächst nur Photon-Austausch betrachten. (Für einen großen Anteil der Information über die innere Struktur eines Protons ist der Z-Austausch nicht relevant.) Die Amplitude dieses Prozesses ist gegeben durch

$$\mathcal{M} = e^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \frac{1}{q^2} \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p). \quad (5.1)$$

Wir vernachlässigen im Folgenden die Elektronenmasse, setzen also  $m_e = 0$ ;  $M$  sei die Masse des Myons. Das spingemittelte Amplitudenquadrat lautet dann

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} \left\{ 2(k' \cdot p)(k \cdot p) - \frac{q^2}{2} (k - k') \cdot p + \frac{1}{2} M^2 q^2 \right\}. \quad (5.2)$$

Dies folgt aus der Kontraktion zweier Tensoren. Der erste ist der leptonische Tensor des Elektrons

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Sp}(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \cdot [\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^* = \\ &= 2(k'^\mu k^\nu - k \cdot k' g^{\mu\nu} + k'^\nu k^\mu), \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei der Faktor  $1/2$  vom Polarisationsdurchschnitt der beiden Elektronen herrührt. Hierbei handelt es sich um die Korrelationsfunktion zweier Ströme; diese Struktur wird im Folgenden wieder auftauchen. Einen ähnlichen

Ausdruck ergibt sich für den leptonischen Tensor des Myons. Wir interessieren uns nun für den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem. Schauen wir uns dazu die Kinematik im Ruhesystem des Myons an:

$$k = E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k' = E' \begin{pmatrix} 1 \\ \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad p = M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Es gilt nun

$$k \cdot p = ME, \quad k' \cdot p = ME', \quad q^2 = 2k \cdot k' = -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad (5.5)$$

und daraus folgt dann weiterhin

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{2e^4}{(q^2)^2} 2EE' M^2 \left\{ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \quad (5.6)$$

Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts benötigen wir den Flussfaktor

$$\frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} = \frac{1}{4\sqrt{(p \cdot k)^2 - m^2 M^2}} = \frac{1}{4p \cdot k} = \frac{1}{4ME}, \quad (5.7)$$

womit dann folgt:

$$d\sigma = \frac{1}{4ME} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\phi_2, \quad d\phi_2 = \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'_0} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p_0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k'), \quad (5.8)$$

mit dem Zweiteilchen-Phasenraumelement  $d\phi_2$ . Wir verwenden darüber hinaus

$$\frac{d^3 k'}{2k'_0} = \frac{k'^2 dk' d\Omega}{2E'}, \quad \frac{d^3 p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + k - p' - k') = d^4 p' \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \delta(p'^2 - M^2) \theta(p'^0), \quad (5.9)$$

$$p'^2 - M^2 = (p + q)^2 - M^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2 - M^2 = 2M(E - E') + q^2 = 2M\nu + q^2, \quad (5.10)$$

wobei man den Energieverlust  $E - E'$  des Elektrons oft als  $\nu$  bezeichnet. Damit ergibt sich für das Phasenraumelement:

$$d\phi_2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2} E' dE' d\Omega \frac{1}{2M} \delta \left( r + \frac{q^2}{2M} \right). \quad (5.11)$$

In der tiefinelastischen Streuung ist der Energieverlust eine unabhängige Variable in Bezug zum Streuwinkel. Bei der elastischen Streuung ist der Energieverlust durch den Streuwinkel festgelegt. Es resultiert für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{(q^2)^2} \left\{ \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} \delta \left( \nu + \frac{q^2}{2M} \right)}. \quad (5.12)$$

Sind die Impulse des virtuellen Photons klein im Vergleich zur Ausdehnung des Protons, erscheint dieses als punktförmig. Dennoch müssen wir das relativ große anomale magnetische Moment berücksichtigen. Bei großen Impulsüberträgen wird die Struktur des Protons aufgelöst und diese Struktur werden wir über sogenannte Formfaktoren parametrisieren.

## 5.2 Elastische Elektron-Proton-Streuung

Wir können unter Berücksichtigung der Stromerhaltung und der Hermitizität des Stromoperators folgende allgemeine Parametrisierung für den elektromagnetischen Strom des Protons ableiten:

$$J_p^\mu(x) = e\bar{u}(p') \left( \gamma^\mu F_1 + \frac{\kappa}{2M} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu F_2 \right) u(p) \exp(i(p' - p) \cdot x), \quad (5.13)$$

wobei  $F_i = F_i(q^2)$  Formfaktoren sind, welche die endliche Ausdehnung des Protons beschreibt. Dieser Ansatz ist zunächst phänomenologisch begründet. Hier steckt beispielsweise nicht drin, dass die QCD Grundlage der Struktur des Protons ist.  $\kappa$  ist das anomale magnetische Moment des Protons/Nukleon. Im Limes  $q^2 \mapsto 0$



folgen die statischen Eigenschaften des Nukleons, nämlich magnetisches Moment und elektrische Ladung, also die Parametrisierung

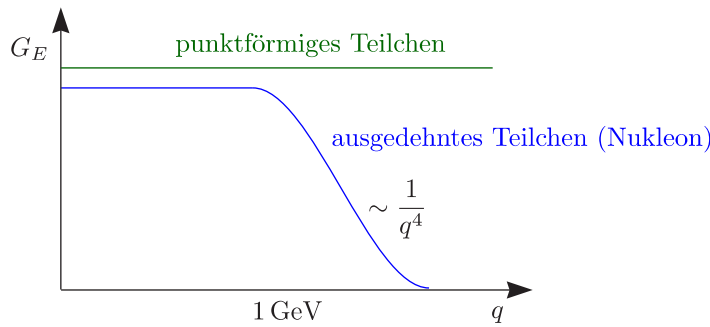
$$e \left( \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right), \tag{5.14}$$

es muss also  $F_1^p(0) = F_2^p(0) = 1$  gelten. Für ein Neutron gilt entsprechend  $F_1^n(0) = 0$  und  $F_2^n(0) = 1$ . Außerdem ist  $\kappa_p = 1,79$  und  $\kappa_n = -1,91$ . Der differentielle Wirkungsquerschnitt für elastische Elektron-Proton-Streuung hat dann folgende Form:

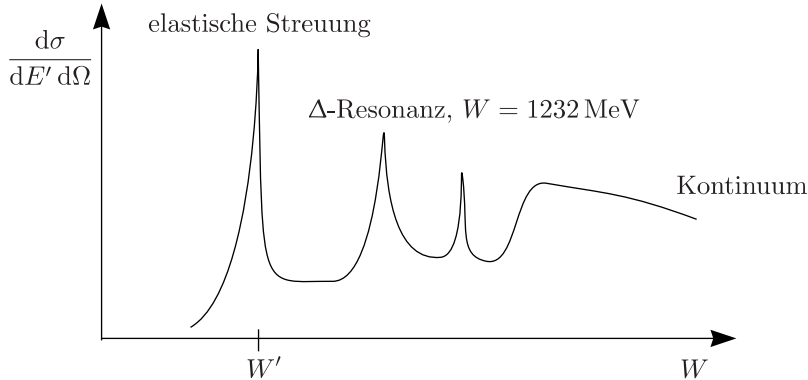
$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{(q^2)^2} \left\{ \left( F_1^2 - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2 \right) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{q^2}{2M^2} (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} \delta \left( \nu + \frac{q^2}{2M} \right). \tag{5.15}$$

Diese Formel ist in einer ähnlichen Form unter dem Namen **Rosenbluth-Formel** bekannt. Aus entsprechenden Streuexperimenten von Elektronen mit Protonen kann man  $F_1(q^2)$  und  $F_2(q^2)$  extrahieren. Hieraus folgt

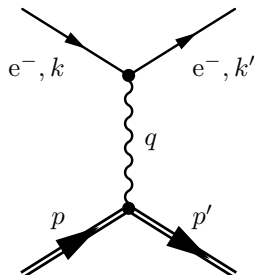
$$G_E(q^2) \approx F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2 \approx \frac{F_1 + \kappa F_2}{1 + \kappa} = \frac{1}{\left( 1 - \frac{q^2}{0,71 \text{ GeV}^2} \right)^2}. \tag{5.16}$$



Das ist im Wesentlichen die Fouriertransformierte der Protonwellenfunktion, was zeigt, dass das Proton eine Ausdehnung hat. Das starke Abfallen des Formfaktors ist ein Anzeichen dafür, dass das Proton kein elementares Teilchen ist. Bei großen  $q^2$  wird also der elastische Anteil des Wirkungsquerschnittes klein. Dann wird die Streuung inelastisch und das Proton bricht auf.



Schauen wir uns den Wirkungsquerschnitt an und zwar in Abhängigkeit der invarianten Masse  $W$  des hadronischen Systems.



$$p'^2 = W^2 = (q + p)^2 = q^2 + 2p \cdot q + M^2, \tag{5.17}$$

mit der Protonmasse  $M$ . Bei hohen Energie wird der Peak (elastischer Anteil) immer kleiner. Dies passiert beispielsweise beim Collider HERA.

### 5.3 Inelastische Elektron-Proton-Streuung

Der Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung ist

$$d\sigma \sim \sum |\mathcal{M}|^2 \sim L_{\mu\nu}^e L^{p,\mu\nu}, \quad (5.18)$$

wobei für den elastischen Fall

$$L^{p,\mu\nu} \sim \langle p' | J^\nu(y) | p \rangle^* \langle p' | J^\mu(0) | p \rangle = \langle p | (J^\dagger)^\nu(y) | p' \rangle \langle p' | J^\mu(0) | p \rangle, \quad (5.19)$$

gilt. Im inelastischen Falle müssen wir über alle Endzustände summieren:

$$W^{\mu\nu} \sim \left\langle p \left| (J^\dagger)^\nu(y) \sum_x |x\rangle \langle x| J^\mu(0) \right| p \right\rangle. \quad (5.20)$$

Der inelastische Tensor ist eine Strom-Strom-Korrelationsfunktion, dessen Fouriertransformierte wir als  $W^{\mu\nu}(p, q)$  bezeichnen wollen. Die allgemeinste Form von  $W^{\mu\nu}$  lautet dann

$$W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu}(p, q) = W_1(-g^{\mu\nu}) + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_3}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_4}{M^2} [p^\mu q^\nu + q^\nu p^\mu], \quad (5.21)$$

wobei  $W_i = W_i(q^2, p \cdot q)$  Formfaktoren sind. Wegen Stromerhaltung muss

$$q_\mu W^{\mu\nu} = 0 = q_\nu W^{\mu\nu}, \quad (5.22)$$

gelten. Aus diesen beiden Beziehungen lassen sich zwei Formfaktoren eliminieren:

$$W^{\mu\nu} = W_1 \left( -g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{M^2} \left( p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left( p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right), \quad (5.23)$$

und wir können den Wirkungsquerschnitt aufschreiben:

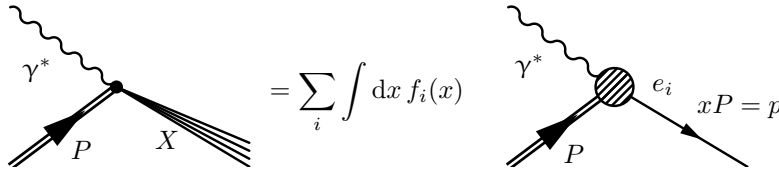
$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{(q^2)^2} \left\{ W_2(\nu, q^2) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2W_1(\nu, q^2) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \quad (5.24)$$

Im Experiment beobachtet man, dass die inelastische Streuung bei großen  $q^2$  nicht abfällt. Dies ist eine Motivation für das Partonmodell.

Die Formfaktoren hängen nur sehr schwach von  $Q^2$  ab:  $F_{1/2}(x, Q^2) \approx F_{1/2}(x)$ . Dieses Verhalten bezeichnet man als **Scaling**. Vergleich mit elastischer Streuung:

$$\nu W_2 = \nu G_2(Q^2) \delta \left( \nu + \frac{q^2}{2M} \right) = G_2(Q^2) \delta(1-x), \quad x = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad Q^2 = -q^2 > 0. \quad (5.25)$$

Analog gilt dies für  $MW_1$ . Dass es für inelastische Streuung keine  $Q^2$ -Abhängigkeit gibt, muss es sich um die Streuung an punktförmigen Teilchen innerhalb des Protons handeln, den sogenannten Partonen. Das virtuelle Photon  $\gamma^*$  streut somit an Partonen.



Man versteht die Streuung als Streuung an Partonen, welche einen bestimmten Bruchteil  $x$  des Impulses des Protons tragen. Summiert wird über alle Partonen.  $f_i(x)$  ist die Wahrscheinlichkeit, ein Parton  $i$  mit Impulsbruchteil  $x$  zu finden. Wir wollen nun diese Partondichten  $f_i(x)$  im Zusammenhang der QCD verstehen. Partonen sind gewissermaßen quasifreie Teilchen im Proton.

### 5.4 Tief inelastische Streuung (DIS) im Partonmodell

Definition:

$$MW_1(\nu, Q^2) = F_1 \left( x = \frac{Q^2}{2M\nu}, Q^2 \right), \quad (5.26a)$$

$$\nu W_2(\nu_1, Q_2) = F_2 \left( x = \frac{Q^2}{2M\nu}, Q^2 \right). \quad (5.26b)$$

mit  $Q^2 = -q^2 > 0$ . Lorentz-invariante Schreibweise: Man bezeichnet

$$x_{Bj} = \frac{Q^2}{2P \cdot q}. \quad (5.27)$$

als Bjorken- $x$ .

