

Hadronischer Higgszerfall bis $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$

Diplomarbeit

vorgelegt von

Marco Schreck



*Universität Karlsruhe
Fakultät für Physik
Institut für Theoretische Teilchenphysik
2007*

Referent: *Prof. Dr. Steinhauser*
Korreferent: *Prof. Dr. Kühn*

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfsmittel angefertigt habe. Die verwendeten Literaturquellen sind im Literaturverzeichnis vollständig angegeben.

Karlsruhe, den 14. Juni 2007

Als Diplomarbeit akzeptiert:

Karlsruhe, den 14. Juni 2007



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Higgs-Phänomenologie	5
2.1	Die Einschränkung der Higgsmasse	5
2.2	Higgsproduktion und -zerfall	7
2.3	Die Suche nach dem Higgsteilchen bei heutigen Collidern	9
2.3.1	Die Suche am LEP bis zum Jahr 2000	10
2.3.2	Die Suche am Tevatron	11
3	Die asymptotische Entwicklung	13
3.1	Aufteilung des Integrationsbereichs	14
3.1.1	Beispiel: Massive Ein-Schleifen-Zweipunktfunktion mit äußerem Impuls	15
3.2	Asymptotische Entwicklung auf diagrammatische Weise	17
3.2.1	Subgraphen und Ko-Subgraphen	17
3.2.2	Das Vorgehen im Falle eines kleinen äußeren Impulses	17
3.2.3	Graphische Durchführung der asymptotischen Entwicklung am Beispiel von Zweipunktfunktionen	18
4	Das optische Theorem	21
4.1	Motivation zur Verwendung des optischen Theorems beim $H \rightarrow gg$	21
4.2	Berechnung der Zerfallsbreite über Propagatorkorrekturen	23
4.2.1	Führende Ordnung	23
4.2.2	Nächst-zu-führende Ordnung	24
4.2.3	Nächst-zu-nächst-zu-führende Ordnung	25
4.3	Zusammenfassung der gebrauchten Notation	27
5	Der hadronische Higgszerfall	29
5.1	Die Zerfallsbreite zur Ordnung α_s^2	29
5.1.1	Das exakte Ergebnis im Einschleifenfalle	29
5.1.2	Die asymptotische Entwicklung „von Hand“ im Einschleifenfalle	29
5.1.3	Die Anwendung des optischen Theorems	30
5.2	Die Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$	34
5.2.1	Beispiele von Vierschleifendiagrammen	35
5.2.2	Zur Renormierung der Ergebnisse	38
5.2.3	Präsentation der Ergebnisse	39

5.3	Die Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$	44
5.3.1	Beispiele von Fünfschleifendiagrammen	45
5.3.2	Renormierung der Ergebnisse	47
5.3.3	Präsentation der Ergebnisse	49
5.4	Überprüfung der Unabhängigkeit von der Renormierungsskala	55
5.5	Building Blocks	57
5.5.1	Anwendung der Methode der Building Blocks	58
5.6	Modifikationen von Mincer	61
5.6.1	Änderungen an Topologien	62
5.6.2	Änderungen an Prozeduren	67
6	Hadronerzeugung durch Elektron-Positron-Kollisionen	71
6.1	Diskussion des Prozesses	71
6.2	Das R-Verhältnis	73
6.3	Berechnung von QCD-Korrekturen	74
6.3.1	Zur Verwendung des optischen Theorems	74
6.3.2	Das optische Theorem anhand des Wirkungsquerschnitts auf Baumgraphenniveau	76
6.3.3	Klassifikation der auftretenden Feynmandiagramme	78
6.3.4	Nicht-Singulett-Diagramme	79
6.3.5	Singulett-Diagramme	82
6.4	Zur Anwendung des optischen Theorems	83
6.5	Durchführung der asymptotischen Entwicklung	84
6.5.1	Demonstration an einem signifikanten Beispiel	84
6.6	Zur Renormierung der Ergebnisse	86
6.6.1	Renormierung des Drei-Schleifen-Anteils	86
6.6.2	Renormierung des Vier-Schleifen-Anteils	87
6.7	Ergebnisse für das R-Verhältnis $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^2)$	90
6.7.1	Nicht-Singulett-Anteil	90
6.7.2	Singulett-Anteil	93
6.8	Ergebnisse für das R-Verhältnis $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$	94
6.8.1	Nicht-Singulett-Anteil	94
6.8.2	Singulett-Anteil	103
6.8.3	Singulett-Anteil: der Fall masseloser u-,d- und s-Quarks	106
6.8.4	Singulett-Anteil: der Fall masseloser u-, d-, s- und c-Quarks	108
7	Parform und Tform – parallele Versionen von Form	111
7.1	Parform	111
7.1.1	Test der Effizienz von Parform	112
7.1.2	Laufzeitmessungen	113
7.1.3	Die Variable „MAXINTERMS“	114
7.2	Tform – eine multiprozessgestützte Version von Form	114
7.2.1	Abhängigkeit der Laufzeit von der Anzahl der Threads	115



8 Zusammenfassung und Ausblick	117
8.1 Der hadronische Higgszerfall	117
8.2 Das R-Verhältnis	117
8.3 Wie geht es weiter?	118
8.3.1 Der hadronische Higgszerfall	118
8.3.2 Das R-Verhältnis	119
8.3.3 Die Parallelisierung von Form	119
Appendices	121
A Herleitung der Zerfallsbreite des gluonischen Higgszerfalls auf Ein-Schleifen-Niveau	121
A.1 Berechnung des Matrixelements „straightforward“	121
A.2 Berechnung des Matrixelements mittels geeigneter Projektoren	123
A.3 Berechnung der Zerfallsbreite aus dem Matrixelement	126
A.4 Passarino-Veltman-Zerlegung	127
A.4.1 Das Integral B_μ	127
A.4.2 Das Integral C_μ	128
A.4.3 Das Tensorintegral $C_{\mu\nu}$	129
A.4.4 Berechnung der skalaren Integrale	131
A.5 Der erste Test: Durchführung einer Taylorentwicklung des Matrixelements	134
B Schleifenintegrale: Probleme, Techniken und Anwendungen	141
B.1 Das Auftreten von Divergenzen	141
B.1.1 Unterscheidung der möglichen Divergenzen	142
B.1.2 Beispiel: Selbstenergie eines skalaren Feldes	142
B.1.3 Feststellung des Divergenzgrades durch Power Counting	143
B.2 Regularisierung	143
B.3 Renormierung	144
B.3.1 Ein Beispiel aus der klassischen Elektrodynamik	147
B.3.2 Beispiel: Herleitung des Massencounterterms in der QCD	148
B.4 Die Berechnung von Schleifenintegralen	152
B.4.1 Die Topologie eines Feynmangraphen	153
C Form	155
C.1 Einführung	155
C.2 Gliederung eines Form-Programmes	155
C.3 Funktionsweise	156
C.3.1 Der Präprozessor	157
C.4 Anwendung auf Probleme in der phänomenologischen Teilchenphysik	158
C.5 Schoonschip – der Vorgänger von Form	159
D Einführung des Programmpakets Qgraf, Exp, Matad/Mincer	161
D.1 Qgraf	161



D.1.1	Die Modell- und die Stildatei	161
D.1.2	Spezifikation des Problems (Topologie)	162
D.2	Q2E und Exp	162
D.2.1	Q2E	162
D.2.2	Exp	163
D.2.3	Ausgabe von Exp (auf dem Bildschirm)	165
D.2.4	Ausgabe von Exp (Quelldatei)	167
D.3	Matad	169
D.3.1	Unterstützte Integrale und Topologien	169
D.3.2	Die Berechnung der Schleifenintegrale	170
D.3.3	Sequentieller Ablauf	170
D.4	Mincer	171
D.4.1	Konzepte	173
D.4.2	Verbesserungen der neuen Version von Mincer	174
E	Die Myon-Paarproduktion durch Elektron-Positron-Kollision auf Baumgraphenniveau	175
F	Das Landau-Yang-Theorem	177
G	Entkoppelte Ergebnisse	179
G.1	Hadronischer Higgszerfall	179
G.1.1	Nächst-zu-führende Ordnung	179
G.1.2	Nächst-zu-nächst-zu-führende Ordnung	181
G.2	Das R-Verhältnis	185
G.2.1	Nicht-Singulett-Anteil	185
G.2.2	Singulett-Anteil	193
H	Form-Programme	195
H.1	Programme zur Berechnung der Entwicklung von $\mathcal{M}(H \rightarrow gg) \sim \alpha_s^2$	195
H.1.1	Die Prozedur <code>integral</code>	195
H.1.2	Die Prozedur <code>taylor</code>	198
H.1.3	Das eigentliche Programm zur Taylorentwicklung	199
H.2	Renormierung des Fünf-Schleifen-Beitrags zum hadronischen Higgszerfall	201
I	Abkürzungen	211
	Literatur	217



1 Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik hat sich bisher als überaus zuverlässig erwiesen, um Teilchen und deren Wechselwirkung untereinander zu beschreiben, wurde es doch in den letzten Jahrzehnten in Colliderexperimenten auf Herz und Nieren getestet. Eine der bewegendsten Fragen der aktuellen Forschung entzieht sich jedoch weiterhin ihrer Beantwortung: Was ist der Ursprung der Masse in unserem Universum? Das ist überaus entscheidend, denn die Masse ist die Quelle der Gravitation, und diese wiederum ist maßgeblich für alle Effekte, die von der allgemeinen Relativitätstheorie vorhergesagt werden, wie der Verzerrung der Raumzeit und damit beispielsweise der Ablenkung eines Lichtstrahls im Schwerefeld der Sonne.

Im Jahre 1964 wurde das Problem in theoretischer Hinsicht dadurch gelöst, dass der Physiker Peter W. Higgs [1] das nach ihm benannte Higgsteilchen postulierte. Dabei hat er ein wichtiges Prinzip, das seinerzeit in der Festkörperphysik schon längst Fuß gefasst hatte, auf die Teilchenphysik angewendet, nämlich die spontane Symmetriebrechung. Aus diesem Mechanismus geht das Higgsteilchen hervor, das allen Teilchen, mit denen es koppelt, Masse gibt.

Das Higgsteilchen selbst hat sich bisher seiner Entdeckung entzogen. Es ist also noch ein theoretisches Konstrukt, der letzte Baustein, der fehlt, um die Gültigkeit des Standardmodells letztlich nachzuweisen. Diesen Durchbruch zu leisten, kommt als Aufgabe vor allem dem Large Hadron Collider (LHC) zu, an dem 2008 nach diversen Testläufen die ersten einschlägigen Experimente gestartet werden.

Da das Higgsteilchen mit sich selbst koppelt, besitzt auch dieses eine Masse. Die ist jedoch ein freier Parameter der Theorie und kann nicht direkt aus dem Standardmodell heraus berechnet werden. Es bleibt Aufgabe von Experimentalphysikern, die Higgsmasse durch Messungen zu bestimmen, nachdem der eindeutige Nachweis des Higgs geglückt ist.

Die möglichen Präzisionsmessungen an modernen Collidern wie dem LHC oder Tevatron erfordern vom theoretischen Standpunkt aus die Berücksichtigung von Quantenkorrekturen höherer Ordnung bei Produktions- und Zerfallserscheinungen des Higgsteilchens. Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden die Korrekturen für die Zerfallsbreite $\Gamma(H \rightarrow gg)$ bis $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ untersucht. Der Higgszerfall $H \rightarrow gg$ ist ein schleifen-induzierter Prozess und besitzt im Bereich kleiner und intermediärer Higgsmasse ein Verzweigungsverhältnis von ungefähr 5%, spielt also für die Detektion des Higgs durchaus eine nicht zu unterschätzende Rolle.



Ein weiterer, vor allem im Large Electron Collider (LEP) wichtiger Prozess, auf dem in dieser Arbeit das Augenmerk liegt, ist die Elektron-Positron-Vernichtung, aus der Hadronen hervorgehen. Dessen Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{had})$ wird bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ untersucht.

Bei hohen Ordnungen Störungstheorie treten in den relevanten Feynmanamplituden komplizierte Schleifenintegrale auf, die von zwei physikalischen Skalen, nämlich der Masse des Topquarks und dem externen Impuls abhängen. Im Allgemeinen lassen sich solche Integrale nicht exakt lösen und man ist auf eine Entwicklung des Integranden bezüglich einer kleinen Größe angewiesen. Eine wichtige und bewährte Technik stellt die asymptotische Entwicklung [2] dar, mit deren Hilfe komplizierte Integrale auf einfachere mit nur einer einzigen Skala zurückgeführt werden können. Die damit verbundenen Berechnungen sind jedoch nach wie vor sehr umfangreich, weshalb man auf effiziente Computeralgebrasysteme wie beispielsweise **Form** [3] zurückgreifen muss.

Diese Diplomarbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird auf die Phänomenologie des Higgsteilchens eingegangen. Die Diskussion richtet sich zuerst darauf, wie sich die Higgsmasse sowohl aus experimenteller als auch aus theoretischer Sicht einschränken lässt. Der zweite Teil ist den Produktions- und Zerfallsprozessen gewidmet, wobei darauf eingegangen wird, welche Prozesse in Abhängigkeit von der Masse des Higgs am wahrscheinlichsten sind. Dies ist als Motivation für eines der Hauptthemen dieser Diplomarbeit gedacht, nämlich der Untersuchung des Higgszerfalls $H \rightarrow gg$.

Kapitel 3 und 4 sind reserviert für das technische Gerüst, das als Grundlage für alle Berechnungen dient, nämlich die asymptotische Entwicklung und das optische Theorem. Für die asymptotische Entwicklung existiert in der Praxis ein sehr anschaulicher Algorithmus, welcher direkt von den entsprechenden Feynmandiagrammen des Problems ausgeht. Darüber hinaus werden die Vorteile aufgezeigt, welche die Verwendung des optischen Theorems [4] bei der Berechnung von Wirkungsquerschnitten bzw. Zerfallsbreiten mit sich bringt. Auch dies wird anhand einiger Beispiele näher erläutert.

Kapitel 5 und 6 sind schließlich der Präsentation aller Ergebnisse vorbehalten, nämlich zum einen für die Zerfallsbreite $\Gamma(H \rightarrow gg)$ und zum anderen für das R-Verhältnis $R(s)$ des Prozesses $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ [4]. Ein Abschnitt dient dazu, zu beschreiben, wie man die nackten Resultate renormiert, da dies zumindest beim zweiten Prozess nicht unbedingt trivial ist.

In Kapitel 7 wird kurz auf die parallelen Versionen von **Form** eingegangen, nämlich **Tform** [5] und **Parform** [6]. Vor allem für **Parform** wurden etliche Tests durchgeführt, was die Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Prozessoren oder der Entwicklungstiefe angeht.

In Kapitel 8 sollen alle Ergebnisse noch einmal in prägnanter Form dargestellt und diskutiert werden. Des Weiteren werden Anregungen darüber vorgebracht, was sich in diesem Themenbereich zukünftig lohnen würde, weiter zu untersuchen.



Die restlichen Berechnungen und Betrachtungen, die nicht unbedingt in den Hauptteil gehören, wurden auf den Anhang ausgelagert. Dazu gehört beispielsweise eine ausführliche Berechnung für $\Gamma(H \rightarrow gg)$ zur führenden Ordnung in Anhang A. In diesem Zusammenhang wird auch auf die Reduktion von Tensorintegralen mittels der Passarino-Veltman-Zerlegung eingegangen.

Anhang B ist einigen grundlegenden Gesichtspunkten zur Regularisierung und Renormierung gewidmet.

In Anhang C und D wird die verwendete Software [7] näher beschrieben. Dazu gehört einerseits das Computeralgebrasystem **Form**, das Grundlage der Berechnungen ist, welche in dieser Diplomarbeit durchgeführt werden. Andererseits soll auf die Funktionsweise der Programme **Qgraf** [8], **Q2E** [9], **Exp** [10, 9], **Matad** [11] und **Mincer** [12] eingegangen werden.

Anhang E kommt einer kurzen Abhandlung des Landau-Yang-Theorems [13] zu, das im Zusammenhang mit dem Prozess $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen sehr hilfreich war, um die Laufzeit bei der Berechnung des R-Verhältnisses bei einer bestimmten Klasse von Diagrammen zu verkürzen.

In Anhang F wird die Berechnung von $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ auf Baumgraphenniveau präsentiert. Da dies eigentlich Stoff in Grundvorlesungen über theoretische Teilchenphysik ist, wird nur auf die wichtigsten Schritte eingegangen.

Anhang G dient dazu, die Ergebnisse für $\Gamma(H \rightarrow gg)$ und $\sigma(e^+e^- \rightarrow$ Hadronen) in entkoppelter Form, also in einer effektiven Theorie mit fünf Quarkflavours zu präsentieren. Dabei werden einerseits alle Ergebnisse für eine allgemeine $SU(N_c)$ angegeben, um die Farbstruktur der verschiedenen Beiträge erkennbar zu machen. Andererseits sind die Resultate für den Fall der QCD abgedruckt.

Schlussendlich sollen in Anhang H einige **Form**-Programme aufgelistet werden, die im Laufe der Diplomarbeit geschrieben wurden. Dazu gehört zum einen das Programm, welches eine Taylorentwicklung von $\mathcal{M}(H \rightarrow gg)$ bildet und zum anderen eines, das die Renormierung von $\Gamma(H \rightarrow gg)$ auf $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ durchführt. Dieses soll als repräsentatives Beispiel der Renormierungsprozedur unter Zuhilfenahme von **Form** dienen.



2 Higgs-Phänomenologie

2.1 Die Einschränkung der Higgsmasse

Das Standardmodell der Teilchenphysik benötigt ein skalares Isospindublett

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \text{ mit } T_3 = \pm \frac{1}{2}, Y = \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

um die Massen der Fermionen und Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung W^\pm , Z erzeugen zu können [14]. Die Einführung direkter Massenterme für diese Teilchen scheitert, weil sie die Eichinvarianz als grundlegende Eigenschaft einer vernünftigen Theorie zerstören. Das skalare Isospindublett besitzt vier Freiheitsgrade, von denen drei den Goldstonebosonen entsprechen, also den longitudinalen Polarisierungen der W^\pm und Z . Diese longitudinalen Polarisierungen sind nach dem Gupta-Bleuler-Formalismus für massive Vektorbosonen notwendig. Der übrige Freiheitsgrad korrespondiert einem physikalischen skalaren Teilchen, nämlich dem Higgsteilchen. Dieses ist benannt nach dem britischen Physiker Peter W. Higgs, der dieses Teilchen in seiner Arbeit zu gebrochenen Symmetrien [1] postulierte. Die Gültigkeit des Standardmodells ist erst dann gezeigt, wenn das Higgsteilchen experimentell nachgewiesen wurde, was als Aufgabe aktuell dem Tevatron, jedoch auch zukünftigen Collidern wie beispielsweise dem LHC zukommt.

Die Higgsmasse selbst ist ein freier Parameter der Theorie. Von verschiedenen Collider-Experimenten ist bekannt, dass sie zwischen 114 GeV (LEP1) und einigen Hundert GeV (LEP, SLC) liegen muss. Darüber hinaus lassen sich sowohl aus theoretischer als auch experimenteller Sicht Schranken für die Masse dieses bisher noch hypothetischen Teilchens angeben [15]:

- 1.) Unitaritätsschranke:

Wäre $m_H > 1 \text{ TeV}$, müssten die W - und Z -Bosonen stark wechselwirken, um die Unitarität bei der hochenergetischen Streuung zu gewährleisten. Dies tun sie natürlich nicht, da sie keine $SU_c(3)$ -Multipletts sind und damit keinen Farbfreiheitsgrad tragen.

- 2.) Zusammenbruch der Störungstheorie:

Ein- und Zweischleifenkorrekturen für die Zerfallsbreiten der Prozesse $H \rightarrow ZZ$,



$H \rightarrow W^+W^-$ und $H \rightarrow f\bar{f}$ sind numerisch bekannt:

$$\Gamma(H \rightarrow ZZ, W^+W^-) \sim \lambda(m_H) \left(1 + 2,800 \dots \frac{\lambda}{16\pi^2} + 62,0308(86) \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right) \quad (2.2)$$

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) \sim g_f^2 \left(1 + 2,117 \dots \frac{\lambda}{16\pi^2} - 32,656 \dots \frac{\lambda^2}{(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(\lambda^3) \right) \quad (2.3)$$

Beträgt die Higgsmasse 930 GeV, dann ist beim bosonischen Zerfall die Zweischleifenkorrektur so groß wie die Einschleifenkorrektur. Beim fermionischen Zerfall tritt dies erst für $m_H = 1100$ GeV ein. Um sinnvolle Störungstheorie betreiben zu können, sollten höhere Korrekturen merklich kleiner sein als die vorhergehenden. Die Gewährleistung dieser Tatsache legt eine weitere obere Schranke für die Higgsmasse fest, welche kleiner ist als die Unitaritätsschranke. Sie liegt bei ungefähr 700 GeV.

3.) Verhalten der Higgs-Selbstkopplung $\lambda(\mu)$:

Ausgangspunkt ist zunächst die Renormierungsgruppengleichung, welche das Laufen der Kopplungskonstanten, also deren Abhängigkeit von der Energieskala μ beschreibt:

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{16\pi^2} (24\lambda^2 + 12\lambda g_t^2 - 6g_t^4 + \dots) \quad (2.4)$$

Die Betrachtung zweier Grenzfälle führt sowohl auf eine obere als auch eine untere Schranke für m_H :

i.) $\lambda(m_H) = m_H^2/(2v^2) \gg 1$ (m_H groß):

Unter dieser Bedingung sind auf der rechten Seite der Renormierungsgruppengleichung alle Terme gegenüber dem ersten vernachlässigbar. Durch Lösen der vereinfachten Differentialgleichung stellt man fest, dass die Higgs-Selbstkopplung λ logarithmisch mit der Energieskala wächst nach dem bekannten Gesetz

$$\lambda(\mu) = \lambda(m_H) \frac{1}{1 - \frac{3\lambda(m_H)}{4\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_H^2}\right)} \quad (2.5)$$

$\lambda(\mu)$ hat bei $\mu = \Lambda$ einen Pol – den sogenannten Landau-Pol – der über die Gleichung

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_H^2}\right) = \frac{4\pi^2}{3\lambda(m_H)} = \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi v}{m_H}\right)^2 \quad (2.6)$$

festgelegt ist. Bei großen Λ ist die Lösung dieser Gleichung gegeben durch



einen kleinen Wert für m_H , für kleine Λ ist es umgekehrt. In der Nähe des Landau-Pols wächst die Kopplung $\lambda(\mu)$ ins Bodenlose und die Störungstheorie bricht zusammen. Damit $\lambda(\mu)$ für $\mu \mapsto \infty$ endlich bleibt, muss $\lambda(m_H) = 0$ sein. Das Problem ist, dass dann die Wechselwirkung abgeschaltet ist und die zugrundeliegende Theorie trivial wird. Der Umstand, dass die Störungstheorie bis zu einer Energieskala Λ (wie beispielsweise der GUT-Skala) funktionieren soll, führt auf die Bedingung $\lambda(\Lambda) \lesssim 1$. Hieraus resultiert eine weitere obere Schranke für die Higgsmasse, nämlich die sogenannte Trivialitätsschranke.

ii.) $\lambda \ll g_t^2$ (m_H klein):

Nach der Renormierungsgruppengleichung gilt dann

$$\mu \frac{d\lambda}{d\mu} = -|\text{const.}| \quad (2.7)$$

womit die Kopplung λ bei großen Energieskalen einen negativen Wert annimmt. In diesem Falle ist das Higgspotential nach unten unbeschränkt und die Theorie hat kein vernünftiges Spektrum mehr. Dieses unphysikalische Verhalten liefert weitere Schranken für m_H .

4.) Direkte Suche nach dem Higgsteilchen in Collider-Experimenten:

Da das Higgsteilchen in gegenwärtigen Experimenten noch nicht gefunden wurde, muss dessen Masse zwischen 114 GeV und einigen Hundert GeV liegen, wie dies schon auf Seite 5 erwähnt wurde. Diese Schranken sind ersichtlich aus den Daten, die man am LEP und anderen Collidern gesammelt hat.

2.2 Higgsproduktion und -zerfall

Im Standardmodell sind Zerfallsbreite, Verzweigungsverhältnis und Wirkungsquerschnitte für Streuprozesse des Higgs unter anderem durch die Yukawa-Kopplung an Fermionen charakterisiert. Diese Größen hängen von der Masse der jeweiligen Fermionen und Eichbosonen ab. Zur Diskussion der Zerfallserscheinungen und der Phänomenologie ist es geschickt, drei Fälle zu unterscheiden und zwar den Bereich niedriger Higgsmasse ($m_H \leq m_Z$), intermediärer Higgsmasse ($m_Z < m_H \leq 2m_Z$) und großer Higgsmasse ($m_H > 2m_Z$).



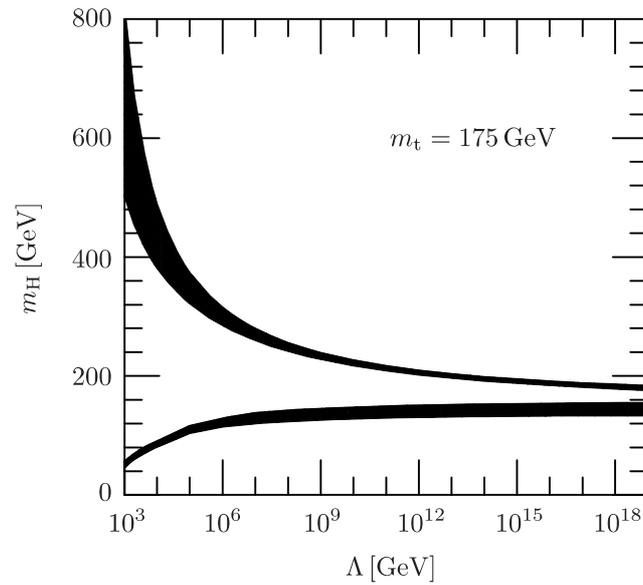
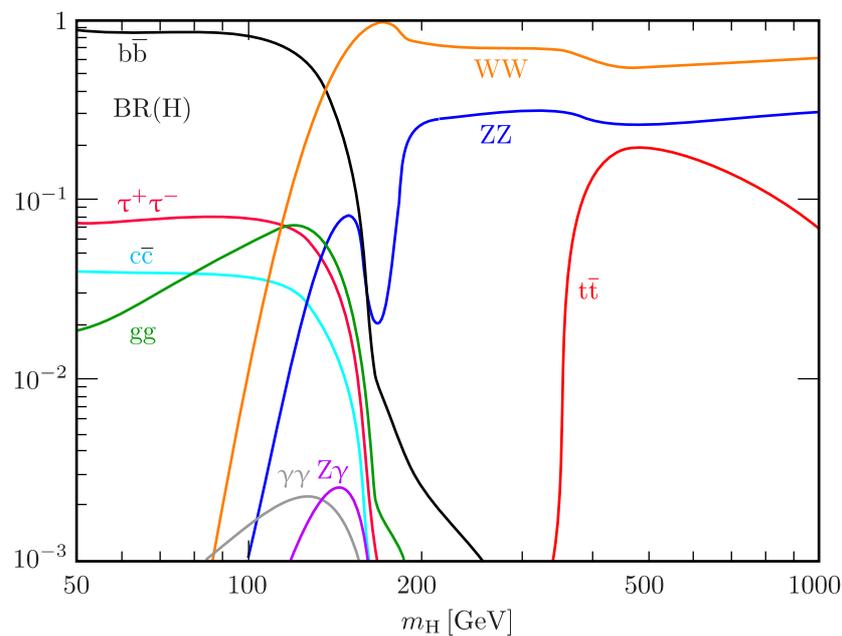
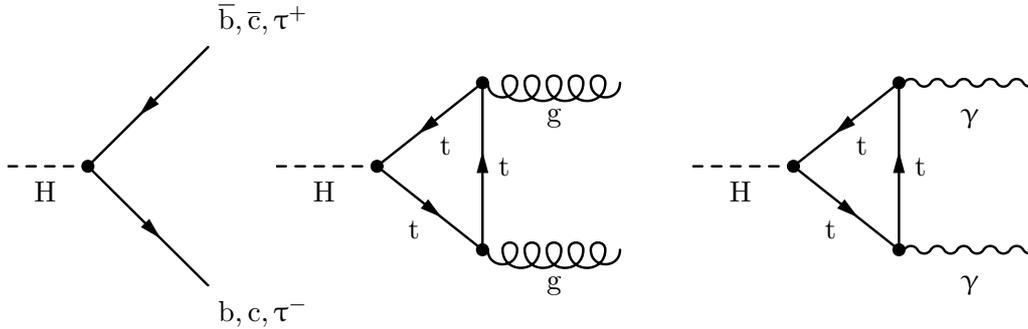


Abbildung 2.1: Unsicherheiten auf untere und obere Grenze von m_H mit $m_t = 175$ GeV und $\alpha_s(m_Z) = 0,118$ (Quelle: [15])



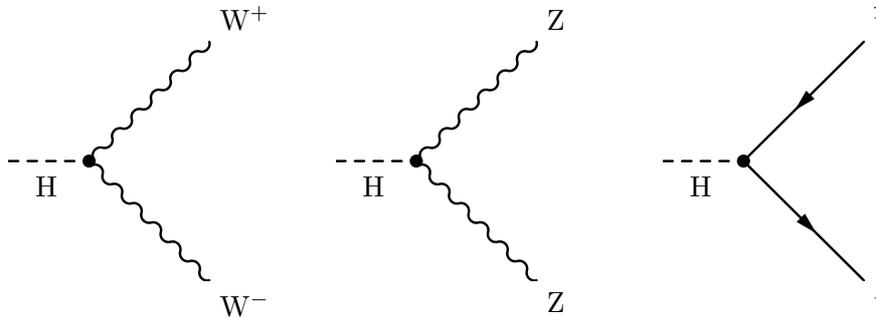
Für kleine m_H ist der Higgszerfall in ein $b\bar{b}$ -Paar dominant, da er ein auf Baumgraphenniveau induzierter Prozess ist und die Masse des b-Quarks mit ungefähr 5 GeV die Massen fast aller anderen Teilchen, die in diesem Bereich relevant sind, übertrifft. Dieser Zerfall macht etwa 90 % des Verzweigungsverhältnisses aus. Der restliche Prozentsatz

verteilt sich auf Zerfälle in $c\bar{c}$, $\tau^+\tau^-$ und gg .



Die im Rahmen dieser Diplomarbeit betrachtete Zerfallerscheinung in Gluonen über eine Top-Quark-Schleife besitzt bei $m_H = 120 \text{ GeV}$ ein Verzweigungsverhältnis von etwa 5% und wird besonders für intermediäre Higgsmassen wichtig. Analog dazu sind auch die Zerfälle in zwei Photonen $\gamma\gamma$ bzw. ein Eichboson Z und ein Photon γ möglich. Sie sind zwar selten, aber sehr gut nachweisbar. Für $m_H > 2m_Z$ verlieren diese Prozesse sehr schnell an Bedeutung. Dann werden die Zerfälle in W^+W^- - und ZZ -Paare (mit den Verzweigungsverhältnissen $2/3$ bzw. $1/3$) dominant, da deren Zerfallsbreite kubisch von der Higgsmasse abhängt und damit für große Higgsmassen an Bedeutung gewinnt:

$$\Gamma_{W^+W^-} = \frac{1}{8\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cdot m_H^3 \sqrt{1 - \frac{4m_W^2}{m_H^2}} \cdot \left(\frac{3}{4} \left(\frac{4m_W^2}{m_H^2} \right)^2 - 4 \frac{m_W^2}{m_H^2} + 1 \right) \quad (2.8)$$



Bei $m_H = 2m_t$ wird noch der Zerfall in ein $t\bar{t}$ -Paar kinematisch möglich. Dessen Zerfallsbreite Γ ist in niedrigster Ordnung Störungstheorie jedoch nur proportional zu m_H :

$$\Gamma_{t\bar{t}} = \frac{3}{4\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_H m_t^2 \left(1 - \frac{4m_t^2}{m_H^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.9)$$

2.3 Die Suche nach dem Higgsteilchen bei heutigen Collidern

2.3.1 Die Suche am LEP bis zum Jahr 2000

Der Suche nach dem Higgsteilchen am LEP liegt der sogenannte Bjorken-Prozess (auch Higgsstrahlungsprozess genannt) $Z \rightarrow Z^*H \rightarrow Hff$ zugrunde [14]. Dabei strahlt ein Z-Boson ein Higgsteilchen ab, wird virtuell und zerfällt danach in ein Fermion-Antifermion-Paar. Der Zerfall ist zwar unterdrückt durch die elektroschwache Kopplung, jedoch sowohl beim LEP1 als auch beim LEP2 von entscheidender Bedeutung, weil an diesem Collider eine große Anzahl an Z-Bosonen erzeugt wird. Da der Bjorken-Prozess bisher nicht nachgewiesen werden konnte, lassen sich Higgsmassen < 114 GeV ausschließen.

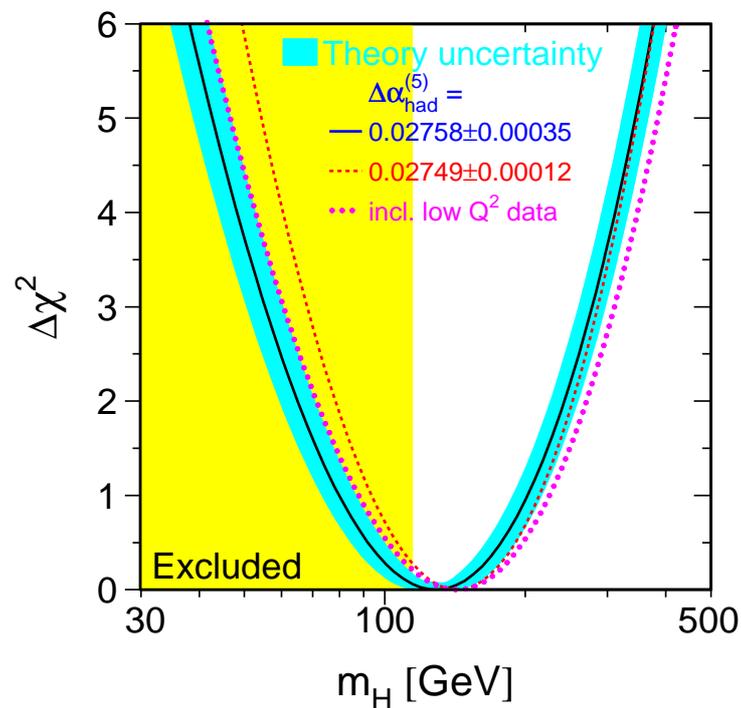


Abbildung 2.2: ausgeschlossener Bereich für m_H durch Messungen am LEP; Quelle: <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/plots/summer2006/>

Am LEP2 gilt ebenfalls der Bjorken-Prozess als Grundlage für die Higgsuche. Da hier eine höhere Schwerpunktsenergie zur Verfügung steht, kann sich das Z-Boson auf der Massenschale befinden, wobei das Higgsteilchen am wahrscheinlichsten in ein $b\bar{b}$ -Paar zerfällt. Liegt m_H in der Nähe der Z-Masse, liefert die Reaktion $e^+e^- \mapsto ZZ \mapsto b\bar{b}Z$ einen beträchtlichen Untergrund an Z-Bosonen, was natürlich beim Nachweis ein Problem darstellen kann.

2.3.2 Die Suche am Tevatron

Das Higgsteilchen am Tevatron zu finden, ist prinzipiell möglich, stellt jedoch eine große Herausforderung dar. Dies ist darin begründet, dass die Wirkungsquerschnitte der möglichen Produktionserscheinungen relativ klein sind und diese Prozesse durch einen großen Untergrund überlagert werden. Beispielsweise kommen auf 100 Untergrundsignale fünf Signale, die vom Prozess $ZH \rightarrow llb\bar{b}$ ausgehen, und von diesen fünf wird im Schnitt nur ein einziges akzeptiert. Das Ziel ist somit, die Signalakzeptanz zu verbessern, nämlich den Trigger und die Identifikation von b-Quarks, also das sogenannte b-Tagging. Mittels eines Silizium-Mikrovertexdetektors kann dies vollbracht werden, da dieser ein besseres Signal-zu-Rauschen-Verhältnis besitzt. Weitere Innovationen wären, den Untergrund mittels effizienterer b-Tagging-Algorithmen und einer besseren Massenauflösung zu verringern. Durch eine Verwendung sogenannter neuronaler Netze könnte man die Analyse verbessern, um die signifikanten Signale aus dem Untergrund zu extrahieren.

Am Tevatron sind die Prozesse $qq \rightarrow WH \rightarrow W\bar{b}b$ bzw. $qq \rightarrow WH \rightarrow W\tau^-\tau^+$ für die Higgssuche am geeignetsten. Der Zerfall $q\bar{q} \rightarrow ZH \rightarrow Zb\bar{b}$ ist von geringerer Bedeutung, da der neutrale Strom schwächer koppelt als der geladene [14].

Leider werden diese Reaktionen überlagert durch einen Untergrund an $b\bar{b}$ - und $t\bar{t}$ -Paaren, die aus $WZ \rightarrow Wb\bar{b}$ bzw. $WZ \rightarrow Wt\bar{t}$ resultieren. Bei einer Luminosität von ungefähr 2 fb^{-1} wird das Higgs nur dann nachgewiesen werden können, falls die Higgsmasse kleiner als die Masse des Z-Bosons ist. Um für den Massenbereich jenseits des Z-Bosons sensitiv zu sein, muss die Luminosität auf jeden Fall erhöht werden.





3 Die asymptotische Entwicklung

Die exakte Berechnung von Schleifenintegralen erweist sich oft als schwierig bzw. in vielen Fällen als unmöglich. Bei einer vorgegebenen Schleifenanzahl nimmt die Komplexität eines solchen Integrals mit der Anzahl der Skalen (also Massen und äußeren Impulsen) zu, weshalb die analytische Auswertung vor allem dann scheitert, wenn der Integrand von mehreren Skalen abhängt.

Das Ergebnis eines Schleifenintegrals besteht im Allgemeinen aus Lorentz-Invarianten, die sich aus den auftretenden Skalen zusammensetzen lassen, so dass die Massendimension des Ergebnisses der Massendimension des zu berechnenden Integrals entspricht. Genau das stellt bei komplizierten Integralen den Knackpunkt dar, da man aus mehreren Skalen dimensionslose Invarianten bauen kann, die als Argument von beliebig komplizierten Funktionen (beispielsweise Polylogarithmen oder hypergeometrischen Funktionen) auftreten können. Zur Veranschaulichung soll folgendes Beispiel dienen. Angenommen, der Integrand beinhaltet zwei Skalen, nämlich einen äußeren Impuls q und eine Masse m :

$$F_{\Gamma}(m, q) = \int \frac{d^d k}{(k^2 - m^2)^2 (q - k)^2} \quad (3.1)$$

Dimensionslose Invarianten sind dann $(m^2/q^2)^n$ und das exakte Ergebnis besitzt die Form [2]

$$F_{\Gamma}(m, q) = -i\pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1 + \epsilon)}{(1 - \epsilon)(m^2)^{1+\epsilon}} {}_2F_1 \left(1, 1 + \epsilon; 2 - \epsilon; \frac{q^2}{m^2} \right) \quad (3.2)$$

wobei es sich bei ${}_2F_1$ um eine hypergeometrische Funktion (Verallgemeinerung der geometrischen Reihe) handelt, welche definiert ist durch:

$${}_2F_1(a, b; c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (3.3)$$

Es ist erschreckend, wie kompliziert schon das analytische Ergebnis eines Einschleifenintegrals mit nur zwei physikalischen Skalen sein kann.

Viel einfacher gestaltet sich die Berechnung von Integralen mit nur einer einzigen Skala, also einem äußeren Impuls oder einer Masse, da dessen Ergebnis direkt proportional zur auftretenden Skala sein muss. Das ist auch die Motivation dafür, dass skalenlose Integrale (also masselose Tadpoles) in dimensionaler Regularisierung gleich Null gesetzt werden,

also zum Beispiel:

$$\int d^d k \frac{1}{k^\alpha} = 0 \quad (3.4)$$

Aufgrund der Schwierigkeit, exakte Lösungen von Feynmanintegralen mit mehreren Skalen zu berechnen, ist eine Entwicklung des Integranden bezüglich der hierarchisch kleinen Skalen manchmal unerlässlich, um wenigstens ein Ergebnis zu erhalten, das für bestimmte Grenzfälle sinnvoll ist. Diese Entwicklung muss sukzessive für jede andere kleine Skala wiederholt werden. Als Folge hiervon treten dann nur noch Integrale mit einer einzigen Skala auf, die einfacher auszuwerten sind.

Man könnte zunächst angeregt sein, eine gewöhnliche Taylorentwicklung des Integranden nach den kleinen Skalen durchzuführen. Dabei wird man jedoch schnell feststellen, dass diese „naive“ Methode in den meisten Fällen zum Scheitern verurteilt ist, führt sie nämlich auf zusätzliche künstliche Infrarotdivergenzen, die im Endergebnis bei einer exakten Rechnung nicht auftreten würden. Die tiefere mathematische Ursache ist darin begründet, dass man dabei im Prinzip Differentiation und Integration vertauscht, was nur möglich ist, wenn bestimmte Voraussetzungen an den Integranden gestellt werden können.

Um das auftretende Problem zu umgehen, bedarf es somit einer etwas differenzierteren Methode als der gewöhnlichen Taylorentwicklung, nämlich der sogenannten asymptotischen Entwicklung [2]. Darauf, wie diese anzuwenden ist, soll im folgenden Kapitel eingegangen werden.

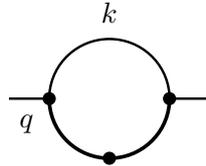
3.1 Aufteilung des Integrationsbereichs

Zunächst teilt man das Integrationsgebiet in verschiedene Intervalle bezüglich der physikalischen Skalen, welche für die jeweilige Problemstellung charakteristisch sind, auf. Hat man beispielsweise einen kleinen äußeren Impuls q und eine große Masse m – es gelte also $m^2 \gg q^2$ – so müssen zwei Fälle betrachtet werden. Im ersten Falle sei der Integrationsimpuls k klein, also von der Größenordnung des äußeren Impulses: $k^2 \approx q^2 \ll m^2$. Dann ist eine Taylorentwicklung sowohl nach k als auch nach q durchzuführen. Im zweiten Falle sei k groß: $q^2 \ll k^2 \approx m^2$. Dann darf nur nach den kleinen äußeren Impuls q taylorentwickelt werden. Zum Schluss sind beide Entwicklungen zu addieren, was gewährleistet, dass alle künstlichen Divergenzen herausfallen. Wie dieses Konzept im Detail funktioniert, wird im Folgenden anhand eines einfachen Beispiels erklärt.



3.1.1 Beispiel: Massive Ein-Schleifen-Zweipunktfunktion mit äußerem Impuls

Als Beispiel für die Effektivität des Verfahrens soll die asymptotische Entwicklung der Zweipunktfunktion vom Anfang des Kapitels dienen:



Die dünne Linie sei masselos und die dicke massiv. Außerdem soll der massive Propagator in der zweifachen Potenz auftreten, was durch den Punkt auf der dicken Linie gekennzeichnet ist. Damit lautet das Integral:

$$F_{\Gamma}(m, q) = \int \frac{d^d k}{(k^2 - m^2)^2 (q - k)^2} \quad (3.5)$$

Einer der beiden Propagatoren ist massiv und der andere masselos; der masselose hängt jedoch vom äußeren Impuls ab. Das exakte Ergebnis dieses Ein-Schleifen-Integrals ist bekannt nach Gleichung (3.2). Die Komplexität der exakten Lösung des Integrals ist unumstritten. Deshalb soll eine asymptotische Entwicklung durchgeführt werden und zwar im Grenzfalle eines großen äußeren Impulses q und kleiner Masse m . Dazu ist der Integrand in zwei bezüglich des Integrationsimpulses k unterschiedlichen Regionen zu entwickeln:

- 1.) $k^2 \approx m^2 \ll q^2$:

In der ersten Region ist der Integrationsimpuls klein, nämlich von der Größenordnung der Masse m . Unter dieser Voraussetzung kann nur der masselose Propagator bezüglich k entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2 (q - k)^2} &= \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \frac{1}{q^2 - 2k \cdot q + k^2} = \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \frac{1}{q^2} \frac{1}{1 + \frac{2k \cdot q - k^2}{q^2}} = \\ &= \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2k \cdot q - k^2}{q^2} \right)^n \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die ersten Terme der Entwicklung sind von folgender Form:

$$\frac{1}{q^2} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{1}{q^4} \int d^d k \frac{2k \cdot q - k^2}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{1}{q^6} \int d^d k \frac{(2k \cdot q - k^2)^2}{(k^2 - m^2)^2} + \dots \quad (3.7)$$



2.) $k^2 \approx q^2 \gg m^2$

Die zweite Region ist dadurch charakterisiert, dass der Integrationsimpuls groß im Vergleich zur Masse ist. Er liegt in der Größenordnung des äußeren Impulses q . Damit ist es möglich, eine Entwicklung des massiven Propagators nach m durchzuführen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2 (q - k)^2} &= \frac{1}{(q - k)^2} \frac{1}{k^4 - 2k^2 m^2 + m^4} = \frac{1}{(q - k)^2} \frac{1}{k^4} \frac{1}{1 - \left(\frac{2m^2}{k^2} - \frac{m^4}{k^4}\right)} = \\ &= \frac{1}{(q - k)^2} \frac{1}{k^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2m^2}{k^2} - \frac{m^4}{k^4}\right)^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

Hier lauten die ersten Terme:

$$\int d^d k \frac{1}{(k^2)^2 (q - k)^2} + 2m^2 \int d^d k \frac{1}{(k^2)^3 (q - k)^2} + \dots \quad (3.9)$$

Integriert wird über den gesamten k -Bereich, also müssen die Terme beider Regionen aufsummiert werden:

$$\begin{aligned} F_{\Gamma} &\sim \int \frac{d^d k}{k^4 (q - k)^2} + 2m^2 \int \frac{d^d k}{k^6 (q - k)^2} + \dots \\ &+ \frac{1}{q^2} \int \frac{d^d k}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{1}{q^4} \int d^d k \frac{2k \cdot q - k^2}{(k^2 - m^2)^2} + \frac{1}{q^6} \int d^d k \frac{(2k \cdot q)^2}{(k^2 - m^2)^2} + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Durch Berechnung der Integrale ergibt sich

$$F_{\Gamma} = \frac{i\pi^{\frac{d}{2}}}{(-q^2)^{1+\varepsilon}} \frac{\Gamma(1 - \varepsilon)^2 \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1 - 2\varepsilon)} \left(1 - 2\varepsilon \frac{m^2}{q^2} + \dots\right) + \frac{i\pi^{\frac{d}{2}}}{q^2 (m^2)^{\varepsilon}} \Gamma(\varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{m^2}{q^2} + \dots\right) \quad (3.11)$$

und nach der Entwicklung bezüglich ε folgt schließlich:

$$\begin{aligned} F_{\Gamma} &= i\pi^{\frac{d}{2}} \left\{ -\frac{1}{q^2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \varepsilon \ln(-q^2) + \dots) \left(1 - 2\varepsilon \frac{m^2}{q^2} + \dots\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{q^2} \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \varepsilon \frac{m^2}{q^2} + \dots\right) (1 + \varepsilon \ln(m^2) + \dots) \right\} = \\ &= i\pi^{\frac{d}{2}} \left\{ -\frac{1}{q^2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{q^2} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\ln(-q^2)}{q^2} + 2\frac{m^2}{q^4} + \frac{\ln(-q^2)}{q^2} + \frac{m^2}{q^4} - \frac{1}{q^2} \ln(m^2) + \dots \right\} = \\ &= \frac{i\pi^{\frac{d}{2}}}{q^2} \left[\ln\left(\frac{-q^2}{m^2}\right) + \frac{3m^2}{q^2} + \dots \right] \end{aligned}$$



(3.12)

Das Ergebnis ist frei von Divergenzen und stimmt mit der Entwicklung des bekannten exakten Resultats überein.

3.2 Asymptotische Entwicklung auf diagrammatische Weise

Für den im vorigen Kapitel eingeführten Formalismus existiert ein anschaulicher Algorithmus, der direkt auf diagrammatischem Niveau Anwendung findet [7], [10], [16], [2].

Es gibt hierbei zwei verschiedene Kochrezepte, je nachdem, ob der äußere Impuls als klein oder groß angesehen wird. Da in dieser Diplomarbeit der äußere Impuls immer viel kleiner ist als die Masse der schweren Linien des Diagramms, soll die Vorgehensweise nur für den Fall eines kleinen äußeren Impulses diskutiert werden. Für den anderen Fall wird auf weiterführende Literatur [2] verwiesen.

3.2.1 Subgraphen und Ko-Subgraphen

Um die Terminologie der folgenden Abschnitte verstehen zu können, soll kurz auf wichtige Begriffe im Zusammenhang der asymptotischen Entwicklung von Feynmandiagrammen eingegangen werden.

Ein Feynmandiagramm Γ besteht aus einer Menge von i internen Linien, l Schleifen und n Vertices. An jedem Vertex treffen interne (und teilweise externe) Impulse aufeinander. Ein Subgraph $\gamma \subset \Gamma$ ist ein Ausschnitt (Unterstruktur) eines Graphen, innerhalb dessen alle Vertices und Schleifen zu Γ gehören und alle Beziehungen zwischen den Impulsen weiterhin ihre Gültigkeit haben. Der Quotientengraph (Ko-Subgraph) Γ/γ folgt aus Γ , indem der Subgraph γ zu einem Punkt komprimiert wird. Die skalare Feynmanamplitude $\Gamma(\{a_k\})$, die zum Graphen Γ gehört, ist eine Funktion der Invarianten, die aus externen Impulsen und den Massenquadraten gebildet werden können.

3.2.2 Das Vorgehen im Falle eines kleinen äußeren Impulses

Im Feynmandiagramm sind alle asymptotisch irreduziblen Subgraphen γ_{AI} zu finden. Ein solcher Subgraph soll alle massiven Linien enthalten. Er kann als Ganzes betrachtet zwar reduzibel sein, darf aber nicht nach dem Durchschneiden einer massiven Linie in weitere voneinander unabhängige Teile zerfallen. Jeder Subgraph dieser Form ist als Taylorreihe in den äußeren Impulsen zu entwickeln. Dabei werden auch alle Integrationsimpulse, die externe Impulse bezüglich dieses Subgraphen sind, als klein betrachtet.

Die Entwicklung des gesamten Diagramms im Falle einer großen Masse ist die Summe aller Kombinationen von nicht überlappenden Kästchen, welche so eingezeichnet werden,



dass sich alle massiven Linien innerhalb eines solchen Kästchens befinden. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$\Gamma = \sum_{\{\gamma_{AI}\}} \Gamma/\{\gamma_{AI}\} \circ \mathcal{T}^{(N)}\{\gamma_{AI}\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M^N}\right) \quad (3.13)$$

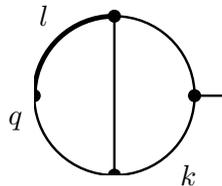
Γ ist der zu entwickelnde Feynmangraph. Die Summe läuft über alle Familien $\{\gamma_{AI}\}$ von sich nicht überlappenden asymptotisch irreduziblen Subgraphen, welche alle massiven Linien enthalten. $\mathcal{T}^{(N)}\{\gamma_{AI}\}$ steht für die Taylorentwicklung von Subgraphen der Menge $\{\gamma_{AI}\}$ nach deren externen Impulsen. (Das können eventuell auch Integrationsimpulse sein.) $\Gamma/\{\gamma_{AI}\}$ ist der Graph, der sich aus Γ ergibt, falls alle Subgraphen aus $\{\gamma_{AI}\}$ zu einem Punkt komprimiert werden. Der übrige Graph trägt die Bezeichnung Ko-Subgraph; dessen Propagatoren sind alle masselos.

Wie aus der Formel ersichtlich ist, werden die Propagatoren im Subgraphen entwickelt, danach die Integrale berechnet und das Ergebnis dann in den Ko-Subgraphen eingesetzt. Zum Schluss sind die verbleibenden masselosen Integrale des Ko-Subgraphen auszuwerten.

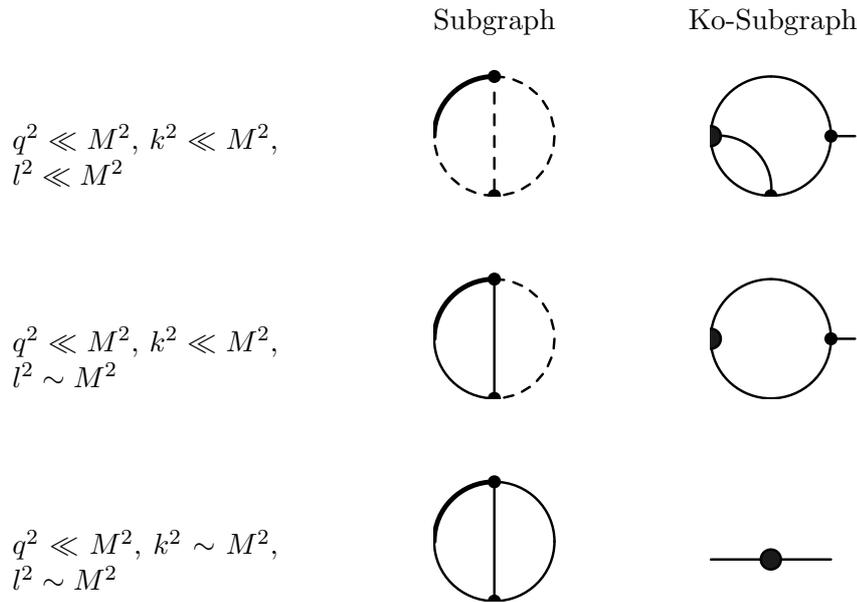
3.2.3 Graphische Durchführung der asymptotischen Entwicklung am Beispiel von Zweipunktfunktionen

3.2.3.1 Beispiel I

Betrachtet werden soll folgendes skalares Zweischleifendiagramm:

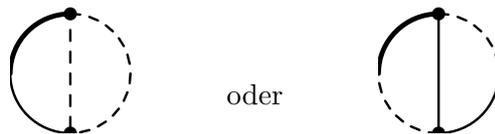


Dick gezeichnete Linien seien massiv und dünne masselos. Es existieren drei Subgraphen, welche den Bedingungen der asymptotischen Entwicklung für große Massen genügen. (Linien, welche nicht zum Subgraphen gehören, werden gestrichelt gekennzeichnet.):



Erstens enthalten die obigen drei Subgraphen wie gefordert alle massiven Linien; in diesem Falle ist es nur eine einzige. Zweitens sind sie ein-Teilchen-irreduzibel bezüglich der masselosen Linien. Beim ersten Subgraphen ist dies dadurch erkennbar, dass dieser überhaupt keine masselosen Propagatoren enthält; er besteht nur aus der einzig vorhandenen massiven Linie. Die beiden anderen zerfallen nach Durchschneiden einer masselosen Linie nicht in zwei Teile.

Andere Subgraphen wie beispielsweise

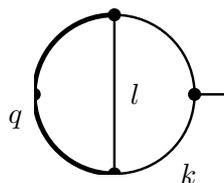


sind unbrauchbar für den betrachteten Grenzfall bei der asymptotischen Entwicklung, weil das Durchtrennen einer masselosen Linie zur Spaltung derselben führt.

3.2.3.2 Beispiel II

Hier soll die asymptotische Entwicklung im Grenzfall großer Masse für das Zweischleifendiagramm





durchgeführt werden. Die Anwendung der diagrammatischen Regeln führt auf folgende Subgraphen und Ko-Subgraphen:

	Subgraph	Ko-Subgraph
$q^2 \ll M^2, k^2 \ll M^2,$ $l^2 \ll M^2$		
$q^2 \ll M^2, k^2 \ll M^2,$ $l^2 \sim M^2$		
$q^2 \ll M^2, k^2 \sim M^2,$ $l^2 \ll M^2$		
$q^2 \ll M^2, k^2 \sim M^2,$ $l^2 \sim M^2$		

4 Das optische Theorem

Das optische Theorem [4] stellt ein grundlegendes Prinzip in der Teilchenphysik dar. Es stellt einen Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude und dem totalen Wirkungsquerschnitt her:

$$\text{Im}(\langle \mathcal{A} | T | \mathcal{A} \rangle) \sim \sum_n \int d\phi_n |\langle \mathcal{A} | T | n \rangle|^2 \quad (4.1)$$

Hier sei \mathcal{A} ein beliebiger Anfangszustand. $\langle \mathcal{A} | T | \mathcal{A} \rangle$ entspricht also einem Matrixelement mit gleichem Anfangs- und Endzustand, somit einer Vorwärtsstreuamplitude. Auf der rechten Seite der Gleichung werden alle Betragsquadrate mit Endzuständen $\{|n\rangle\}$ aufsummiert, die vom zugrundeliegenden Modell her möglich sind. Diagrammatisch kann man das optische Theorem in der folgenden Form aufschreiben:

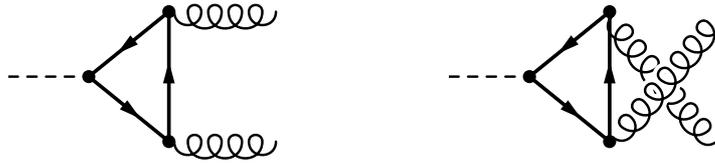
$$\text{Im} \left(\begin{array}{c} \text{Diagramm 1} \end{array} \right) \sim \sum_n \int d\phi_n \left| \begin{array}{c} \text{Diagramm 2} \end{array} \right|^2 \quad (4.2)$$

4.1 Motivation zur Verwendung des optischen Theorems beim $H \rightarrow gg$

Was bringt es einem nun, auf dieses Theorem zurückzugreifen? Zur Beantwortung dieser Frage sollen aussagekräftige Beispieldiagramme betrachtet werden, die zur Berechnung der Zerfallsbreite zu einer bestimmten Ordnung Störungstheorie benötigt werden:

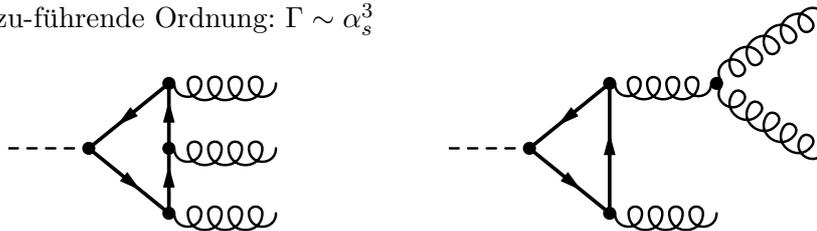
- 1.) führende Ordnung: $\Gamma \sim \alpha_s^2$

Zur Zerfallsbreite in der führenden Ordnung tragen nur die beiden Diagramme



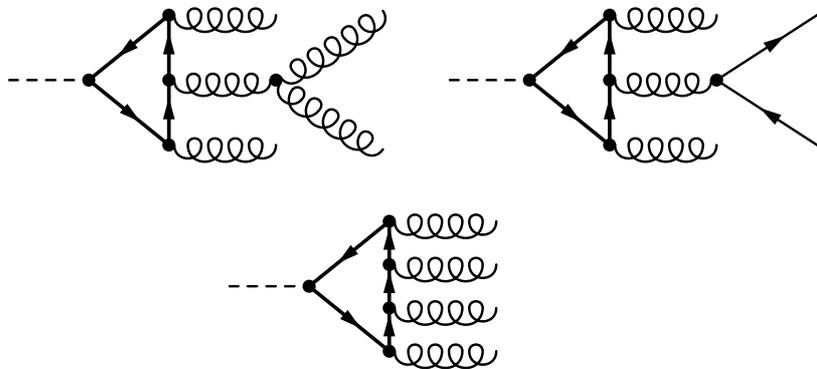
bei. Die Berechnung von Γ erfordert die Integration über den Endzustand. Da es sich hierbei nur um einen Zwei-Teilchen-Phasenraum handelt, stellt dies kein weiteres Problem dar. Wie jedoch ersichtlich ist, können bei höherer Ordnung Störungstheorie mehr Teilchen im Endzustand auftreten.

2.) nächst-zu-führende Ordnung: $\Gamma \sim \alpha_s^3$



Hier ist zum Teil die Integration über einen Drei-Teilchen-Phasenraum notwendig. Diese Integration ist schon nicht mehr trivial, aber immer noch lösbar, beispielsweise durch Einführung sogenannter Dalitz-Variablen, worauf jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

3.) nächst-zu-nächst-zu führende Ordnung: $\Gamma \sim \alpha_s^4$



Die höchste Ordnung, die im Rahmen dieser Diplomarbeit betrachtet werden soll, erfordert die Berechnung der Zerfallsbreite, wenn der Endzustand aus bis zu vier Teilchen besteht. Ein Vier-Teilchen-Phasenraum ist in der Praxis schwer zu handhaben, insbesondere wenn massive Teilchen im Spiel sind.

Im Zusammenhang des Higgszerfalls besagt das optische Theorem

$$\text{Im}(\langle H|T|H \rangle) \sim \sum_n \int d\phi_n |\langle H|T|n \rangle|^2 \quad (4.3)$$

und ausgedrückt in diagrammatischer Form lautet es:

$$\text{Im} \left(\text{---} \overset{\text{H}}{\text{---}} \text{---} \right) \sim \sum_n \int d\phi_n \left[\text{---} \overset{\text{H}}{\text{---}} \text{---} \right]^2 \quad (4.4)$$

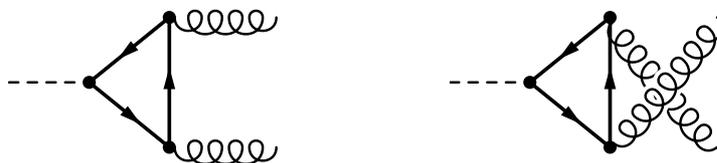
Nach dem obigen kurzen Intermezzo ist der Vorteil seiner Nutzung nicht mehr abstreitbar. Durch Berechnung des Imaginärteils der Vorwärtsstreuamplitude erspart man sich zum einen die Integration über den Phasenraum, was natürlich sehr von Nutzen ist, wenn vier Teilchen im Endzustand auftreten. Die Matrixelemente $\langle H|T|H \rangle$ stellen nichts anderes als Korrekturen zum Higgspropagator dar, womit zwei weitere positive Aspekte praktisch auf der Hand liegen. Erstens sind alle Diagramme vom Propagatortyp und weisen damit dieselbe topologische Grundstruktur auf. Nach Durchführung der asymptotischen Entwicklung sind auch die zugehörigen Ko-Subdiagramme von diesem Typ und prädestiniert für die Berechnung mit `Mincer` [12]. Zweitens stecken sowohl reelle als auch virtuelle Korrekturen des Higgszerfalls in $\langle H|T|H \rangle$, die durch verschiedene Schnitte der jeweiligen Propagatorkorrekturen erzeugt werden. Man umgeht auf diese Weise infrarote Divergenzen, die als Begleiterscheinung auftreten können, wenn man nur reelle Korrekturen für sich betrachtet.

4.2 Berechnung der Zerfallsbreite über Propagatorkorrekturen

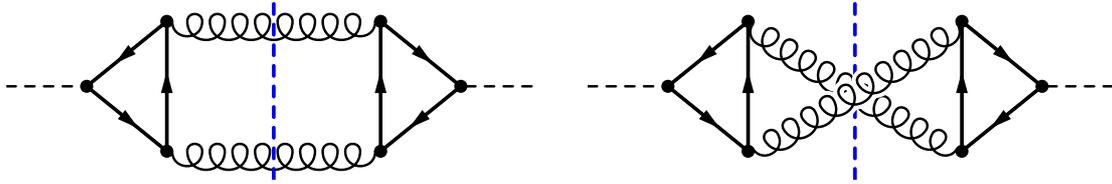
Nach den Schnittregeln von Cutkowski ergeben sich die Korrekturen zur Zerfallsbreite $\Gamma(H \rightarrow gg)$, indem man die Diagramme der Propagatorkorrekturen auf alle möglichen Arten so durchschneidet, dass die resultierenden Prozesse physikalisch möglich sind.

4.2.1 Führende Ordnung

Die beiden Beiträge zur Zerfallsbreite in führender Ordnung, also



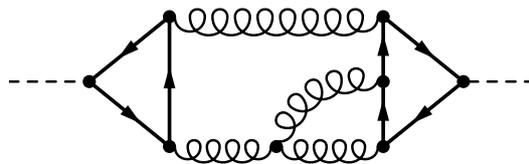
folgen aus den Drei-Schleifen-Propagatorkorrekturen, indem man diese mitten durchschneidet:



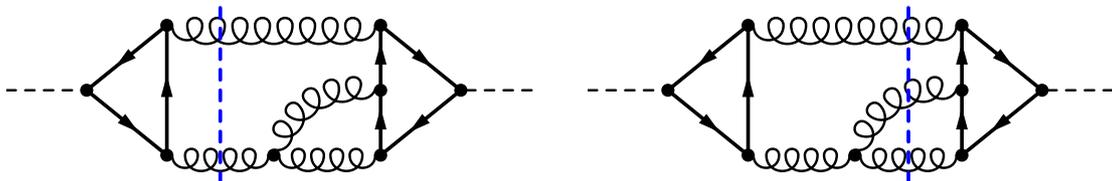
Da $m_H \ll m_t$ gelten soll, ergibt ein Schnitt durch einen der beiden Triangel-Subdiagramme keinen Sinn, da die sich daraus ergebenden Prozesse energetisch verboten sind.

4.2.2 Nächst-zu-führende Ordnung

Bei der Berechnung der Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$ müssen Vier-Schleifen-Diagramme betrachtet werden. Zur Veranschaulichung des optischen Theorems soll folgendes Beispieldiagramm dienen:

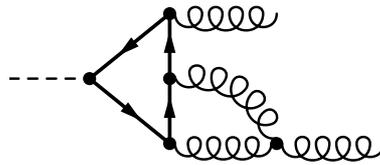


An diesem lassen sich zwei Schnitte durchführen, die physikalisch erlaubt sind, und zwar folgende:



Den obigen Schnitten entsprechen also die aufgeführten Korrekturen:

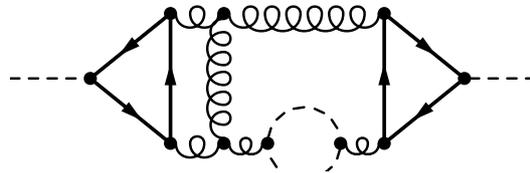




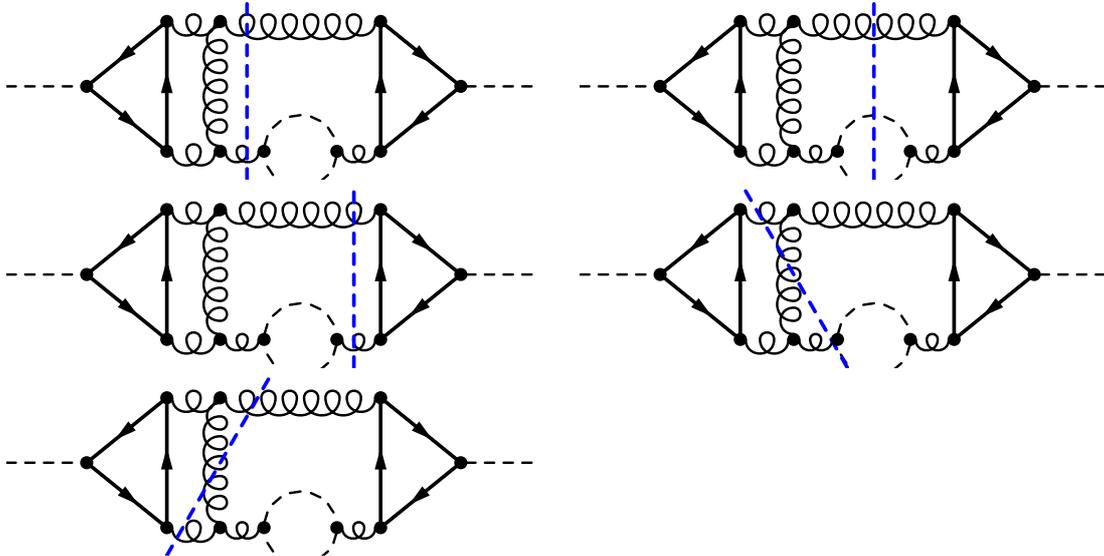
Bei den ersten beiden Korrekturen handelt es sich um reelle, da ein zusätzliches Gluon abgestrahlt wird. Die dritte Korrektur ist virtuell.