Es wird ein Boost entlang der Strahlrichtung durchgeführt, so dass die Transversalkomponente des Impulses sehr klein im Vergleich zur longitudinalen Komponente ist.

|                       | Proton                   | Parton                              |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Energie               | $E$                      | $xE$                                |
| longitudinaler Impuls | $p_L$                    | $xp_L$                              |
| transversaler Impuls  | $p_T = 0$                | $\approx 0$                         |
| Masse                 | $M = \sqrt{E^2 - p_L^2}$ | $m = \sqrt{(xE)^2 - (xp_L)^2} = xM$ |

$m = xM$  dürfen wir nicht zu ernst nehmen. Diese Beziehung hilft uns zunächst dabei, die lorentzinvariante Ausdrücke in geschickter Weise aufzuschreiben. Betrachten wir nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung auf Niveau von Formfaktoren  $W_1, W_2$ :

$$\frac{d\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \left\{ W_2 \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + 2W_1 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \quad (5.28)$$

Im Partonmodell ist dies äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \int_0^1 dx \sum_i f_i(x) e_i^2 \left\{ \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2m} \right) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{Q^2}{2m^2} \delta \left( \nu - \frac{Q^2}{2m} \right) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} = \\ = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \int_0^1 dx \sum_i f_i(x) e_i^2 \left\{ \frac{x_{Bj}}{\nu} \delta(x - x_{Bj}) \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ \left. + \frac{x_{Bj}}{M} \frac{1}{x^2} x_{Bj} \delta(x - x_{Bj}) \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\} = \\ = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \left\{ \sum_i f_i(x_{Bj}) e_i^2 \frac{x_{Bj}}{\nu} \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{M} \sum_i f_i(x_{Bj}) e_i^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Hierbei haben wir

$$\frac{1}{\nu} \delta \left( 1 - \frac{x_{Bj}}{x} \right) = \frac{x_{Bj}}{\nu} \delta(x - x_{Bj}), \quad x_{Bj} = \frac{Q^2}{2M\nu}, \quad (5.30)$$

verwendet. Durch Vergleich mit (5.28) können wir

$$W_2 = \frac{F_2}{\nu} = \sum_i f_i(x_{Bj}) e_i^2 \frac{x_{Bj}}{\nu}, \quad 2W_1 = \frac{2F_1}{M} = \frac{1}{M} \sum_i f_i(x_{Bj}) e_i^2, \quad (5.31)$$

bzw.

$$F_2(x) = \sum_i f_i(x) e_i^2 x = 2xF_1(x), \quad 2F_1(x) = \sum_i f_i(x) e_i^2, \quad (5.32)$$

ablesen. Die Callen-Cross-Beziehung  $F_2(x) = 2xF_1(x)$  ist eine Folge davon, dass wir Elektron-Myon-Streuung als Grundlage des Partonmodells verwendet haben, also Spin-1/2-Teilchen. Für skalare Teilchen würde die Beziehung vollkommen anders aussehen. Diese Beziehung wurde auch experimentell hervorragend bestätigt, was der Nachweis dafür ist, dass Quarks Spin-1/2-Teilchen sind. Durch Kombination von Experimenten mit verschiedenen Strahlen kann man die diversen  $f_i(x)$  extrahieren. Es gilt beispielsweise

$$\frac{F_2^{\text{ep}}}{x} = \left( \frac{2}{3} \right)^2 [u^{(p)}(x) + \bar{u}^{(p)}] + \left( \frac{1}{3} \right)^2 [d^{(p)} + \bar{d}^{(p)} + s^{(p)} + \bar{s}^{(p)}], \quad (5.33)$$

$$\frac{F_2^{\text{en}}}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^{(n)}(x) + \bar{u}^{(n)}] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d^{(n)} + \dots]. \quad (5.34)$$

Die Verteilungen zur Elektron-Neutron-Streuung erhält man aus kombinierten Daten der Elektron-Deuteron-Streuung und Elektron-Proton-Streuung (wobei man die Bindungsenergie des Deuterons bei hohen Streuenergien vernachlässigen kann). Aus Isospininvarianz folgt  $u^{(n)} = d^{(p)} = d(x)$  und  $d^{(n)}(x) = u^{(p)}(x) = u(x)$ . Früher hat man angenommen, dass

$$\bar{u}^{(p)} = \bar{d}^{(p)} [= s^{(p)} = \bar{s}^{(p)}] = S(x), \quad (5.35)$$

gilt, wobei  $S(x)$  die See-Quark-Verteilung ist. Die Valenzverteilung  $u_V(x)$  bzw.  $d_V(x)$  ist definiert als die echte Valenzquarkverteilung reduziert um die See-Quark-Verteilung, also

$$u(x) = u_V(x) + S(x), \quad d(x) = d_V(x) + S(x). \quad (5.36)$$

In  $S(x)$  stecken sowohl Quarks als auch Antiquarks, die aus einem Splitting hervorgehen. Damit erhält man

$$\frac{F_2^{\text{ep}}}{x} = \frac{1}{9}[4u_V + d_V + 8u_S + 2d_S + 2s_S], \quad (5.37)$$

und

$$\frac{F_2^{\text{en}}}{x} = \frac{1}{9}[u_V + 4d_V + 12S]. \quad (5.38)$$

Kommen wir zu den sogenannten Summenregeln. Da das Proton zwei Up-Valenzquarks enthält, muss

$$\int_0^1 dx u_V(x) = 2, \quad (5.39)$$

gelten und entsprechend, weil es ein Down-Valenzquark enthält:

$$\int_0^1 dx d_V(x) = 1. \quad (5.40)$$

Der gesamte Protonimpuls muss der Summe der Impulse der einzelnen Partonen entsprechen:

$$P = \int_0^1 dx (xP) [u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x) + \dots + g(x)], \quad (5.41)$$

wobei  $g(x)$  die Verteilung der Gluonen beschreibt. Also resultiert hieraus folgende weitere Summenregel:

$$\int_0^1 dx x [u(x) + \bar{u}(x) + \dots + g(x)] = 1, \quad (5.42)$$

oder wie man es auch schreibt:

$$\varepsilon_u + \varepsilon_d + \varepsilon_s + \varepsilon_g = 1, \quad \varepsilon_u = \int_0^1 dx x (u(x) + \bar{u}(x)), \dots \quad (5.43)$$

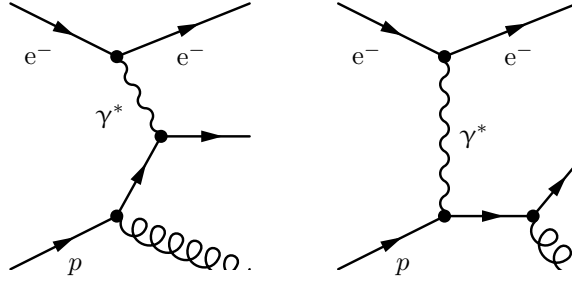
Aus experimentellen Daten lassen sich die  $\varepsilon_u$ ,  $\varepsilon_d$ , usw. bestimmen (wobei man Beiträge von den See-Quarks zunächst vernachlässigt):

$$\int_0^1 dx F_2^{\text{ep}}(x) = \frac{4}{9}\varepsilon_u + \frac{1}{9}\varepsilon_d \approx 0,18, \quad (5.44)$$

$$\int_0^1 dx F_2^{\text{en}}(x) = \frac{1}{9}\varepsilon_u + \frac{4}{9}\varepsilon_d \approx 0,12. \quad (5.45)$$

Hieraus ergibt sich  $\varepsilon_u \approx 0,36$  und  $\varepsilon_d \approx 0,18$ . Das bedeutet, dass 46% des Protonimpulses von See-Quarks und Gluonen getragen wird. Für kleine  $x$  steigen die Partonverteilungen sehr stark an, weshalb in Schaubildern oft  $xf_i(x)$  dargestellt ist. Der Bereich kleiner  $x$  liefert den dominanten Beitrag zu Wirkungsquerschnitten. Durch QCD-Korrekturen kommt eine logarithmische  $Q^2$ -Abhängigkeit rein. Dies bedeutet, dass dann die Verteilungen abhängig von den Abständen bei Streuprozessen werden.

## 5.5 QCD-Korrekturen zum naiven Partonmodell



Wir betrachten als Vereinfachung nur die Streuung eines virtuellen Photons  $\gamma^*$  an einem Proton  $p$ . Wegen  $q^2 \neq 0$  hat das virtuelle Photon drei Polarisierungen. Im Laborsystem ist der Protonimpuls  $P = (M, \mathbf{0})$ ,  $q = (\nu, 0, 0, \sqrt{\nu^2 - q^2})$  mit  $-q^2 = Q^2$ . In diesem System können wir die Polarisationsvektoren explizit aufschreiben. Es gibt zwei transversale

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0), \quad (5.46)$$

und eine longitudinale Polarisation:

$$\varepsilon_L^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{Q^2}}(\sqrt{\nu^2 + Q^2}, 0, 0, \nu). \quad (5.47)$$

Mit Hilfe dieser Polarisationsvektoren kann man den Wirkungsquerschnitt für eine bestimmte Polarisation  $\lambda$  ausrechnen:

$$\sigma_{\lambda}(\gamma^* p) = \frac{4\pi^2\alpha}{k} (\varepsilon_{\lambda}^{\mu})^* \varepsilon_{\lambda}^{\nu} W_{\mu\nu}. \quad (5.48)$$

Der Flussfaktor ist

$$K = \frac{W^2 - M^2}{2M} = \nu + \frac{q^2}{2M}. \quad (5.49)$$

Damit folgt für die transversalen Polarisationen:

$$\sigma_T = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) = 2\sigma_0 W_1, \quad \sigma_0 = \frac{4\pi^2\alpha}{2MK} 2W_1, \quad (5.50)$$

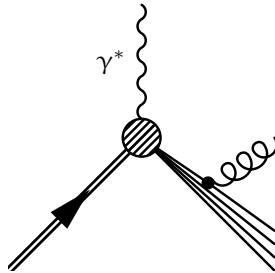
und

$$\sigma_L = \sigma_0 \left[ 2M \left( 1 - \frac{\nu^2}{q^2} \right) W_2 - 2MW_1 \right] = \sigma_0 \left[ \left( \frac{2M}{\nu} + \frac{2M\nu}{Q^2} \right) F_2 - 2F_1 \right]. \quad (5.51)$$

Für hohe Strahlenergien kann man den Summand  $2M/\nu$  vernachlässigen und es folgt:

$$\sigma_L = \frac{\sigma_0}{x} (F_2 - 2xF_1). \quad (5.52)$$

Daraus lässt sich sowohl  $F_1$  als auch  $F_2$  bestimmen. Durch Messung von  $\sigma_L$  können Abweichungen von der Callen-Cross-Beziehung festgestellt werden;  $\sigma_L$  ist also sensitiv auf solche Emissionsprozesse und somit QCD-Korrekturen.



$$\sigma(\gamma^* p) = \sigma_0 \frac{F_2(x, Q^2)}{x}. \quad (5.53)$$

Aus dem totalen Wirkungsquerschnitt kann man  $F_2$  berechnen und damit die QCD-Korrekturen. Der Impuls des Protons sei  $P$  und der eines Partons  $p = yP$ , wobei  $y$  dem  $x_{Bj} \equiv x$  entspricht, sofern man keine QCD-Korrekturen berücksichtigt. Im Partonmodell gilt dann

$$\sigma(\gamma^*p) = \int dy \sum_i f_i(y) \hat{\sigma}_{\gamma^*q_i}. \quad (5.54)$$

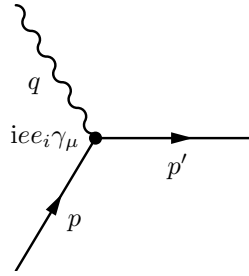
Das Bjorken- $x$  ist definiert durch

$$x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}, \quad (5.55)$$

man kann jedoch noch eine zusätzliche Variable

$$z = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{y2P \cdot q} = \frac{x}{y}, \quad (5.56)$$

für jedes Parton einführen. ( $z$  ist der Impulsanteil des virtuellen Quarks in dem Limes, dass das Gluon kollinear abgestrahlt wird.) Auf führende Ordnung betrachten wir  $\gamma^*q \rightarrow q$ :



Man hat über die Farben und Spins des einlaufenden Quarks zu mitteln und über die Farben des auslaufenden Quarks zu summieren. Wir erhalten das Matrixelement

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{3}{4} \frac{1}{4} \sum_\lambda e^2 e_i^2 \text{Sp}(\not{p}' \not{\epsilon}_\lambda \not{p} \not{\epsilon}_\lambda^*) = \frac{1}{4} e^2 e_i^2 \text{Sp}(\not{p}' \gamma^\alpha \not{p} \gamma^\beta) \left( -g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \right), \quad (5.57)$$

wobei wir die Polarisationssumme

$$\sum_\lambda \varepsilon_\alpha(\lambda) \varepsilon_\beta^*(\lambda) = -g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}, \quad (5.58)$$

berücksichtigt haben. Wegen der Stromerhaltung (Kontraktion mit  $q^\alpha$ ) kann der zweite Term in der Polarisationssumme weggelassen werden und wir erhalten:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = -\frac{1}{4} e^2 e_i^2 \text{Sp}(\not{p}' \gamma^\alpha \not{p} \gamma_\alpha) = 2e^2 e_i^2 p \cdot (p + q) = e^2 e_i^2 y 2P \cdot q. \quad (5.59)$$

Jetzt ist die Phasenraumintegration noch auszuführen:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_i &= \frac{1}{2ys} \overline{|\mathcal{M}|^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} = \\ &= \frac{1}{2ys} \overline{|\mathcal{M}|^2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p') \frac{1}{(2\pi)^3} d^4 p' \delta(p'^2) \theta(p'^0) = \\ &= \frac{1}{2ys} \overline{|\mathcal{M}|^2} (2\pi) \delta((p + q)^2) \theta(p'^0). \end{aligned} \quad (5.60)$$

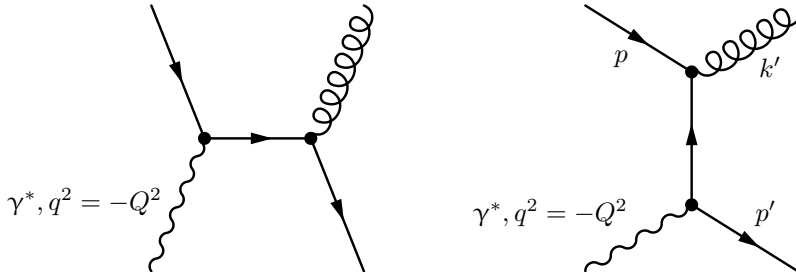
Die  $\delta$ -Funktion legt  $2p \cdot q + q^2 = 0$  bzw.  $2yP \cdot q - Q^2 = 0$  fest. Damit folgt:

$$\hat{\sigma}_i = \frac{1}{2ys} e^2 e_i^2 y 2P \cdot q (2\pi) \frac{1}{2P \cdot q} \delta\left(y - \frac{Q^2}{2P \cdot q}\right) = \frac{4\pi^2 \alpha}{s} e_i^2 \delta(y - s) = \sigma_0 e_i^2 \delta(y - x). \quad (5.61)$$

Damit folgt der Wirkungsquerschnitt für Streuung von virtuellen Photonen an Protonen ergibt sich nach (5.54):

$$\sigma(\gamma^*p) = \int_0^1 dy \sum_i f_i(y) \sigma_0 e_i^2 \delta(y - x) = \sigma_0 \sum_i f_i(x) e_i^2 = \sigma_0 \frac{F_2(x)}{x}. \quad (5.62)$$

Wir möchten nun die Gluonemission in die Rechnung einbeziehen.



Dieser Prozess ist nichts anderes als Compton-Streuung mit einem virtuellen Photon. Wir geben deshalb nur das Ergebnis an:

$$\overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 = 32\pi^2 e_i^2 \alpha_s \frac{4}{3} \left\{ -\frac{\hat{u}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{2\hat{t}Q^2}{\hat{s}\hat{u}} \right\}, \quad (5.63)$$

mit

$$\hat{s} = (q + p)^2, \quad \hat{t} = (p - p')^2, \quad \hat{u} = (p - k')^2. \quad (5.64)$$

Hierbei gilt außerdem

$$\hat{u} = -2p \cdot k' = -2p^0 k'^0 (1 - \cos \theta). \quad (5.65)$$

Dies ist das erste Beispiel einer kollinearen Divergenz bei  $\theta = 0$  (und damit  $\hat{u}$ ), die in Eichtheorien mit masselosen Eichbosonen auftreten. Was für physikalische Folgen hat diese Divergenz und wie können wir weiter verfahren? Wir könnten zwar die Masse eines Partons einführen, das scheitert aber spätestens dann, wenn auch Gluonen als Partonen auftreten. Deshalb rechnen wir sofort mit masselosen Partonen weiter. Der obige Prozess wird also in diesem kollinearen Bereich wichtig. Im  $\gamma^*q$ -Ruhesystem

$$p = p^0(1, 0, 0, 1), \quad q = (q^0, 0, 0, -|\mathbf{q}|), \quad \mathbf{p} + \mathbf{q} = 0 \Leftrightarrow p^0 = |\mathbf{q}|, \quad (5.66)$$

woraus  $p'^0 = k'^0 = \sqrt{\hat{s}}/2$  folgt.