4.2.3 Nächst-zu-nächst-zu-führende Ordnung

Für $\Gamma \sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$ soll folgendes Feynmandiagramm mit einer Gluonkorrektur und einer Geistschleife betrachtet werden:

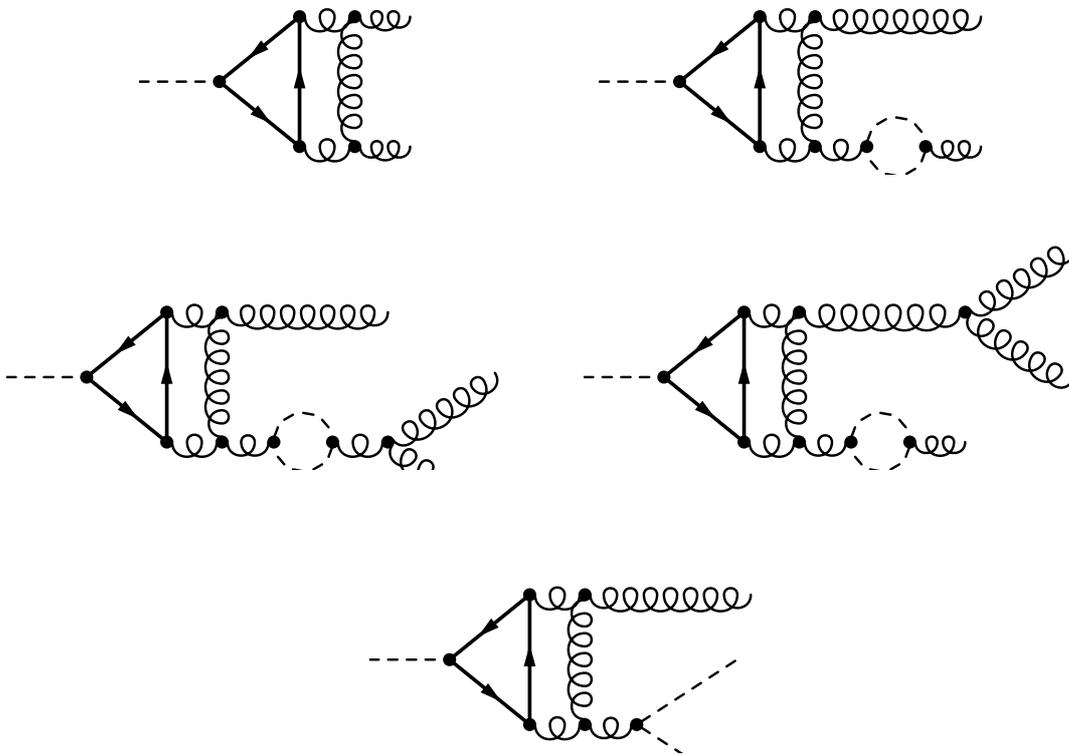


Die physikalisch sinnvollen Schnitte des Diagramms, also



führen auf folgende Prozesse:





An dieser Stelle sollte man kurz verweilen und sich Gedanken darüber machen, ob es vom physikalischen Standpunkt aus überhaupt Sinn ergibt, solche Diagramme mit Geistschleifen im Zusammenhang des optischen Theorems zu betrachten. Führt man nämlich Schnitte längs der Geistschleife durch, so treten Korrekturen mit Geistern als externe Teilchen auf. Hat man jedoch in den Grundvorlesungen zur theoretischen Teilchenphysik nicht gelernt, dass Geister keine physikalischen Teilchen sind, sondern mathematische Objekte, die im Rahmen des Faddeev-Popov-Formalismus [4] für nicht-abelsche Eichtheorien eingeführt werden mussten? Dürfen diese überhaupt in physikalischen Endzuständen auftreten? Die Antwort auf diese Frage ist, dass man sie unbedingt braucht, wenn man vom optischen Theorem Gebrauch macht. Wird beispielsweise ein Diagramm mit einer geschlossenen Gluonschleife betrachtet, so kann man die $g_{\mu\nu}$, welche in den Gluonpropagatoren dieser Schleife auftreten, durch die Summe über alle Polarisationen ersetzen:

$$g_{\mu\nu} \mapsto \varepsilon_{\mu}^{-} \varepsilon_{\nu}^{+*} + \varepsilon_{\mu}^{+} \varepsilon_{\nu}^{-*} - \sum_n \varepsilon_{n\mu}^T \varepsilon_{n\nu}^{T*} \quad (4.5)$$

Man beachte, dass in dieser Summe sowohl die physikalischen transversalen Polarisationen $\varepsilon_{n\mu}^T(k)$ als auch die unphysikalischen lichtartigen Polarisationen $\varepsilon^+(k)$ und $\varepsilon^-(k)$ auftreten. Genau die Geistbeiträge sind es nun, die sich mit diesen unphysikalischen Termen wegheben, was zur Konsistenz des optischen Theorems überaus wichtig ist.



4.3 Zusammenfassung der gebrauchten Notation

Zum Schluss dieses Kapitels soll die im folgenden verwendete Terminologie zusammengefasst werden, falls man auf das optische Theorem zurückgreift. Wenn im Folgenden vom Drei-Schleifen-Ergebnis die Rede ist, dann ist das Resultat für die Zerfallsbreite auf führender Ordnung, also $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, gemeint. Das Ergebnis auf nächst-zu-führende Ordnung $\sim \alpha_s^3$ ist das Vier-Schleifen- und das auf nächst-zu-nächst-zu-führender Ordnung $\sim \alpha_s^4$ das Fünf-Schleifen-Resultat.





5 Der hadronische Higgszerfall

5.1 Die Zerfallsbreite zur Ordnung α_s^2

5.1.1 Das exakte Ergebnis im Einschleifenfalle

Der Zerfall $H \rightarrow gg$ ist ein schleifeninduzierter Prozess. Zur Zerfallsbreite $\Gamma(H \rightarrow gg)$ tragen in führender Ordnung die beiden Diagramme



bei. Das exakte Ergebnis auf Einschleifenniveau ist schon lange bekannt [17, 18]:

$$\Gamma_{H \rightarrow gg} = \frac{m_H^3}{32\pi} |A_t(\tau)|^2 \quad \text{mit} \quad A_t = \hat{A}_t \left[\frac{3}{2\tau} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \arcsin^2 \sqrt{\tau} \right) \right] \quad (5.1)$$

wobei $\hat{A}_t = \frac{2\alpha}{3\pi v} Q_t^2$ und $\tau = \frac{m_H^2}{4m_t^2}$

Wie dessen Berechnung im Detail vonstattengeht, ist in Anhang A.5 ab Seite 134 gezeigt.

5.1.2 Die asymptotische Entwicklung „von Hand“ im Einschleifenfalle

Wie sich im Anhang A.5 unschwer nachvollziehen lässt, ist die exakte Berechnung des Matrixelements zum Teil mit großem Aufwand verbunden. Die Ursache dafür ist die notwendige Auswertung von tensorwertigen Dreipunktfunktionen. Dies liefert die Motivation dafür, den Grenzfall großer Top-Quark-Massen zu betrachten und eine asymptotische Entwicklung durchzuführen, was eine der ersten Tests zu Beginn der Diplomarbeit darstellen sollte. Da beide Diagramme denselben Beitrag liefern, reicht es aus, das erste zu betrachten und das Endergebnis zu verdoppeln. Die Anwendung der Prozedur für große Massen liefert die nötigen Subdiagramme.

Da nur ein einziges Subdiagramm existiert, entspricht die asymptotische Entwicklung einer gewöhnlichen Taylorentwicklung der relevanten Dreipunktfunktion in den äußeren

Impulsen q_1 und q_2 . Aus dieser Entwicklung resultieren elementare A_0 -Integrale, die nach Kochrezept berechnet werden können. Da in den Zwischenergebnissen sehr viele Terme auftreten, ist es sinnvoll, auf die effiziente Programmiersprache `Form` zurückzugreifen und die Aufgabenstellung damit umzusetzen. So war es möglich, folgende Entwicklung des Matrixelements zu berechnen:

$$A_t = \hat{A}_t \left(1 + \frac{7}{30}\tau + \frac{2}{21}\tau^2 + \frac{26}{525}\tau^3 + \frac{512}{17325}\tau^4 + \frac{1216}{63063}\tau^5 + \frac{128}{9555}\tau^6 + \frac{640}{65637}\tau^7 + \frac{229376}{31177575}\tau^8 + \frac{507904}{88913825}\tau^9 + \frac{65536}{14435421}\tau^{10} + \mathcal{O}(\tau^{11}) \right) \quad (5.2)$$

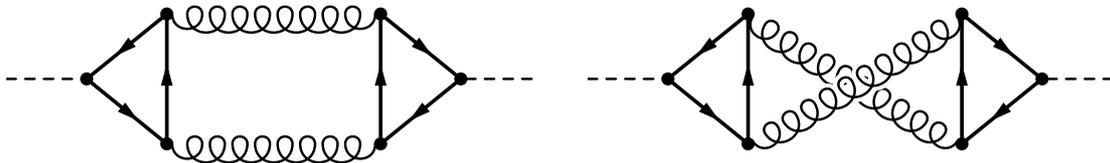
Natürlich muss diese mit der Taylorentwicklung des exakten Resultats

$$A_t = \hat{A}_t \left[\frac{3}{2\tau} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \arcsin^2 \sqrt{\tau} \right) \right] \quad (5.3)$$

übereinstimmen, was leicht zu verifizieren ist. Der erste Test zur asymptotischen Entwicklung – auch wenn es sich hier um eine triviale Taylorentwicklung handelte – wurde somit erfolgreich zu Ende geführt.

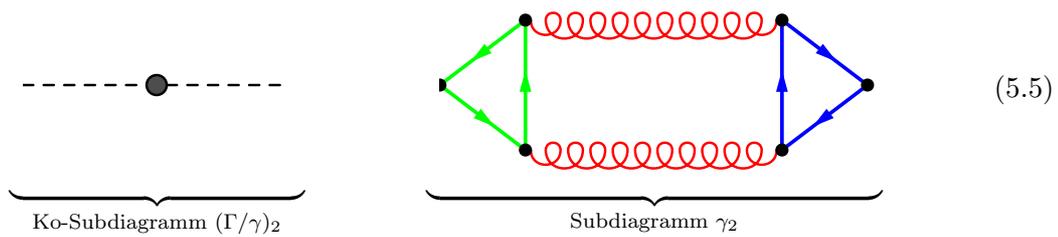
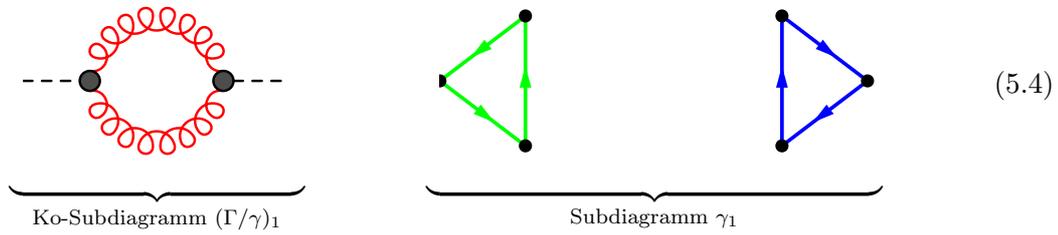
5.1.3 Die Anwendung des optischen Theorems

Der nächste Test bestand darin, das optische Theorem zu nutzen und in diesem Zusammenhang die asymptotische Entwicklung durchzuführen. Dies liefert keine Amplitude mehr, sondern sofort die Zerfallsbreite $\Gamma(H \mapsto gg)$. Es sind die beiden Diagramme

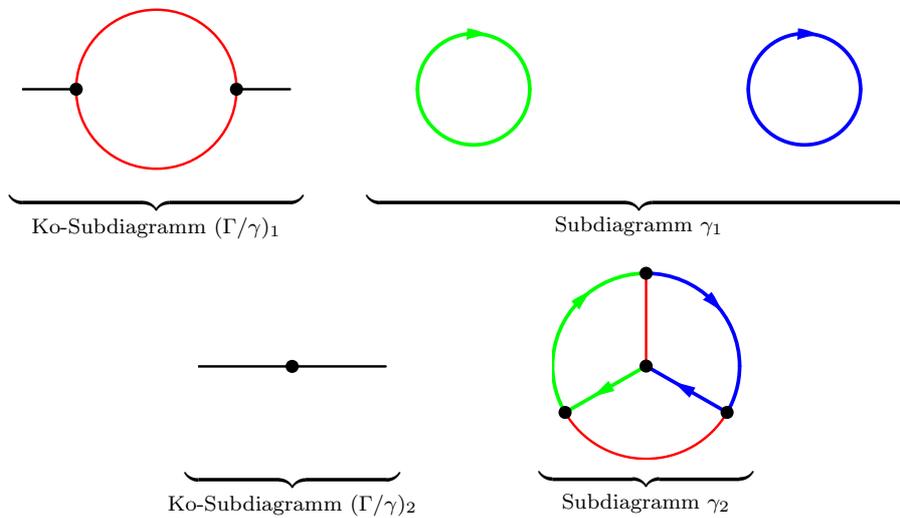


zu betrachten. Da es sich in führender Ordnung schon um Diagramme mit drei Schleifen handelt, wurde von jetzt an das Programmpaket bestehend aus `Qgraf` [8], `Exp` [10, 9], `Matad` [11] und `Mincer` [12] benutzt. `Qgraf` ist ein `Fortran`-Programm, das alle relevanten Feynmandiagramme aufbauend auf einer vorgegebenen Theorie (in diesem Falle der QCD) erzeugt. Da man hier QCD-Korrekturen zum Higgspropagator mit zwei Top-Quark-Schleifen betrachtet, gibt `Qgraf` genau die beiden obigen Dreischleifendiagramme aus. `Exp` wurde am Institut für theoretische Teilchenphysik (TTP) der Universität Karlsruhe entwickelt und führt die asymptotische Entwicklung diagrammatisch durch, extrahiert also aus allen erzeugten Diagrammen die notwendigen Subdiagramme. Auch hier liefern beide Diagramme denselben Beitrag, weshalb zur Erklärung nur das erste betrachtet werden soll. Der Prozedur für schwere Massen zufolge existieren zwei Subdia-

gramme:



Das erste Subdiagramm besteht aus beiden massiven Top-Quark-Schleifen; es wird entwickelt nach dem äußeren Impuls q des Higgsteilchens und dem Integrationsimpuls k_1 der Gluonschleife. Beim zweiten Subdiagramm handelt es sich um nichts anderes als das gesamte Dreischleifendiagramm ohne äußere Linien. Diese Sub- und Ko-Subdiagramme sind nun auf entsprechende zur Verfügung stehende Topologien abzubilden, was ebenso von Exp geleistet wird.



Beim ersten Subdiagramm handelt es sich um zwei separierte massive Ein-Schleifen-Tadpoles; das zugehörige Ko-Subdiagramm kann auf eine masselose Ein-Schleifen-Topologie mit äußerem Impuls abgebildet werden. Das zweite Subdiagramm entspricht nichts anderem als einem Drei-Schleifen-Tadpoleintegral, wobei das Ko-Subdiagramm hier aus einem einzigen Punkt besteht. Da das Interesse nur auf dem Imaginärteil der

Amplitude liegt, fällt die Berechnung des zweiten Subdiagramms weg, weil dieses als Vakuumbdiagramm nur einen reellen Anteil aufweist. **Exp** erkennt dies und lässt solche Subdiagramme von vornherein weg.

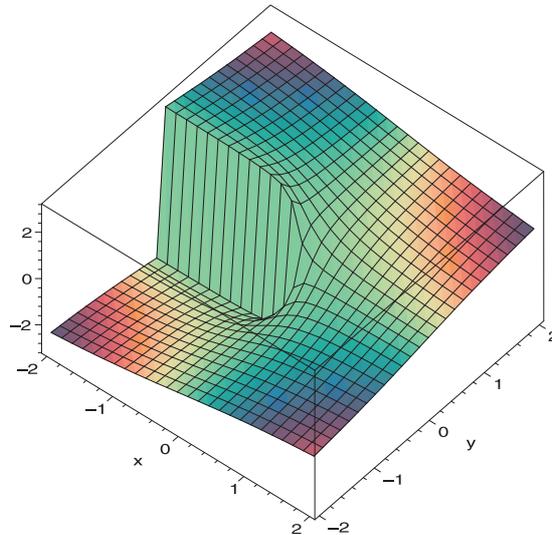
Ist die Abbildung auf entsprechende Topologien vollzogen, kommen **Matad** bzw. **Mincer** ins Spiel. Dabei handelt es sich um eine Zusammenstellung von **Form**-Routinen zur Berechnung der massiven Tadpoleintegrale bzw. der masselosen Integrale vom Propagator-typ. Diese Programme sind also für die eigentlichen Berechnungen verantwortlich. Das Ergebnis, das diese liefern, ist eine Reihe in ε

$$R = \sum_{n>0} \frac{C_{-n}}{\varepsilon^n} + \sum_{n\geq 0} C_n \varepsilon^n$$

mit irgendwelchen Koeffizienten C_n , die mit verschiedenen Potenzen des Faktors $(\mu^2/(-q^2))^\varepsilon$ multipliziert werden. Von diesem Faktor her rührt der Imaginärteil des Ergebnisses. Dessen Entwicklung nach ε führt auf:

$$\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon = 1 - \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\varepsilon + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right)\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (5.6)$$

Bei der Auswertung der Logarithmen muss beachtet werden, dass dieser auf der negativen reellen Achse einen Verzweigungsschnitt aufweist und dort nicht definiert ist:



Infolgedessen fügt man zum Impulsquadrat über die Kausalität des Propagators einen kleinen Imaginärteil hinzu. Mit

$$\ln(-x - i\epsilon) = \ln|-x - i\epsilon| + i\arg(-x - i\epsilon) = \ln(\sqrt{x^2 + \epsilon^2}) + i\arg(-x - i\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \ln(x) - i\pi \quad (5.7)$$



ergibt sich damit

$$\ln\left(\frac{-q^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right) = \ln\left(\frac{-m_H^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right) = \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - i\pi \quad (5.8)$$

und so wird der Imaginärteil der Reihe R ersichtlich.

Eine detaillierte Beschreibung der Funktionsweise aller Programme liegt im Anhang D ab Seite 161 vor.

Zu führender Ordnung ist der Imaginärteil endlich, was einem die Renormierung erspart. Die Berechnungen lieferten das Ergebnis

$$\begin{aligned} \Gamma_{H \rightarrow gg} = \frac{m_H^3}{32\pi} & \left(1 + \frac{7}{15}\tau + \frac{1543}{6300}\tau^2 + \frac{226}{1575}\tau^3 + \frac{55354}{606375}\tau^4 \right. \\ & \left. + \frac{1461224}{23648625}\tau^5 + \frac{5187604}{118243125}\tau^6 + \frac{35017856}{1082379375}\tau^7 + \mathcal{O}(\tau^8) \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

von dem sich unschwer nachprüfen lässt, dass es die Taylorentwicklung des exakten Resultats

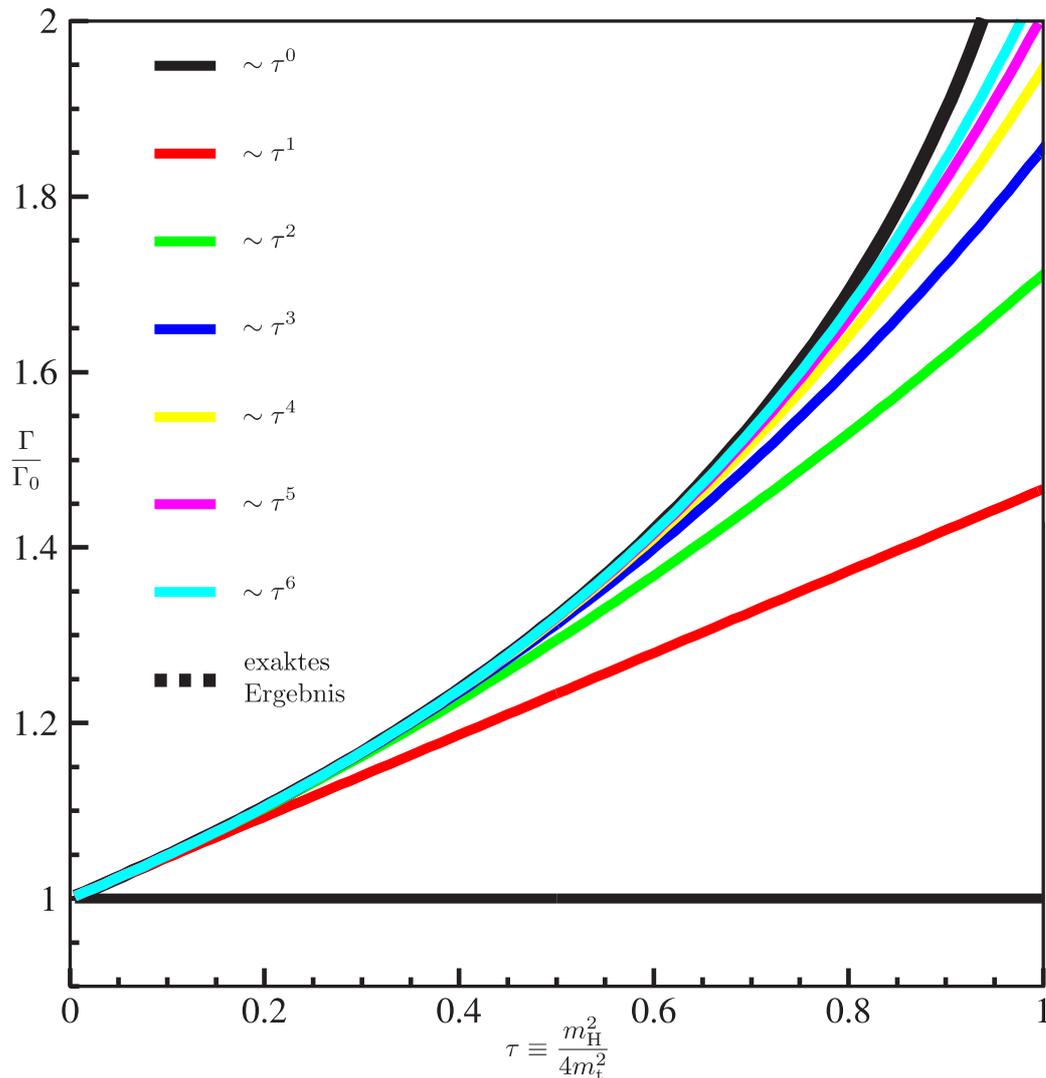
$$\begin{aligned} \Gamma_{H \rightarrow gg} = \frac{m_H^3}{32\pi} |A_t(\tau)|^2 \\ \text{mit } A_t = \hat{A}_t \left[\frac{3}{2\tau} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\tau} \right) \arcsin^2 \sqrt{\tau} \right) \right] \text{ und } \hat{A}_t = \frac{2\alpha}{3\pi v} Q_t^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

darstellt. Somit hatte dieser weitere Test über die Verwendung des optischen Theorems einen erfolgreichen Ausgang genommen.

Bei solchen Entwicklungen nach einem kleinen Parameter τ erweist es sich als sinnvoll, einen sogenannten Konvergenzplot zu erstellen. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Zuerst normiert man die Zerfallsbreite Γ auf den Wert der Breite Γ_∞ für unendlich schwere Top-Quark-Massen. Danach wird das resultierende Γ/Γ_∞ über τ aufgetragen, wobei nach und nach immer weitere Terme in der Entwicklung mitgenommen werden. Es ist vernünftig, τ bis maximal 1 laufen zu lassen, da $\tau < 1$ (also $m_H = 2m_t$) notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe darstellt. Was bringt einem ein solches Schaubild? Die Antwort darauf ist, dass sich daran schön die Konvergenz der Reihe erkennen lässt. Das Merkmal für gute Konvergenz bis zu einem bestimmten Wert von τ ist, dass sich benachbarte Kurven bis eben zu diesem τ praktisch nicht voneinander unterscheiden, sich gewissermaßen angleichen. Solche Plots sollen im Folgenden für alle Ergebnisse gemacht werden, um die Diskussion derselbigen zu erleichtern.

Im Falle des Ergebnisses führender Ordnung sieht dieser Konvergenzplot folgendermaßen aus:



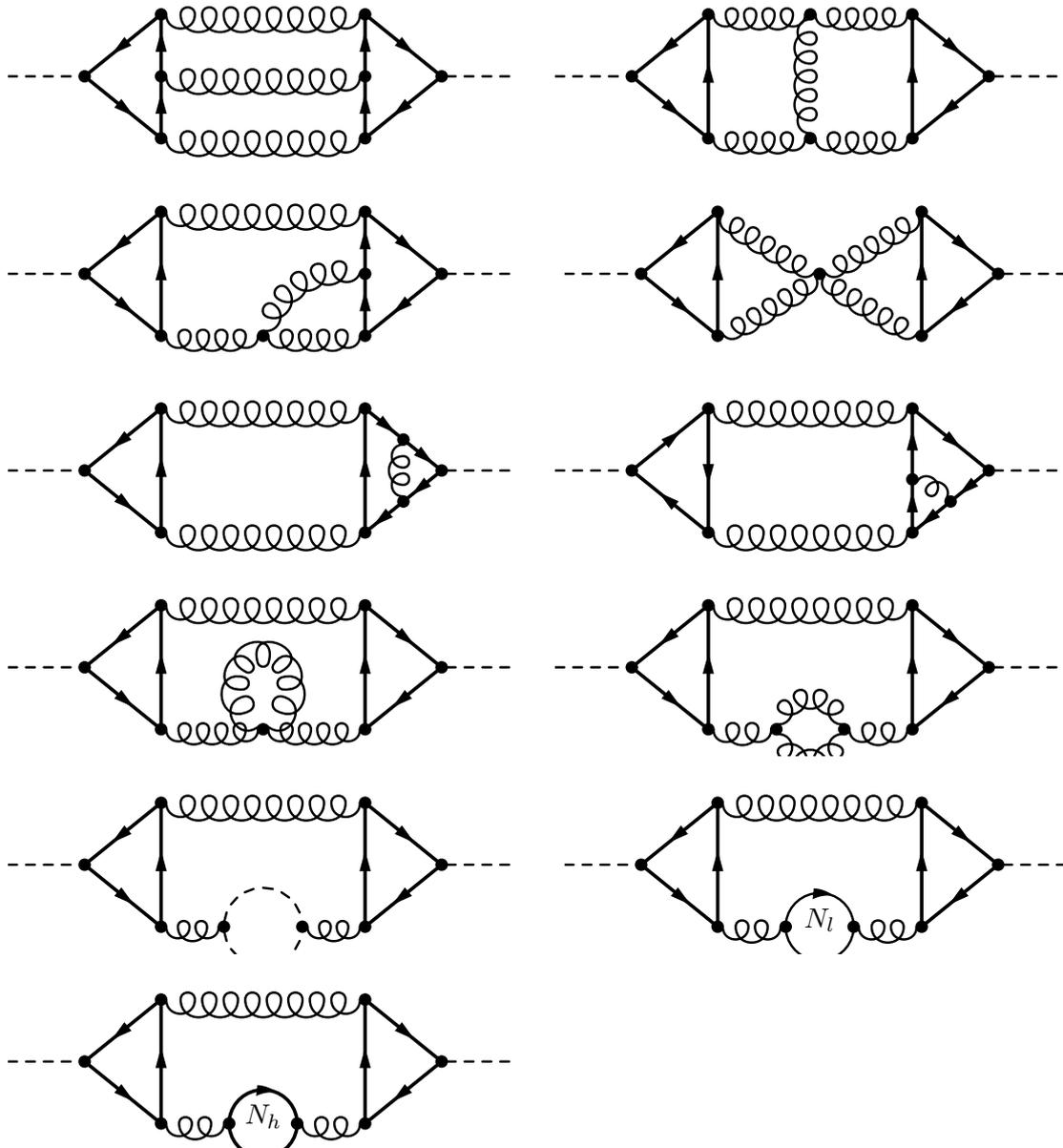


Aus dem Schaubild ist ersichtlich, dass die Reihe schnell konvergiert. Eine Entwicklung bis τ^5 ist ausreichend, um bei $m_H \approx 1,67m_t$ noch eine sehr gute Übereinstimmung mit dem exakten Ergebnis vorweisen zu können. Natürlich kann die Konvergenz durch Hinzunahme weiterer Terme bis $\tau = 1$, was $m_H = 2m_t$ entspricht, ausgedehnt werden. Dies ist aber hier unnötig, da sowieso das exakte Ergebnis bekannt ist und dieses auch eine recht übersichtliche Form hat. Deswegen sollen die abgebildeten Kurven zu Demonstration ausreichend sein. In den weiteren Schaubildern, in welchen das Ergebnis $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ vonnöten ist (beispielsweise im Schaubild auf Seite 56, wird dann sowieso das analytische Resultat verwendet werden.

5.2 Die Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$

5.2.1 Beispiele von Vierschleifendiagrammen

Zur $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ ist die asymptotische Entwicklung von Vierschleifendiagrammen durchzuführen. Insgesamt tragen zu dieser Ordnung 71 solcher Diagramme bei, was im Großen und Ganzen noch ein überschaubarer Rahmen darstellt. Im Folgenden werden einige repräsentative Diagramme zur Illustration abgedruckt:



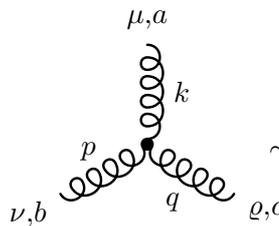
Solche mit Drei-Gluon-Vertizes – wie hier das zweite und dritte – stellen eine problematische Klasse von Diagrammen bei der Berechnung dar, weil der Drei-Gluon-Vertex



viele Terme im Zwischenergebnis produziert. Speziell das dritte Diagramm läuft bei einer „naiven“ Behandlung (ohne Verwendung von Tricks) auf Ordnung $1/m_t^{10}$ mehrere Tage (AMD Opteron 248, 2,2 GHz, 4096 MB RAM)!

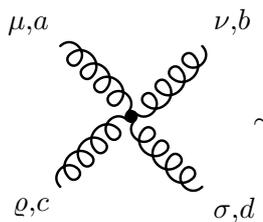
Andere Diagramme, die auftreten, sind welche mit Selbstenergiekorrekturen der Gluonlinien. Dabei kann es sich um Gluon-, Geist- oder Fermionbeiträge handeln. Es hat sich im Zuge der Berechnungen herauskristallisiert, dass Diagramme mit einer schweren Fermionlinie als Selbstenergiebeitrag zum Gluon sehr problematisch sind. Dies liegt daran, dass es in derartigen Diagrammen drei Unterstrukturen gibt, die entwickelt werden müssen, nämlich die beiden Triangel-Subdiagramme und die Toppfanne in der Mitte. Werden die drei Terme, die sich aus der Entwicklung ergeben, miteinander multipliziert, bläht sich das Ergebnis derart auf, dass Form tagelang verweilt, um dieses zusammenzufassen. Man stelle sich vor, dass zu $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ auch solche Diagramme existieren mit dem wichtigen Unterschied, dass diese eine weitere schwere Fermionschleife beinhalten können, was das Zwischenergebnis schon auf Ordnung $1/m_t^4$ zur Explosion bringt. Glücklicherweise konnte man dieses Problem jedoch durch einen geschickten Trick in den Griff bekommen, der in Kapitel 5.5 auf Seite 57 beschrieben wird. Die restlichen Diagramme mit Geist-, Gluon- und leichten Fermionschleifen stellen keinerlei Probleme dar; deren Berechnung geht relativ schnell vonstatten, nämlich im Rahmen weniger Stunden.

An dieser Stelle soll noch kurz etwas zur internen Behandlung von Vier-Gluon-Vertizes gesagt werden. Anders als beim Drei-Gluon-Vertex



$$\sim f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

sind beim Vier-Gluon-Vertex

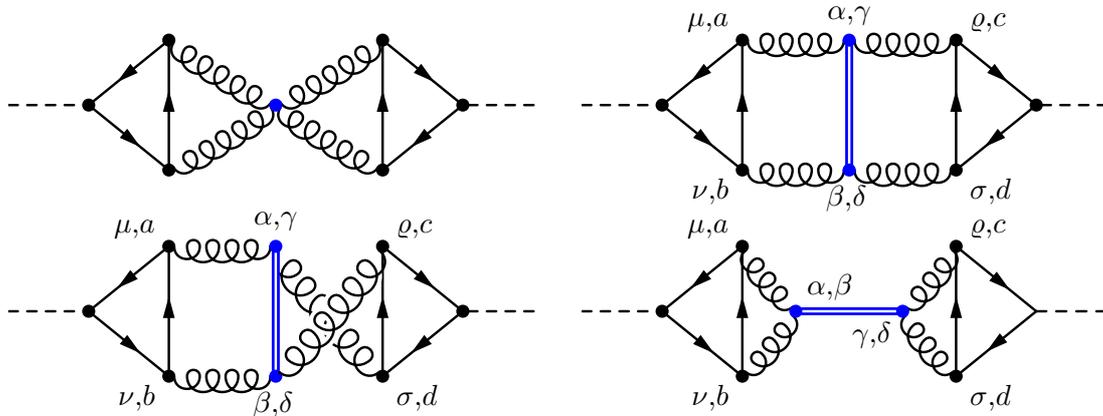


$$\sim f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})$$

Farb- und Diracstruktur miteinander gekoppelt, können also nicht separat berechnet werden. Um Farb- und Diracanteil der Diagramme, in denen solche Vierer-Vertizes vorkommen, dennoch getrennt auswerten zu können, wurde ein symbolisches Σ -Teilchen eingeführt, welches nur an Gluonen über einen Vertex der Form $gg\Sigma$ koppelt. Mittels dieses Σ -Teilchens können nun diese Vierervertizes so dargestellt werden, dass Farb- und Diracanteil separieren. Als Beispiel dient das einzige Diagramm auf Vier-Schleifen-



Niveau, das einen solchen Vertex aufweist:



Daneben sind die entsprechenden Diagramme dargestellt, wenn der Vier-Gluon-Vertex durch zwei $gg\Sigma$ -Vertizes mit einem Σ -Propagator ersetzt wird. Der $gg\Sigma$ -Vertex besitzt die Form $V_{ggs} \times V3g$ und der Σ -Propagator selbst berechnet sich durch $D_{sig} \times \text{prop}$. V_{ggs} , $V3g$, D_{sig} und prop sind **Matad**-interne Funktionen, welche in diesem Zusammenhang folgendermaßen definiert sind:

$$V_{ggs}(\mu, \nu, \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})$$

$$D_{sig}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}$$

$$V3g(a, b, c) = f^{abc} \text{ und } \text{prop}(a, b) = \delta_{ab}$$

Farbindizes werden mit lateinischen Buchstaben gekennzeichnet; μ, ν, ρ, σ sind Lorentzindizes. Die Indizes α, β, γ und δ wurden künstlich eingeführt und haben keine physikalische Bedeutung. Für den Lorentzanteil des dritten Diagramms mit dem Σ -Teilchen ergibt sich

$$\begin{aligned} L &= V_{ggs}(\mu, \nu, \alpha, \beta) \times D_{sig}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \times V_{ggs}(\rho, \sigma, \gamma, \delta) = \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}(\delta_{\gamma\rho}\delta_{\delta\sigma} - \delta_{\gamma\sigma}\delta_{\delta\rho}) = \\ &= \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} \end{aligned}$$

und für den Farbanteil gilt:

$$F = V3g(a, b, c) \times \text{prop}(c, d) \times V3g(d, e, f) = f^{abc}\delta_{cd}f^{efd} = f^{abc}f^{efc}$$

Im Ergebnis $F \cdot L = f^{abc}f^{efc}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho})$ tritt keiner der künstlichen Indizes mehr auf. Vielmehr ist dies einer der drei Terme des Vier-Gluon-Vertex. Für die anderen beiden Diagramme mit dem Σ -Teilchen lässt sich eine analoge Rechnung durchführen. Also erzeugt jedes dieser drei Diagramme einen einzigen Term dieses Vertex. Aus einem Diagramm werden in dem Falle drei; der Vorteil, die Farbstruktur abspalten zu können, wiegt jedoch schwerer.