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (q + p)^2 = 2p \cdot q - Q^2 = -Q^2 + 2p^0(q^0 + |\mathbf{q}|) = -Q^2 + 2p^0(q^0 + p^0) = \\ &= -Q^2 + 2p^0\sqrt{\hat{s}} \quad \Rightarrow p^0 = \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Die allgemeine Form lautet:

$$\frac{\hat{s} + m_q^2 - m_\gamma^2}{2\sqrt{\hat{s}}}. \quad (5.68)$$

$$\hat{u} = -2 \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{\hat{s}}} \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} (1 - \cos \theta) = -\frac{\hat{s} + Q^2}{2} (1 - \cos \theta). \quad (5.69)$$

Für die Mandelstamvariablen gilt

$$\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = -Q^2, \quad (5.70)$$

und damit

$$\hat{t} = -(Q^2 + \hat{s}) - \hat{u} = -\frac{\hat{s} + Q^2}{2} (1 + \cos \theta). \quad (5.71)$$

Die Winkelintegration führt auf

$$\int d\Omega = \int d\cos \theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \int 2\pi \frac{2}{\hat{s} + Q^2} d\hat{u}, \quad (5.72)$$

und somit lässt sich der Beitrag zum  $\gamma^*q_i$ -Wirkungsquerschnitt ausrechnen:

$$d\hat{\sigma}_{\gamma^*q_i} = \frac{1}{2y_s} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 \frac{d\Omega}{32\pi^2} = \frac{1}{2y_s} e_i^2 w\pi \alpha_s \frac{4}{3} \left\{ -\frac{\hat{u}}{\hat{s}} - \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{2\hat{t}Q^2}{\hat{s}\hat{u}} \right\} \frac{2}{\hat{s} + Q^2} d\hat{u}, \quad (5.73)$$

mit  $2\hat{t}Q^2 = -2Q^2(\hat{u} + \hat{s} + Q^2)$ . Wir vernachlässigen alle Terme, die nicht wie  $1/\hat{u}$  divergieren und erhalten:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{u}} \approx \frac{4}{3} \frac{2\pi e_i^2 \alpha \alpha_s}{y s} \left( -\frac{1}{\hat{u}} \right) \left[ \hat{s} + 2 \frac{(\hat{s} + Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right] \frac{1}{\hat{s} + Q^2}, \quad (5.74)$$

was sich nun vollständig durch die dimensionslose Variable  $z$  unter Verwendung von

$$z = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{(p+q)^2 - q^2} = \frac{Q^2}{\hat{s} + Q^2} = 1 - \frac{\hat{s}}{\hat{s} + Q^2} \Rightarrow 1 - z = \frac{\hat{s}}{\hat{s} + Q^2}, \quad (5.75a)$$

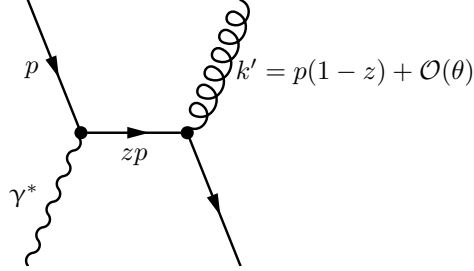
$$\frac{1}{1-z} = \frac{\hat{s} + Q^2}{\hat{s}} = 1 + \frac{Q^2}{\hat{s}} \Rightarrow \frac{Q^2}{\hat{s}} = \frac{1}{1-z} - \frac{1-z}{1-z} = \frac{z}{1-z}, \quad (5.75b)$$

$$\left[ \hat{s} + 2 \frac{(\hat{s} + Q^2)Q^2}{\hat{s}} \right] \frac{1}{\hat{s} + Q^2} = \frac{\hat{s}}{\hat{s} + Q^2} + 2 \frac{Q^2}{\hat{s}} = 1 - z + 2 \frac{z}{1-z} = \frac{1+z^2}{1-z}, \quad (5.75c)$$

ausdrücken lässt:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{u}} = e_i^2 \frac{4\pi^2 \alpha \alpha_s}{s y} \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{1}{\hat{u}} \right) P_{\text{qq}}(z), \quad P_{\text{qq}}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z}, \quad (5.76)$$

wobei  $P_{\text{qq}}(z)$  die Quark-Splittingfunktion ist. Schauen wir uns nun die Bedeutung der Variablen  $z$  im kollinearen Grenzfall an:



Für kleine  $\theta$  gilt:

$$p = p^0(1, 0, 0, 1), \quad k' = k'^0(1, \sin \theta, 0, \cos \theta) \approx k'^0(1, \theta, 0, 1) \approx k'^0(1, \theta, 0, 1), \quad (5.77)$$

wegen

$$1 - z = \frac{\hat{s}}{\hat{s} + Q^2} = \frac{k'^0}{p^0}. \quad (5.78)$$

$z$  ist also der Impulsbruchteil des virtuellen Quarks im kollinearen Grenzfall. Die Betrachtung, dass ein einzelnes Quark ein Gluon abstrahlt, ist im Wesentlichen eine Iteration des Partonmodells. Das abgestrahlte Gluon wird als weiteres Parton des Quarks behandelt und  $z$  übernimmt die Rolle von  $x_{\text{Bj}}$  bei der Photon-Quark-Streuung. Solche Abstrahlungsprozesse passieren stets aufs Neue. Im Falle  $\hat{u} = 0$  sind die Impulsübeträge klein gegenüber der Protonmasse. In diesem Bereich ist die Protonmasse nicht mehr vernachlässigbar und das Partonmodell verliert seine Gültigkeit. (Die Virtualität des Photons muss groß sein, wenn man das Partonmodell zur Beschreibung der Physik heranziehen möchte.) Man integriert also nicht bis 0, sondern bis  $-\mu^2$ :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\gamma^* q_i \rightarrow q_i g} &= \int_{-\hat{s}+Q^2}^{-\mu^2} d\hat{u} \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{u}} = e_i^2 \frac{\sigma_0 \alpha_s}{y} \frac{1}{2\pi} P_{\text{q}}(z) \int_{-\hat{s}+Q^2}^{-\mu^2} \frac{d\hat{u}}{-\hat{u}} = \\ &= e_i^2 \frac{\sigma_0 \alpha_s}{y} \frac{1}{2\pi} P_{\text{q}}(z) \ln \left( \frac{(\hat{s} + Q^2)Q^2}{\mu^2 Q^2} \right) \approx e_i^2 \frac{\sigma_0}{y} P_{\text{q}}(z) \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right), \end{aligned} \quad (5.79)$$

wobei wir das  $z$  als konstanten Term vernachlässigt haben. Der Beitrag zum Wirkungsquerschnitt (wegen  $z = x/y$ ):

$$\sigma_{\gamma^* p} = \sum_i e_i^2 \int_x^1 dy q_i(y) \frac{\sigma_0}{y} \left\{ \delta \left( 1 - \frac{x}{y} \right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{\text{qq}}(z) \ln \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right\} = \sigma_0 \frac{F_2}{x}, \quad (5.80)$$



mit

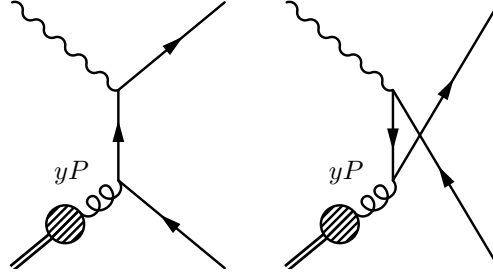
$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x \left\{ q_i(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) \int_x^1 dy q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) \right\}. \quad (5.81)$$

In der nächsten Ordnung taucht eine  $Q^2$ -Abhängigkeit durch die kollineare Singularität auf.  $dF_2/d\ln(Q^2)$  ist unabhängig von  $\mu^2$  (und  $\ln(1/z)$ ).

$\Lambda$  ist ein infraroter Cut-Off, eine Skala, bei der die QCD nicht perturbativ wird. Sie liegt im Bereich der Pionmasse (100 MeV bis 500 MeV). Damit werden die weichen Anteile regularisiert.

$$\sigma_{\gamma^*p} = \sigma_0 \sum_q e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} q(y) \left[ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qq}(z) \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{1}{\sigma_0} \hat{\sigma}_{\text{rest}}^{(q)}(z) \right] = \sigma_0 \frac{F_2(x, Q^2)}{x}. \quad (5.82)$$

In den restlichen Termen stecken Beiträge großer  $\hat{u}$ . Es ergibt sich also einen zusätzlichen Gluonbeitrag zu  $F_2$  von



Ein hadronischer Jet kann nämlich auch erzeugt werden, wenn man ein Gluon anstelle eines Quarks im Anfangszustand betrachtet. Die Wirkungsquerschnitte sind inklusiv; also ist über alles zu summieren, was zur Photon-Proton-Streuung beiträgt.

$$\sigma_0 \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \int_x^1 \frac{dy}{y} g(y) \left[ \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{qg}(z) \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{\hat{\sigma}_{\text{rest}}^{(g)}(z)}{\sigma_0} \right], \quad (5.83)$$

mit

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z}, \quad P_{qg}(z) = \frac{1}{2} (z^2 + (1-z)^2). \quad (5.84)$$

Man benötigt nun die Wahrscheinlichkeit, ein Gluon mit Impulsbruchteil  $Py$  zu finden. Das Gluon kommt aus einem Quark oder Antiquark, weshalb über alle Quarks/Antiquarks zu summieren ist.

$$\begin{aligned} \frac{F_2(x, Q^2)}{x} &= \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 q(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} e_q^2 \left\{ q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right) \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y) P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{\hat{\sigma}_{\text{rest}}(z, y)}{\sigma_0} \right\}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Im restlichen Anteil stecken harte Prozesse, also solche, bei denen keine kollineare Abstrahlung von Gluonen stattfinden, sondern der Impulsübertrag auf das Quark groß ist im Vergleich zu  $\Lambda$ , also der Pionmasse. Zwei harte Partonen manifestieren sich als zwei Jets im Experiment, sind also unterscheidbar. Der erste Anteil in der geschweiften Klammer wird als  $q(x, Q^2)$  identifiziert.  $q(x, Q^2)$  muss später genauer identifiziert werden. Was wir jetzt schon berechnen können, ist die Ableitung der Verteilungsfunktion nach  $\log(Q^2)$ :

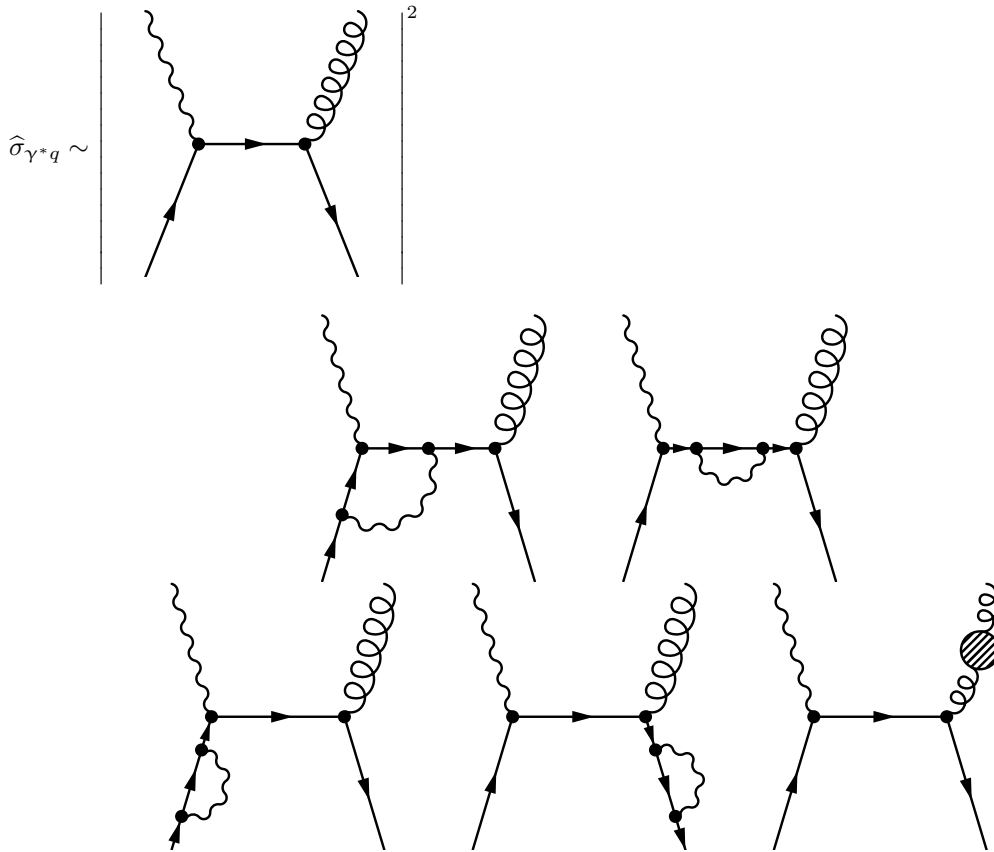
$$\frac{d}{d\log(Q^2)} q(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y, Q^2) P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) + g(y, Q^2) P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right) \right]. \quad (5.86)$$

In der niedrigsten Ordnung sind die  $q(y)$  von  $Q^2$  unabhängig. Das Ganze kann man jedoch iterieren. Weil man nur bis  $\alpha_s$  rechnet, kann man bei den zu  $\alpha_s$  proportionalen Termen nicht entscheiden, ob man es mit  $Q^2$ -abhängigen oder -unabhängigen zu tun hat. Deshalb ersetzt man  $q(y)$  durch  $q(y, Q^2)$  und  $g(y)$  durch  $g(y, Q^2)$ .

Wir benötigen noch eine entsprechende Gleichung für  $g(x, Q^2)$ :

$$\frac{d}{d \log(Q^2)} g(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ \sum_i q_i(y, Q^2) P_{gq} \left( \frac{x}{y} \right) + g(y, Q^2) P_{gg} \left( \frac{x}{y} \right) \right]. \quad (5.87)$$

Die Gluonen werden von einem Quark/Antiquark abgestrahlt, was in  $P_{gq}$  steckt. Es ist weiterhin über alle Quarks/Antiquarks zu summieren. Die Abstrahlung eines Gluons von einem Gluon beschreibt  $P_{gg}$ . Die Gleichungen (5.86) und (5.87) sind die sogenannten **DGLAP-Gleichungen**. Sie beschreiben die Skalenverletzung für Partonen. Streuexperimente liefern Informationen über  $q(y)$  und  $g(y)$  bei einer bestimmten Referenzskala, bei der man perturbativ nicht rechnen kann. Messungen werden anhand von tiefinelastischer Elektron-Deuteron, Neutrino-Eisen, Elektron-Eisen-Streuung usw. durchgeführt. Mittels der DGLAP-Gleichungen lassen sich die experimentellen Daten zu anderen Skalen evolvieren. Splittingfunktionen beschreiben Wahrscheinlichkeiten, ein bestimmtes Parton bei der Änderung der Skala in einem anderen Parton zu finden. Beispielsweise steckt in  $P_{qq}$  die Wahrscheinlichkeit, in einem Quark vom Impuls  $p = yP$ , ein virtuelles Quark mit Impulsbruchteil  $zp$  zu finden. Physikalisch steckt dahinter, dass durch eine höhere Skala das Hadron besser aufgelöst wird und man in der Lage ist, Splittingprozesse genauer festzustellen. Der  $1/(1-z)$ -Pol von  $P_{qq}(z)$  kommt von weichen Gluonen mit  $E_g = (1-z)E_q \mapsto 0$ . Im kollinearen Bereich ist  $(1-z)$  der Energiebruchteil des Gluons vom ursprünglichen Quark.  $(1-z) \mapsto 0$  bedeutet, dass das Gluon beliebig weich wird und dieses führt zu einer Singularität. Solche Singularitäten sind nicht ungewöhnlich, tauchen sie nämlich bei allen Bremsstrahlungsprozessen auf, beispielsweise auch in der QED. Diese weichen Singularitäten werden durch virtuelle Beiträge kompensiert und dies gilt allgemein in Eichtheorien.