5.2.2 Zur Renormierung der Ergebnisse

Das Drei-Schleifen-Ergebnis war noch endlich, doch bereits das Vier-Schleifen-Resultat weist $1/\varepsilon$ -Pole auf. Um diese loszuwerden, muss sowohl Ladung als auch Masse des Drei-Schleifen-Beitrags renormiert werden wie folgt:

$$\alpha_s^{(0)}(\alpha_s) = (Z_g)^2 \alpha_s = \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) (\delta Z_g)^{1\text{-Loop}} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\} \alpha_s$$

$$\text{mit } (\delta Z_g)^{1\text{-Loop}} = \frac{1}{\varepsilon} \left[C_A \left(-\frac{11}{3} \right) + \frac{4}{3} T N_f \right] \text{ wobei } T = \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

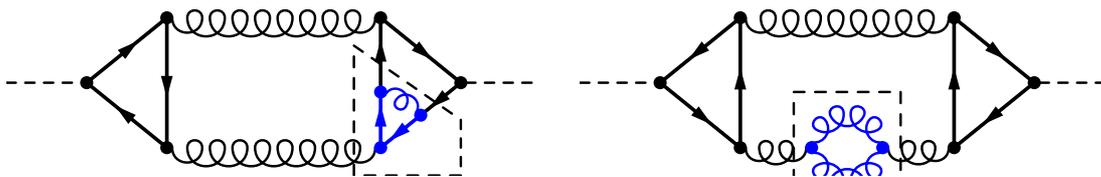
$$m_t^{(0)} = Z_m m_t = \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) (\delta m_t)^{1\text{-Loop}} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\} m_t$$

$$\text{mit } (\delta m_t)^{1\text{-Loop}} = -\frac{3C_F}{\varepsilon} \text{ wobei } C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \quad (5.12)$$

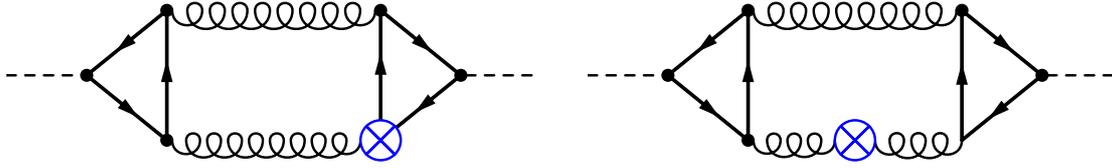
Hieraus ergibt sich der Drei-Schleifen-Counterterm $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$, der zum nackten Vier-Schleifen-Resultat addiert werden muss, um die Pole zu absorbieren:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 4\text{-Loop}^{\text{ren}}(\alpha_s, m_t) &= \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} \right)^2 3\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} \right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\ &= \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} \right)^2 3\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\ &\quad + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s, m_t) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Anhand von zwei Beispieldiagrammen soll dieses Vorgehen kurz erläutert werden:



Die Subdivergenz im ersten Diagramm rührt von einer Vertexkorrektur her, im zweiten Diagramm von der Propagatorkorrektur einer Gluonlinie. Durch Addition der Drei-Schleifen-Counterterme $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$



werden diese Subdivergenzen absorbiert. Diese Counterterme ergeben sich durch eine Renormierung der Ladung des Drei-Schleifen-Ergebnisses.

Diese ganze Prozedur wird mit **Form** durchgeführt. In diesem Zusammenhang sollen noch alle benötigten Formeln angeführt werden.

$$\left(\frac{\mu^2}{(m_t^{(0)})^2}\right)^\varepsilon = \left(\frac{\mu^2}{Z_m^2 m_t^2}\right)^\varepsilon = \left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right)^\varepsilon Z_m^{-2\varepsilon} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} Z_m^{-2\varepsilon} &= \exp(-2\varepsilon \ln(Z_m)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2\varepsilon \ln(Z_m))^n = \\ &= 1 - 2\varepsilon \ln(Z_m) + 2\varepsilon^2 \ln^2(Z_m) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\ln(Z_m) = \ln(1 + \delta_m) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\delta_m)^n}{n} = \delta_m - \frac{1}{2}\delta_m^2 + \frac{1}{3}\delta_m^3 - \mathcal{O}(\delta_m^3) \quad (5.16)$$

Für die weiteren Terme in der Entwicklung, muss auch der Entwicklungsparameter $\tau \equiv m_H^2/(4m_t^2)$ renormiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m_t^{(0)})^a} &= \frac{1}{Z_m^a m_t^a} = \frac{1}{(1 + \delta_m)^a m_t^a} = \frac{1}{m_t^a} \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^a \binom{a}{k} \delta_m^k} = \\ &= \frac{1}{m_t^a} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=1}^a \binom{a}{k} \delta_m^k \right)^n \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

Mit $m_t^{(0)} = Z_m m_t = (1 + \delta_m)m_t + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ folgt:

$$\begin{aligned} \tau^{(0)} &= \frac{m_H^2}{4(m_t^{(0)})^2} = \frac{m_H^2}{4Z_m^2 m_t^2} = \frac{m_H^2}{4m_t^2(1 + \delta_m)^2} = \tau \frac{1}{(1 + \delta_m)^2} = \\ &= \tau [1 - 2\delta_m + 3\delta_m^2 - 4\delta_m^3 + \mathcal{O}(\delta_m^4)] \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.2.3 Präsentation der Ergebnisse

Hier wird zur direkten Vergleichsmöglichkeit sowohl das Drei- als auch das Vier-Schleifen-Resultat der Zerfallsbreite Γ zusammen angegeben. h_n^{lo} sind die Koeffizienten der Ent-



wicklung von Γ zur führenden Ordnung und h_n^{nl0} zur nächst-zu-führenden Ordnung. Der Vorfaktor wurde so gewählt, dass die Reihe für das Resultat $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^2)$, das sowieso exakt bekannt ist, mit einer führenden Eins beginnt. Des Weiteren ist erwähnenswert, dass Γ direkt proportional zum Faktor $N_c^2 - 1$ ist, was der Anzahl der Gluonen einer beliebigen Eichtheorie $SU(N_c)$ entspricht. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da ja Korrekturen zum Zerfall $H \rightarrow gg$ betrachtet werden, bei dem in einem Zwischen- oder Endzustand $N_c^2 - 1$ Gluonen auftreten können.

$$\Gamma = \frac{G_F m_H^3}{72\sqrt{2}\pi} T_f^2 (N_c^2 - 1) \left\{ 1 + h_1^{\text{lo}} \tau + h_2^{\text{lo}} \tau^2 + h_3^{\text{lo}} \tau^3 + h_4^{\text{lo}} \tau^4 + h_5^{\text{lo}} \tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \right. \\ \left. + \left[h_0^{\text{nl0}} + h_1^{\text{nl0}} \tau + h_2^{\text{nl0}} \tau^2 + h_3^{\text{nl0}} \tau^3 + h_4^{\text{nl0}} \tau^4 + h_5^{\text{nl0}} \tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \right] \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \right\} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \quad (5.19)$$

$$h_1^{\text{lo}} = \frac{7}{15}, h_2^{\text{lo}} = \frac{1543}{6300}, h_3^{\text{lo}} = \frac{226}{1575}, h_4^{\text{lo}} = \frac{55354}{606375}, h_5^{\text{lo}} = \frac{1461224}{23648625} \quad (5.20)$$

Im Folgenden werden die Koeffizienten der Entwicklung $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$ zunächst ganz generell in einer $SU(N_c)$ angegeben, wobei $C_A = N_c$ und $C_F = (N_c^2 - 1)/(2N_c)$ deren Casimir-Invarianten sind. So ist die allgemeine Farbstruktur der einzelnen Terme gut erkennbar. N_l ist die Anzahl der leichten und N_h die Anzahl der schweren Quarkflavours; $T_f = 1/2$ wird immer zur Kennzeichnung solcher Terme mitgeführt. Bei μ handelt es sich um die Renormierungsskala, die in den Konvergenzplots in dieser Arbeit stets auf die Higgsmasse gesetzt wird: $\mu = m_H$. Dies ergibt durchaus Sinn, da man für μ im Allgemeinen einen Wert wählt, der charakteristisch für die Energieskala des Problems ist, das man betrachtet oder des Experiments, welches durchgeführt wird. Da der hadronische Higgszerfall $H \rightarrow gg$ vor allem im intermediären Massenbereich des Higgs stattfinden würde, ist die obige Wahl von μ nicht verwunderlich.

$$h_0^{\text{nl0}} = C_A \left[\frac{103}{12} - \frac{11}{6} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left(-\frac{3}{2} \right) \\ + T_f N_l \left[-\frac{7}{3} + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + T_f N_h \left(-\frac{2}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right) \quad (5.21)$$

$$h_1^{\text{nl0}} = C_A \left[\frac{71}{20} - \frac{77}{90} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[\frac{13}{180} - \frac{7}{10} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \\ + T_f N_l \left[-\frac{29}{30} + \frac{14}{45} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + T_f N_h \left[-\frac{14}{45} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \quad (5.22)$$

$$h_2^{\text{nl0}} = C_A \left[\frac{47459}{27000} - \frac{16973}{37800} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[\frac{83}{630} - \frac{1543}{2100} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \\ + T_f N_l \left[-\frac{89533}{189000} + \frac{1543}{9450} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + T_f N_h \left[-\frac{1543}{9450} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \quad (5.23)$$



$$\begin{aligned}
h_3^{\text{nlo}} = & C_A \left[\frac{47071}{47250} - \frac{1243}{4725} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[\frac{22418}{496125} - \frac{113}{175} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\
& T_f N_l \left[-\frac{3763}{14175} + \frac{452}{4725} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + T_f N_h \left[-\frac{452}{4725} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
h_4^{\text{nlo}} = & C_A \left[\frac{948509587}{1528065000} - \frac{27677}{165375} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \\
& + C_F \left[-\frac{433333}{18191250} - \frac{110708}{202125} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\
& + T_f N_l \left[-\frac{10426231}{63669375} + \frac{110708}{1819125} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + T_f N_h \left[-\frac{110708}{1819125} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
h_5^{\text{nlo}} = & C_A \left[\frac{24693249811}{59594535000} + \frac{730612}{6449625} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \\
& + C_F \left[-\frac{39985822}{606981375} - \frac{730612}{1576575} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\
& + T_f N_l \left[-\frac{807445598}{7449316875} - \frac{2922448}{70945875} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) + \frac{2922448}{70945875} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{m^2} \right) \right] \\
& + T_f N_h \left[-\frac{2922448}{70945875} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Nachfolgend sollen noch die Koeffizienten im Falle einer $SU(3)$ – also der QCD – angegeben werden. Einsetzen der Farbfaktoren $C_A = 3$, $C_F = 4/3$ und $T_f = 1/2$ führt dann auf:

$$h_0^{\text{nlo}} = \frac{95}{4} - \frac{11}{2} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) + N_l \left[-\frac{7}{6} + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + N_h \left[-\frac{1}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
h_1^{\text{nlo}} = & \frac{5803}{540} - \frac{14}{15} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{77}{30} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \\
& + N_l \left[-\frac{29}{60} + \frac{7}{45} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + N_h \left[-\frac{7}{45} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.28}$$

$$\begin{aligned}
h_2^{\text{nlo}} = & \frac{1029839}{189000} - \frac{1543}{1575} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{16973}{12600} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \\
& + N_l \left[-\frac{89533}{378000} + \frac{1543}{18900} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + N_h \left[-\frac{1543}{18900} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{5.29}$$

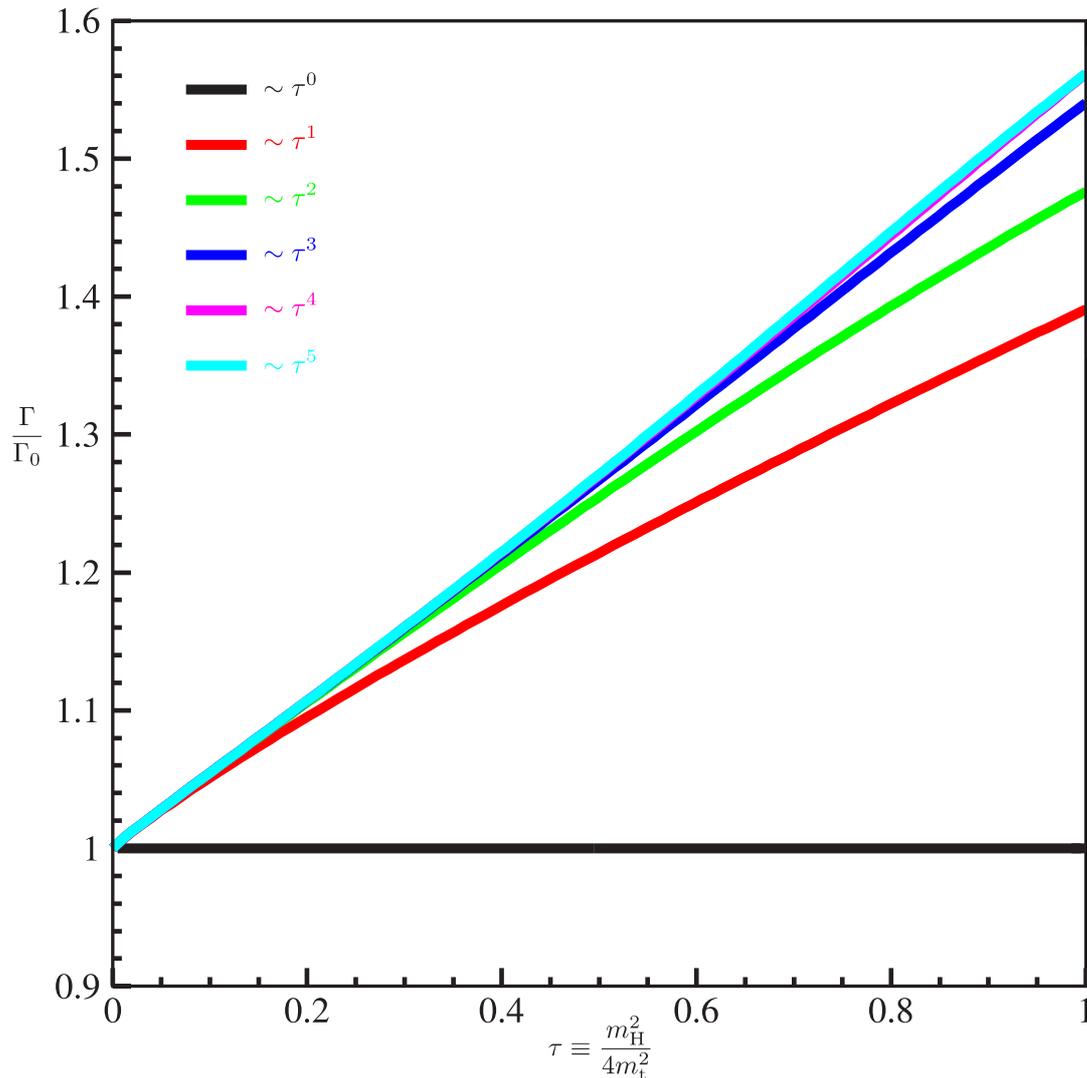
$$\begin{aligned}
h_3^{\text{nlo}} &= \frac{9075763}{2976750} - \frac{452}{525} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1243}{1575} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
&+ N_l \left[-\frac{3763}{28350} + \frac{226}{4725} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] + N_h \left[-\frac{226}{4725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}
h_4^{\text{nlo}} &= \frac{50854463}{27783000} - \frac{442832}{606375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{27677}{55125} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
&+ N_l \left[-\frac{10426231}{127338750} + \frac{55354}{1819125} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] + N_h \left[-\frac{55354}{1819125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
h_5^{\text{nlo}} &= \frac{252432553361}{218513295000} - \frac{2922448}{4729725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{730612}{2149875} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
&+ N_l \left[-\frac{403722799}{7449316875} + \frac{1461224}{70945875} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] + N_h \left[-\frac{1461224}{70945875} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Die Terme bis einschließlich h_3^{nlo} stimmen mit der Literatur [19] überein; h_4^{nlo} und h_5^{nlo} sind neu. Analytische Resultate für die virtuellen und reellen Korrekturen findet man außerdem in [20], [21]. Die entkoppelten Resultate in einer effektiven Theorie mit fünf Quarks wurden in Anhang G auf Seite 179 abgedruckt. An dieser Stelle soll schließlich die Konvergenz der Reihe wieder anhand eines Konvergenzplots diskutiert werden:





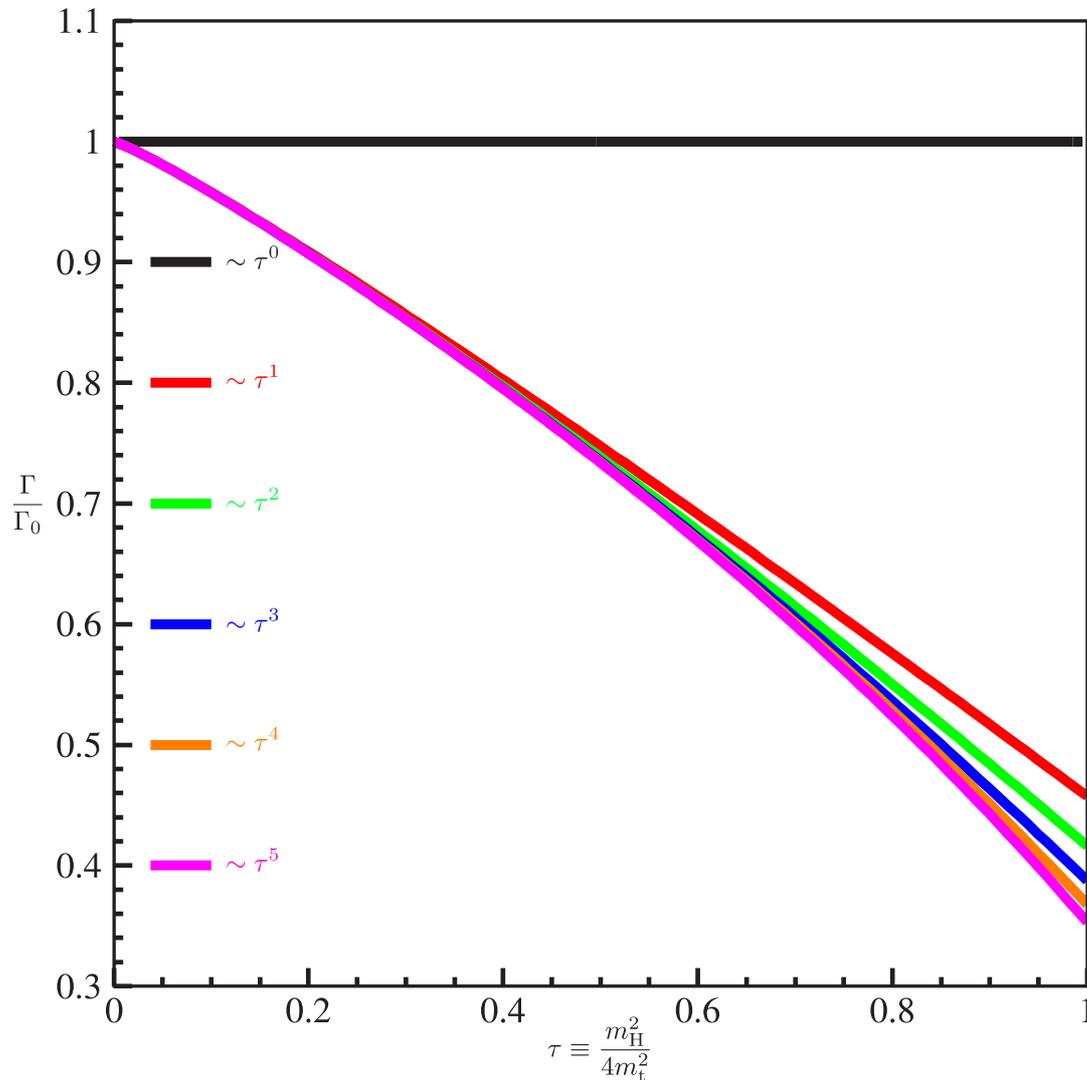
Die Konvergenz der Reihe im Falle $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ ist bemerkenswert! Bis $\tau = 1$, was einer Higgs-Masse entspricht, die doppelt so groß wie die Top-Quark-Masse ist, sind die Terme $\sim \tau^4$ und $\sim \tau^5$ der Entwicklung nahezu deckungsgleich und unterscheiden sich kaum voneinander. Das ist sehr überraschend, denn theoretisch sollte die Entwicklung nur für kleine τ konvergieren. Doch in der Praxis läuft die Konvergenz bis zur Schwelle hervorragend, was sehr beeindruckend ist. Dieses Beispiel vor allem verdeutlicht deshalb die Mächtigkeit des Formalismus der asymptotischen Entwicklung.

An dieser Stelle wurde noch ein kleiner Test durchgeführt und zwar das Ergebnis führender Ordnung aus der Zerfallsbreite ausgeklammert:

$$\Gamma = \Gamma^{\text{lo}} + \frac{\alpha_s}{\pi} \Gamma^{\text{nlo}} = \Gamma^{\text{lo}} \left[1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{\Gamma^{\text{nlo}}}{\Gamma^{\text{lo}}} \right] \quad (5.33)$$



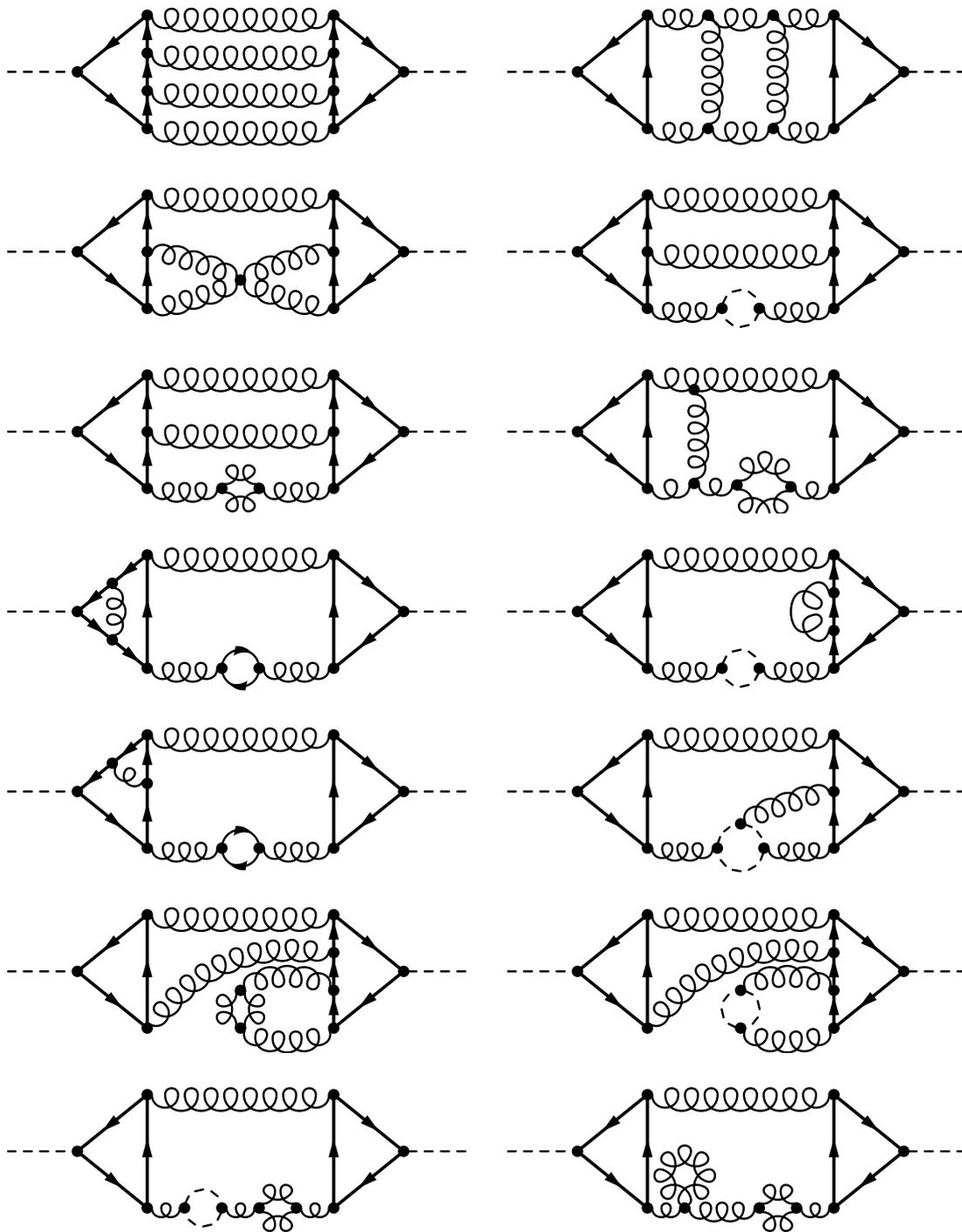
$\Gamma^{\text{nl0}}/\Gamma^{\text{lo}}$ wurde danach in τ entwickelt und die sukzessiven Ordnungen wieder in einem Konvergenzplot dargestellt:

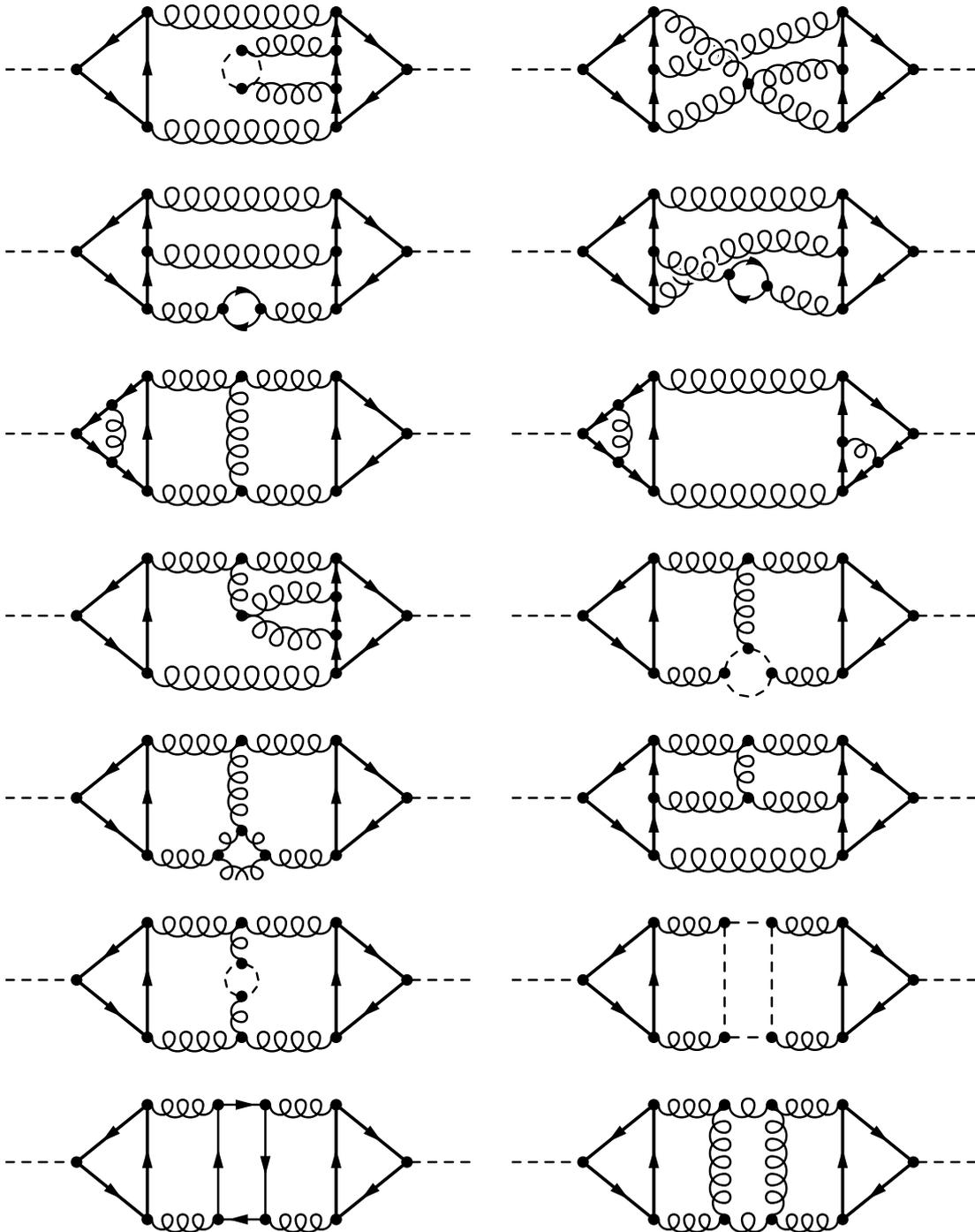


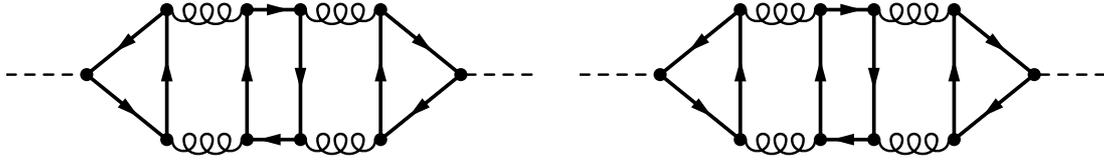
Dies gewährleistet eine bessere Konvergenz der Entwicklung in τ , sogar für niedrige Ordnungen, wie aus dem Schaubild ersichtlich wird. Die Kurven liegen von vornherein näher beieinander, als dies der Fall war, wenn man Γ^{lo} nicht aus dem Gesamtergebnis als globalen Faktor herauszieht.

5.3 Die Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$

5.3.1 Beispiele von Fünfschleifendiagrammen







5.3.2 Renormierung der Ergebnisse

Um die Pole des nackten Fünf-Schleifen-Ergebnisses loszuwerden, werden die entsprechenden Counterterme des Drei- und Vier-Schleifen-Resultats $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$ benötigt. Im Drei-Schleifen-Ergebnis sind Kopplungskonstante und Masse zu renormieren über [22]:

$$\alpha_s^{(0)}(\alpha_s) = (Z_g)^2 \alpha_s = \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) (\delta Z_g)^{1\text{-Loop}} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 (\delta Z_g)^{2\text{-Loop}} + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \right\} \alpha_s$$

$$\text{mit } (\delta Z_g)^{1\text{-Loop}} = \frac{1}{\varepsilon} \left[C_A \left(-\frac{11}{3} \right) + \frac{4}{3} T N_f \right] \text{ wobei } T = \frac{1}{2}$$

$$\text{und } (\delta Z_g)^{2\text{-Loop}} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{44}{9} N_c N_f + \frac{121}{9} N_c^2 + \frac{4}{9} N_f^2 \right]$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{5}{3} N_c N_f - \frac{17}{3} N_c^2 + C_F N_f \right]$$
(5.34)

$$m_t^{(0)} = Z_m m_t = \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) (\delta m_t)^{1\text{-Loop}} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 (\delta m_t)^{2\text{-Loop}} + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \right\} m_t$$

$$\text{mit } (\delta m_t)^{1\text{-Loop}} = -\frac{3C_F}{\varepsilon} \text{ wobei } C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$$

$$\text{und } (\delta m_t)^{2\text{-Loop}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[\frac{11}{2} N_c C_F + \frac{9}{2} C_F^2 - C_F N_f \right]$$

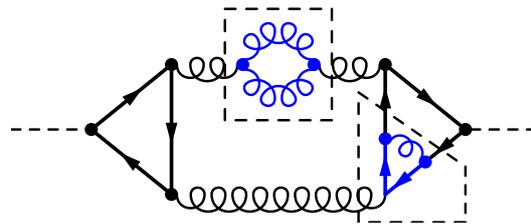
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{97}{12} N_c C_F - \frac{3}{4} C_F^2 + \frac{5}{6} C_F N_f \right]$$
(5.35)

Das Vier-Schleifen-Ergebnis wird wie gewohnt mit den Formeln (5.11) und (5.12) renormiert. Hieraus ergeben sich Drei- und Vier-Schleifen-Counterterme, die zum Fünf-

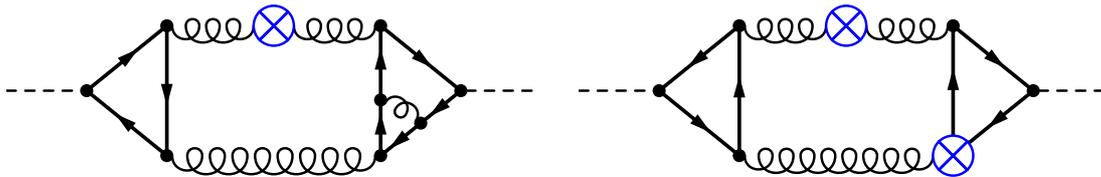
Schleifen-Ergebnis addiert werden:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^4 5\text{-Loop}^{\text{ren}}(\alpha_s, m_t) &= \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^4 5\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\
 &= \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_t^{(0)}(\alpha_s, m_t)) \\
 &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 5\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s, m_t)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

An dieser Stelle soll wieder ein kleines diagrammatisches Beispiel angeführt werden. Die Subdivergenzen des Fünfschleifendiagramms



werden von Drei- und Vier-Schleifen-Countertermen $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$



absorbiert. Das Form-Programm, welches die Renormierung durchführt, ist in Anhang H.2 auf Seite 201 zu finden.

5.3.3 Präsentation der Ergebnisse

Im Folgenden sollen die Ergebnisse des Anteils der Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$ präsentiert werden. Es war möglich, die Entwicklung für $m_{\text{H}}^2 \gg m_{\text{t}}^2$ bis einschließlich τ^2 zu berechnen.

$$\Gamma = \frac{G_F m_{\text{H}}^3}{72\sqrt{2}\pi} T_f^2 (N_c^2 - 1) \left\{ 1 + h_1^{\text{lo}} \tau + h_2^{\text{lo}} \tau^2 + h_3^{\text{lo}} \tau^3 + h_4^{\text{lo}} \tau^4 + h_5^{\text{lo}} \tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \right. \\ \left. + \left[h_0^{\text{nlo}} + h_1^{\text{nlo}} \tau + h_2^{\text{nlo}} \tau^2 + h_3^{\text{nlo}} \tau^3 + h_4^{\text{nlo}} \tau^4 + h_5^{\text{nlo}} \tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \right] \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \right. \\ \left. + \left[h_0^{\text{nnlo}} + h_1^{\text{nnlo}} \tau + h_2^{\text{nnlo}} \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^3) \right] \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \right\} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \quad (5.37)$$

In Kapitel 5.2.3 auf Seite 39 wurden bereits die Ergebnisse der Koeffizienten auf Drei- und Vier-Schleifen-Niveau aufgeführt. Die Ergebnisse werden zuerst für eine beliebige Eichtheorie $SU(N_c)$ angegeben. Sie konnten jedoch zu dieser Ordnung Störungstheorie nicht über die Invarianten C_F^2 , C_{ACF} usw. ausgedrückt werden. Probleme verursachte dabei der Farbraum von Diagrammen ähnlich zu dem ersten in Abschnitt 5.3.1 auf Seite 45. Deshalb sollen die Koeffizienten in Abhängigkeit von N_c abgedruckt werden:

$$h_0^{\text{nnlo}} = \frac{155}{24} + \frac{9}{16} N_c^{-2} + \frac{3}{16} N_c^2 \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \\ - \frac{1093}{48} N_c^2 \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) + \frac{121}{48} N_c^2 \ln^2 \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) - \frac{121}{24} N_c^2 \zeta_2 \\ - \frac{55}{8} N_c^2 \zeta_3 + \frac{12311}{216} N_c^2 + \frac{11}{16} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{11}{8} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \\ + N_h N_l T_f^2 \left[-\frac{2}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) + \frac{7}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\ + N_h T_f \left[-N_c^{-1} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) + \frac{17}{48} N_c^{-1} + \frac{11}{6} N_c \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right. \\ \left. - \frac{101}{12} N_c \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{1}{72} N_c \right] \\ + N_h^2 T_f^2 \left[\frac{1}{3} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\ + N_l T_f \left[-\frac{1}{2} N_c^{-1} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{3}{2} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{31}{24} N_c^{-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} N_c \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) + \frac{95}{6} N_c \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) - \frac{11}{6} N_c \ln^2 \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{11}{3} N_c \zeta_2 + N_c \zeta_3 - \frac{8345}{216} N_c \right] \\ + N_l^2 T_f^2 \left[\frac{127}{27} - \frac{7}{3} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{3} \ln^2 \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) - \frac{2}{3} \zeta_2 \right] \quad (5.38)$$



$$\begin{aligned}
h_1^{\text{nmlo}} = & \frac{433313}{20736} + \frac{41}{192} N_c^{-2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{21}{160} N_c^{-2} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& + \frac{63917}{15360} N_c^{-2} \zeta_3 - \frac{112267}{23040} N_c^{-2} + \frac{77}{120} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{24763}{8640} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{7}{240} N_c^2 \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{5653}{540} N_c^2 \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{847}{720} N_c^2 \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{847}{360} N_c^2 \zeta_2 + \frac{167}{12} N_c^2 \zeta_3 \\
& + \frac{183973}{34560} N_c^2 - \frac{77}{120} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{11551}{4320} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& - \frac{49}{480} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{143}{2160} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{134171}{7680} \zeta_3 \\
& + N_h N_l T_f^2 \left[-\frac{4}{45} - \frac{14}{45} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{29}{30} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_h T_f \left[-\frac{8}{45} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{7}{24} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{77}{96} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{2141}{2592} N_c^{-1} \right. \\
& \quad + \frac{77}{90} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{671}{180} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{7}{24} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{30} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1309}{1536} N_c \zeta_3 - \frac{4937}{6400} N_c \right] \\
& + N_h^2 T_f^2 \left[\frac{7}{45} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l T_f \left[\frac{7}{30} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1001}{1080} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{7}{120} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{139}{540} N_c^{-1} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{7}{10} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{71837}{64800} N_c^{-1} \\
& \quad - \frac{7}{30} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1153}{1080} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{7}{120} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad + \frac{1511}{216} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{77}{90} N_c \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{77}{45} N_c \zeta_2 \\
& \quad \left. + \frac{7}{15} N_c \zeta_3 - \frac{102083}{6480} N_c \right] \\
& + N_l^2 T_f^2 \left[\frac{5597}{3240} - \frac{29}{30} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{7}{45} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{14}{45} \zeta_2 \right]
\end{aligned} \tag{5.39}$$



$$\begin{aligned}
h_2^{\text{nnlo}} = & \frac{4113881237}{124416000} + \frac{10333}{67200} N_c^{-2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{5600} N_c^{-2} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& + \frac{24925603}{3225600} N_c^{-2} \zeta_3 - \frac{44067053}{4838400} N_c^{-2} + \frac{16973}{25200} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{27293899}{9072000} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{14400} N_c^2 \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{382208}{70875} N_c^2 \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{186703}{302400} N_c^2 \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{186703}{151200} N_c^2 \zeta_2 + \frac{219977}{10080} N_c^2 \zeta_3 \\
& - \frac{3844438817}{254016000} N_c^2 - \frac{16973}{25200} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{2089313}{756000} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& - \frac{1543}{4032} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{913}{7560} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{40080823}{1433600} \zeta_3 \\
& + N_h N_l T_f^2 \left[-\frac{1468}{23625} - \frac{1543}{9450} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{89533}{189000} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_h T_f \left[-\frac{83}{2700} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1543}{5040} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1}{15} N_c^{-1} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{134911}{184320} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{2660561}{4147200} N_c^{-1} + \frac{16973}{37800} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad - \frac{179819}{94500} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{5040} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{121}{3150} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{29141}{40960} N_c \zeta_3 - \frac{680351849}{1219276800} N_c \right] + N_h^2 T_f^2 \left[\frac{1543}{18900} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l T_f \left[\frac{1543}{6300} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{193889}{226800} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{1543}{25200} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{96029}{567000} N_c^{-1} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad - \frac{1543}{4200} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{125430253}{238140000} N_c^{-1} - \frac{1543}{6300} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad + \frac{552401}{567000} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{25200} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad + \frac{64471}{18144} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{16973}{37800} N_c \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{16973}{18900} N_c \zeta_2 + \frac{1543}{6300} N_c \zeta_3 - \frac{482032339}{63504000} N_c \right] \\
& + N_l^2 T_f^2 \left[\frac{3829289}{4860000} - \frac{89533}{189000} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{18900} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1543}{9450} \zeta_2 \right]
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Speziell für eine SU(3) gilt:

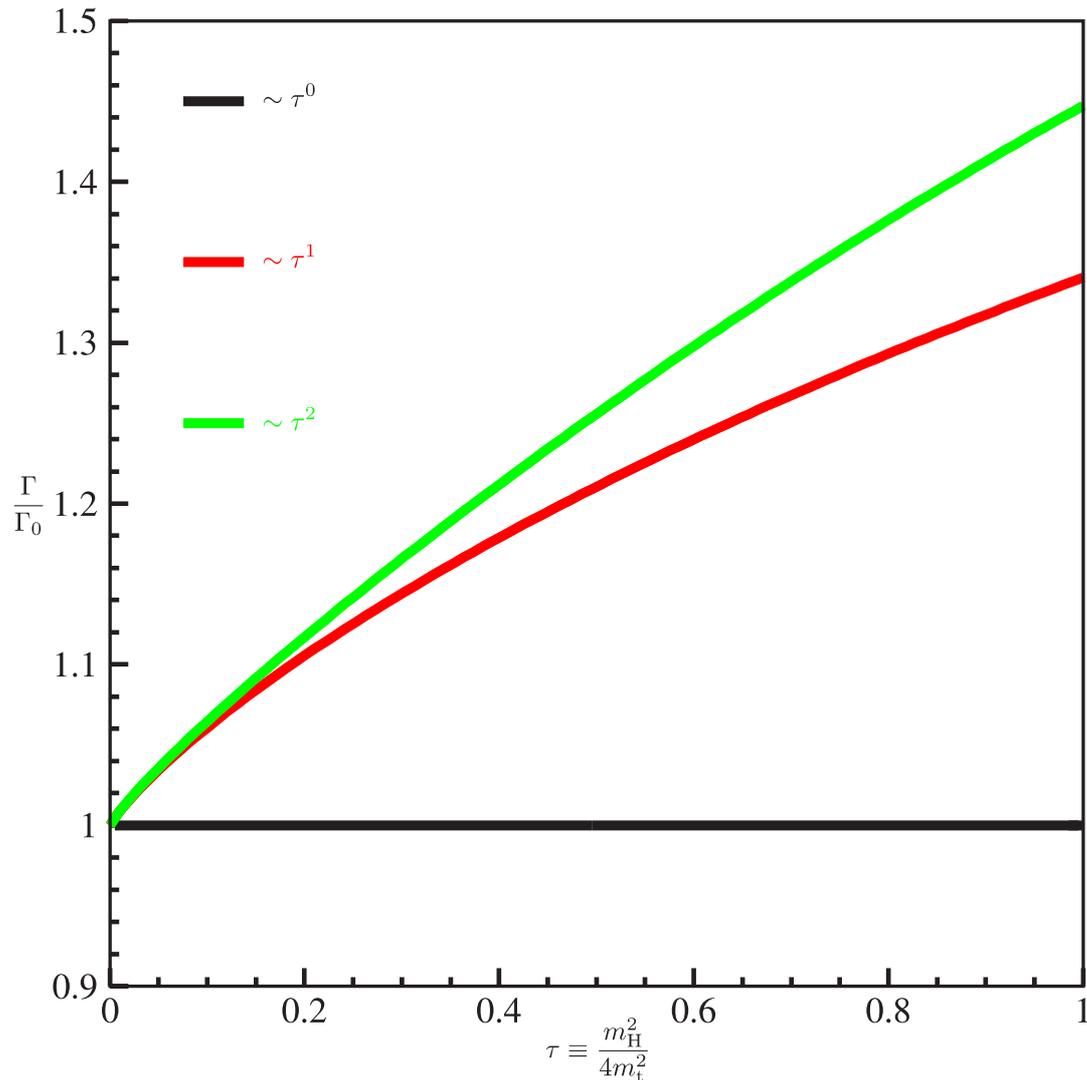
$$\begin{aligned}
h_0^{\text{nnlo}} = & \frac{24935}{48} - \frac{495}{8}\zeta_3 - \frac{363}{8}\zeta_2 - \frac{3301}{16} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{363}{16} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{19}{8} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \\
& + N_h \left[+\frac{11}{288} - \frac{307}{24} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) + \frac{11}{4} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{1}{12} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l \left[-\frac{4157}{72} + \frac{5}{4}\zeta_3 + \frac{11}{2}\zeta_2 + \frac{95}{4} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) - \frac{11}{4} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[\frac{7}{12} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) - \frac{1}{6} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l^2 \left[\frac{127}{108} - \frac{1}{6}\zeta_2 - \frac{7}{12} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{12} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
h_1^{\text{nnlo}} = & \frac{2831081}{41472} + \frac{14963399}{138240}\zeta_3 - \frac{847}{40}\zeta_2 - \frac{40673}{432} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{847}{80} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) - \frac{1663}{72} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) + \frac{77}{15} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) - \frac{7}{20} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& + N_h \left[-\frac{3170873}{3110400} + \frac{10549}{9216}\zeta_3 + \frac{1}{20} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{6071}{1080} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) + \frac{77}{60} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{7}{18} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{7}{180} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l \left[-\frac{9115633}{388800} + \frac{7}{12}\zeta_3 + \frac{77}{30}\zeta_2 + \frac{67717}{6480} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{77}{60} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{586}{405} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{14}{45} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{7}{90} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[-\frac{1}{45} + \frac{29}{120} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) - \frac{7}{90} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l^2 \left[\frac{5597}{12960} - \frac{7}{90}\zeta_2 - \frac{29}{120} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{7}{180} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
h_2^{\text{nnlo}} = & -\frac{634987991279}{6096384000} + \frac{19660371109}{116121600} \zeta_3 - \frac{186703}{16800} \zeta_2 - \frac{9150167}{189000} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{186703}{33600} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) - \frac{3673639}{151200} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \\
& + \frac{16973}{3150} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{2520} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& + N_h \left[-\frac{1780320569}{2438553600} + \frac{2090599}{2211840} \zeta_3 - \frac{293}{6300} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{405319}{141750} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) + \frac{16973}{25200} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{3780} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{1543}{75600} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l \left[-\frac{64572644753}{5715360000} + \frac{1543}{5040} \zeta_3 + \frac{16973}{12600} \zeta_2 + \frac{10306537}{1944000} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{16973}{25200} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{8973773}{6804000} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \\
& \quad \left. - \frac{1543}{4725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{18900} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[-\frac{367}{23625} + \frac{89533}{756000} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) - \frac{1543}{37800} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2}\right) \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l^2 \left[+\frac{3829289}{19440000} - \frac{1543}{37800} \zeta_2 - \frac{89533}{756000} \ln\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{75600} \ln^2\left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Der führende Term h_0^{nnlo} ist bereits bekannt; h_1^{nnlo} und h_2^{nnlo} stellen jedoch neue Koeffizienten in dieser Entwicklung dar. h_0^{nnlo} stimmt mit der Literatur [23], [24] überein, was die Richtigkeit der neuen Terme untermauert. Die Ergebnisse in Abhängigkeit von α_s^5 finden sich in Anhang G auf Seite 179. Das Konvergenzverhalten der Reihe soll wieder anhand eines Konvergenzplots betrachtet werden:





Bis zu $\tau = 0,15$ ist eine sehr gute Konvergenz der Reihe zu verzeichnen. Dies entspricht einer Higgsmasse von $\sqrt{0,6}m_t \approx 0,77m_t$. Dies ist immer noch ein schönes Verhalten, da man hier eigentlich nicht mehr von $m_H^2 \ll m_t^2$ sprechen kann, wofür diese Entwicklung vom theoretischen Standpunkte aus eigentlich nur gültig sein sollte.

Auf Vier-Schleifen-Niveau beträgt die Abweichung der Kurve $\sim \tau^2$ zur Kurve $\sim \tau^5$, die sehr nahe am exakten Ergebnis liegen muss, ungefähr 16%. Mit der Annahme, dass das Fünf-Schleifen-Resultat ein ähnliches Konvergenzverhalten aufweist wie das Vier-Schleifen-Ergebnis, kann man davon ausgehen, dass auch hier die Abweichung zum analytischen Ergebnis in dieser Größenordnung liegt.

Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens müsste die Entwicklung in τ noch weiter getrieben werden, was jedoch in Bezug auf die Rechenzeit sehr problematisch werden wird, lief doch der Term $\sim \tau^2$ auf dem institutsinternen Rechnercluster (bestückt mit



AMD Opteron 248, 2, 2 GHz, 4096 MB RAM und Dual-Core AMD Opteron 2218, 2, 6 GHz, 8192 MB RAM) mehrere Monate. Um eine Verwendung der parallelen Versionen von Form – sprich Parform oder Tform – kommt man dann höchstwahrscheinlich nicht mehr herum.

5.4 Überprüfung der Unabhängigkeit von der Renormierungsskala

In der dimensional Regularisierung muss die Renormierungsskala μ eingeführt werden, um zu gewährleisten, dass die Wirkung dimensionslos bleibt. Physikalisch messbare Größen wie Zerfallsbreiten und Wirkungsquerschnitte sollten jedoch nicht von dieser unphysikalischen Skala abhängig sein. Dies kann dadurch überprüft werden, dass man die entsprechende Größe nach μ ableitet. In der Ableitung dürfen dann nur Terme auftreten, die von höherer Ordnung sind als die physikalische Größe selbst.

Zu beachten ist, dass sowohl die Kopplungskonstante als auch die Masse eine Funktion von μ ist: $\alpha_s \equiv \alpha_s(\mu)$ und $m_t \equiv m_t(\mu)$. Die Ableitungen von α_s und m_t können über die entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen

$$\frac{\partial(\alpha_s/\pi)}{\partial \ln(Q^2)} = Q^2 \frac{\partial(\alpha_s/\pi)}{\partial Q^2} = \frac{Q}{2} \frac{\partial(\alpha_s/\pi)}{\partial Q} = -\beta_0 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 - \beta_1 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 - \beta_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^4 + \mathcal{O}(\alpha_s^5) \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial \ln(m_t)}{\partial \ln(\mu^2)} = \mu^2 \frac{\partial \ln(m_t)}{\partial \mu^2} = \frac{\mu}{2} \frac{1}{m_t} \frac{\partial m_t}{\partial \mu} = -\gamma_0 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right) - \gamma_1 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 - \gamma_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \mathcal{O}(\alpha_s^4) \quad (5.45)$$

bis zur benötigten Ordnung in α_s berechnet werden. Hierbei sind die Koeffizienten der β - [25], [26], [27], [28] und γ -Funktion [29], [30] gegeben durch:

$$\beta_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_f N_f \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{16} \left(\frac{34}{3} C_A^2 - 4 C_F T_f N_f - \frac{20}{3} C_A T_f N_f \right) \quad (5.46)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{64} \left(\frac{2857}{54} C_A^3 + 2 C_F^2 T_f N_f - \frac{205}{9} C_F C_A T_f N_f - \frac{1415}{27} C_A^2 T_f N_f + \frac{44}{9} C_F T_f^2 N_f^2 + \frac{158}{27} C_A T_f^2 N_f^2 \right) \quad (5.47)$$

$$\gamma_0 = \frac{3}{4} C_F, \quad \gamma_1 = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{2} C_F^2 + \frac{97}{6} C_F C_A - \frac{10}{3} C_F T_f N_f \right) \quad (5.48)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{64} \left(\frac{129}{2} C_F^3 - \frac{129}{4} C_F^2 C_A + \frac{11413}{108} C_F C_A^2 + C_F^2 T_f N_f (48\zeta_3 - 46) + C_F C_A T_f N_f \left(-48\zeta_3 - \frac{556}{27} \right) - \frac{140}{27} C_F T_f^2 N_f^2 \right) \quad (5.49)$$



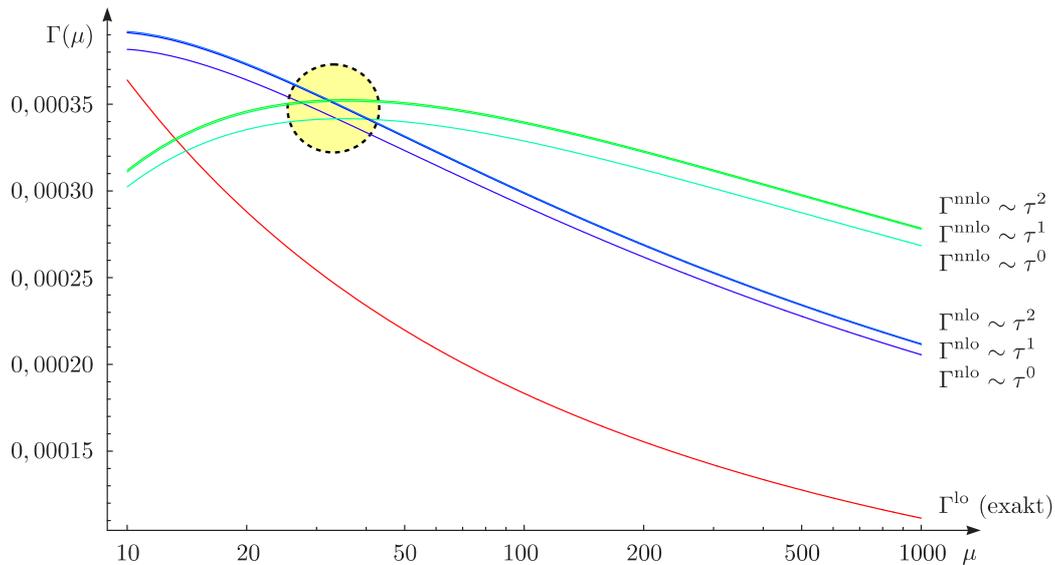
Speziell für die Zerfallsbreite muss dann gelten:

$$\frac{\partial \Gamma^{\text{lo}}}{\partial \mu} = \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial \Gamma^{\text{nlo}}}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \Gamma^{\text{lo}} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \Gamma^{\text{nlo}} \right\} = \mathcal{O}(\alpha_s^4) \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \Gamma^{\text{nnlo}}}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \Gamma^{\text{lo}} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \Gamma^{\text{nlo}} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \Gamma^{\text{nnlo}} \right\} = \mathcal{O}(\alpha_s^5) \quad (5.52)$$

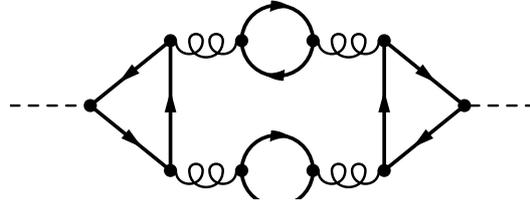
Dieses Verhalten konnte bei Γ^{lo} , Γ^{nlo} und Γ^{nnlo} bestätigt werden, was einen sehr mächtigen Test darstellt, um die Richtigkeit der Ergebnisse zu untermauern. Zusätzlich soll an dieser Stelle noch das Schaubild abgedruckt werden, in dem Γ^{lo} , Γ^{nlo} und Γ^{nnlo} in Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ dargestellt werden. Für Γ^{lo} wurde das exakte Ergebnis aus Gleichung 5.1 übernommen. Γ^{nlo} und Γ^{nnlo} sind einschließlich bis zur Ordnung τ^2 eingezeichnet. Das Laufen der Kopplungskonstanten $\alpha_s(\mu)$ und der Top-Quark-Masse $m_t(\mu)$ wurde mit dem **Mathematica**-Programm **Rundec** [31] ermittelt. Dabei wurde die Polmasse $m_t = 170,9 \text{ GeV}$ [32], der Wert $\alpha_s^{(5)}(m_Z) = 0,1189$ [33] für die starke Kopplung und schließlich $m_Z = 91,1876$ für die Masse des Z-Bosons [34] als Startwerte verwendet.



Es ist erkennbar, dass die Korrektur $\sim \tau^2$ sehr klein ist und die entsprechenden Kurven $\sim \alpha_s^3$ und $\sim \alpha_s^4$ nur um einen verschwindenden Bruchteil nach oben korrigiert werden. Was sofort auffällt ist, dass sich Vier- und Fünf-Schleifen-Ergebnis in einem Punkt schneiden, in welchem das Fünf-Schleifen-Resultat ein Extremum besitzt und daher formal nicht von μ abhängig ist. Dies ist bei etwa $\mu \approx 30$ der Fall. An dieser Stelle sind beide Ergebnisse gleich, was doch aber heißt, dass dort die fehlenden Korrekturen in der Entwicklung in τ sehr klein sind (principle of minimal sensitivity [35]).

5.5 Building Blocks

Die Berechnung der Zerfallsbreite $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$ bis zur Ordnung $1/m_t^4$ in der asymptotischen Entwicklung wurde durch Diagramme der Gestalt



erschwert. Entwicklungen nach m_t führten auf Zwischenergebnisse der Größe von Gigabytes, so dass nach wenigen Tagen die Festplattenkapazität erschöpft war und Form die Berechnung mit einer Fehlermeldung abbrach. Das Problem wurde dadurch gelöst, dass man die einzelnen Bausteine des Diagramms („Building Blocks“) – das wäre die massive Zwei- und Dreipunktfunction – separat berechnete und es dann zuletzt „von Hand“ zusammenbaute.

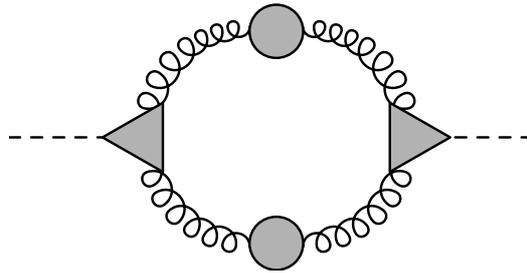
Sowohl die Zwei- als auch die Dreipunktfunction sind tensorwertige Funktionen aus den Invarianten der äußeren Impulse. Da es sich um Einschleifendiagramme handelt, lassen sich diese problemlos bis zu einer sehr hohen Ordnung in $1/m_t^2$ berechnen; die Zeitdauer dieser Berechnungen beträgt nur wenige Minuten.

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with } q_1 \text{ and a loop} &= h^{\mu\nu} \left(\frac{q_1^2}{m^2} \right) = \\
 &= A' q_1^2 g^{\mu\nu} + B' q_1^\mu q_1^\nu \text{ mit } A', B' = h \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{m^2}, \frac{q_1^2}{m^2}, \frac{q_2^2}{m^2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram with } q_1, q_2 \text{ and a loop} &= f^{\mu\nu} \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{m^2}, \frac{q_1^2}{m^2}, \frac{q_2^2}{m^2} \right) = \\
 &= A q_1 q_2 g^{\mu\nu} + B q_1^\mu q_2^\nu + C q_1^\nu q_2^\mu + D q_1^\mu q_1^\nu + E q_2^\mu q_2^\nu \\
 &\text{mit } A, B, C, D, E = f \left(\frac{q_1 \cdot q_2}{m^2}, \frac{q_1^2}{m^2}, \frac{q_2^2}{m^2} \right)
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Anschließend werden die erhaltenen Funktionen an den passenden Stellen eingesetzt und schließlich noch das bleibende masselose Einschleifenintegral von Mincer berechnet:

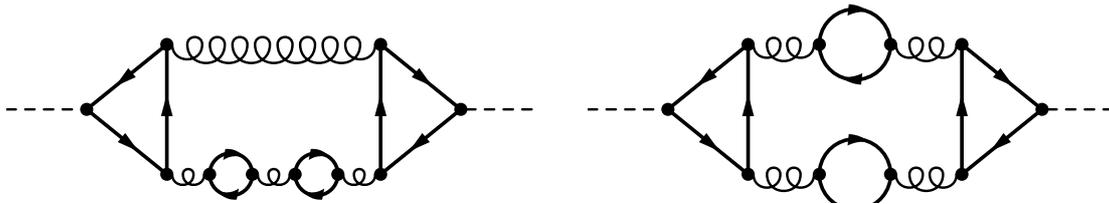




Auf diese Weise war es möglich, die Entwicklung dieser Diagramme sehr weit zu treiben, was mit der ursprünglichen Methode nicht realisierbar gewesen wäre.

5.5.1 Anwendung der Methode der Building Blocks

Als die Funktionalität der Building Blocks erfolgreich getestet worden war, kam die Idee auf, die Terme proportional nur N_h^2 und N_l^2 auf Fünfschleifenniveau bis zu einer hohen Ordnung in τ zu berechnen. Zu den N_h^2 -Termen tragen Diagramme bei, die zwei innere schwere Fermionschleifen aufweisen. Davon gibt es zwei Typen:



Vom ersten Typ existieren doppelt so viele Diagramme wie vom zweiten; die Werte beider sind jedoch gleich. Also genügt es, ein einzelnes Diagramm zu berechnen und das Resultat mit der Anzahl der Diagramme dieser Gestalt zu multiplizieren.

Die Diagramme, welche zu den Termen proportional zu N_l^2 beitragen, besitzen dieselbe Gestalt mit dem Unterschied, dass die inneren schweren Quarks durch leichte auszutauschen sind. Beachtet werden muss jedoch, dass sich beide Diagrammtypen in ihren Ergebnissen unterscheiden. Das masselose Ko-Subdiagramm wird auf die MINCER-Topologie LA abgebildet, jedoch unterscheidet sich die Zuordnung der Impulse bei beiden Typen. Darüber hinaus können hier nur die Building-Blocks für die Triangel-Subdiagramme genutzt werden. Dies stellt jedoch kein Problem dar, weil die Berechnung der masselosen Topologie relativ schnell vonstattengeht.

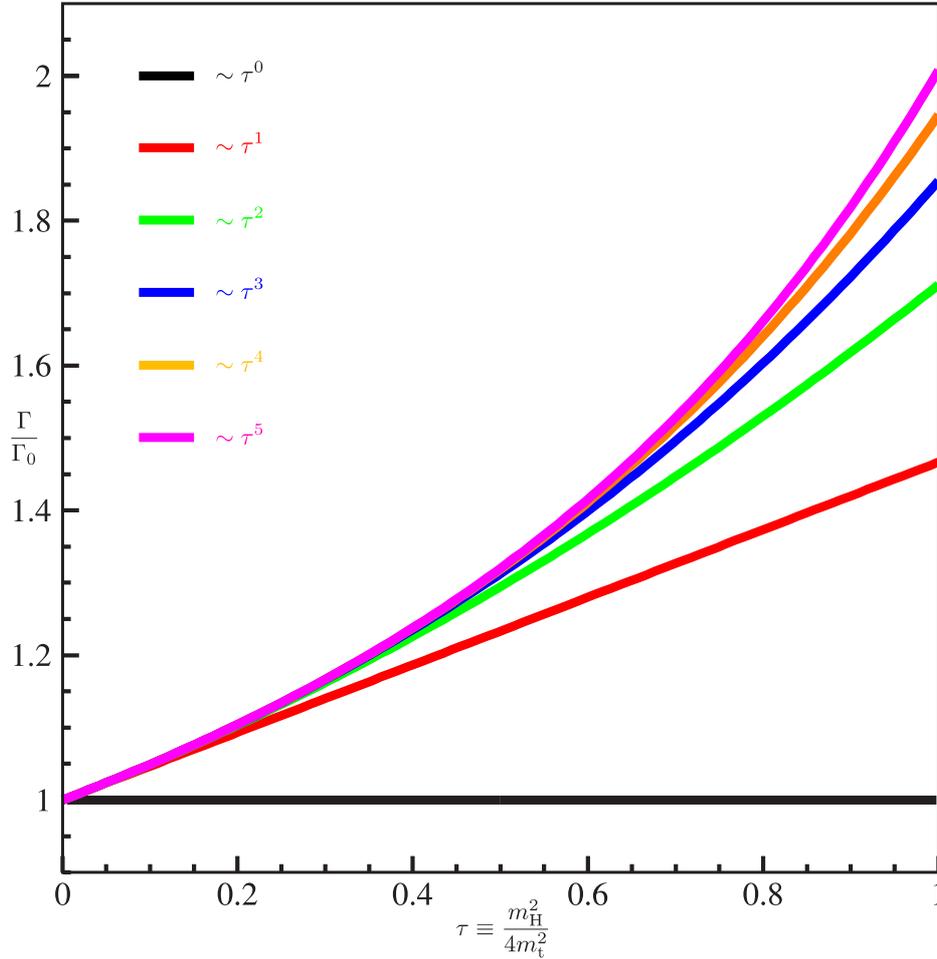
Die Auswertung konnte sowohl für die N_h^2 - als auch die N_l^2 -Terme bis zur Ordnung $1/m_t^{10}$ in die Tat umgesetzt werden, was sehr bemerkenswert ist, da die Entwicklung der N_h^2 -Terme mit der gewöhnlichen Technik schon auf Ordnung $1/m_t^4$ scheiterte.

Präsentiert werden an dieser Stelle die Ergebnisse für die Entwicklungen in die Konver-



genzplots, und zwar als erstes den N_h^2 -Term:

$$N_h^2 \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \left[\frac{1}{12} + \frac{7}{180} \tau + \frac{1543}{75600} \tau^2 + \frac{113}{9450} \tau^3 + \frac{27677}{3638250} \tau^4 + \frac{365306}{70945875} \tau^5 \right] \quad (5.55)$$



Bis $\tau = 0,7$ liefert die Entwicklung auf jeden Fall einen zuverlässigen Wert, doch sogar bei $\tau = 1$ funktioniert sie immer noch gut.

Der N_l^2 -Term besitzt folgende Form:

$$N_l^2 \left[n_0^{\text{nnlo}} + n_1^{\text{nnlo}} \tau + n_2^{\text{nnlo}} \tau^2 + n_3^{\text{nnlo}} \tau^3 + n_4^{\text{nnlo}} \tau^4 + n_5^{\text{nnlo}} \tau^5 + \mathcal{O}(\tau^6) \right] \quad (5.56)$$

$$n_0^{\text{nnlo}} = \frac{127}{108} - \frac{7}{12} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{12} \ln^2 \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{6} \zeta_2 \quad (5.57)$$

$$n_1^{\text{nnlo}} = \frac{5597}{12960} - \frac{29}{120} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) + \frac{7}{180} \ln^2 \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) - \frac{7}{90} \zeta_2 \quad (5.58)$$

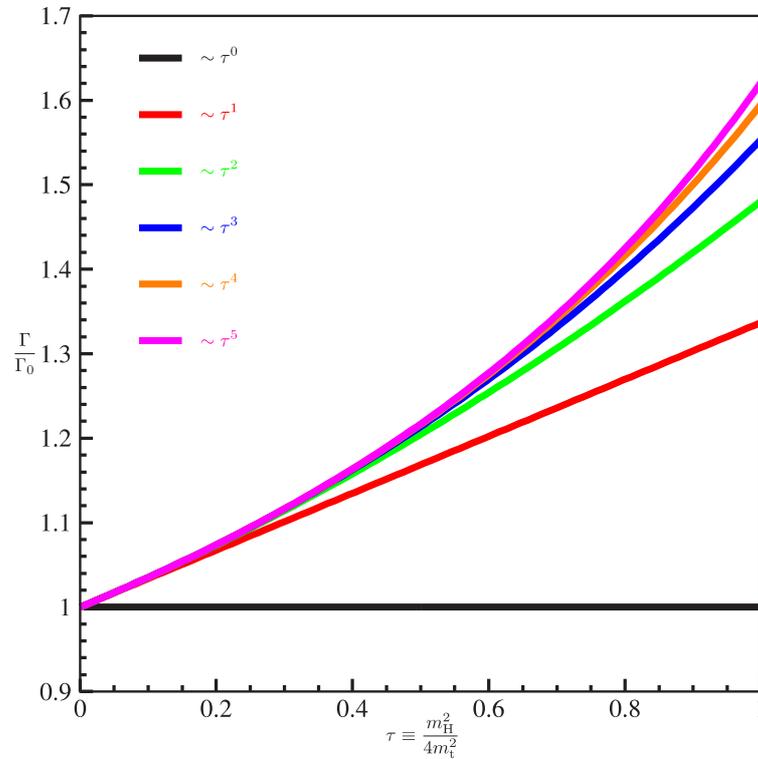


$$n_2^{\text{nnlo}} = \frac{3829289}{19440000} - \frac{89533}{756000} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{75600} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1543}{37800} \zeta_2 \quad (5.59)$$

$$n_3^{\text{nnlo}} = \frac{766591}{7290000} - \frac{3763}{56700} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{113}{9450} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{113}{4725} \zeta_2 \quad (5.60)$$

$$n_4^{\text{nnlo}} = \frac{6699969019}{106964550000} - \frac{10426231}{254677500} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{27677}{3638250} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{27677}{1819125} \zeta_2 \quad (5.61)$$

$$n_5^{\text{nnlo}} = \frac{1516374491251}{37544557050000} - \frac{403722799}{14898633750} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{365306}{70945875} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{730612}{70945875} \zeta_2 \quad (5.62)$$



Hier ist die Konvergenz sogar noch besser als beim N_h^2 -Term. Bis zu $\tau = 0,8$ unterscheiden sich die Terme $\sim \tau^4$ und $\sim \tau^5$ fast nicht voneinander. Jedoch kann man sogar bei $\tau = 1$ immer noch von einer sehr guten Konvergenz sprechen.

Der Beitrag der Terme $\sim N_l^2$ bzw. $\sim N_h^2$ zum gesamten Fünf-Schleifen-Ergebnis liegt bei etwa 4,3% bzw. 0,008%, sofern man $\mu = m_H = 120 \text{ GeV}$, $m_t = 170,9 \text{ GeV}$ [32], $n_l = 5$ und $n_h = 1$ wählt; die N_h^2 -Terme fallen somit kaum ins Gewicht.



5.6 Modifikationen von Mincer

Das Programmpaket **Mincer** [12] umfasst spezielle **Form**-Routinen zur Berechnung von masselosen Integralen vom Propagatortyp auf Ein-, Zwei- und Dreischleifenniveau. Auf die genauere Funktionsweise und technische Details von **Mincer** wird in Anhang D auf Seite 161 eingegangen.