Dies sind die virtuellen Korrekturen. Das letzte Diagramm beinhaltet Gluonkorrekturen. Hierbei steht



symbolisch für die Gluon-Selbstenergiebeiträge



Diese sind proportional zu  $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$ . Die Kinematik der virtuellen Beiträge ist identisch mit der Kinematik des führenden Prozesses; die Phasenraumintegrale sind also alle dieselben, nämlich  $\delta(1-z)$ . Es wird dann  $\alpha_s$ -Korrekturen der Splitting-Funktionen geben. Nach Integration über den Phasenraum wird der Pol in  $1/(1-z)$  kompensiert durch die virtuellen Beiträge. Der Effekt ist folgender:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{1-z} - \text{Polterm} + c'\delta(1-z). \quad (5.88)$$

Die Summenregel für Valenzquarks impliziert

$$\int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0, \quad (5.89)$$

was im Wesentlichen nichts anders ist als Fermionzahlerhaltung. Benötigt wird

$$\int_0^1 dz P_{qq}(z)f(z). \quad (5.90)$$

Wie definieren wir nun die Subtraktion von dem obigen Polterm? Wir addieren eine null:

$$\int_0^1 dz (P_{qq}(z)f(z) - f(1) + f(1)). \quad (5.91)$$

Die  $f(1)$ -Terme kommen auch bei den virtuellen Korrekturen vor. Man modifiziert die Verteilung also in eine sogenannte  $+$ -Distribution. Der restliche Term mit der Divergenz, also  $f(1)$ , wird von den virtuellen Korrekturen kompensiert.  $f(z) - f(1)$  sind dann endliche Terme. Definiere  $+$ -Distribution in der folgenden Art und Weise:

$$\int_0^1 \frac{f(z)}{(1-z)_+} \equiv \int_0^1 dz \frac{f(z) - f(1)}{1-z}. \quad (5.92)$$

Eine Distribution ist eine Abbildung einer Testfunktion  $f(x)$  auf die Menge der reellen Zahlen. Der Polterm führt zum Übergang von der singulären Funktion zu der entsprechenden Distribution. Die tatsächliche Splittingfunktion ist dann:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + c\delta(1-z). \quad (5.93)$$

$c$  kann man aus der Fermionerhaltung ausrechnen. (Im Prinzip folgt  $c$  auch aus den virtuellen Korrekturen; die Rechnung ist aber ungleich aufwendiger.)

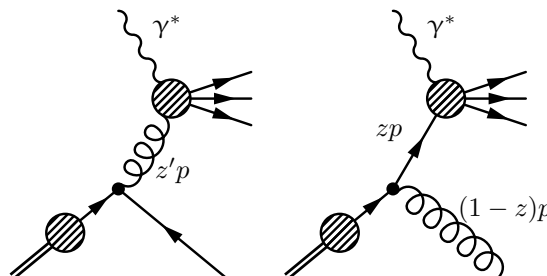
$$\int_0^1 dz \left( \frac{4}{3} \frac{1+z^2-2}{1-z} + c\delta(1-z) \right) \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.94)$$

also

$$c = - \int_0^1 dz \frac{4}{3} \frac{(z-1)(z+1)}{1-z} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2. \quad (5.95)$$

Je nachdem, was man in der  $+$ -Vorschrift einklammert, ändern sich die Anteile der  $\delta$ -Funktion:

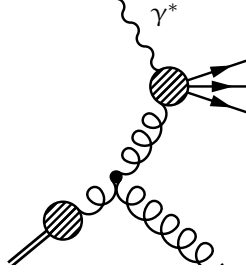
$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + 2\delta(1-z) = \frac{4}{3} \left( \frac{1+z^2}{(1-z)_+} \right). \quad (5.96)$$



Man muss also  $z'$  durch  $1 - z$  ersetzen:

$$P_{gq}(z) = \frac{4}{3} \frac{1 + (1 - z)^2}{z}. \quad (5.97)$$

Hier benötigt man keine  $+$ -Distribution, weil  $z = 0$  nicht möglich ist, um ein massives System im Endzustand zu produzieren.



$$P_{gg}(z) = 6 \left( \frac{1 - z}{z} + \frac{z}{(1 - z)_+} + z(1 - z) \right) + \delta(1 - z) \left( \frac{11}{2} - \frac{n_f}{3} \right). \quad (5.98)$$

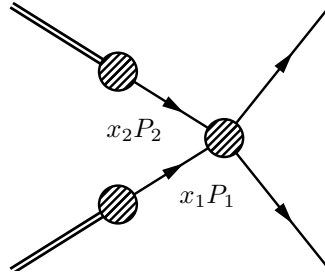
Woher der Term mit  $n_f$  herkommt, werden wir später erklären.

$$P_{qq}(z) = \frac{1}{2} (z^2 + (1 - z)^2). \quad (5.99)$$

Definiere Quarkverteilung:

$$q(x, \mu^2) = q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} \int \frac{dy}{y} q(y) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) \log \left( \frac{\mu^2}{s^2} \right), \quad (5.100)$$

wobei im zweiten Term infrarote Singularitäten stecken. Diesen Anteil rechnet man nicht aus, sondern extrahiert ihn aus experimentellen Daten.



Betrachten wir das Beispiel  $\gamma^* p \rightarrow \text{jets}$  zur Faktorisierung. Wir hatten für den Wirkungsquerschnitt folgendes erhalten:

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma^* p} = \sum_q e_q^2 \left\{ \sigma_0 q(x) + \sigma_0 \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ q(y) P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) + g(y) P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) \right] \right. \\ \left. + \int_x^1 dy \left[ q(y) \hat{\sigma}_{\gamma^* q \rightarrow qg}^{\text{rest}} + g(y) \hat{\sigma}_{\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}}^{\text{rest}} \right] \right\}, \quad (5.101) \end{aligned}$$

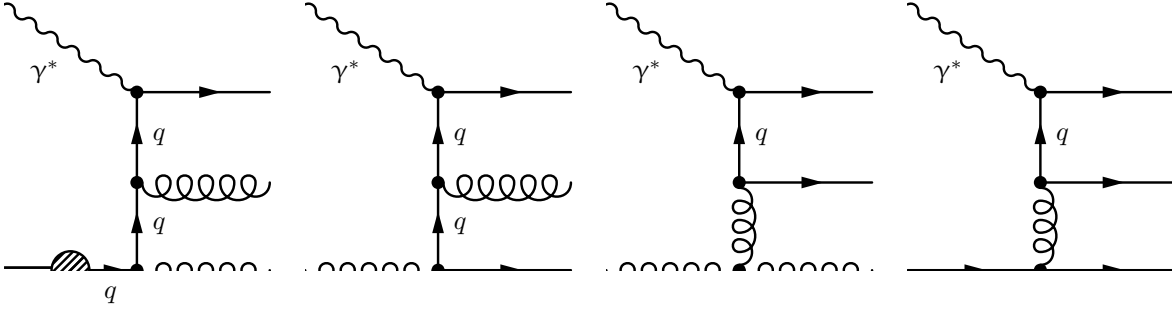
mit den entsprechenden Splittingfunktionen  $P_{qq}$  und  $P_{qg}$ . Man schreibt nun

$$\log \left( \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right) = \log \left( \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right) + \log \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right), \quad (5.102)$$

mit der logarithmischen Referenzskala  $\mu^2$ . Dabei handelt es sich (im Gegensatz zur Renormierungsskala) um eine Faktorisierungsskala für den **infraroten Bereich**. In  $\log(\mu^2/\Lambda^2)$  stecken kollineare Singularitäten drin. (Mit  $\mu_F$  spaltet man den nicht-perturbativen infraroten Bereich ab und mit  $\mu_N$  ultraviolette Divergenzen.)

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma^* p} = \sum_q q(x, \mu^2) e_q^2 \sigma_0 + \int_x^1 dy \left\{ \sum_q \left( q(y, \mu^2) \sigma_0 e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \frac{1}{y} P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) + \hat{\sigma}_{\gamma^* q \rightarrow qg}^{\text{rest}} e_q^2 \right) \right. \\ \left. + g(y, \mu^2) \sum_q \left( \sigma_0 e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \log \left( \frac{Q^2}{\mu^2} \right) \frac{1}{y} P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) + \hat{\sigma}_{\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}}^{\text{rest}} e_q^2 \right) \right\} = \\ = \hat{\sigma}_{\gamma^* q \rightarrow qg}^{\text{hard}} + \hat{\sigma}_{\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}}^{\text{hard}} + \hat{\sigma}_{\gamma^* q \rightarrow b+c+d}. \quad (5.103) \end{aligned}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist frei von infraroten und kollinearen Divergenzen und hängt nicht mehr von Art der Hadronen ab. In der Ordnung  $\alpha_s^2$  kommen neue Beiträge hinzu.



$$q(y) \rightarrow q(y, \mu^2), \quad g(y) \rightarrow g(y, \mu^2). \quad (5.104)$$

Summation von höheren Ordnungen führt auf den physikalischen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\gamma^* p} = \int_x^1 dy \left\{ \sum_q q(y, \mu^2) (\sigma_0 e_q^2 \delta(x-y) + \hat{\sigma}_{\gamma^* q \rightarrow qg}^{\text{hard}}) + g(y, \mu^2) \sum_i \hat{\sigma}_{\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}}^{\text{hard}} \right\}. \quad (5.105)$$

Die Partondichten sind unabhängig vom jeweiligen Hadronprozess.

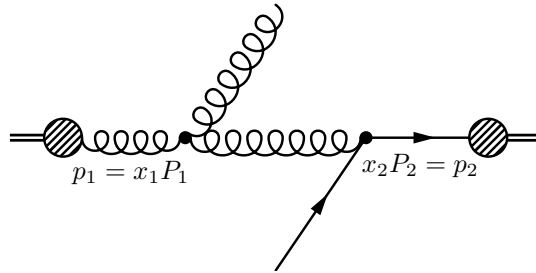
$$\sigma_{\gamma^* p} = \sum_x \int dy \sum_{i=q,\bar{q},g} f_{i/p}(y, \mu^2) \hat{\sigma}_{\gamma^* i \rightarrow x}^{\text{hard}}(\mu^2). \quad (5.106)$$

Der Anteil  $\hat{\sigma}_{\gamma^* i \rightarrow x}^{\text{hard}}(\mu^2)$  wird berechnet.  $f_{i/p}(y, \mu^2)$  sind **renormierte Partondichten** ohne infrarote und kollineare Singularitäten. Dieses Ergebnis hängt nicht mehr von  $\mu^2$  ab. Hier ist  $\mu^2$  eine willkürliche Schnittstelle zwischen perturbativen und nichtperturbativen Rechnungen.  $\mu^2 = \mu_F^2$  ist die sogenannte Faktorisierungsskala.

- Sie trennt den nichtperturbativen Faktor (phase distribution factor  $f_{i/h}(x, \mu_F^2)$ ), welcher von der Art der Hadronen abhängt, vom perturbativen Wirkungsquerschnitt  $\hat{\sigma}^{\text{hard}}(\mu_F^2)$ .
- $\mu_F^2$  ist beliebig:  $\sigma_{\gamma^* p}$  ist unabhängig von  $\mu_F^2$ , hängt aber residual von  $\mu_F^2$  in fester Ordnung  $\alpha_s$  ab.
- $\hat{\sigma}^{\text{hard}}$  ist infrarot-endlich (keine  $\Lambda^2$ -Abhängigkeit).  $f_{i/h}$  wird gemessen (keine Infrarot-Singularitäten).

Man kann auch eine beliebige Streuung von  $\gamma^*$  an einem Hadronzustand betrachten. Das Ergebnis ist dann dasselbe. Für Neutronen, Pionen usw. muss  $f_{i/p}$  noch ausgerechnet werden. In der QED können kollineare Singularitäten durch Massen regularisiert werden. Die logarithmischen Beiträge  $\log(Q^2/\Lambda^2)$  sind noch per Hand behandelbar. In der QCD ist der Beitrag von  $\log(Q^2/s^2)$  zu groß und  $\alpha_s = 1/10$ . Damit muss in jedem Fall eine perturbative Rechnung durchgeführt werden.

## 5.6 Hadron-Hadron-Kollisionen



Der partonische Wirkungsquerschnitt

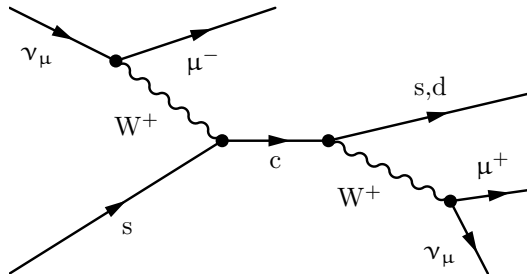
$$d\hat{\sigma}(gg \rightarrow qg) = \frac{1}{2\hat{s}} \overline{|\mathcal{M}|^2} d\phi_2(p_1 + p_2; k_1, k_2), \quad (5.107)$$

muss perturbativ berechnet werden. Maximal ist eine 2-Schleifen-Rechnung möglich; in vielen Fällen jedoch kann jedoch nur die Bornsche Näherung ausgewertet werden. Je komplizierter der Endzustand ist, desto komplizierter ist die Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts. Der hadronische Wirkungsquerschnitt folgt aus der Faltung mit zweien Partondichten

$$d\sigma_{h_1 h_2 \rightarrow f x} = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 f_{a/h_1}(x_1, \mu_F^2) \int_0^1 dx_2 f_{b/h_2}(x_2, \mu_F^2) d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow f}(\mu_F^2), \quad (5.108)$$

mit Hilfe des partonischen Wirkungsquerschnitts  $d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow f}(\mu_F^2)$ . Dieser ist eine perturbative Größe, welche von den beteiligten Hadronen unabhängig ist. Indem man Informationen von vielen Experimenten verknüpft, können die Partonverteilungsfunktionen aus folgenden Daten ermittelt werden:

- Tief-inelastische Streuung (DIS)
- Drell-Yan-Prozesse (Daten von Hadron-Collidern)
- **Di-Myon-Daten** liefern Informationen von  $s(x)$  über  $s \rightarrow cCC$  und den  $c \rightarrow \mu X$ -Zerfall aus



Aus CTQC6 und MRS (wobei  $Q_0$  die Referenzskala ist):

$$f_{i/p}(x, Q_0^2) = A_i x^{-6i} (1-x)^{a_i} (1 + P_i(x)), \quad (5.109)$$

wobei  $A_i$  ein Normierungsfaktor und  $P_i(x)$  ein Polynom ist, über das mehrere Parameter zum Anpassen eingeführt werden können. Um Wirkungsquerschnitte ausrechnen zu können, sind zunächst  $A_i$ ,  $b_i$ ,  $a_i$  und  $P_i(x)$  zu bestimmen. Bei jedem Splitting-Prozess verliert das Quark an Energie. Bei großen Skalen ist somit die Gluonverteilung größer als bei kleinen, wobei die Verteilungen für das u- und d-Quark bei verschiedenen Skalen ähnlich aussehen. Die Partonverteilungsfunktionen berechnet man mittels numerischen Programmen.

## 5.7 Faktorisierungstheorem

Das Faktorisierungstheorem gilt für infrarot und kollinear sichere Observablen, also Observablen, die nicht sensitiv auf weiche Gluonabstrahlung und kollinearem Splitting sind. Jede solche Observable (abhängig vom harten internen Impuls  $Q$ ) in der Streuung zweier Hadronen  $h_1$  und  $h_2$  können wie folgt ausgedrückt werden:

$$H = \sum_{a,b} \int_0^1 dx_1 dx_2 f_{a/h_1}(x_1, \mu_f) H_{ab}(Q; Q^2/\mu^2, \mu_f/\mu, \alpha_s(\mu)) f_{b/h_2}(x_2, \mu_f) + \text{Terme von } \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda^2}{Q^2}\right). \quad (5.110)$$

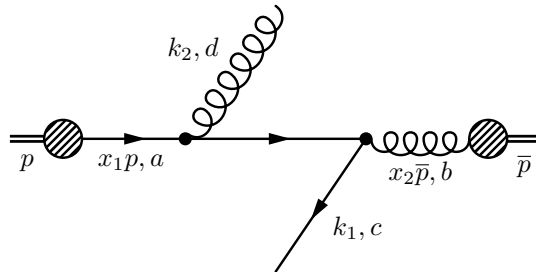
$f_{a/b}(x, \mu_f)$  sind die Partonverteilungsfunktionen (PDFs). Bei der Streuung von Hadronen tauchen nun solche Partonverteilungsfunktionen gleichzeitig auf. Der harte Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch Integration über Impulsbruchteile  $x_1$  und  $x_2$ .

$H_{ab}$  ist der harte Wirkungsquerschnitt (hard scattering kernel). Dieser ist berechenbar in der Störungstheorie und unabhängig von Effekten, die bei kurzen Distanzen auftreten. Er hängt insbesondere nicht von der Natur der Hadronen  $h_1$  und  $h_2$  ab. (Trick: Betrachte den Spezialfall mit  $h_i =$  externen Partonen). Die Partonverteilungsfunktionen sind insofern universell, dass sie nur von der Natur der Hadronen  $h_1$  und  $h_2$  und der Partonen  $a, b$  abhängen, aber nicht von Details des harten Prozesses. In den PDFs stecken die infrarot und kollinear divergenten Prozesse.

# Kapitel 6

## Beschreibung von Hadron-Hadron-Kollisionen

Im Tevatron werden Proton-Antiproton-Stöße bei  $\sqrt{s} = 1,96$  TeV untersucht. Im Wesentlichen wurde besonderes Augenmerk auf die Prozesse  $p\bar{p} \rightarrow \text{jets}, W, Z, t\bar{t}, H$  gelegt. Am LHC werden Proton-Proton-Kollisionen bei  $\sqrt{s} = 14$  TeV betrachtet werden. Die Liste der Prozesse schließt die des Tevatrons mit ein. Zusätzlich hält man Ausschau nach SUSY-Prozessen. Es finden harte Stöße zwischen den Partonen statt, welche im Proton enthalten sind.



Dies sind halbperturbative Modelle, wie sie in Partonschauer-Simulationsprogrammen wie HERWIG implementiert sind. Dies wäre ein Prototyp von Prozessen wie sie am Tevatron oder LHC beobachtet werden. Der partonische Wirkungsquerschnitt (für masselose Partonen) ist gegeben durch

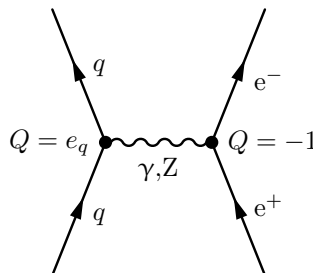
$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow cd) = \frac{1}{2\hat{s}} d\phi_2(x_1 p + x_2 \bar{p}; k_1, k_2) \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2. \quad (6.1)$$

Dieser Wirkungsquerschnitt ist mit den Partondichten zu falten. Der volle Wirkungsquerschnitt, der im Labor beobachtet wird, ist dann

$$d\sigma(p\bar{p} \rightarrow jjX) = \sum_{a,b} \int dx_1 dx_2 f_{a/p}(x_1) f_{b/\bar{p}}(x_2) d\hat{\sigma}(ab \rightarrow cd). \quad (6.2)$$

In den Jets werden nicht freie Quarks und Gluonen beobachtet, sondern Bündel von Hadronen, welche im Wesentlichen in eine Richtung fliegen. Bei sehr hohen Energien kann die Richtung masseloser Quarks mit der Richtung eines solchen Bündels identifizieren.

Wir betrachten nun als Beispiel den Prozess  $p\bar{p} \rightarrow e^+e^-, \mu^+\mu^-$ , den sogenannten Drell-Yan-Prozess. Auf Partonniveau:



Wir betrachten nur den  $\gamma$ -Austausch, also den ursprünglichen Drell-Yan-Prozess.  $\theta^*$  sei der Polarwinkel des geladenen Leptons im Schwerpunktsystem:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\theta^*} = 2\pi \frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega^*} = 2\pi \frac{\alpha^2}{4\hat{s}} (1 + \cos^2\theta^*) e_q^2 \cdot \frac{3}{9}. \quad (6.3)$$

Der Faktor  $1/9$  kommt von der Farbmittlung und der Faktor  $3$  von der Anzahl der Farben der einlaufenden Quarks. Bei kleinen  $x$  (also kleinen invarianten Massen) unterscheiden sich die Valenzquark- von den Seequarkverteilungen kaum. Es ist dann über  $ab = u\bar{u}, \bar{u}u, d\bar{d}, \bar{d}d, s\bar{s}, \bar{s}s, c\bar{c}, \bar{c}c$  zu summieren, wenn man b-Quarks vernachlässigt. Das Problem ist nun die Definition von  $\cos\theta^*$ ,  $\sqrt{s}$  usw. Wir wählen den Protonstrahl entlang der positiven  $z$ -Achse, den Antiprotonstrahl entlang der negativen  $z$ -Achse:

$$p_a = x_1 p = x_1 \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1), \quad p_b = x_2 \bar{p} = x_2 \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1). \quad (6.4)$$

Der Impuls im Schwerpunktsystem ist dann

$$p_{\text{cm}} = p_a + p_b = \frac{\sqrt{s}}{2} (x_1 + x_2, 0, 0, x_1 - x_2). \quad (6.5)$$

Das Schwerpunktsystem ist im Laborsystem also entlang der  $z$ -Achse sehr stark geboostet. Von diesem Boost sind die Transversalimpulse (Impulse senkrecht zur Strahlachse) nicht betroffen, wohl aber die Longitudinalimpulse (Impulse parallel zur Strahlachse).

$$p^\mu = (E, \mathbf{p}_\perp, p_z) \xrightarrow{\text{Boost}} (\gamma(E + \beta p_z), \mathbf{p}_\perp, \gamma(p_z + \beta E)) = (\Lambda p)^\mu, \quad (6.6)$$

mit

$$\Lambda = \exp(i(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{K})), \quad (6.7)$$

wobei  $\mathbf{J}$  die Drehimpulsoperatoren und  $\mathbf{K}$  die Boostoperatoren sind.  $|\boldsymbol{\nu}|$  ist die Rapidität. Für einen Boost entlang der  $z$ -Achse gilt  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$  und  $\boldsymbol{\nu} = y\hat{z}$ . Führt man zwei solcher Boosts entlang der  $z$ -Achse hintereinander aus, addieren sich die Rapiditäten. Die Rapidität ist gegeben durch

$$\gamma = \cosh(y), \quad \gamma\beta = \sinh(y), \quad 1 = \cosh^2(y) - \sinh^2(y) = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2. \quad (6.8)$$

Die Lepton-Rapidität ist die Rapidität eines Boosts vom Laborsystem in ein System mit  $p^\mu = ((E^*), \mathbf{p}_\perp, 0)$ . Wegen  $p^2 \approx 0 = (E^*)^2 - \mathbf{p}_\perp^2$  gilt  $(E^*) = \sqrt{\mathbf{p}_\perp^2} \equiv p_T$ . Dann können wir auch  $p^\mu = p_T(1, \cos\varphi, \sin\varphi, 0)$  schreiben. Führen wir nun einen Boost mit  $\gamma\beta = \sinh(y)$  ins Laborsystem durch:

$$(\gamma p_T, \mathbf{p}_\perp, \gamma\beta p_T) = p_T(\cosh(y), \cos(\varphi), \sin(\varphi), \sinh(y)) = (E, \mathbf{p}_\perp, p_z). \quad (6.9)$$

Dabei handelt es sich um die allgemeine Zerlegung eines lichtartigen Vektors in Rapidität und Azimutalwinkel. Für  $p^2 \neq 0$  reduziert sich das Ganze minimal:

$$p^\mu = (E_T \cosh(y), p_T \cos\varphi, p_T \sin\varphi, E_T \sinh(y)). \quad (6.10)$$

Wir berechnen  $p_T$  und  $y$  aus  $p^\mu$ :

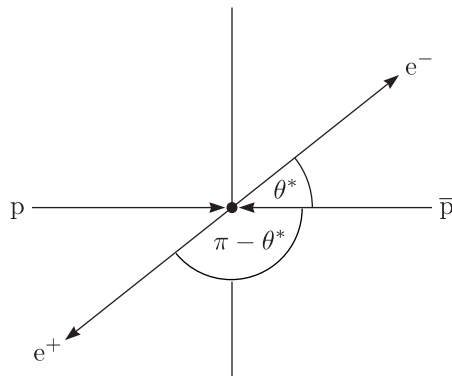
$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \quad \tanh(y) = \frac{E_T \sinh(y)}{E_T \cosh(y)} = \frac{p_z}{E} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{p_z}{E}}{1 - \frac{p_z}{E}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right), \quad (6.11)$$

mit  $E_T^2 = p_T^2 + m^2$ . Für masselose Teilchen gilt  $p_z/E = \cos\theta$  und man definiert die **Pseudorapidität** durch:

$$y|_{m=0} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} \right) = \eta. \quad (6.12)$$

Dabei handelt es sich um die Rapidität, die man braucht, um in ein System zu kommen, in dem sich das Teilchen um  $90^\circ$  von der Strahlachse wegbewegt. Bei masselosen Teilchen stimmt die Rapidität mit der Pseudorapidität überein. Nun müssen wir für einen allgemeinen  $2 \rightarrow 2$ -Prozess die (Pseudo)rapidität mit den Variablen des Schwerpunktsystems verknüpfen. In diesem System gilt:

$$\eta^*(e^-) = -\eta^*(e^+) = \eta^* = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \cos\theta^*}{1 - \cos\theta^*} \right). \quad (6.13)$$





Man benötigt nun die Rapidität des Schwerpunktsystems. Setze in

$$p_{\text{cm}} = \frac{\sqrt{s}}{2}(x_1 + x_2, 0, 0, x_1 - x_2). \quad (6.14)$$

dazu

$$x_1 = \sqrt{\tau} \exp(y), \quad x_2 = \sqrt{\tau} \exp(-y), \quad (6.15)$$

und erhalte:

$$p_{\text{cm}} = \sqrt{s}\sqrt{\tau}(\cosh(y), 0, 0, \sinh(y)). \quad (6.16)$$

Also können wir die Rapidität direkt ablesen:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}}{1 - \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x_1}{x_2} \right). \quad (6.17)$$

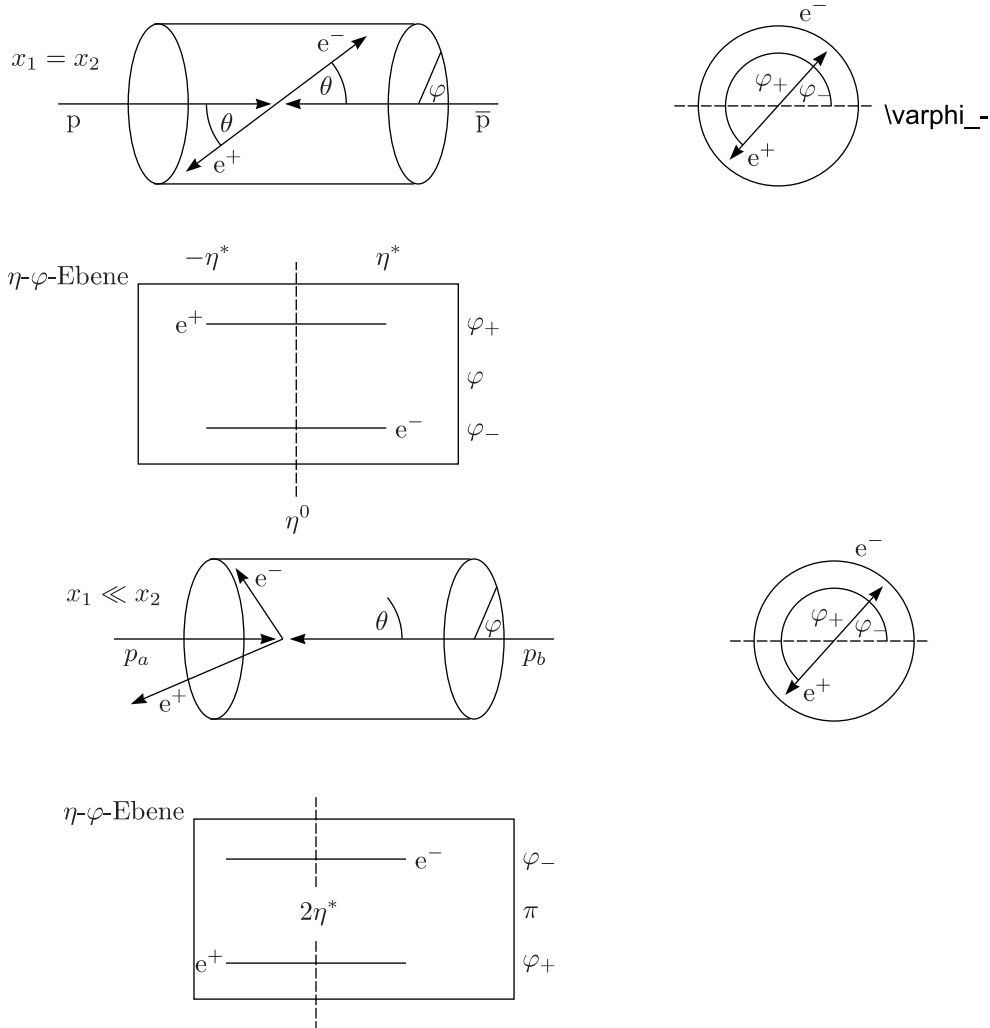
Darüberhinaus gilt:

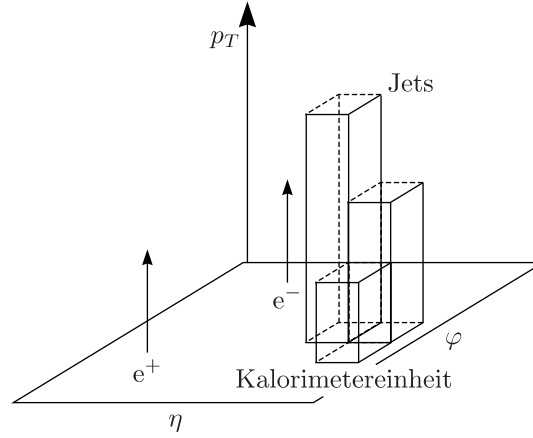
$$p_{\text{cm}}^2 = s\tau = \hat{s} \Rightarrow \tau = \frac{\hat{s}}{s} = x_1 x_2. \quad (6.18)$$