Die Ergebnisse dieser Integrale besitzen jedoch nur bis zu einer bestimmten Potenz in ε ihre Gültigkeit. Einschleifenintegrale kann **Mincer** bis zu $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ berechnen; Zwei- bzw. Dreischleifenintegrale jedoch nur bis $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ bzw. $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$. In einer Fünfschleifenrechnung, wie diese für $\Gamma(\text{H} \rightarrow \text{gg}) \sim \mathcal{O}(\alpha_s^4)$ durchgeführt werden muss, führt dies zu Schwierigkeiten. Warum dies so ist, soll anhand des nackten Fünf-Schleifen-Resultats

$$\left(\sum_{n=1}^3 \frac{C_{-n}}{\varepsilon^n} + C_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \quad (5.63)$$

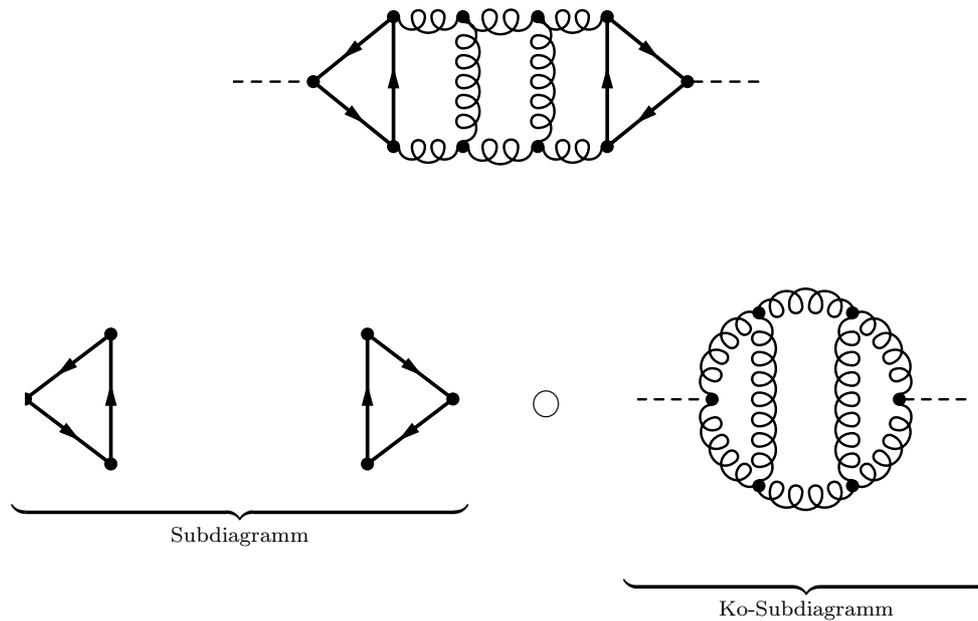
veranschaulicht werden. In diesem treten maximal $1/\varepsilon^3$ -Pole auf. Aus den masselosen Subdiagrammen resultieren Vorfaktoren $(\mu^2/(-q^2 + i\varepsilon))^{a\varepsilon}$ mit $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, mit denen einzelne Terme multipliziert werden.

$$\begin{aligned} R &= \left(\sum_{n=1}^3 \frac{C_{-n}}{\varepsilon^n} + C_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right)^{a\varepsilon} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^3 \frac{C_{-n}}{\varepsilon^n} + C_0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \times \left(1 + a\varepsilon \ln \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + a^2 \varepsilon^2 \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right) + a^3 \varepsilon^3 \ln^3 \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \right) = \\ &= \sum_{n=1}^3 \frac{C_{-n}}{\varepsilon^n} + C_0 + a \sum_{n=1}^3 \frac{C_{-n}}{\varepsilon^{n-1}} \ln \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right) \\ &\quad + a^2 \sum_{n=2}^3 \frac{C_{-n}}{\varepsilon^{n-2}} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right) + a^3 C_{-3} \ln^3 \left(\frac{\mu^2}{-q^2 - i\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Zur Anwendung des optischen Theorems wird nur der Imaginärteil benötigt; dieser resultiert aus allen Termen, die den Faktor $\ln(\mu^2/(-q^2 - i\varepsilon))$ beinhalten. Erkennbar ist, dass dies für die Koeffizienten C_{-1} , C_{-2} und C_{-3} der Fall ist. Diese müssen also korrekt sein, um die Richtigkeit des endlichen Anteils des Imaginärteils zu gewährleisten.

Mincer liefert jedoch für bestimmte Fälle nicht alle dieser Koeffizienten. Als Beispiel dient die asymptotische Entwicklung eines typischen Fünfschleifendiagramms:





Jedes Triangel-Subdiagramm liefert maximal einen $1/\varepsilon$ -Pol. Damit die Koeffizienten vor den Polen richtig sind, wird das Ergebnis des Ko-Subdiagramms bis $\mathcal{O}(\varepsilon)$ benötigt.

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sum_{n=1}^3 \frac{D_{-n}}{\varepsilon^n} + D_0 + D_1 \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) = \sum_{n=0}^3 \frac{D_{-n}}{\varepsilon^{n+2}} + \frac{D_1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \quad (5.65)$$

Das Problem ist jedoch, dass **Mincer** den Koeffizienten D_1 nicht kennt. Infolgedessen müssen einige Routinen von **Mincer** ein wenig abgeändert bzw. erweitert werden. Zu diesen Erweiterungen soll im Folgenden kurz Stellung genommen werden:

5.6.1 Änderungen an Topologien

1.) Ein-Schleifen-Topologie inpl1:

```

1  *
2  *   This is inpl1. It does the one loop topology of type L1.
3  *
4  multiply int1/eq;
   *** changed *** (original: multiply 1/ep^2*int1/eq;)
5  id  p2 = Q-p1;
6  id  Q.p1 = Q.Q/2+p1.p1/2-p2.p2/2;
7  id  Q.p2 = Q.Q/2-p1.p1/2+p2.p2/2;
8
9  *
10 * added 09.04.97 (by ms)

```



```

11 *
12 #call ACCU(l1 num)
13
14
15 *if ( ( count(p1.p1,1) >= 0 ) || ( count(p2.p2,1) >= 0 ) )
    discard;
16 *id int1/p1.p1^x1~/p2.p2^x2? =
    G(x1,0,x2,0,0,0)*Q.Q^2/Q.Q^x1/Q.Q^x2*eq;
17 #call one(p1,p2,Q,e1,e2,eq,int1)
18 #call ACCU(integral 1)
19 #call simplifyhgg          *** changed *** (renamed)
20 id acc(x1?) = x1;
21 *id      ep = 0;          *** changed *** (commented out)
22 .sort: Expression G scheme;
23 *
24 *   Now approximate and convert to MSbar.
25 *
26 #call finishhgg(1,'SCHEME')      *** changed *** (renamed)
27 *multiply ep^2;          *** changed *** (commented out)

```

Die Zeilen 4, 21 und 27 zu ändern bzw. auszukommentieren, führt dazu, dass Terme ab einer bestimmten Ordnung in ε nicht Null gesetzt werden. Sei der Ausdruck A beispielsweise eine Reihe in ε :

$$A = \frac{C_{-2}}{\varepsilon^2} + \frac{C_{-1}}{\varepsilon} + C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (5.66)$$

Dann führt die vierte Zeile, also die Division durch ε^2 , auf:

$$\frac{A}{\varepsilon} = \frac{C_{-2}}{\varepsilon^4} + \frac{C_{-1}}{\varepsilon^3} + \frac{C_0}{\varepsilon^2} + \frac{C_1}{\varepsilon} + C_2 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.67)$$

Zeile 21 kombiniert mit Zeile 27 würden dazu führen, dass alle Koeffizienten ab $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ wegfallen:

$$A' = \frac{C_{-2}}{\varepsilon^2} + \frac{C_{-1}}{\varepsilon} + C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 \quad (5.68)$$

2.) Zwei-Schleifen-Topologie inpt1:

```

1 *
2 *   This is inpt1. It does two loop topologies of type T1.
3 *
4 multiply replace_(p2,p3,p3,p4,p4,p6,p5,p7)
5     *int1*int3*Q.Q*eq;
    *** changed *** (original:

```



```

multiply replace_(p2,p3,p3,p4,p4,p6,p5,p7)/ep)
6 #call dotwohgg()          *** changed *** (renamed)
7 .sort: Simplify G(3);
8 id      acc(x1?) = x1;
9 *id     ep = 0;          *** changed *** (commented out)
10 .sort: Expression G scheme;
11 *
12 *   Now approximate and convert to MSbar.
13 *
14 #call finishhgg(2,'SCHEME')          *** changed *** (renamed)
15 *multiply ep;          *** changed *** (commented out)

```

Die Änderungen hier haben denselben Effekt wie bei der Topologie `inpl1`. Sie sorgt dafür, dass die Entwicklung in ε nicht ab einer bestimmten Ordnung abgeschnitten wird.

3.) Drei-Schleifen-Topologie `inpla`

```

1 *
2 *   Reduction procedure for three loop graphs of the LA
   or ladder type.
3 *   Notation is from S.G.Gorishny et.al. Comp.Phys.Comm
   55(1989)381
4 *
5 *
6 *
7 *
8 *
9 *
10 *
11 *
12 *
13 *
14 *
15 *
16 *
   .
   .
   .
17 #call ACCU(First loop integral)
18
19 #call simplifyhgg          *** changed *** (renamed)
20

```



```

21 #call ACCU(Simplify first G)
22 *
23 *   The rest is standard. Note that the momenta that still exist
24 *   have to be called p1,p3,p4,p6,p7.
25 *
26 #call dotwohgg()          *** changed *** (renamed)
27 #call ACCU(Simplify G(3))
28 id      acc(x1?) = x1;
29 *id     ep = 0;          *** changed *** (commented out)
30 .sort: Expression G scheme;
31 *
32 *   Now approximate and convert to MSbar.
33 *
34 #call finishhgg(3,'SCHEME')      *** changed *** (renamed)

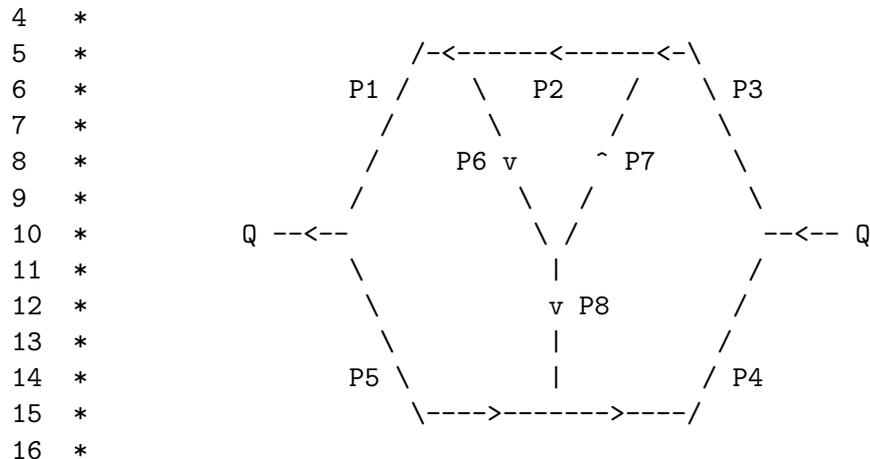
```

4.) Drei-Schleifen-Topologie inpbe

```

1 *
2 *   Reduction procedure for three loop graphs of the BE or
3 *   benz type.
4 *   Notation is from S.G.Gorishny et.al. Comp.Phys.Comm
5 *   55(1989)381

```



```

17 #call ACCU(First loop integral)
18 #call simplifyhgg          *** changed *** (renamed)
19 #call ACCU(Simplify first G)
20 *

```



```

21 *   The rest is standard. Note that the momenta that still exist
22 *   have to be called p1,p3,p4,p6,p7.
23 *
24 #call dotwohgg()          *** changed *** (renamed)
25 #call ACCU(Simplify G(3))
26 id acc(x1?) = x1;
27 *id ep = 0;              *** changed *** (commented out)
28 .sort: Expression G scheme;
29 *
30 *   Now approximate and convert to MSbar.
31 *
32 #call finishhgg(3,'SCHEME')      *** changed *** (renamed)

```

5.) Drei-Schleifen-Topologie inpno

```

1 *
2 * modified version of inpno (26.Oct.96)
3 *
4
5
6 #define LONGINT "1"
7
8
9 #-
10 *
11 * Reduction procedure for three loop graphs of the NO or
12 * nonplanar type.
13 * Notation is from S.G.Gorishny et.al. Comp.Phys.Comm
14 * 55(1989)381

```

```

13 *
14 *
15 *
16 *
17 *
18 *
19 *
20 *
21 *
22 *
23 *
24 *
25 *

```



```

.

26 #call ACCU(First loop integral)
27
28 #call simplifyhgg          *** changed *** (renamed)
29
30 #call ACCU(Simplify first G)
31
32 #call dotwohgg()          *** changed *** (renamed)
33 #call ACCU(Simplify G(3))
34 id  acc(x1?) = x1;
35 *id  ep = 0;                *** changed *** (commented out)
36 .sort: Expression G scheme;
37 #call finishhgg(3,'SCHEME')      *** changed *** (renamed)

```

In den Topologien `inpla`, `inpbe` und `inpno` werden im Wesentlichen nur Zeilen auskommentiert, in denen $\varepsilon = 0$ gesetzt wird. Außerdem müssen die Namen der entsprechenden Prozeduren, die auch noch geändert wurden, angepasst werden.

5.6.2 Änderungen an Prozeduren

1.) Prozedur `finish.prc`:

```

1  #procedure finishhgg(LOOPS,SCHEME)
    *** changed *** (renamed)
2  *
3  *id  ep = 0;                *** changed *** (commented out)
4  *
5  *  Substitute the integrals.
6  *
.
.
.

7  id  G311 = (1-2*ep)*(6*z3+9*z4*ep+102*z5*ep^2);
8  *
9  id  F321 = 20*z5 + F321ep*ep;
    *** changed *** (original: id  F321 = 20*z5;)
10 *
11 #ifndef 'GAUGE'
12     #define GAUGE "0"
13 #endif
14 id  xi = 'GAUGE';

```



```

15
16 *id ep = 0;          *** changed *** (commented out)
17 *
18 .sort: Sub integrals;
19 *
    .
    .
    .
20 #if 'SCHEME' == 2
21
22 *
23 *   This is classical MS-bar
24 *
25
26 #message Answer in classical MS-bar
27
28 #do i = 1, 'LOOPS'
29     multiply,acc( 1 + 2*ep + ep^2*( 4 - z2/2 )
30                 + ep^3*( 8 - z2 - 7/3*z3 )
31                 + ep^4*( 16 - 2*z2 + z2^2/8 - 14/3*z3 - 13/4*z4 )
32                 + ep^5*( 32 - 4*z2 + z2^2/4 - 28/3*z3 + 7/6*z2*z3 - 13/2*z4
33                       - 31/5*z5 )
34                 + ep^6*( 64 - 8*z2 + z2^2/2 - z2^3/48 - 56/3*z3 + 7/3*z2*z3
35                       + 49/18*z3^2 - 13*z4 + 13/8*z2*z4 - 62/5*z5 - 61/6*z6 )
36                       );
37     #call ACCU{}
38 #enddo
39
40 *** changed *** (the next 17 lines were commented out)
41
42 *#if 'LOOPS' == 0
43 *#else
44 *#if 'LOOPS' == 1
45 *multiply,(1+2*ep+4*ep^2+8*ep^3-7/3*ep^3*z3)*(1-z2*ep^2/2);
46 *#else
47 *#if 'LOOPS' == 2
48 *multiply,(1+4*ep+12*ep^2+32*ep^3-14/3*ep^3*z3)*(1-2*z2*ep^2/2);
49 *#else
50 *#if 'LOOPS' == 3
51 *multiply,(1+6*ep+24*ep^2+80*ep^3-7*ep^3*z3)*(1-3*z2*ep^2/2);
52 *#else

```



```

53  ##message Illegal number of loops specified: 'LOOPS'
54  ##message Answer will be in the G-scheme anyway
55  ##endif
56  ##endif
57  ##endif
58  ##endif
59
60  *** changed ***
61
62
63  #endif
64  #if 'SCHEME' == 1
65  ***##message Invalid value 'SCHEME' for output
        corrected to G-scheme
66  ***##else
67  #message Answer in the G-scheme
68  #endif
69  ***##endif
70  *id ep = 0;          *** changed *** (commented out)
71  *
72  #endprocedure

```

Hier werden alle Zeilen auskommentiert, die $\varepsilon = 0$ setzen. Außerdem addiert man in Zeile 9 zusätzlich einen zu ε proportionalen Koeffizienten $F321ep$, der zunächst nicht weiter ersetzt wird. Dies war dann auch nicht weiter nötig, da er im Endergebnis nicht auftauchte. Der Faktor zur Umrechnung ins $\overline{\text{MS}}$ -Schema von Zeile 29 bis 34 wurde bis zu $\mathcal{O}(\varepsilon^6)$ erweitert.

2.) Tabelle `tabtwo.prc`:

Die Ergebnisse aller Integrale sind in der neuen Tabelle bis $\mathcal{O}(\varepsilon^6)$ angegeben, im Unterschied zu vorher, als diese nur Terme bis $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ umfassten.

3.) Prozedur `dotwo.prc`:

```

1  #procedure dotwohgg()          *** changed *** (renamed)
    .
    .
    .
2  #call ACCU(Second loop)
3
4  #call simplifyhgg          *** changed *** (renamed)
5
6  #call ACCU(Simplify G(2))

```



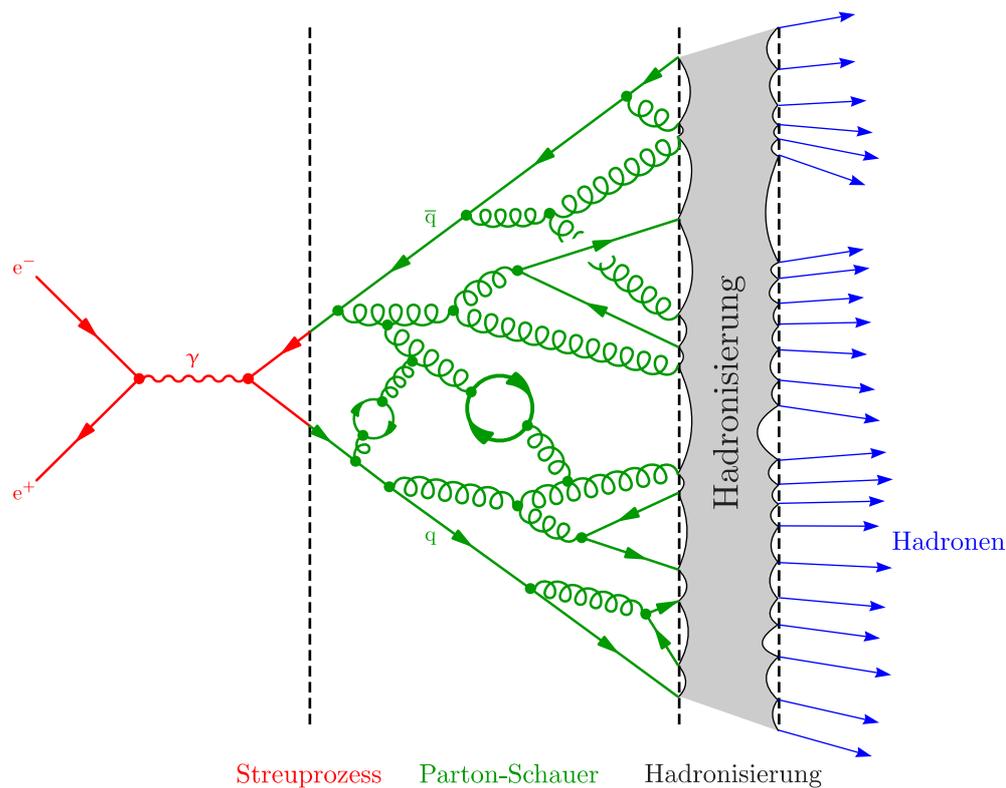
```
7
8  if ( count(int2,1) > 0 );
9      #call one(p2,p5,Q,e2,e5,eq,int2)
10 endif;
11
12 #call ACCU(Third loop)
13
14 multiply 1/Q.Q/eq^3;
15 #call simplifyhgg          *** changed *** (renamed)
16 #endprocedure
```

In dieser Prozedur müssen nur die Namen der anderen geänderten Prozeduren angepasst werden.

Alle geänderten Topologien und Prozeduren bis auf die Tabelle `tabtwo.prc` erhielten den namentlichen Zusatz `hgg`. Die Tabelle `tabtwo.prc` wurde nicht umbenannt, sondern direkt durch die neue Version ausgetauscht. Die Prozedur `simplify` wurde zwar umbenannt; es hat sich jedoch herausgestellt, dass an dieser nichts geändert werden muss.

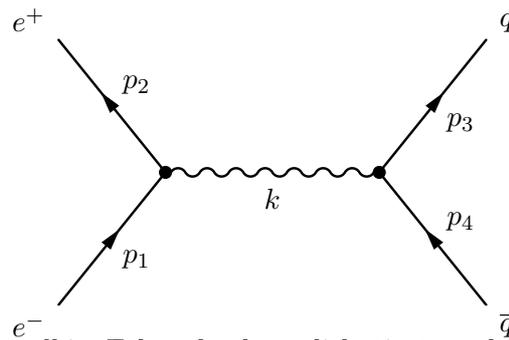


6 Hadronerzeugung durch Elektron-Positron-Kollisionen



6.1 Diskussion des Prozesses

Die Experimente Babar, Cleo und Belle wurden mit dem Ziel ins Leben gerufen, die Physik der Hadronen zu untersuchen und damit die Gültigkeit des Standardmodells zu prüfen. Speziell an Babar und Belle wird die CP-Verletzung von B-Mesonen gemessen. Die zu untersuchenden Hadronen gehen aus e^+e^- -Kollisionen hervor. Der ablaufende Prozess wird visualisiert durch folgendes Feynmandiagramm:



Was hier genau abläuft, soll im Folgenden kurz diskutiert werden [36]. Am ersten Teilprozess $e^+e^- \mapsto \gamma^*$ beteiligen sich ausschließlich Leptonen (und das virtuelle Photon γ^*), welche nicht sensitiv auf die starke Wechselwirkung sind. Hier treten höchstens elektroschwache Phänomene auf, die jedoch nicht betrachtet werden sollen. Für den zweiten Teilprozess $\gamma^* \mapsto q\bar{q}$ sind stattdessen QCD-Effekte maßgeblich.

- 1.) 10^{-18} m: Ein $q\bar{q}$ -Paar wird über die elektroschwache Wechselwirkung erzeugt.
- 2.) 10^{-17} m: Die gebildeten Quarks befinden sich nicht auf der Massenschale, sind also keine asymptotischen Teilchen. Sie besitzen eine große invariante Masse Q^2 . Ein Teil dieser invarianten Masse wird als harte Gluonen abgestrahlt. Die ersten emittierten Gluonen besitzen einen großen Transversalimpuls und sind als Gluonjets beobachtbar. Da sich alle Gluonen selbst jenseits der Massenschale befinden, findet nach der charakteristischen Zeitdauer $\Delta t = 1/\sqrt{q^2}$ – wobei q^2 die invariante Masse eines Partons ist – eine neue Reaktion statt, die weitere Partonen hervorbringt. Die Invarianten werden mit jedem Zerfall kleiner, die Energie der Partonen sinkt jedoch logarithmisch mit q^2 , also eher langsam und liegt im Energiebereich Q^2 der ursprünglich erzeugten Gluonen und Quarks. Damit ist deren Wellenlänge $\lambda \sim \mathcal{O}(1/Q)$. Die Weglänge zwischen zwei aufeinanderfolgenden Prozessen siedelt sich im Bereich $\mathcal{O}(1/q)$ an und ist viel größer als λ . Für frühe Zeitpunkte findet keine Interferenz der zugeordneten Amplituden statt, und die Zerfälle geschehen im Wesentlichen voneinander unabhängig.
- 3.) 10^{-16} m: Hadronisierung (Fragmentation) der Partonen

Die abgestrahlten Partonen beginnen, mit den Partonen, aus denen sie hervorgegangen sind, oder miteinander zu wechselwirken. Weitere Gluonen werden beinahe kollinear zu den Quarks abgestrahlt, weil sich deren Transversalimpulse nur noch minimal voneinander unterscheiden. Dies geschieht bei einer Energieskala, welche der Masse der Hadronen oder des Landau-Pols von $\alpha_s(\mu)$ entspricht. Die jetzt initiierten Effekte sind nichtperturbativ und entziehen sich der störungstheoretischen Beschreibung.

- 4.) $> 10^{-15}$ m: Zerfälle instabiler Hadronen

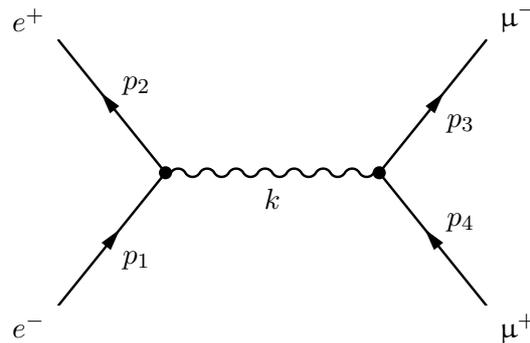
Wie schon erwähnt, können die Abschnitte (3) und (4) nicht durch Störungsrechnung beschrieben werden. Eine Behandlung ist zum Beispiel über Monte-Carlo-Methoden zu bewerkstelligen. Darauf soll jedoch im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht eingegangen



werden; das Augenmerk gilt dem zweiten Abschnitt.

6.2 Das R-Verhältnis

Bevor auf die Produktion eines $q\bar{q}$ -Paares durch Elektron-Positron-Kollision eingegangen werden soll, ist es sinnvoll, den einfacheren Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ zu betrachten:



Dessen Wirkungsquerschnitt wurde in Anhang E hergeleitet:

$$\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \frac{\beta_\mu}{2} (3 - \beta_\mu^2) \quad \text{mit } \beta_\mu = \sqrt{1 - \frac{s}{4m_\mu^2}} \quad (6.1)$$

Wegen $m_\mu \approx 206,7m_e$ gilt $\beta_\mu \approx 1$ und damit:

$$\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (6.2)$$

Auf Baumgraphenniveau verläuft die Berechnung von $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$ analog zu vorher, sind doch nur die Myonen durch Quarks zu ersetzen. Da sich Quarks bezüglich der $SU_c(3)$ transformieren, treten sie als Farbmultipletts auf, womit das obige Ergebnis mit N_c , also der Anzahl der Farben, multipliziert werden muss. Der zweite Unterschied ist, dass sich die Ladungen von Quarks und Myonen unterscheiden. Ergo ist ein zusätzlicher Faktor Q_q^2 zu berücksichtigen, wobei Q_q die Ladung eines Quarks in Einheiten der Elementarladung ist, also $Q_{u,c,t} = 2/3$ bzw. $Q_{d,s,b} = -1/3$. Man muss über alle Ladungsquadrate der Quarks summieren, die kinematisch erzeugt werden können:

$$\sigma_0(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = N_c \left(\sum_q Q_q^2 \right) \sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = N_c \left(\sum_q Q_q^2 \right) \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (6.3)$$

Damit besitzt auch der Wirkungsquerschnitt der Quark-Paarproduktion dasselbe charakteristische Verhalten proportional zu $1/s$. Dieser Abfall gewinnt bei großen Energien



\sqrt{s} an Bedeutung und unterdrückt die auftretenden QCD-Korrekturen, was jedoch unerwünscht ist. Infolgedessen ist es geschickt, bei der Betrachtung dieser Korrekturen nicht den Wirkungsquerschnitt zu untersuchen, sondern das sogenannte R-Verhältnis:

$$R(s) = \frac{\sigma_0(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma_0(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (6.4)$$

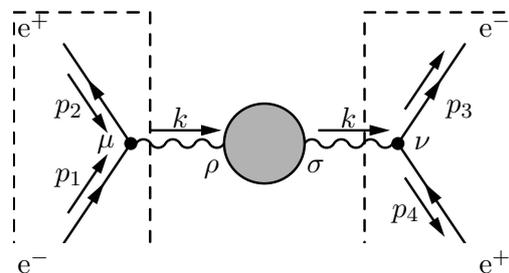
Dieser Quotient weist nicht mehr die störende Proportionalität zu $1/s$ auf, was sowohl für die Auswertung experimenteller Daten als auch theoretischer Ergebnisse sehr von Vorteil ist, weshalb gewöhnlich darauf zurückgegriffen wird.

6.3 Berechnung von QCD-Korrekturen

In diesem Kapitel soll auf die Methodik eingegangen werden, die zur Berechnung von QCD-Korrekturen zum R-Verhältnis herangezogen wurde.

6.3.1 Zur Verwendung des optischen Theorems

Ausgangspunkt der Betrachtungen bildet die Vorwärtsstreuamplitude $\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$:



Nach dem optischen Theorem steht der Imaginärteil von $\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)$ in Verbindung mit $\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})$:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q}) = \frac{1}{2E_{\text{cm}}p_{\text{cm}}} \text{Im}[\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)] = \frac{1}{2s} \text{Im}[\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)] \quad (6.5)$$

Die beiden gestrichelten Kästchen beinhalten den leptonischen Anteil, gebildet durch die externen Elektronen. Der ausgefüllte Kreis symbolisiert alle Korrekturen zum Photon-

propagator:

$$(6.6)$$

Die Summe dieser Korrekturen wird im Folgenden mit $\Pi^{\sigma\sigma}(k)$ bezeichnet. Im leptoni-schen Anteil gibt es keine QCD-Korrekturen. Für die weitere Auswertung ist dieser daher uninteressant und wird in der Berechnung des Matrixelements für den obigen Prozess abgespaltet:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(e^+e^- \mapsto e^+e^-) &= (-ie)^2 \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \left(\frac{-ig_{\mu\sigma}}{k^2} \Pi^{\sigma\sigma}(k) \frac{-ig_{\sigma\nu}}{k^2} \right) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2) = \\ &= \frac{e^2}{k^4} \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\nu v(p_2) \Pi_{\mu\nu}(k) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Um Eichinvarianz zu gewährleisten, muss die tensorwertige Größe $\Pi_{\mu\nu}(k)$ die Form

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2) = (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2) \quad (6.8)$$

haben, wobei

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{(d-1)s} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \Pi_{\mu\nu}(k) \quad (6.9)$$

gilt. Aus der Erhaltung der äußeren Ströme $j^\mu = \bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)$ bzw. $j^\nu = \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4)$ folgt zusätzlich $p_{1,\mu} j^\mu = p_{2,\mu} j^\mu = 0$ bzw. $p_{3,\nu} j^\nu = p_{4,\nu} j^\nu = 0$. Schließlich wird über die Spins der einlaufenden Teilchen gemittelt und über die der auslaufenden Teilchen summiert. Unter Vernachlässigung der Elektronenmasse ergibt sich:

$$\frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} \mathcal{M} = \frac{e^2}{4s^2} \text{Sp}(\not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu) \cdot k^2 g_{\mu\nu} \Pi(k^2) = \frac{e^2}{4s} (-8p_1 \cdot p_2) \Pi(k^2) = -e^2 \Pi(k^2) \quad (6.10)$$

$$\sigma(e^+e^- \mapsto \text{Hadronen}) = \frac{1}{2s} \text{Im}(\mathcal{M}) = -\frac{e^2}{2s} \text{Im}[\Pi(k^2)] = -\frac{4\pi\alpha}{2s} \text{Im}[\Pi(k^2)] \quad (6.11)$$

Durch Normierung auf den Wirkungsquerschnitt für den Hochenergielimes der Myon-Paarproduktion über ein virtuelles Photon resultiert das R-Verhältnis:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \mapsto \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-)} = \frac{-\frac{4\pi\alpha}{2s} \text{Im}[\Pi(k^2)]}{\frac{4\pi}{3s}\alpha^2} = \boxed{-\frac{12\pi}{e^2} \text{Im}[\Pi(k^2)]} \quad (6.12)$$

Die Vorteile des optischen Theorems liegen auf der Hand. Erstens erspart man sich die Integration über den Phasenraum, welche bei drei oder gar vier Teilchen im Endzustand schwer zu handhaben ist, vor allem wenn die Teilchen massiv sind. Des Weiteren reduziert man alle mannigfaltigen Diagramme auf einen Typ, nämlich mit zwei externen Linien und einem äußeren Impuls. Diese können hervorragend mit den zur Verfügung stehenden Routinen behandelt werden. Zu guter letzt werden Infrarotdivergenzen geschickt umgangen, da virtuelle und reelle Korrekturen verschiedenen Schnitten des Diagramms entsprechen. Man nimmt also beide Korrekturen mit und separat auftretende Infrarotdivergenzen heben sich in der Summe beider heraus.

6.3.2 Das optische Theorem anhand des Wirkungsquerschnitts auf Baumgraphenniveau

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu} &= -(-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left[\gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} \right] = \\ &= -4e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu(k+q)^\nu + k^\nu(k+q)^\mu - g^{\mu\nu}(k \cdot (k+q) - m^2)}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Unter Gebrauch der Feynmanparametrisierung

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (6.14)$$

ergibt sich weiter mit der Transformation $k = l - xq$:

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{k^2 - m^2 + 2xk \cdot q + xq^2} = \int_0^1 \frac{1}{l^2 + x(1-x)q^2 - m^2} \quad (6.15)$$

Für den Zähler folgt:

$$\begin{aligned} &2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu}l^2 - 2q^\mu q^\nu x(1-x) + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2) \times \\ &\times \{+q^\mu l^\nu(1-2x) + q^\nu l^\mu(1-2x) - g^{\mu\nu}q \cdot l(1-2x)\} \end{aligned} \quad (6.16)$$



Die letzten drei Summanden in den geschweiften Klammern führen zu Integralen der Form $A^\mu(q^2)$, die keinen Beitrag liefern. Damit ist folgender Ausdruck zu betrachten:

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = -4e^2\mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{2l^\mu l^\nu - g^{\mu\nu} l^2 - 2q^\mu q^\nu x(1-x) + g^{\mu\nu}(m^2 + x(1-x)q^2)}{l^2 + x(1-x)q^2 - m^2} \quad (6.17)$$

Das Endergebnis für $i\Pi_2^{\mu\nu}$ muss wegen der Eichinvarianz von der Form

$$i\Pi_2^{\mu\nu} = (q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu) \Pi_2(q^2) \quad (6.18)$$

sein mit der skalaren Amplitude $\Pi_2(q^2)$. Durch Anwenden des Projektors

$$\frac{1}{(d-1)q^4} (q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu) \quad (6.19)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi_2(q^2) &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\mu^{4-d}}{l^2 + x(1-x)q^2 - m^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{d-3}{d-1} x(1-x) + \frac{2}{(d-1)q^4} (l \cdot q)^2 - \frac{l^2}{q^2} + \frac{d+1}{d-1} \frac{m^2}{q^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Mit den Integralen

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^\lambda} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\lambda + \varepsilon - 2)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\Delta^{\lambda + \varepsilon - 2}} \quad (6.21)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l \cdot k}{(l^2 - \Delta)^\lambda} = -\frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\lambda + \varepsilon - 3)}{\Gamma(\lambda)} \frac{q^2}{\Delta^{\lambda + \varepsilon - 3}} \quad (6.22)$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^\lambda} = -\frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(\lambda + \varepsilon - 3)}{\Gamma(\lambda)} \frac{1}{\Delta^{\lambda + \varepsilon - 3}} \quad (6.23)$$

und einer Entwicklung von $\Pi(q^2)$ nach ε resultiert:

$$\Pi(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (6.24)$$



Durch Ladungsrenormierung ergibt sich:

$$\widehat{\Pi}_2(q^2) \equiv \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2} \right) \quad (6.25)$$

Schlussendlich wird der Imaginärteil benötigt:

$$\begin{aligned} \widehat{\Pi}_2(q^2 + i\epsilon) &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)(q^2 + i\epsilon)} \right) = \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(\frac{m^2}{m^2 - x(1-x)q^2 + i\epsilon'} \right) = \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_{1/2-1/2\sqrt{1-4m^2/q^2}}^{1/2+1/2\sqrt{1-4m^2/q^2}} dx x(1-x) \cdot \pi = \\ &= -\frac{\alpha}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2} \right) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Mittels

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) = -\frac{4\pi\alpha}{s} \text{Im}(\Pi(s)) \quad (6.27)$$

folgt dann tatsächlich:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \left(1 + \frac{2m^2}{s} \right) \quad (6.28)$$

6.3.3 Klassifikation der auftretenden Feynmandiagramme

Wie zuvor erklärt, müssen für das R-Verhältnis Korrekturen zum Photonpropagator berechnet werden. Die hierbei vorkommenden Diagramme lassen sich in zwei Klassen einteilen:

- 1.) Nicht-Singulett-Diagramme:

Bei diesen Diagrammen koppeln die beiden äußeren Photonen an derselben Fermionschleife, die als masselos betrachtet wird. Von den restlichen Fermionschleifen muss – auf Vier-Schleifen-Niveau – mindestens eine massiv sein. Der masselose Vier-Schleifen-Anteil wird nicht berechnet, weil die hierfür notwendigen Topologien nicht zur Verfügung stehen.