Im Laborsystem gilt  $\eta(e^-) = y + \eta^*$  und  $\eta(e^+) = y - \eta^*$  oder

$$\eta^* = \frac{1}{2}(\eta(e^-) - \eta(e^+)), \quad y = \frac{1}{2}(\eta(e^-) + \eta(e^+)). \quad (6.19)$$

Legoplot:





Wir haben also  $p_T$ ,  $\eta(e^-)$ ,  $\eta(e^+)$  oder  $p_T$ ,  $\eta^*$ ,  $y$  als Auswahl an Variablen. Beziehung zu  $\theta^*$ ,  $\hat{s}$  und  $y$  im Schwerpunktsystem:

$$p_{e^-}^\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, \sin\theta^*, 0, \cos\theta^*), \quad p_{e^+}^\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, -\sin\theta^*, 0, -\cos\theta^*). \quad (6.20)$$

Andererseits kann man das Ganze durch transversalen Impuls und  $\eta^*$  ausdrücken:

$$p_{e^-}^\mu = p_T(\cos(\eta^*), 1, 0, \sinh(\eta^*)). \quad (6.21)$$

Hieraus ergibt sich dann

$$\boxed{p_T = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \sin(\theta^*)}, \quad \boxed{\frac{p_z^*}{E^*} = \tanh(\eta^*) = \cos\theta^*}. \quad (6.22)$$

$$p_T^2 = \frac{\hat{s}}{4} \sin^2(\theta^*) = \frac{\hat{s}}{4}(1 - \cos^2(\theta^*)) = \frac{\hat{s}}{4}(1 - \tanh^2(\eta^*)) = \frac{\hat{s}}{4 \cosh^2(\eta^*)}. \quad (6.23)$$

Dies ist genau die Abbildung zwischen  $\hat{s}$ ,  $\cos(\theta^*)$  und  $p_T$ ,  $\eta^*$ . Das Ziel ist, den Wirkungsquerschnitt durch für den Hadronbeschleuniger günstige Variablen  $\eta^*$ ,  $y$  und  $p_T$  auszudrücken.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für  $e^+e^-$ -Kollision sah folgendermaßen aus:

$$\sigma = \sum_{a,b} \int dx_1 dx_2 f_{a/p}(x_1) f_{b/\bar{p}}(x_2) \frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\theta^*} d\cos\theta^*. \quad (6.24)$$

Die Variablen  $x_1$  und  $x_2$  sind keine direkten Messgrößen. Aus dem Grunde benötigen wir eine Variablentransformation. Wir können das somit auch schreiben als

$$\sigma = \int d\eta^* dy dp_T^2 \frac{d^3\sigma}{d\eta^* dy dp_T^2}. \quad (6.25)$$

Durch eine Substitution  $x_1 = \sqrt{\tau} \exp(y)$ ,  $x_2 = \sqrt{\tau} \exp(-y)$  soll der erste Integral in die Form des zweiten gebracht werden. Das zweidimensionale Maß  $dx_1 dx_2$  lässt sich wie folgt umschreiben:

$$dx_1 dx_2 = \det \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial \tau & \partial x_2 / \partial \tau \\ \partial x_1 / \partial y & \partial x_2 / \partial y \end{pmatrix} dy d\tau = \det \begin{pmatrix} \exp(y)/(2\sqrt{\tau}) & \exp(-y) \\ \sqrt{\tau} \exp(y) & -\sqrt{\tau} \exp(-y) \end{pmatrix} (2\sqrt{\tau}) = dy d\tau. \quad (6.26)$$

Man integriert also über die Rapidität  $y$  und das Quadrat der Schwerpunktsenergie  $\tau$ . Auch numerisch erzielt man bessere Konvergenz mit diesen Variablen. Aus  $\cos(\theta^*) = \tanh(\eta^*)$  ergibt sich

$$\sin(\theta^*) = \sqrt{1 - \tanh^2(\eta^*)} = \frac{1}{\cosh(\eta^*)}. \quad (6.27)$$

Wir können  $p_T = (\sqrt{\hat{s}}/2) \sin(\theta^*)$  ausnutzen, um nach  $\hat{s}$  aufzulösen:

$$\hat{s} = \frac{4p_T^2}{\sin^2(\theta^*)} = 4p_T^2 \cosh^2(\eta^*). \quad (6.28)$$

Darüber hinaus gilt

$$d \cos(\theta^*) = \frac{d \tanh(\eta^*)}{d\eta^*} d\eta^* = \frac{d\eta^*}{\cosh^2(\eta^*)}, \quad (6.29)$$

und außerdem

$$d\tau = \frac{1}{s} d\hat{s} = \frac{4}{s} \cosh^2(\eta^*) dp_T^2. \quad (6.30)$$

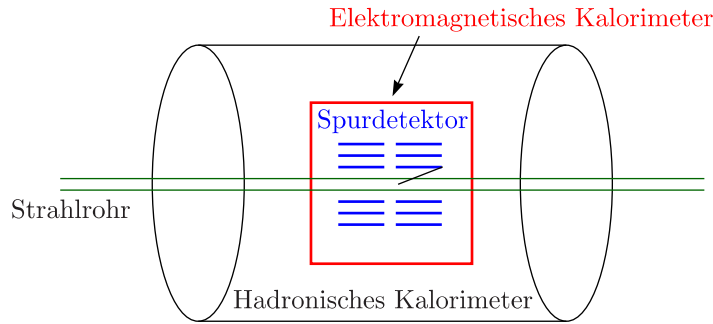
Hieraus ergibt sich dann schlussendlich:

$$dx_1 dx_2 d \cos(\theta^*) = dy \frac{4}{s} \cosh^2(\eta^*) dp_T^2 \frac{d\eta^*}{\cosh^2(\eta^*)} = \frac{4}{s} dy d\eta^* dp_T^2, \quad (6.31)$$

also

$$\boxed{\frac{d^3\sigma}{d\eta^* dy dp_T^2} = \frac{4}{s} \sum_{a,b} f_{a/p}(x_1, \mu_F^2) f_{b/\bar{p}}(x_2, \mu_F^2) \frac{d\hat{\sigma}}{d \cos(\theta^*)}}. \quad (6.32)$$

$\mu_F^2$  ist die Faktorisierungsskala. Für ein Lepton-Paar wählt man dessen invariante Masse:  $\mu_F^2 = \hat{s}$ . In der Jet-Physik ist jedoch  $p_T$  eine bessere Wahl. Nehmen wir nun an, wir wollen experimentelle Cuts haben, also  $p_T(\text{Lepton}) > p_{T,\text{cut}} \approx 10 \text{ GeV}$ , weil man in einem Detektor Leptonen unterhalb eines bestimmten Transversalimpulses nur schwer erkennt.



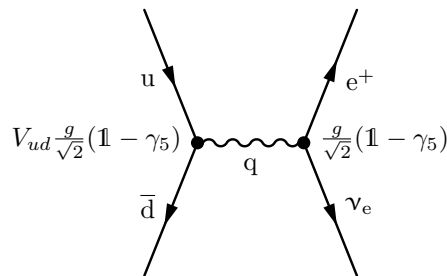
Um Leptonen überhaupt im Spurdetektor nachweisen zu können, muss der Winkel größer sein als ein bestimmter Wert. Dies entspricht der Bedingung  $|\eta(\text{Lepton})| < \eta_{\text{max}} \approx 2,5$ . Die Cuts führen wir in den Integranden durch Sprungfunktionen ein:

$$\sigma_{\text{Cuts}} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta^* \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{s/y} dp_T^2 \frac{d^3\sigma}{d\eta^* dy dp_T^2} \theta(p_T^2 - p_{T,\text{Cut}}^2) \theta(\eta_{\text{max}} - (y + \eta^*)) \theta(\eta_{\text{max}} - (y - \eta^*)). \quad (6.33)$$

Dies ist der Wirkungsquerschnitt, der innerhalb der Akzeptanz des Detektors gemessen werden kann.

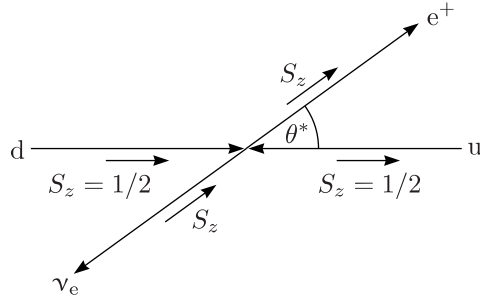
## 6.1 W-Produktion und W-Zerfall

Der partonische Subprozess ist eine Vernichtung von u-Quark und  $\bar{d}$ :  $u\bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow e^+\nu_e$ .



$$\frac{d\hat{\sigma}}{d \cos(\theta^*)} = \frac{1}{3} \frac{|V_{ud}|^2}{8\pi} \left( \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{q^2 (1 + \cos(\theta^*))^2}{(q^2 - m_W^2)^2}, \quad \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8}. \quad (6.34)$$

Die funktionale Form  $(1 + \cos(\theta^*))$  ist eine Konsequenz der maximalen Paritätsverletzung der elektroschwachen Theorie.



Die Vektor-Axialvektor-Struktur gibt die Helizität vor. Die Amplitude muss verschwinden, wenn  $\theta^* \mapsto -1$  geht. Andere Prozesse sind solche für  $ab = u\bar{d}, u\bar{s}, c\bar{d}, c\bar{s}, \bar{d}u, \bar{s}u, \bar{d}c, \bar{s}c$ . Ein Problem tritt auf für  $q^2 = (p_a + p_b)^2 = \hat{s} = m_W^2$ , da divergiert das Wirkungsquerschnitt, also genau im relevanten Bereich! Wir müssen damit eine Resummation im W-Boson-Propagator durchführen:

$$\begin{aligned}
 V &= \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \text{---} + \text{---} \circlearrowleft \circlearrowleft \text{---} = \\
 &= \frac{i}{q^2 - m^2} + \frac{i}{q^2 - m^2} (i\Pi(q^2)) \frac{i}{q^2 - m^2} + \frac{i}{q^2 - m^2} \left( -\Pi(q^2) \frac{1}{q^2 - m^2} \right) + \dots = \\
 &= \frac{i}{q^2 - m^2} \frac{1}{1 + \Pi(q^2) \frac{1}{q^2 - m^2}} = \frac{i}{q^2 - m^2 + \Pi(q^2)}. \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

In der Schleife sind über alle Fermionen zu summieren, die im Standardmodell vorkommen und an das W-Boson koppeln (sofern  $q^2$  genügend groß ist). Weiter gilt

$$\frac{i}{q^2 - m^2 + i\text{Im}\Pi(q^2) + \text{Re}\Pi(q^2)} \xrightarrow{\text{Renormierung}} \frac{i}{q^2 m_{\text{ren}}^2 + i m_{\text{W}}^{\text{ren}} \Gamma_{\text{W}}}, \tag{6.36}$$

wegen  $\text{Im}\Pi(q^2) \approx m_{\text{W}} \Gamma_{\text{W}}$  und  $\text{Re}\Pi(q^2) \approx 0$  für  $q^2 \approx m_{\text{W}}^2$ . Also gilt

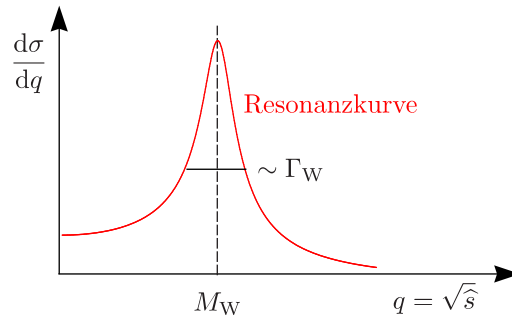
$$\mathcal{M} \sim \frac{i}{q^2 - m^2 + i m \Gamma} \Rightarrow |\mathcal{M}|^2 \sim \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m \Gamma)^2}. \tag{6.37}$$

Dabei handelt es sich um eine Breit-Wigner-Verteilung. Sie folgt also durch Resummation von Korrekturen des W-Boson-Propagators höherer Ordnung. Der W-Boson-Propagator in unitärer Eichung sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{-i}{q^2 - m_{\text{W}}^2 + i m_{\text{W}} \Gamma_{\text{W}}} \left( g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_{\text{W}}^2 - i m_{\text{W}} \Gamma_{\text{W}}} \right). \tag{6.38}$$

Man führt also einen komplexen Massenparameter ein. Dies bietet sich auf Baumgraphenniveau (jedoch nicht bei Schleifenrechnungen) an. Hierbei gilt  $m_{\text{W}} = 80,4 \text{ GeV}$  und  $\Gamma_{\text{W}} \approx 2,1 \text{ GeV}$ .

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d \cos(\theta^*)} = \frac{1}{3} \frac{|V_{ud}|^2}{8\pi} \left( \frac{G_F m_{\text{W}}^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{q^2 (1 + \cos(\theta^*))^2}{(q^2 - m_{\text{W}}^2)^2 + (m_{\text{W}} \Gamma_{\text{W}})^2}. \tag{6.39}$$



- $\nu_e$  ist nicht messbar. Wir können nicht den vollen dreidimensionalen Wirkungsquerschnitt messen, sondern nur eine zweidimensionale Projektion:

$$\frac{d^2\sigma}{d\eta(\text{Lepton}) dp_{T,\text{Lepton}}}. \tag{6.40}$$

$$\bullet \sigma = \sum_{i,j} \int dy d\tau u_i(x_1) \bar{d}_j(x_2) \frac{d\hat{\sigma}}{d \cos(\theta^*)} d \cos(\theta^*)$$

Wir schreiben  $d\tau = 1/sdq^2$ . Da die Resonanz sehr stark ausgeprägt ist, macht man die Resonanzapproximation

$$\frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} \approx k\delta(q^2 - m^2), \quad (6.41)$$

mit einer zu berechnenden Konstanten  $k$ . Wir bestimmen diese, indem wir die Gleichung auf beiden Seiten integrieren:

$$k = \int_{-\infty}^{+\infty} dq^2 \frac{1}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dq'^2 \frac{1}{q'^2 + (m\Gamma)^2}. \quad (6.42)$$

Führen wir eine Substitution  $x = q'^2/(m\Gamma)$  durch, so folgt

$$k = \frac{1}{m\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{m\Gamma}. \quad (6.43)$$

Damit lässt sich der Ausdruck für den differentiellen Wirkungsquerschnitt vereinfachen:

$$\frac{d\hat{\sigma}_{ij}}{d \cos(\theta^*)} = \frac{dF_{ij}}{d \cos(\theta^*)} \delta(q^2 - m_w^2), \quad \frac{dF_{ij}}{d \cos(\theta^*)} = \frac{|V_{u_i d_j}|^2}{24\pi} \left( \frac{G_F^2 m_w^2}{\sqrt{2}} \right)^2 \pi \frac{m_w^2 (1 + \cos(\theta^*))^2}{m_w \Gamma_W}, \quad (6.44)$$

also

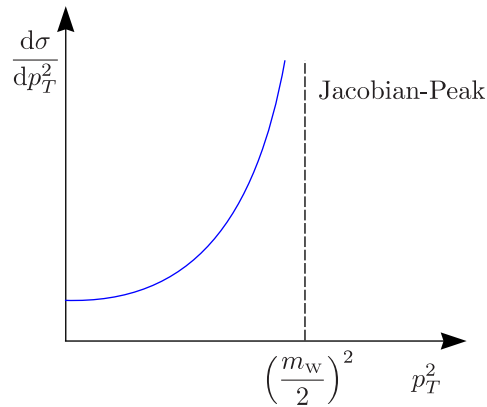
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d \cos(\theta^*)} = \sum_{i,j} \int dy \frac{1}{s} \frac{dF_{ij}}{d \cos(\theta^*)} u_i(x_1) \bar{d}_j(x_2)}. \quad (6.45)$$

Wir ersetzen  $\cos(\theta^*)$  durch  $p_T$  als Variable:

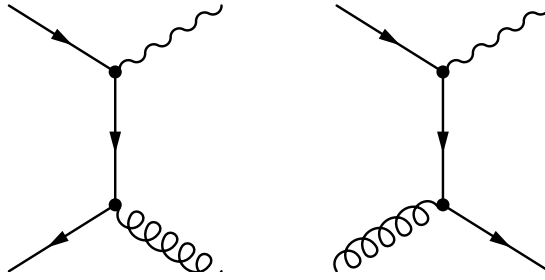
$$p_T = \frac{m_w}{2} \sin(\theta^*) \Rightarrow |\cos(\theta^*)| = \sqrt{1 - \left( \frac{2p_T}{m_w} \right)^2}. \quad (6.46)$$

$$\frac{d\sigma}{dp_T^2} = \frac{d\sigma}{d \cos(\theta^*)} \frac{d \cos(\theta^*)}{dp_T^2} = \frac{d\sigma}{d \cos(\theta^*)} \frac{\frac{2}{m_w}}{\sqrt{m_w^2 - 4p_T^2}}. \quad (6.47)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt divergiert genau an der Grenze des Phasenraumbereichs bei  $m_w = 2p_T$ . Diese Divergenz kommt von der Jacobi-Determinante der Variablentransformation.

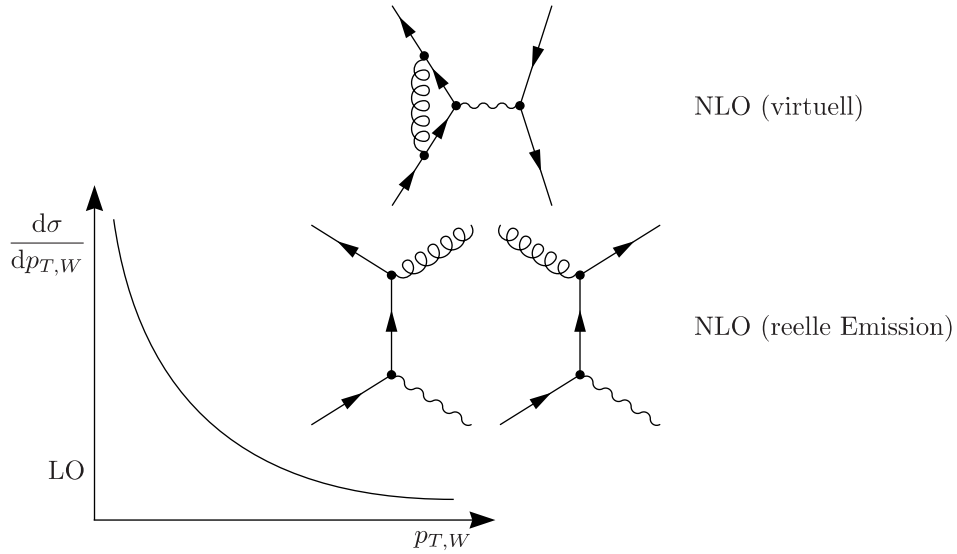


So bestimmt man die W-Boson-Masse experimentell. Die Singularität ist integrierbar und kommt daher, weil bei  $p_T = m_w/2$  sehr viele Endzustände möglich sind. Wird die Rechnung einschließlich des vollen Breit-Wigner-Propagators durchgeführt, ist die Kurve um  $(m_w)/2$  ausgeschmiedt. Berücksichtigt man darüberhinaus Gluonemission (Prozesse höherer Ordnung) führt dies zu  $p_{T,W} > 0$ :

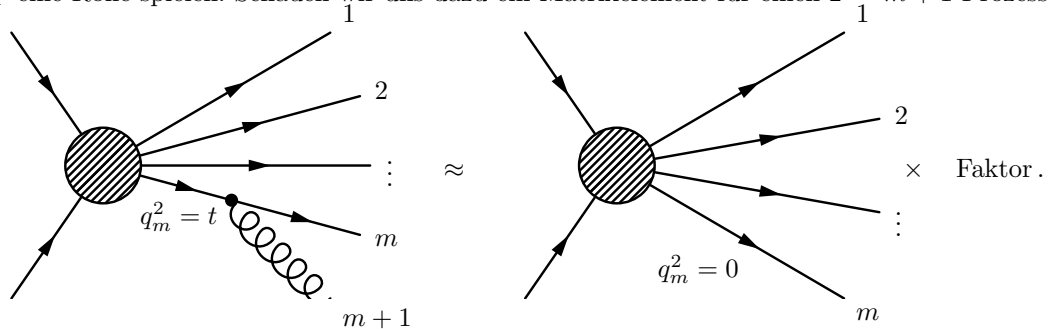


Eine Resummation von Prozessen, in denen mehrere weiche Gluonen emittiert werden, führt zur Sudakov-Unterdrückung. Damit ist  $p_{T,W} = 0$  niemals möglich. Vergleiche mit  $p_T(z)$  beim Tevatron. Wähle Observablen, welche den Effekt der weichen Gluonabstrahlung minimieren (oder zumindest infrarot-sichere Observablen) und nutze die transversale Masse für  $W \rightarrow l\nu_l$ .

$$m_T = \sqrt{(p_{T,l} + p_{T,\nu})^2 - (\mathbf{p}_{T,l} + \mathbf{p}_{T,\nu})^2}. \tag{6.48}$$



Im Bereich um  $p_T = 0$  benötigt man die vollständige Summe, um eine richtige Beschreibung zu bekommen. Es muss somit eine Resummation von weicher Gluonabstrahlung durchgeführt werden. Der nächste Punkt, den wir ansprechen wollen, sind eben diese Sudakov-Faktoren, welche für den Bereich kleiner  $p_T$  eine Rolle spielen. Schauen wir uns dazu ein Matrixelement für einen  $2 \rightarrow m + 1$ -Prozess an.



Den Impuls  $p_m$  kann man im kollinearen Bereich schreiben als  $p_m \approx (1 - z)q_m + \dots$  und  $p_{m+1} \approx zq_m + \dots$ . Damit gilt

$$|\mathcal{M}_{m+1}|^2 \approx |\mathcal{M}_m|^2 \frac{4g_s^2}{t} P_{ij}(z). \tag{6.49}$$

Für kollineare Singularitäten im Endzustand tauchen wieder die Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen  $P_{ij}$  auf. Für die differentiellen partonischen Wirkungsquerschnitte gilt dann

$$d\hat{\sigma}_{m+1} \approx d\hat{\sigma}_m \frac{dt}{t} dz \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ji}(z). \tag{6.50}$$

Das Integral über den Phasenraumanteil hängt mit der mittleren Zahl von zusätzlichen Teilchen zusammen. Aufsummation führt zu einer Poisson-Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Poisson-Verteilung

Null rauskommt, ist  $\exp(-\text{Anzahl})$ . Virtuelle Beiträge sind negativ und die Summe aller extra Emissionen liefert die Wahrscheinlichkeit 1 wegen Unitarität. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt keine Emission stattfindet, ist durch eine Exponentialfunktion mit negativen Argument gegeben. Diese Exponentialfunktion ist der Sudakov-Faktor, also die Wahrscheinlichkeit für exakt  $n = 0$  Emissionen in einem bestimmten Bereich des Impulsübertrags  $t$ , also zwischen  $0 \leq t_0 < t < t_1$ . Sei  $i$  das anfängliche Parton und  $j$  das Parton im Endzustand, so gilt

$$\Delta_i(t) = \exp \left\{ - \sum_j \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt'}{t'} \int_0^1 dz \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ji}(z) \right\}. \quad (6.51)$$

Die Singularität bei  $z = 1$  werden durch die +-Vorschrift regularisiert, so wie die Singularitäten bei  $1/t$  werden durch  $t_0$  regularisiert. Störungstheorie ist nur anwendbar, wenn Impulsüberträge groß gegen die Pionmasse sind. In der Praxis verwendet man  $2 \text{ GeV}^2$  als infraroten Abschneideparameter. Der Übergang von Partonen zu Hadronen ist mit anderen Modellen zu beschreiben. In der QED ist Die Wahrscheinlichkeit für die Abstrahlung von null Photonen exakt gleich null. Die Wahrscheinlichkeit für die Abstrahlung von Photonen oberhalb einer bestimmten Energie lässt sich störungstheoretisch bestimmen. Dann ist  $p_T = 0$ ; durch die Sudakov-Unterdrückung wird dieser Bereich aufgeweicht. Sinnvolle Werte für die Grenzen im obigen Integral sind  $t_0 = 2 \text{ GeV}^2$  und  $t_1 = m_W^2$ . Für  $t_0 \mapsto 0$  folgt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Emission stattfindet gleich null ist. Der Bereich kleiner Transversalimpulse kann durch Störungstheorie nicht gut beschrieben werden. Analog zu Breit-Wigner sind die wichtigsten Terme in der Störungsordnung aufzusummieren. Schauen wir uns das  $p_T$ -Spektrum von Leptonen an: Durch den Rückstoß des W-Bosons nimmt das Lepton Impuls auf, womit das Ende des Leptonenspektrums nicht bei  $m_W/2$  liegt. Das Spektrum ist aufgeweicht durch hohe  $p_T$  von Gluonen. Der Leptonimpuls ist nur eine gute Variable, um den Jacobian-Peak zu sehen, wenn der Bereich hoher  $p_T$  unwichtig ist. Die Möglichkeit um das auszugleichen ist, statt  $p_T$  der Leptonen neue Variablen zu konstruieren, die von zusätzlicher Emission unabhängig sind. Die Messgrößen sind also der Impuls des geladenen Leptons  $\mathbf{p}_{l\pm}$  und  $E_{l\pm} = |\mathbf{p}_{l\pm}|$ . Der fehlende Transversalimpuls ist im Wesentlichen der Transversalimpuls  $\mathbf{p}_{T,\nu}$  des Neutrinos. Wir wollen nun neue Größen definieren, die unabhängig von zusätzlicher Abstrahlung sind: und zwar die **transversale Masse**. Wir beginnen mit der Lepton-Neutrino-invarianten Masse:

$$m^2(l_\nu) = (E_l + E_\nu)^2 - (\mathbf{p}_l + \mathbf{p}_\nu)^2. \quad (6.52)$$

Wir definieren die transversale Masse des Lepton-Neutrino-System, indem wir die longitudinale Information rauswerfen:

$$m_T^2(l_\nu) = (E_{T,l} + \cancel{E}_T)^2 - (\mathbf{p}_{T,l} + \mathbf{p}_{T,\nu})^2, \quad (6.53)$$

mit  $E_{T,l} = |\mathbf{p}_{T,l}|$ ,  $\cancel{E}_T = |\cancel{\mathbf{p}}_T|$ . Die transversalen Anteile ändern sich nicht bei einem Boost in  $z$ -Richtung. Die transversale Masse ist damit unabhängig von der Rapidität im Schwerpunktsystem, also von  $y_{\text{cm}}$  und  $\eta_\nu$ . Die transversale Masse ist immer kleiner oder gleich der invarianten Masse:

$$\begin{aligned} m^2 - m_T^2 &= 2(E_l E_\nu - \mathbf{p}_l \cdot \mathbf{p}_\nu) - 2(E_{T,l} \cancel{E}_T - \mathbf{p}_{T,l} \cdot \mathbf{p}_{T,\nu}) = 2(E_l E_\nu - p_{l,z} p_{\nu,z} - E_{T,l} \cancel{E}_T) = \\ &= 2E_l E_\nu (1 - \cos \theta_l \cos \theta_\nu - \sin \theta_l \sin \theta_\nu) = 2E_l E_\nu \cos(\theta_l - \theta_\nu). \end{aligned} \quad (6.54)$$

Hieraus ist sofort ersichtlich, dass  $0 \leq m_T \leq m$ . Die transversale Masse ersetzt den Transversalimpuls bei harter Gluonabstrahlung. Maximales  $m$  entspricht  $\theta_l = \theta_\nu$  im Laborsystem und  $\theta_l = \theta_\nu = \pi/2$  im Schwerpunktsystem. Aus dem Jacobian-Peak lässt sich experimentell die W-Boson-Masse bestimmen. LHC-Anwendung: Suche nach zusätzlichen Eichbosonen  $W'$  und  $Z'$ . Annahme einer erweiterten Eichgruppe:

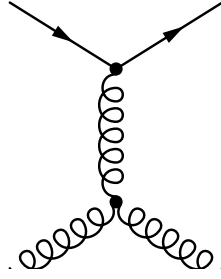
$$G = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R \times \text{U}(1)_{B-L}.$$

Ein solches Modell sagt drei zusätzliche massive Eichbosonen heraus:  $W_R^\pm$  und  $Z'$ . Eine andere Möglichkeit ist eine zusätzliche U(1)-Symmetrie:

$$G = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1) \times \text{U}(1).$$

Hieraus folgt ein zusätzliches massives  $Z'$  durch Brechung. Es gibt jedoch kein Grund dafür, dass die Brechungsskala für zusätzliche Symmetrien im Bereich der Energien des LHC liegt.

Kommen wir nun zur Produktion von Zwei-Jet-Ereignissen. In niedrigster Ordnung ist dies vor allem Rutherford-artige Streuung von Quarks und Gluonen.



Hierbei gilt  $\hat{s} = (p_1 + p_2)^2$ , wobei  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$  parallel zur  $z$ -Achse sind. Des Weiteren ist  $p_T = E \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$ . Wenn die einzelnen Partonen hadronische Jets produzieren, erkennen wir die Richtung und damit die Pseudorapidität (im Gegensatz zu Neutrinos). Typische Energien, die man untersucht, sind  $p_T = 50$  bis  $p_T = 500$  GeV am Tevatron. Bei diesen Energien gilt

$$\frac{g_s^2}{4\pi} = \alpha_s(p_T) \approx 0,1, \quad (6.55)$$

also ist Störungstheorie sinnvoll. Die asymptotische Freiheit erlaubt uns, die gestreuten Teilchen als frei zu betrachten. Auf Baumgraphenniveau kann man ein Parton mit einem Jet identifizieren. Experimentell ist natürlich der Jets eine Ansammlung von Hadronen mit kleiner invarianten Masse. Auf Baumgraphenniveau ist die invariante Masse gleich null. Die Richtung des Partons stimmt mit der Richtung des Jets überein. Aus  $E_T$  des Jets folgt  $p_T$  des Partons. Diese Dualität zwischen Partonen und Jets ist in Ordnung für kleine invariante Massen.