2.) Singulett-Diagramme:

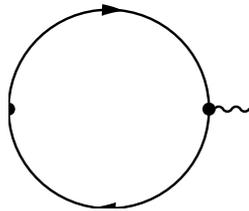
Diese treten erst ab Drei-Schleifen-Niveau auf. Im Gegensatz zu den Nicht-Singulett-Graphen koppelt hier jedes Photon an einer separaten Fermionschleife. Auch hier muss auf Vier-Schleifen-Niveau mindestens eine massiv sein.

6.3.4 Nicht-Singulett-Diagramme

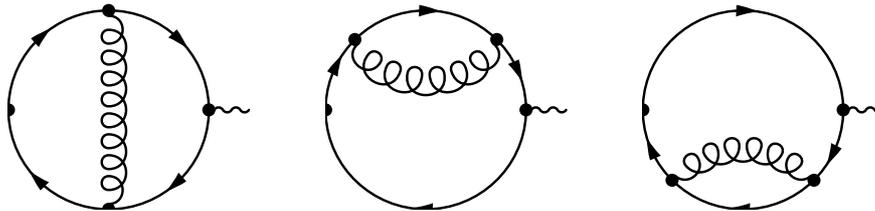
Hier sollen einige Beispieldiagramme aufgelistet werden:

1.) Masselose Graphen:

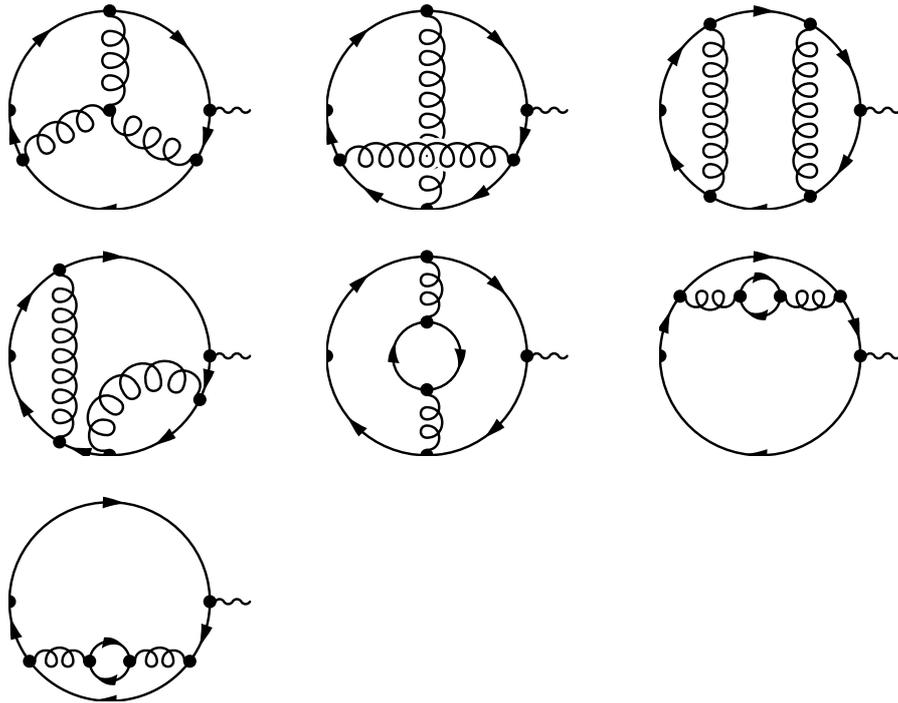
a.) Ein-Schleifen-Beitrag:



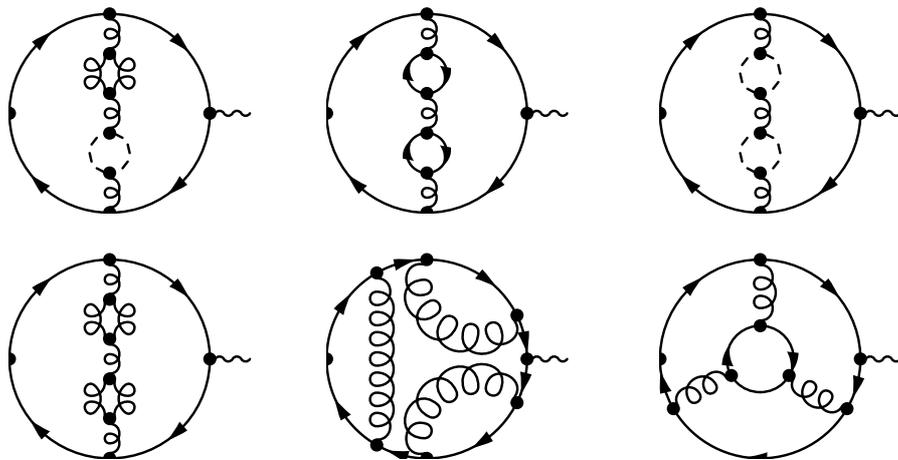
b.) Zwei-Schleifen-Beiträge:



c.) Drei-Schleifen-Beiträge:



d.) Vier-Schleifen-Beiträge:

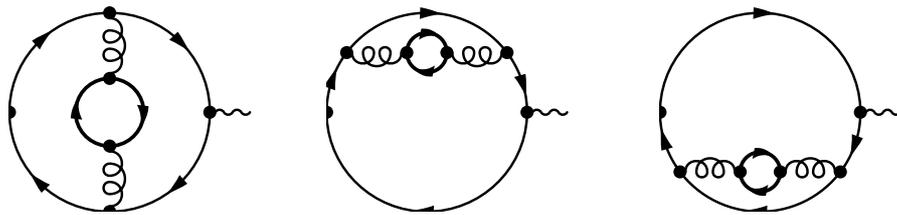


2.) Massive Diagramme:

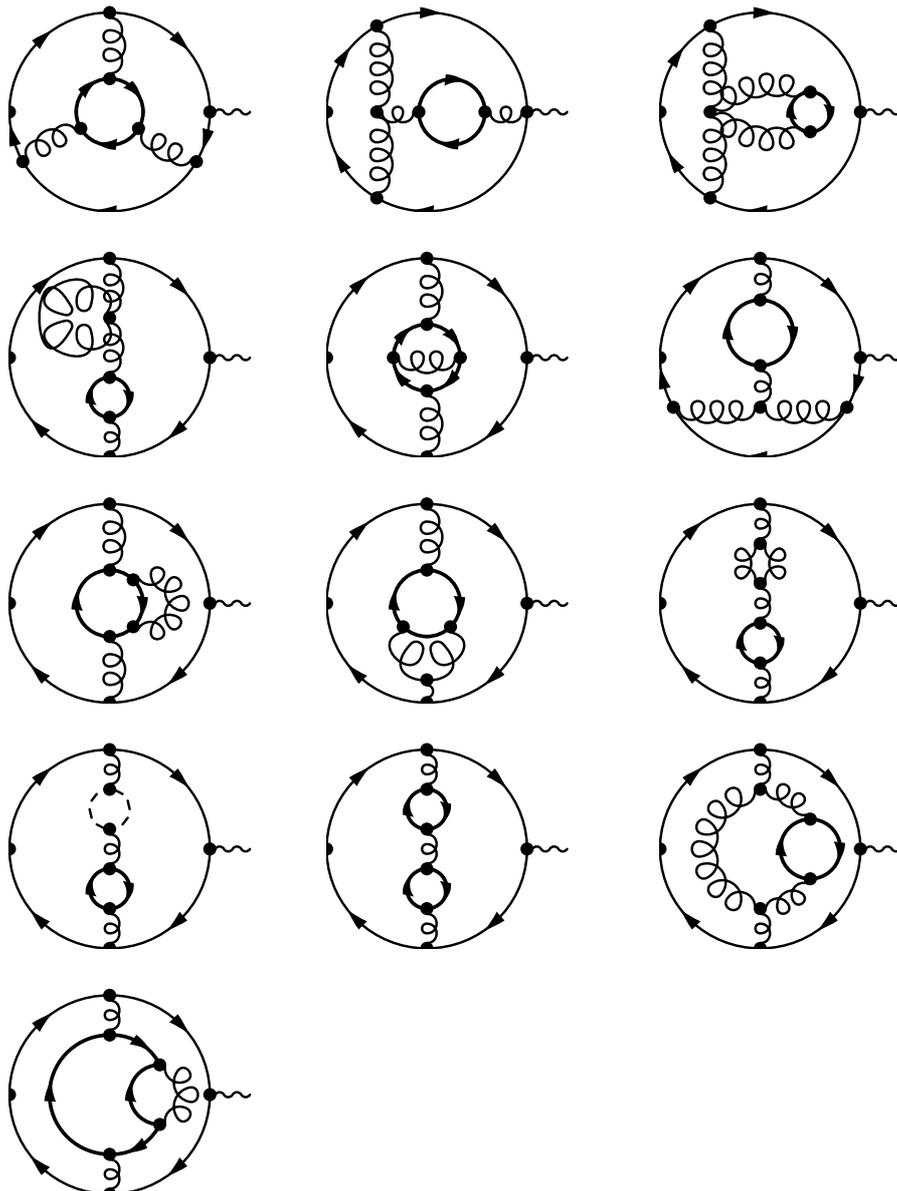
Dicke Linien stehen für massive und dünne Linien für masselose Quarks. Wie schon erwähnt wurde, ist bei den Nicht-Singulett-Diagrammen die äußere Schleife, an welcher die Photonen koppeln, immer masselos.

a.) Drei-Schleifen-Beiträge:





b.) Vier-Schleifen-Beiträge:

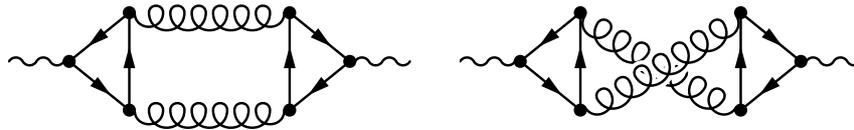


6.3.5 Singulett-Diagramme

Die Singulett-Diagramme sehen genauso aus wie die Propagatorkorrekturen beim hadronischen Higgszerfall. Der einzige Unterschied ist, dass die äußeren Higgsteilchen durch Photonen zu ersetzen sind. Damit sollen an dieser Stelle nur einige wenige präsentiert werden:

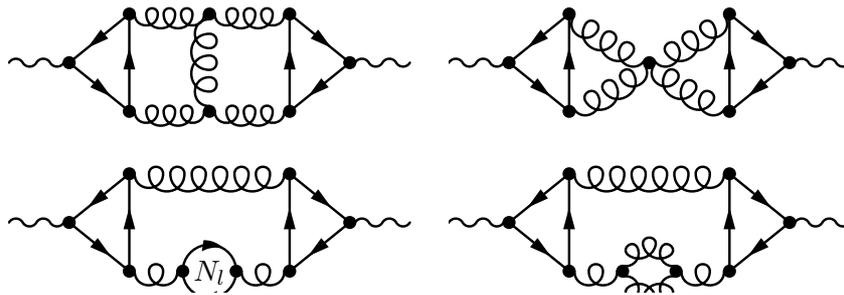
1.) Masselose Diagramme:

a.) Drei-Schleifen-Niveau:



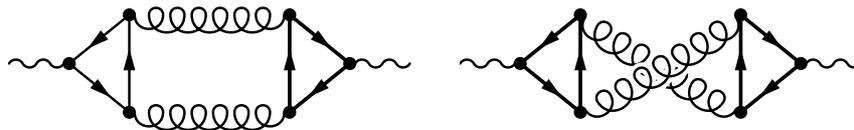
Die Ergebnisse dieser beiden Diagramme verschwindet wegen des Landau-Yang-Theorems.

b.) Vier-Schleifen-Niveau:



2.) Massive Diagramme:

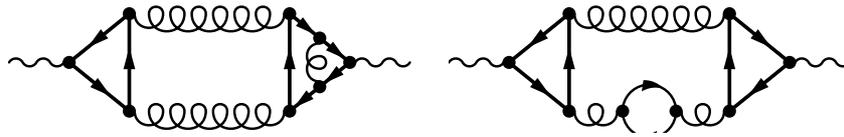
a.) Drei-Schleifen-Niveau:



Ebenso verschwinden diese beiden Diagramme, was auch hier aus dem Landau-Yang-Theorem folgt.

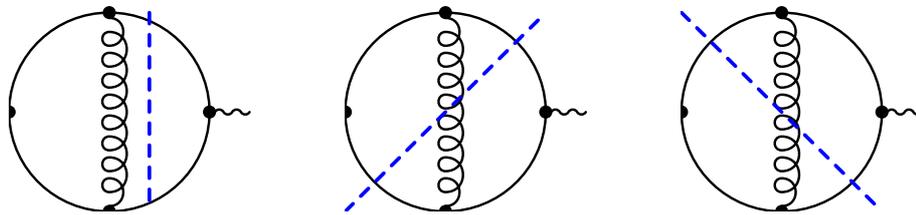
b.) Vier-Schleifen-Niveau:



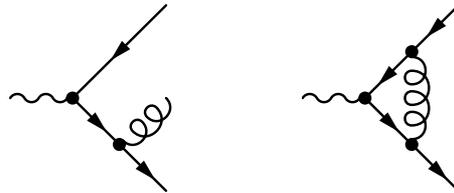


6.4 Zur Anwendung des optischen Theorems

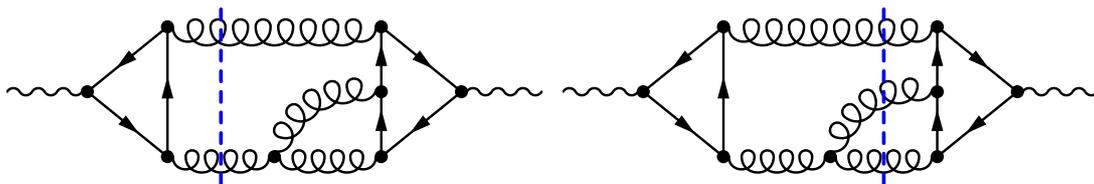
Das optische Theorem wurde im Zusammenhang mit dem hadronischen Higgszerfall in Kapitel 4 ab Seite 21 ausführlich beschrieben. An dieser Stelle sollen zur Anschaulichkeit deshalb nur noch zwei signifikante Beispiele angeführt werden. Für das erste Beispiel wird ein Singulett-Diagramm auf Zweischleifenniveau herangezogen. Die möglichen Schnitte



entsprechen sowohl virtuellen als auch reellen Korrekturen:

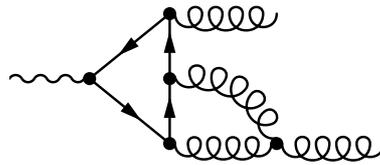


Als zweites Beispiel wird ein Singulett-Diagramm auf Vierschleifenebene betrachtet. Die physikalischen Schnitte



führen auf Korrekturen, wie sie beim Higgszerfall auftreten:

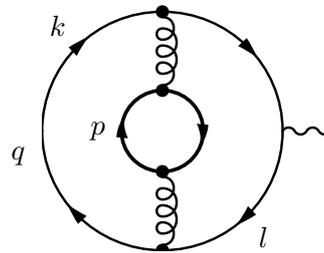




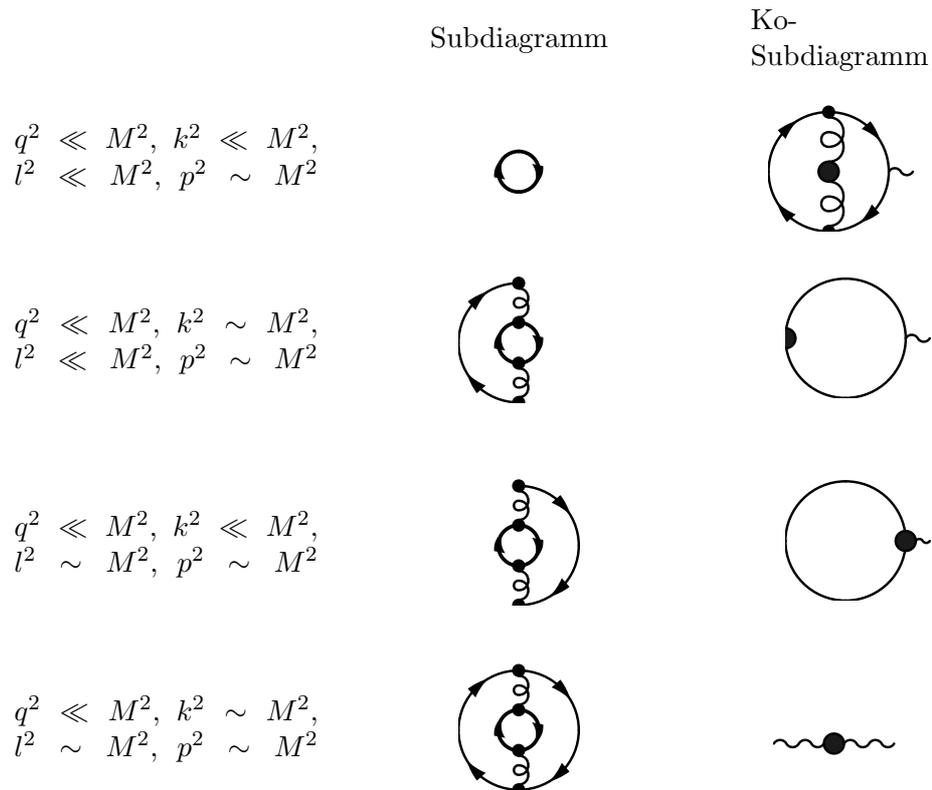
6.5 Durchführung der asymptotischen Entwicklung

6.5.1 Demonstration an einem signifikanten Beispiel

Es soll die asymptotische Entwicklung auf diagrammatische Weise für folgendes Dreischleifendiagramm durchgeführt werden:



Benötigt werden die Subdiagramme, welche sowohl alle massiven Linien enthalten als auch ein-Teilchen-irreduzibel bezüglich der masselosen Linien (Gluonen und leichte Quarks) sind. Insgesamt gibt es vier, für die diese Bedingungen erfüllt sind:



Zu beachten ist, dass das vierte Subdiagramm nicht zum Imaginärteil beiträgt, da es sich dabei um ein Vakuumintegral handelt. Folglich genügen für unsere Zwecke die ersten drei Subdiagramm, was durchaus von Vorteil ist, weil die Entwicklung und Berechnung des vierten Subdiagramms am zeitaufwendigsten ist. Nachdem **Exp** die relevanten Subdiagramme gefunden hat, werden diese über spezielle **Form**-Routinen nach den äußeren Impulsen entwickelt und die auftretenden Integrale von **Matad** berechnet. Danach ist die resultierende Entwicklung in die jeweiligen Ko-Subdiagramm einzusetzen, wobei **Mincer** die verbleibenden Schleifenintegrale auswertet.

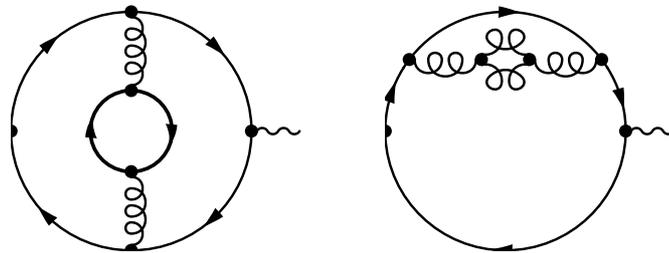
$$\text{Im} \left(\text{Diagram} \right) = \text{Im} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \\ + \\ \text{Diagram} \\ + \\ \text{Diagram} \end{array} \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{Diagram} \\ \text{Diagram} \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{Diagram} \\ \text{Diagram} \end{array} \right) \quad (6.29)$$

6.6 Zur Renormierung der Ergebnisse

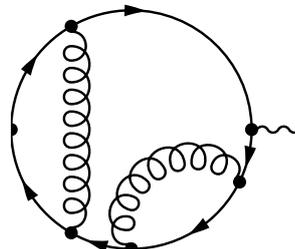
Sowohl das Ein- als auch das Zwei-Schleifen-Ergebnis von $\Gamma(e^+e^- \rightarrow \text{had})$ ist frei von Subdivergenzen und somit endlich. Erst ab dem Drei-Schleifen-Resultat $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ treten Pole auf, die durch eine additive Renormierung mittels Countertermen beseitigt werden können. Darauf, wie das im einzelnen Falle zu bewerkstelligen ist, soll im Folgenden kurz eingegangen werden.

6.6.1 Renormierung des Drei-Schleifen-Anteils

Typische Drei-Schleifen-Diagramme sind in Abschnitt 6.3.4 auf Seite 79 illustriert. Subdivergenzen werden beispielsweise verursacht durch eine massive oder masselose Schleife wie in den Diagrammen



oder durch einen Selbstenergiebeitrag der Form



Solche Subdivergenzen werden durch einen entsprechenden Counterterm absorbiert. Dieser ist aus dem Zwei-Schleifen-Resultat zu gewinnen, das bezüglich der Kopplung α_s und der Top-Quark-Masse m_q renormiert wird, und zwar wie folgt:

$$\alpha_s^{(0)}(\alpha_s) = (Z_g)^2 \alpha_s = \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) (\delta Z_g)^{1\text{-Loop}} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\} \alpha_s \quad (6.30)$$

$$\text{mit } (\delta Z_g)^{1\text{-Loop}} = \frac{1}{\varepsilon} \left[C_A \left(-\frac{11}{3} \right) + \frac{4}{3} T N_f \right] \text{ wobei } T = \frac{1}{2}$$

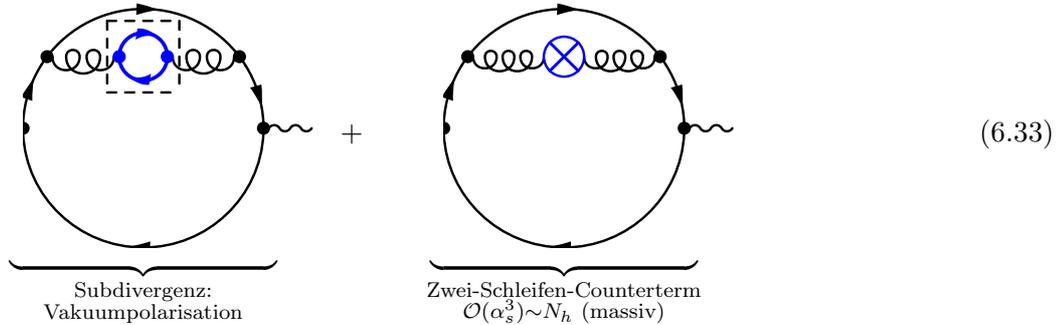
$$m_q^{(0)} = Z_m m_q = \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) (\delta m_q)^{1\text{-Loop}} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\} m_q \quad (6.31)$$

$$\text{mit } (\delta m_q)^{1\text{-Loop}} = -\frac{3C_F}{\varepsilon} \text{ wobei } C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$$

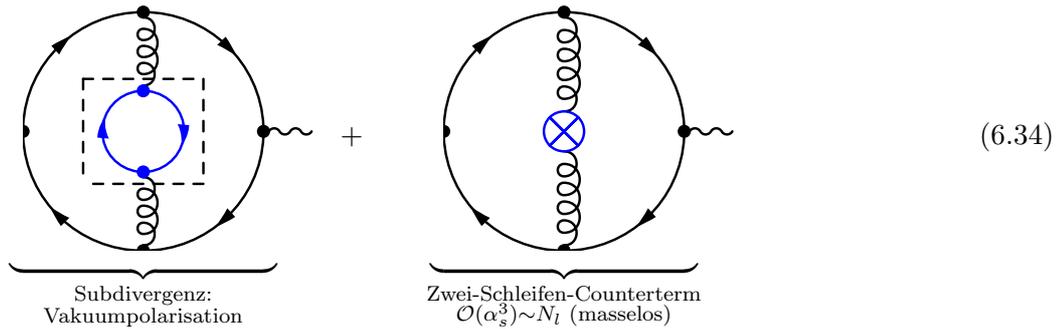
Den resultierenden Zwei-Schleifen-Counterterm $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$ muss man zum nackten Drei-Schleifen-Resultat addieren, um dafür zu sorgen, dass dieses endlich wird:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{ren}}(\alpha_s, m_q) &= \frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} 2\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) \\ &+ \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_q^{(0)}(\alpha_s, m_q)) \\ &= \frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} 2\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s, m_q) \end{aligned} \tag{6.32}$$

Zur Erläuterung sollen nachfolgende Beispiele dienen. Im ersten Falle wird die Subdivergenz durch eine massive Quarkschleife verursacht. Durch Addition des entsprechenden massiven Zwei-Schleifen-Counterterms ($\sim N_h$) wird diese Divergenz beseitigt.



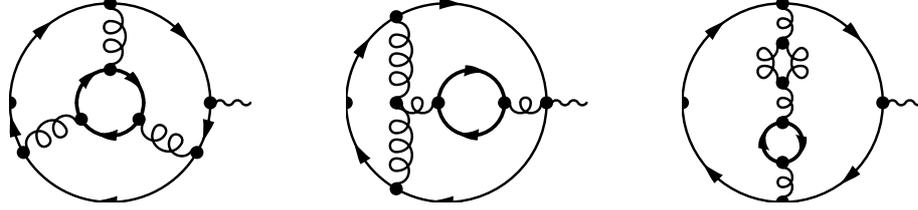
Auch vollständig masselose Drei-Schleifen-Diagramme weisen Subdivergenzen in Form von Schleifen leichter Quarks auf. Hier sorgt die Addition des masselosen Zwei-Schleifen-Counterterms ($\sim N_l$) dafür, dass die auftretenden Pole herausfallen.



6.6.2 Renormierung des Vier-Schleifen-Anteils

Einige Vier-Schleifen-Diagramme wurden in Abschnitt 6.3.4 auf Seite 79 dargestellt. Die Quelle der auftretenden Subdivergenzen ist dieselbe wie bei den Drei-Schleifen-

Diagrammen. Diese können sowohl masselose als auch massive Schleifen oder Selbstenergiebeiträge sein.



Um die Pole des Vier-Schleifen-Resultats zu absorbieren, muss der Zwei-Schleifen- und Drei-Schleifen-Counterterm berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 4\text{-Loop}^{\text{ren}}(\alpha_s, m_q) &= \frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} 2\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) + \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) \\
&+ \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_q^{(0)}(\alpha_s, m_q)) = \\
&= \frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} 2\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) + \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) \\
&+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s, m_q) = \\
&= \frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi} 2\text{-Loop}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) + \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{masselos}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)) \\
&+ \left(\frac{\alpha_s^{(0)}(\alpha_s)}{4\pi}\right)^2 3\text{-Loop}^{\text{massiv}}(\alpha_s^{(0)}(\alpha_s), m_q^{(0)}(\alpha_s, m_q)) \\
&+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 4\text{-Loop}^{\text{nackt}}(\alpha_s, m_q)
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Die Kopplung ist beim Zwei-Schleifen-Ergebnis über

$$\begin{aligned}
(Z_g)^2 &= 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_f \right] \\
&+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \left(-\frac{44}{9} N_c N_h + \frac{4}{9} (N_h^2 + 2N_h N_l) \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(C_F N_h + \frac{5}{3} N_c N_h \right) \right]
\end{aligned} \tag{6.36}$$

zu renormieren. Im Anteil $\sim \alpha_s^2$ werden hier nur die Terme benötigt, die mindestens ein N_h enthalten. Dies ist so, da nur massive Vier-Schleifen-Diagramme betrachtet werden, also solche, die mindestens eine Top-Quark-Schleife einschließen. Der Zwei-Schleifen-Counterterm hebt dann genau die Subdivergenzen weg, welche von diesen Schleifen herühren.



Beim massiven Drei-Schleifen-Ergebnis findet die Renormierung der Kopplung mit

$$(Z_g)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{11}{3}N_c + \frac{2}{3}N_f\right) \quad (6.37)$$

statt und zuletzt beim masselosen Drei-Schleifen-Ergebnis mit der Renormierungskonstanten

$$(Z_g)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{2}{3}N_h \quad (6.38)$$

Auch hier ist zu beachten, dass im masselosen Fall nur die Terme $\sim N_h$ notwendig sind, um die Subdivergenzen von einzelnen Top-Quark-Schleifen zu beseitigen. Würde man zusätzlich auch die N_l -Terme mitnehmen, so hätte dies zur Folge, dass vollständig masselose Counterterme eingeführt werden, welche Subdivergenzen von Quark-Schleifen ausschließlich leichter Quarks wegheben würden, wie sie jedoch nur in masselosen Vier-Schleifen-Diagrammen vorkommen, die nicht zur Betrachtung herangezogen werden.

Nicht zu vergessen ist schließlich die Renormierung der Masse im massiven Drei-Schleifen-Anteil mittels

$$Z_m = 1 - \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot 3C_F \quad (6.39)$$

Zur Veranschaulichung des Ganzen sollen die beiden nachfolgenden signifikanten Beispiele dienen. Betrachtet wird ein Vier-Schleifen-Diagramm mit zwei inneren Fermionschleifen. Im ersten Fall seien diese Schleifen massiv, im zweiten Falle sei eine massiv und die andere masselos. Diese Schleifen verursachen die auftretenden Subdivergenzen.

Subdivergenzen: Vakuumpolarisation + Drei-Schleifen-Counterterm $\mathcal{O}(\alpha_s^4) \sim N_h^2$ + Zwei-Schleifen-Counterterm $\mathcal{O}(\alpha_s^4) \sim N_h^2$

(6.40)

$$(6.41)$$

Durch Addition der $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ -Beiträge des Zwei- und Drei-Schleifen-Counterterms werden die auftretenden Pole, in denen sich die Subdivergenzen manifestieren, beseitigt.

6.7 Ergebnisse für das R-Verhältnis $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^2)$

Das R-Verhältnis lässt sich allgemein in der folgenden Form schreiben:

$$R(s) = \sum_q R_q^{(n)}(s) + R_{\text{sing}}(s)$$

$$\text{mit } R_q(s) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n R_q^{(n)}(s) \text{ und } R_{\text{sing}}(s) = \sum_{n \geq 3} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n R_{\text{sing}}^{(n)}(s) \quad (6.42)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit betrachtet man den Singulett-Anteil $R_{\text{sing}}(s)$, der erst ab dem Dreischleifenniveau auftritt, separat. Beim Nicht-Singulett-Anteil ist über alle masselosen Quarks zu summieren. Im Folgenden sei $\tau_s \equiv s/(4m_q^2)$ der Entwicklungsparameter. Die Ergebnisse für eine effektive Theorie mit fünf Quarks werden in Anhang G auf Seite 179 aufgelistet.