Die Anzahl von Jets mit kleinem  $E_T$  explodiert (analog zur Emission von beliebigen weichen Photonen in der QED). Die auftretenden infraroten und kollinearen Singularitäten werden verlangt, dass man ein minimales  $p_T$  für die Partonen verlangt:

$$E_T > E_{T,j}^{\min},$$

was im Bereich von 20 bis 50 GeV beim LHC liegt. Um eine Gruppe von Hadronen als Jet zu identifizieren, muss damit sowohl auf experimenteller als auch theoretischer Seite definieren, was genau man unter einem Jet versteht (allein schon, um deren Anzahl bestimmen zu können). Dies führt uns zu den sogenannten Jetalgorithmen.

Wenn wir zur nächsthöheren Ordnung gehen, müssen Gluonabstrahlung im Anfangs- und Endzustand, Splittingprozesse usw. berücksichtigt werden. Statt eines masselosen Quark bekommt man eine Superposition von verschiedenen Partonen im Endzustand, die Systeme bilden mit einer kleinen invarianten Masse, die man durch ein masseloses Quark approximieren kann. Diese Prozesse werden durch Partonschauer- und Monte-Carlo-Algorithmen simuliert. Wenn die invarianten Massen von Paaren von Partonen klein genug sind, spielen nicht-perturbative Effekte die Rolle. Dies ist für invariante Massen  $\leq 1$  GeV der Fall. Dann bilden sich Farbschläuche im Confinement, die in beobachtbare Hadronen (Pionen, Protonen, usw.) zerfallen. Durch den Partonschauer bzw. den Hadronisierungsprozess findet eine Umverteilung des Impulses statt; die grundlegende Richtung der ursprünglichen Partonen bleibt dabei erhalten. In der niedrigsten Ordnung lässt sich ein Jet als masseloses Parton beschreiben. In der nächsten Ordnung bekommen Jets eine Masse durch Splitting; das Bild für Jets wird realistischer. Für den Prozess der Hadronisierung existiert keine vollständige Beschreibung; es ist eine Modellierung notwendig. Auf Baumgraphenniveau identifizieren wir ein Parton mit einem Jet. Die Partonrichtung stimmt mit der Jetrichtung ( $\eta, \varphi$ ) und der Partonimpuls  $p_T$  mit dem Jetimpuls  $E_T$  überein. Weiche Partonen haben eine beliebig große Wahrscheinlichkeit zur Abstrahlung, weshalb die Anzahl von Jets mit kleinen  $E_T$  explodiert. (Dabei handelt es sich um eine infrarote Katastrophe für Gluonemission, verursacht durch kollineare Divergenzen.) Man muss deshalb Schnitte durchführen, indem man eine Minimalenergie  $E_T^{\min}$  definiert.

## 6.2 Grundlagen von Jet-Algorithmen

Jets müssen experimentell definiert werden. Wir betrachten ein Ereignis mit vielen Hadronen/Partonen. Das Problem ist, die Jets zu identifizieren. Bilde Cluster von Hadronen/Partonen:

- Entscheide, wie viele Cluster gebildet werden: Dies definiert die Anzahl der Jets.
- Entscheide, welche Teilchen mit welchem Cluster assoziiert werden: Assoziierung entscheidet, wie groß der im Detektor gemessene Impuls eines Jets aussieht.

Es gibt zwei prinzipielle Arten und Weisen, dies experimentell durchzuführen.



### 6.2.1 Das Cone-Schema

Bilde im Raumwinkel einen Kegel um die Clusterbildungen mit bestimmten Öffnungswinkel und zähle alle Teilchen im Kegel. Das Kriterium für die Trennung von Teilchen ist der Abstand in der  $\eta$ - $\varphi$ -Ebene (Legoplot-Ebene):

$$\Delta R_{ij} = \sqrt{(\eta_i - \eta_j)^2 + (\varphi_i - \varphi_j)^2}. \quad (6.56)$$

Rekombiniere Partonen/Cluster mit  $\Delta R_{ij} < R_{\text{cone}}$  (0,4 ... 0,7). Nenne rekombinierte Cluster Jets, wenn  $p_{T_j}^{\text{lab}} > p_{T,\text{min}}$  (200 GeV oder mehr) und  $|\eta_j| < \eta_{\text{max}}$  (4,5 ... 5). Signifikanz von  $\Delta R_{ij}$  für masselose Partonen:

$$p_1 = p_{T,1}(\cosh \eta_1, \cos \varphi_1, \sin \varphi_1, \sinh \eta_1), \quad (6.57)$$

$$p_2 = p_{T,2}(\cosh \eta_2, \cos \varphi_2, \sin \varphi_2, \sinh \eta_2), \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} p^2 &= (p_1 + p_2)^2 = 4p_{T,1}p_{T,2} \left\{ \sinh^2 \left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right\} \approx \\ &\approx p_{T,1}p_{T,2}[(\eta_1 - \eta_2)^2 + (\varphi_1 - \varphi_2)^2] = p_{T,1}p_{T,2}(\Delta R_{12})^2. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Wenn die Rapiditätsabstände klein sind, kann man eine Taylorentwicklung machen. Falls die Entwicklung zuverlässig ist (was auch bei größeren Abständen der Fall ist), handelt es sich dabei um eine gute Approximation für die invariante Masse beider Cluster. Stimmt der Impuls mit der Achse nicht überein, dann iteriert man so lange, bis sich das Ganze stabilisiert. Cone-Algorithmen wurden an Hadronbeschleunigern entwickelt und verwendet.

### 6.2.2 Rekombinationsalgorithmen: Inklusive $k_T$ -Algorithmen mit R-Separation

Rekombinationsalgorithmen wurden an Elektron-Positron-Collidern entwickelt. Wir diskutieren die Variante nach Ellis und Soper. Fasse sukzessive die weichsten Partonen mit den nächsten Nachbarn in  $R_{ij}$  zusammen (alle Teilchen, die auf eine bestimmte Kalorimeterzelle treffen).

- Vergleiche für jedes Paar dieser „Protojets“

$$d_{ij} = \min(E_{T,i}^2, E_{T,j}^2) \frac{(y_i - y_j)^2 + (\varphi_i - \varphi_j)^2}{R^2}, \quad (6.60)$$

mit

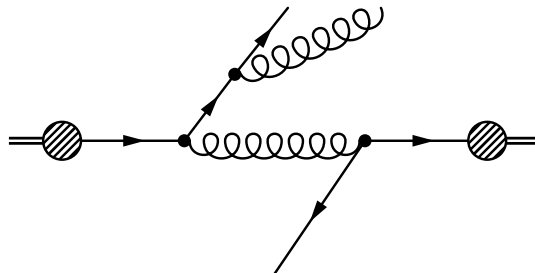
$$d_i = E_{T,i}^2. \quad (6.61)$$

- Weiche Objekte, die nahe bei härteren Objekten sind, werden zuerst aufgefangen. Falls  $\min\{d_{ij}\} < \min\{d_i\}$ , fasse  $i$  und  $j$  zu einem neuem Protojet zusammen.
- Falls  $\min\{d_i\} < \min\{d_{ij}\}$ , nimm Cluster  $i$  in die Liste der Jets auf. Mache weiter mit den verbleibenden Protojets.

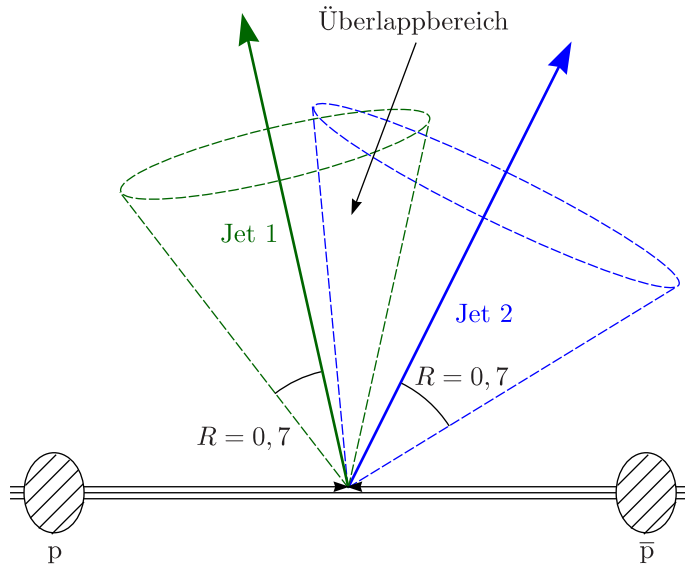
Führe  $E_T$ - und  $\eta$ -Schnitte der endgültigen Jets durch;  $R$  spielt die Rolle der Kegelgröße. Der Vorteil dieses Algorithmus ist, dass alle Teilchen eindeutig einem Jet zugeordnet werden. Nachteilig ist, dass bei zu vielen Teilchen zu viele Jets gebildet werden (hohe Rechenzeit).

### 6.2.3 Verfeinerung von Jet Algorithmen: $k_T$ - und JADE-Typ-Algorithmen

Weise **alle** Teilchen zu definierten Jets oder Strahlüberbleibsel zu. Problem: Hadronische Kollisionen haben ein zugrundeliegendes Ereignis.

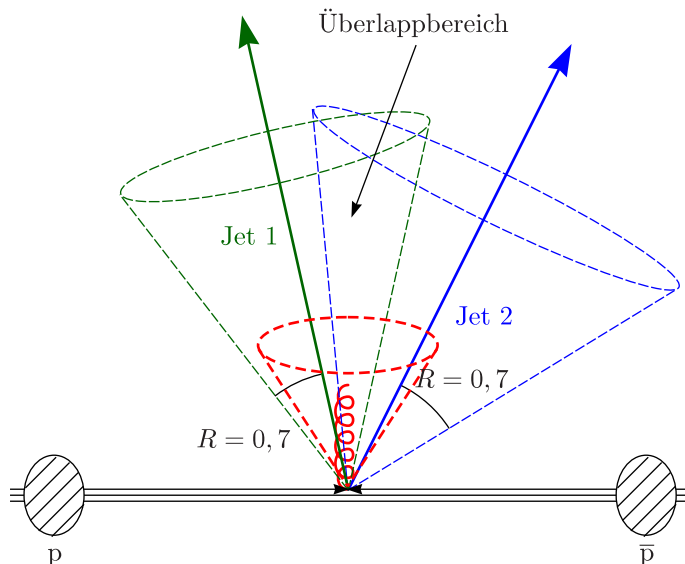


Die Überbleibsel des Protons und des Antiprotons wechselwirken und dies führt zu weiteren Teilchen. Wir betrachten Ereignisse mit mehreren Jets (überlappende Jet-Kegel), beispielsweise in  $p\bar{p} \rightarrow \text{jets}$  bei NLO ( $\sim \alpha_s^3$ ). Was passiert mit den Teilchen im Überlappbereich, welchen Jets ordnet man diese zu?



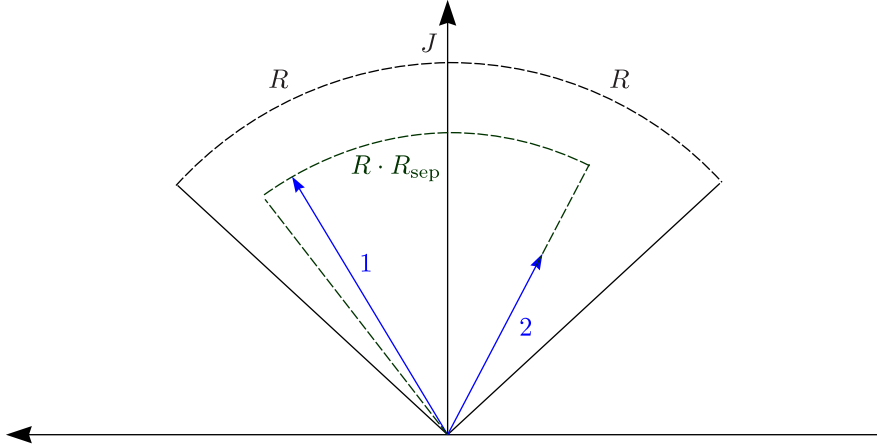
Iterativer Cone-Algorithmus (Radius  $R$ ) (siehe Seymour: hep-ph/9707338):

- Nehme nur solche Kalorimeterzellen (als mögliche sogenannte Seeds) mit Energie  $E > E_0 \approx 1 \text{ GeV}$  und fasse sie zu einem Kegel zusammen.
- Summiere alle Impulse in diesem Kegel auf als möglichen Jetimpuls. Iteriere, bis die Richtung des Kegel stabil geworden ist. Problem: Durch dieses Stabilisierungsverfahren fallen viele dieser Kegel zusammen.
- Werfe Duplikate desselben Jets und „weiche“ Jets von kleinem  $E_T$  weg.
- Fasse überlappende Jets zusammen, wenn sich mehr als  $\gtrsim 50\%$  der Energie  $E_T$  des weicheren Jets innerhalb des härteren Jets befindet.
- Anderenfalls teile Überlappenergie zwischen beiden Jets auf.



Die Präsenz eines weichen Gluons im Überlappbereich mit  $E > E_0$  wird dafür sorgen, dass beide Jets zu einem einzigen zusammengefasst werden. Dann ist der Wirkungsquerschnitt infrarot-sensitiv und hängt logarithmisch von  $E_0$  ab. Der experimentelle Wirkungsquerschnitt hängt somit davon ab, wie viele weiche Partonen produziert worden sind. Der Algorithmus ist deshalb so zu modifizieren, dass es auf Präsenz eines weichen Gluons nicht ankommt.

## Hilfsmittel auf der theoretischen Seite



- Rekombiniere Partonen innerhalb  $R$  der gemeinsamen Jetachse, solange sich beide Partonen  $R \cdot R_{\text{sep}}$  voneinander entfernt befinden ( $R_{\text{sep}} \approx 1, 3$ ).
- Behandle die Mitte zwischen Jets als zusätzliche Seeds. Diese sind unabhängig davon, ob es eine Energiedeposition größer als  $E_0$  gibt oder nicht. Dann tritt keine  $E_0$ -Abhängigkeit mehr auf.

Das Ganze kann für Theorie und Experiment implementiert werden. Unterschiede wichtig in der Praxis:

- NLO-Korrekturen zu Jet-Wirkungsquerschnitten
- Jet-Energie-Korrektur zu zugrundeliegendem Ereignis
- Dijet-invariante Massenauflösung  $H \rightarrow b\bar{b}$

Für Details lerne vom Tevatron: hep-ex/0005012 (Run II Jet Physics)!

#### 6.2.4 Effekt einer Kontakt-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{\Lambda^2} \bar{q}(x) \gamma^\mu q(x) \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x). \quad (6.62)$$

Die Vier-Quark-Wechselwirkung kommt von schweren zusammengesetzten Objekten. Der Wirkungsquerschnitt steigt mit großem  $E_T$  an und die Winkelverteilung würde bei kleinen Winkeln modifiziert werden. Führe Parameter im Schwerpunktsystem ein:

$$\chi = \frac{1 + \cos \theta^*}{1 - \cos \theta^*} = \exp(|\eta_1 - \eta_2|) = \exp(2\eta^*). \quad (6.63)$$

Die QCD sagt eine flache Verteilung  $d\sigma/d\sigma$  (wegen der  $1/u$ -,  $1/t$ -Pole) voraus. Durch die Kontaktterme würde ein Abfall für große  $\chi$  erwartet werden; es treten aber nur normale QCD-Effekte auf. Die Lösung war eine falsche Abschätzung der Partonluminosität und der Energieskalen von Jets. Zusätzlich war die Gluonverteilung größer als angenommen bei  $x \gtrsim 0,3$  (zusätzliche Parameter für große  $x$  der PDFs).