6.7.1 Nicht-Singulett-Anteil

Die einzelnen Beiträge der Störungsreihe im Falle $s \ll m_q^2$ sind gegeben durch:

$$R_q^{(0)} = N_c Q_q^2 r_V^{(0)} \text{ mit } r_V^{(0)} = 1 \quad (6.43)$$

$$R_q^{(1)} = N_c Q_q^2 r_V^{(1)} \text{ mit } r_V^{(1)} = \frac{3}{4} C_F \quad (6.44)$$

$$R_q^{(2)} = N_c Q_q^2 r_V^{(2)} \text{ mit } r_V^{(2)} = b_0^{(2)} + b_1^{(2)} \tau_s + b_2^{(2)} \tau_s^2 + b_3^{(2)} \tau_s^3 + b_4^{(2)} \tau_s^4 + b_5^{(2)} \tau_s^5 + b_6^{(2)} \tau_s^6 + b_7^{(2)} \tau_s^7 + b_8^{(2)} \tau_s^8 + \mathcal{O}(\tau_s^9) \quad (6.45)$$

$$b_0^{(2)} = \frac{365}{24} - 11\zeta_3 - \frac{11}{4} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + N_l \left(-\frac{11}{12} + \frac{2}{3}\zeta_3 + \frac{1}{6} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right) + N_h \left(-\frac{1}{6} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right) \quad (6.46)$$

$$b_1^{(2)} = N_h \left(\frac{176}{675} - \frac{8}{135} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right), \quad C_2^{3\text{-Loop}} = N_h \left(-\frac{1303}{66150} + \frac{2}{315} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.47)$$

$$b_2^{(2)} = N_h \left(\frac{52576}{13395375} - \frac{64}{42525} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.48)$$

$$b_3^{(2)} = N_h \left(-\frac{129716}{108056025} + \frac{16}{31185} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.49)$$

$$b_4^{(2)} = N_h \left(\frac{100083968}{213050462625} - \frac{1024}{4729725} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.50)$$

$$b_5^{(2)} = N_h \left(-\frac{2366192}{10956880935} + \frac{128}{1216215} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.51)$$

$$b_6^{(2)} = N_h \left(\frac{164374528}{1477718008767} - \frac{8192}{144729585} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.52)$$

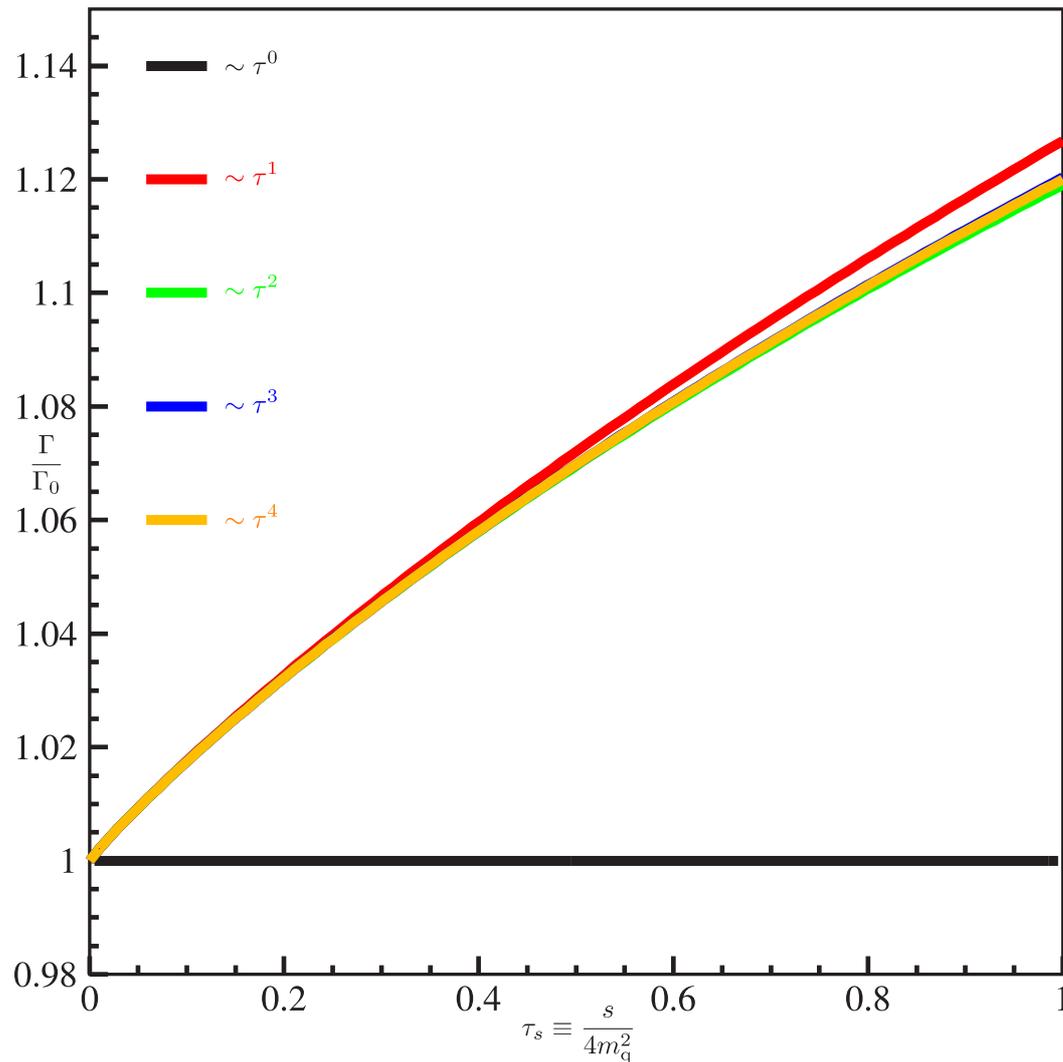
$$b_7^{(2)} = N_h \left(-\frac{28287520384}{453619218677625} + \frac{1024}{31177575} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right) \quad (6.53)$$

Die Ergebnisse für $R(s)$ sind bis zu $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ analytisch bekannt [37]. Es lautet:

$$r_V^{(2)} = \frac{3355}{972} + \frac{119}{54\tau_s} - \left(\frac{146}{81} + \frac{55}{54\tau_s} \right) \ln(4\tau_s) + \left(\frac{4}{27} - \frac{1}{18\tau_s^2} \right) \pi^2 \ln(\sqrt{\tau_s} + \sqrt{1 + \tau_s}) + \left(\frac{1}{9\tau_s^2} - \frac{8}{27} \right) \ln^3(\sqrt{\tau_s} + \sqrt{1 + \tau_s}) + \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_s}} \times \left\{ -\frac{19}{81} \pi^2 - \frac{23}{162\tau_s} \pi^2 + \left(\frac{38}{27} + \frac{23}{27\tau_s} \right) \ln^2(\sqrt{\tau_s} + \sqrt{1 + \tau_s}) + \frac{38}{27} \text{Li}_2(\sqrt{\tau_s} - \sqrt{1 + \tau_s})^2 + \frac{23}{27\tau_s} \text{Li}_2(\sqrt{\tau_s} - \sqrt{1 + \tau_s})^2 \right\} + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{6\tau_s^2} \right) \text{Li}_3(\sqrt{\tau_s} - \sqrt{1 + \tau_s})^2 + \left(\frac{1}{6\tau_s^2} - \frac{4}{9} \right) \zeta_3 \quad (6.54)$$

Wird dieses für $m_q^2 \gg s$ entwickelt, so ergeben sich die obigen Ergebnisse. Dies stellt also wieder einen sehr guten Test für die Methodik der asymptotischen Entwicklung dar. Am Konvergenzplot zu $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ ist erkennbar, dass die $r_V^{(2)}$ sehr schnell konvergiert. Die Stabilität stellt sich schon ab τ_s^4 ein.



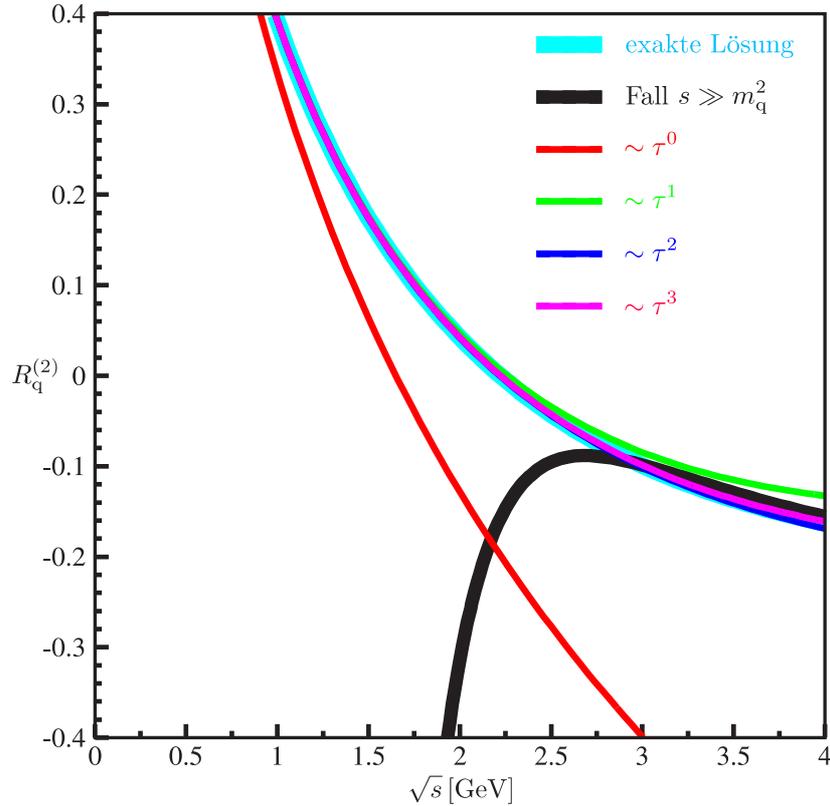


Weitere Terme in dieser Entwicklung zu berechnen, stellt keinerlei Problem dar, da die notwendigen Berechnungen nur Minuten dauern. Auf jeden Fall besitzt das entwickelte Ergebnis eine sehr übersichtliche Form, hat doch das analytische Resultat eine sehr komplizierte Gestalt.

Die Ergebnisse für $R_q^{(2)}$ sollen nun zusammen mit einer Entwicklung, die für große Energien gültig ist [38],

$$r_V^{(2), s \gg m_q^2} = -\frac{11}{12} + \frac{2}{3}\zeta_3 + \left(\frac{m_q^2}{s}\right)^2 \left[\frac{13}{3} - \ln\left(\frac{m_q^2}{s}\right) - 4\zeta_3 \right] \quad (6.55)$$

und natürlich der exakten Kurve in einem Schaubild dargestellt werden. Hierbei ist m_q das massive Quark.



Erkennbar ist, dass schon die Entwicklung $\sim \tau_s^3$ bis zu $\sqrt{s} = 4$ sehr gut mit der exakten Kurve übereinstimmt. Ab $\sqrt{s} \approx 2,8$ überlappt sie sich sogar mit der schwarzen Kurve, also der Entwicklung für $s \gg m_q^2$. Bei $\sqrt{s} \approx 5,5$ beginnt diese Entwicklung zu divergieren und man verlässt sich ab dann besser auf die Hochenergieentwicklung.

6.7.2 Singulett-Anteil

Der Singulett-Anteil $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^2)$, also

$$R_{\text{sing}}^{(2)} = N_c \sum_{q,q'} Q_q Q_{q'} r_{\text{sing}}^{(2)} \quad \text{mit} \quad r_{\text{sing}}^{(2)} = r_{\text{sing},l,l}^{(2)} + r_{\text{sing},l,h}^{(2)} + r_{\text{sing},h,h}^{(3)} \quad (6.56)$$

verschwindet aufgrund des Landau-Yang-Theorems; es gilt somit $R_{\text{sing}}^{(2)} = 0$. Eine kleine Zusammenfassung zu diesem überaus wichtigen Prinzip findet man in Anhang F auf Seite 177 und näheres in der Originalarbeit [13].

6.8 Ergebnisse für das R-Verhältnis $\sim \mathcal{O}(\alpha_s^3)$

Interessant wird die asymptotische Entwicklung für $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$, weil zu dieser Ordnung Störungstheorie kein analytisches Ergebnis für das R-Verhältnis bekannt ist. Ab dieser Ordnung treten Singulett-Graphen auf, womit es sehr sinnvoll ist, das Resultat in zwei Anteile aufzuspalten. Der Teil, welcher von den Singulett-Graphen herrührt soll separat betrachtet werden.

6.8.1 Nicht-Singulett-Anteil

Das Ergebnis für den Nicht-Singulett-Anteil sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 R_q^{(3)} &= N_c Q_q^2 r_V^{(3)} \\
 \text{mit } r_V^{(3)} &= b_0^{(3)} + b_1^{(3)} \tau_s + b_2^{(3)} \tau_s^2 + b_3^{(3)} \tau_s^3 \\
 &\quad + b_4^{(3)} \tau_s^4 + b_5^{(3)} \tau_s^5 + \mathcal{O}(\tau_s^6)
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Im folgenden werden die Koeffizienten der Entwicklung in τ angegeben, soweit diese berechnet wurden:

$$\begin{aligned}
 b_0^{(3)} &= N_h C_F^2 T_f \left[-\frac{13}{64} + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \\
 &\quad + N_h C_A C_F T_f \left[\frac{1}{6} - \frac{23}{8} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{11}{6} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \zeta_3 + \frac{11}{24} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right] \\
 &\quad + N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{1}{12} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \\
 &\quad + N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{11}{12} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \frac{2}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \zeta_3 - \frac{1}{6} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{6.58}$$



$$\begin{aligned}
b_1^{(3)} = & N_h C_F^2 T_f \left[\frac{93599}{91125} - \frac{529}{540} \zeta_3 + \frac{1421}{6075} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{11}{135} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& - \frac{1333}{6075} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \frac{4}{135} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \\
& \left. + \frac{7}{135} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{11}{405} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[-\frac{716839}{1458000} + \frac{53}{216} \zeta_3 - \frac{7301}{48600} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{11}{270} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& + \frac{27547}{48600} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \frac{11}{135} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \\
& \left. - \frac{11}{90} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) - \frac{11}{810} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{23}{243} - \frac{176}{675} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{8}{135} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{8}{135} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right] \\
& N_l N_h C_F T_f^2 \left[-\frac{6052}{30375} + \frac{28}{135} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{4}{135} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{4}{75} \ln \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{4}{135} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m^2} \right) + \frac{4}{405} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.59}$$



$$\begin{aligned}
b_2^{(3)} = & N_h C_F^2 T_f \left[-\frac{211867}{444528} + \frac{2291}{20160} \zeta_3 + \frac{126523}{793800} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{43}{2520} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{1093}{14700} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. - \frac{1}{35} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{43}{7560} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[-\frac{61445851}{333396000} + \frac{271}{1152} \zeta_3 - \frac{175597}{3175200} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& + \frac{43}{5040} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{14333}{264600} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{11}{630} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{43}{15120} \pi^2 \right] \\
& N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{599}{40500} - \frac{4}{675} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{1303}{66150} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{315} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{15209}{6945750} - \frac{11}{630} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{1}{315} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{1303}{66150} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{2}{315} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{1}{945} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.60}$$



$$\begin{aligned}
b_3^{(3)} = & N_h C_F^2 T_f \left[\frac{3395030363}{84390862500} - \frac{121}{4200} \zeta_3 - \frac{138346}{13395375} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{8}{212625} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{11464}{496125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{16}{1575} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{8}{637875} \pi^2 \right] \\
& N_h C_A C_F T_f \left[\frac{22635964507}{32148900000} - \frac{6217}{10800} \zeta_3 + \frac{28963}{535815000} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& + \frac{4}{212625} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{144584}{13395375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. - \frac{176}{42525} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{4}{637875} \pi^2 \right] \\
& N_h^2 C_F T_f^2 \left[-\frac{107908}{22325625} + \frac{16}{7875} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{52576}{13395375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{64}{42525} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{1298704}{4219543125} + \frac{112}{30375} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{32}{42525} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{52576}{13395375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{64}{42525} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{32}{127575} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.61}$$



$$\begin{aligned}
b_4^{(3)} = & N_h C_F^2 T_f \left[-\frac{2350396652687}{89859390390000} + \frac{3463}{332640} \zeta_3 + \frac{37327579}{3241680750} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{331}{155925} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{115856}{12006225} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. - \frac{16}{3465} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{331}{467775} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[-\frac{290372908200523}{179718780780000} + \frac{58193}{43200} \zeta_3 - \frac{75747817}{16208403750} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& + \frac{331}{311850} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{32429}{9823275} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{4}{2835} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{331}{935550} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{170266}{93767625} - \frac{244}{297675} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{129716}{108056025} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{16}{31185} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h C_F T_f^2 \left[-\frac{131644888}{374414126625} - \frac{548}{467775} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{8}{31185} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{129716}{108056025} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{16}{31185} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{8}{93555} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.62}$$



$$\begin{aligned}
b_5^{(3)} = & N_h C_F^2 T_f \left[\frac{3718479567664559}{2015340198678056250} - \frac{29167}{6306300} \zeta_3 - \frac{7705805248}{22370298575625} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{256}{165540375} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{22714688}{4734454725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{256}{105105} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{256}{496621125} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[\frac{3262812119583673073}{806136079471222500} - \frac{98933}{29400} \zeta_3 + \frac{1333664144}{22370298575625} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& + \frac{128}{165540375} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{25020992}{19368223875} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& - \frac{256}{429975} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{128}{496621125} \pi^2 \left. \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[-\frac{11744416}{14707625625} + \frac{4864}{12733875} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{100083968}{213050462625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{1024}{4729725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \left. \right] \\
& N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{1845615488896}{9596858088943125} + \frac{233984}{496621125} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{512}{4729725} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{100083968}{213050462625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{1024}{4729725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{512}{14189175} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Mit $C_A = 3$, $C_F = 4/3$ im Falle einer $SU(3)$ und $T_f = 1/2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
b_0^{(3)} = & N_h \left[\frac{11}{72} - \frac{199}{36} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{11}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \zeta_3 + \frac{11}{12} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{1}{36} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[\frac{11}{36} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{2}{9} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \zeta_3 - \frac{1}{18} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{6.64}$$

$$\begin{aligned}
b_1^{(3)} = N_h & \left[-\frac{92243}{1312200} - \frac{1847}{4860} \zeta_3 - \frac{20237}{218700} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{11}{1215} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& + \frac{205267}{218700} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{46}{243} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \left. - \frac{241}{1215} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{11}{3645} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{23}{729} - \frac{176}{2025} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{8}{405} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{8}{405} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[-\frac{6052}{91125} + \frac{28}{405} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{4}{405} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{4}{225} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{4}{405} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{4}{1215} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.65}$$

$$\begin{aligned}
b_2^{(3)} = N_h & \left[-\frac{396204553}{500094000} + \frac{103693}{181440} \zeta_3 + \frac{88799}{2857680} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{43}{22680} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{207}{4900} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{1}{105} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{43}{68040} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{599}{121500} - \frac{4}{2025} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{1303}{198450} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{2}{945} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[+\frac{15209}{20837250} - \frac{11}{1890} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{1}{945} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{1303}{198450} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{2}{945} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{1}{2835} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.66}$$

$$\begin{aligned}
b_3^{(3)} = N_h & \left[\frac{4386838263439}{3038071050000} - \frac{4943}{4200} \zeta_3 - \frac{21874693}{2411167500} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{8}{1913625} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{14032}{13395375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{32}{42525} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{8}{5740875} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[-\frac{107908}{66976875} + \frac{16}{23625} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{52576}{40186125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{64}{127575} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[\frac{1298704}{12658629375} + \frac{112}{91125} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{32}{127575} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{52576}{40186125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{64}{127575} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{32}{382725} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.67}$$



$$\begin{aligned}
b_4^{(3)} = & N_h \left[-\frac{2632159347026203}{808734513510000} + \frac{40466269}{14968800} \zeta_3 + \frac{64821227}{72937816875} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& + \frac{331}{1403325} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{42682}{21611205} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{8}{6237} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \\
& \left. - \frac{331}{4209975} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{170266}{281302875} - \frac{244}{893025} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{129716}{324168075} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{16}{93555} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[-\frac{131644888}{1123242379875} - \frac{548}{1403325} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) + \frac{8}{93555} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{129716}{324168075} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - \frac{16}{93555} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{8}{280665} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.68}$$

$$\begin{aligned}
b_5^{(3)} = & N_h \left[\frac{11296637939831277289}{1395235522161731250} - \frac{382213649}{56756700} \zeta_3 - \frac{37640487392}{201332687180625} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& + \frac{256}{1489863375} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{39791744}{23672273625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{512}{525525} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{256}{4469590125} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[-\frac{11744416}{44122876875} + \frac{4864}{38201625} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{100083968}{639151387875} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{1024}{14189175} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[\frac{1845615488896}{28790574266829375} + \frac{233984}{1489863375} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) - \frac{512}{14189175} \ln^2\left(\frac{s}{m^2}\right) \right. \\
& - \frac{100083968}{639151387875} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \frac{1024}{14189175} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \\
& \left. + \frac{512}{42567525} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Die Terme $b_4^{(3)}$ und $b_5^{(3)}$ in dieser Entwicklung sind neu. Zur Veranschaulichung sollen diese Ergebnisse wieder zusammen mit der Hochenergieentwicklung [38]

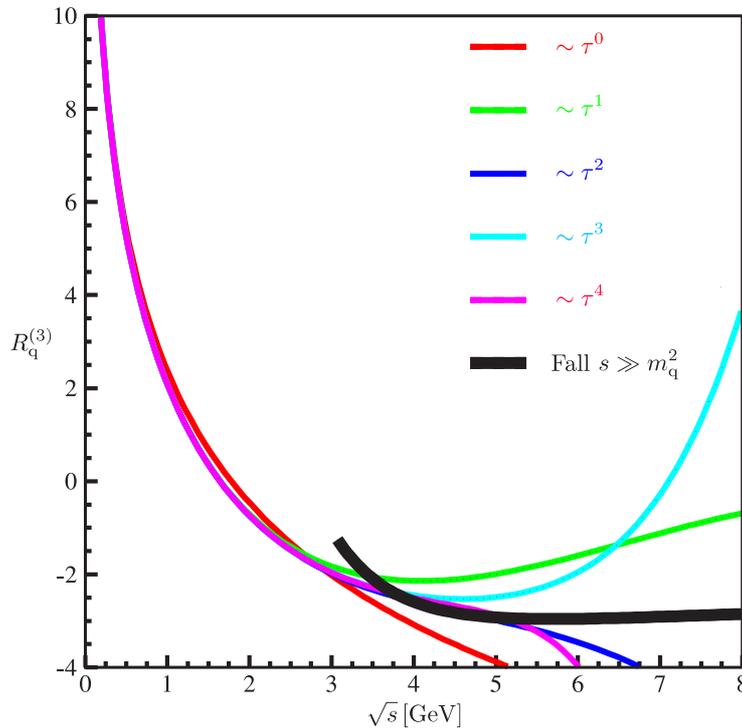
$$r_V^{(3), s \gg m_q^2} = r_0^{(3)} + \frac{m_q^2}{s} r_{0,2}^{(3)} + \left(\frac{m_q^2}{s}\right)^2 r_{0,4}^{(3)} \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned}
r_0^{(3)} = & -\frac{7847}{216} + \frac{11}{6}\zeta_2 + \frac{262}{9}\zeta_3 - \frac{25}{9}\zeta_5 + \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \left[\frac{785}{72} - \frac{22}{3}\zeta_3 \right] - \frac{11}{12} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& + (2n_l + 1) \left\{ \frac{151}{162} - \frac{1}{18}\zeta_2 - \frac{19}{27}\zeta_3 + \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \left[-\frac{11}{36} + \frac{2}{9}\zeta_3 \right] + \frac{1}{36} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$r_{0,2}^{(3)} = -80 + 60\zeta_3 + (n_l + n_h) \left(\frac{32}{9} - \frac{8}{3}\zeta_3 \right) \tag{6.72}$$

$$\begin{aligned}
r_{0,4}^{(3)} = & -\frac{4217}{48} + 15\zeta_2 + \frac{139}{3}\zeta_3 + \frac{50}{3}\zeta_5 + \ln\left(\frac{m_q^2}{s}\right) \left[\frac{97}{4} - 38\zeta_3 \right] \\
& - 2 \ln^2\left(\frac{m_q^2}{s}\right) + \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \left[-\frac{143}{6} + 22\zeta_3 + \frac{11}{2} \ln\left(\frac{m_q^2}{s}\right) \right] \\
& (n_l + n_h) \left\{ \frac{457}{108} - \frac{2}{3}\zeta_2 - \frac{22}{9}\zeta_3 + \ln\left(\frac{m_q^2}{s}\right) \left[-\frac{13}{18} + \frac{4}{3}\zeta_3 \right] \right. \\
& \left. \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \left[\frac{13}{9} - \frac{1}{3} \ln\left(\frac{m_q^2}{s}\right) - \frac{4}{3}\zeta_3 \right] \right\}
\end{aligned} \tag{6.73}$$

in einem Schaubild präsentiert werden. Dabei wurde $\mu^2 = s$ gesetzt und $N_l = 3$, $N_h = 1$ gewählt:



Erkennbar ist, dass die Entwicklung für $s \ll m_q^2$ bis $\sqrt{s} \approx 3$ sehr zuverlässig ist, da sich die Schaubilder aller aufeinanderfolgenden Terme fast überlappen. Bei $\sqrt{s} \approx 3,5$ treffen diese dann auf die für große Energien aussagekräftige schwarze Kurve. Das Ergebnis $\sim \tau_s^4$ stimmt bis $\sqrt{s} \approx 5,3$ mit der schwarzen Kurve überein; innerhalb dieses Bereichs wird die Korrektur für das R-Verhältnis wohl von beiden Entwicklungen sehr gut beschrieben. Ab $\sqrt{s} \approx 5,3$ beginnt jedoch die Kurve $\sim \tau_s^4$ schnell zu divergieren und man sollte sich dann auf die Hochenergieentwicklung verlassen können.

6.8.2 Singulett-Anteil

Zu guter Letzt soll der Singulett-Anteil betrachtet werden. Dieser wird aufgeteilt in einen masselosen Anteil $r_{\text{sing},l,l}^{(3)}$ und in die beiden massiven Teile $r_{\text{sing},l,h}^{(3)}$ und $r_{\text{sing},h,h}^{(3)}$. $r_{\text{sing},l,h}^{(3)}$ besteht aus den Singulett-Graphen, die sowohl ein masseloses als auch ein massives Triangle-Subdiagramm enthalten. $r_{\text{sing},h,h}^{(3)}$ ist zusammengesetzt aus zwei massiven Triangle-Subdiagrammen. Der masselose Anteil wurde nicht berechnet, weil hierfür masselose Vier-Schleifen-Topologien benötigt werden, die nicht zur Verfügung standen. Für die massiven Beiträge ergibt sich:

$$R_{\text{sing}} = N_c \sum_{q,q'} Q_q Q_{q'} r_{\text{sing}}^{(3)} \quad \text{mit} \quad r_{\text{sing}}^{(3)} = r_{\text{sing},l,l}^{(3)} + r_{\text{sing},l,h}^{(3)} + r_{\text{sing},h,h}^{(3)} \quad (6.74)$$

$$r_{\text{sing},l,h}^{(3)} = d_1^{(3)} \tau_s + d_2^{(3)} \tau_s^2 + d_3^{(3)} \tau_s^3 + d_4^{(3)} \tau_s^4 + d_5^{(3)} \tau_s^5 + \mathcal{O}(\tau_s^6) \quad (6.75)$$

$$d_1^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(-\frac{37}{144} + \frac{13}{54} \zeta_3 \right), \quad d_2^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(-\frac{110401}{145800} + \frac{29}{45} \zeta_3 \right) \quad (6.76)$$

$$d_3^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(-\frac{45317647}{17860500} + \frac{10018}{4725} \zeta_3 \right) \quad (6.77)$$

$$d_4^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(-\frac{50402931881}{6251175000} + \frac{95176}{14175} \zeta_3 \right) \quad (6.78)$$

$$d_5^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(-\frac{16973804046407}{583502535000} + \frac{5283808}{218295} \zeta_3 \right) \quad (6.79)$$

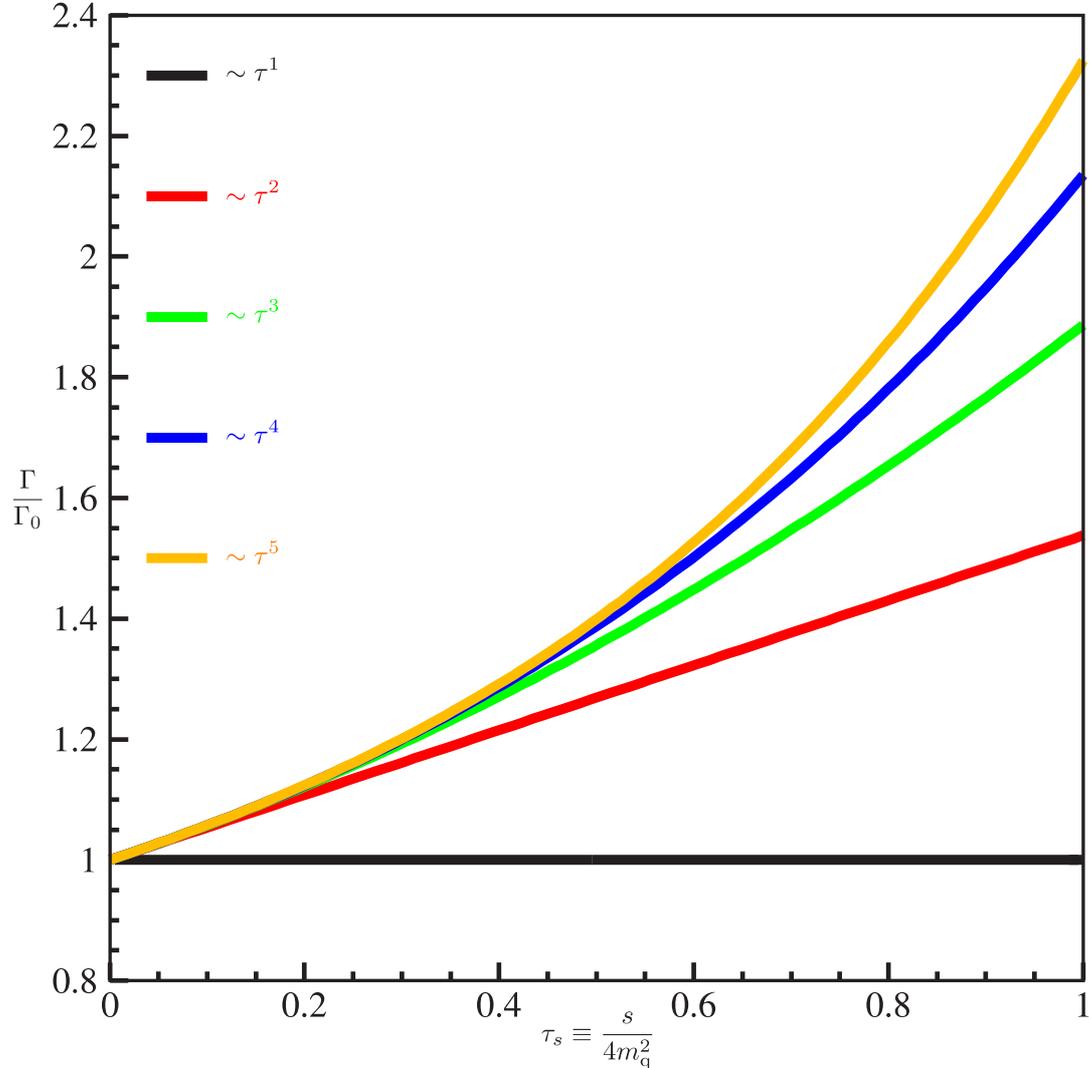
d^{abc} sind die symmetrischen Strukturkonstanten einer beliebigen $SU(N_c)$. Im Allgemeinen gilt $d^{abc} d_{abc} = N_c^3 - 5N_c + 4N_c^{-1}$ und speziell für die $SU(3)$ $d^{abc} d_{abc} = 40/3$. Damit ergeben sich die Koeffizienten für die QCD mit $N_c = 3$:

$$d_1^{(3)} = -\frac{185}{216} + \frac{65}{81} \zeta_3, \quad d_2^{(3)} = -\frac{110401}{43740} + \frac{58}{27} \zeta_3, \quad d_3^{(3)} = -\frac{45317647}{5358150} + \frac{20036}{2835} \zeta_3 \quad (6.80)$$

$$d_4^{(3)} = -\frac{50402931881}{1875352500} + \frac{190352}{8505} \zeta_3, \quad d_5^{(3)} = -\frac{16973804046407}{175050760500} + \frac{10567616}{130977} \zeta_3 \quad (6.81)$$



Die beiden Terme $d_4^{(3)}$ und $d_5^{(3)}$ sind neu. Die Struktur der Entwicklung des Singulett-Anteils ist im Vergleich zum Nicht-Singulett-Anteil einfach gehalten. Aus dem Konvergenzplot wird ersichtlich, dass die Entwicklung bis $\tau_s = 0,5$ sehr gut konvergiert.



Weitere Terme zu berechnen, ist sehr zeitintensiv. Die asymptotische Entwicklung einiger Singulett-Diagramme nimmt Tage in Anspruch. Jedoch ist die Gewährleistung der Konvergenz bei $\tau_s = 0,5$ vom physikalischen Standpunkt aus mehr als ausreichend, da dies einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 2m_q$ entspricht. Bei dieser Energie kann das schwerste Quark-Antiquark-Paar erzeugt werden, und es ist bemerkenswert, dass die Entwicklung, die ja eigentlich für $s \ll m_q^2$ vorgesehen ist, dann noch eine solche Aussagekraft besitzt.

$$r_{\text{sing},h,h}^{(3)} = e_1^{(3)} \tau_s + e_2^{(3)} \tau_s^2 + e_3^{(3)} \tau_s^3 + e_4^{(3)} \tau_s^4 + e_5^{(3)} \tau_s^5 + \mathcal{O}(\tau_s^6) \quad (6.82)$$



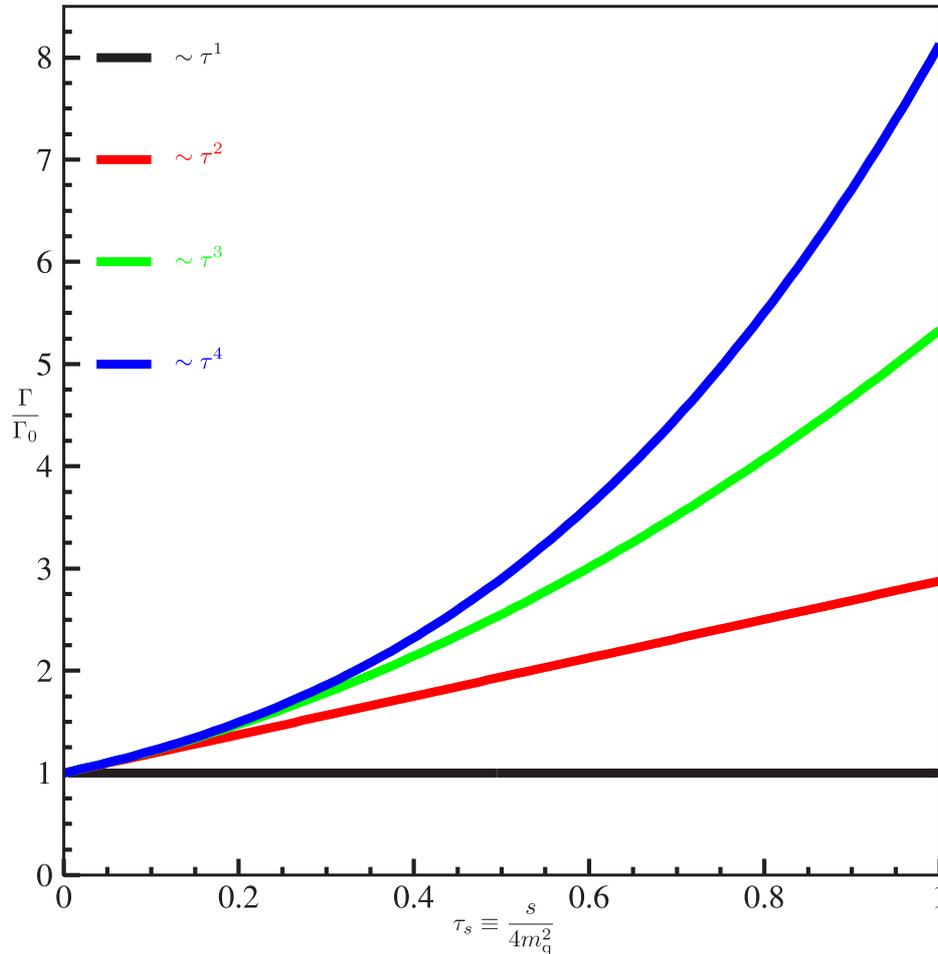
$$e_1^{(3)} = 0, e_2^{(3)} = 0, e_3^{(3)} = 0 \quad (6.83)$$

$$e_4^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(\frac{17}{182250} \right), e_5^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(\frac{67}{382725} \right) \quad (6.84)$$

$$e_6^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(\frac{128941}{562605750} \right), e_7^{(3)} = d^{abc} d_{abc} T_f^2 \left(\frac{29858}{114604875} \right) \quad (6.85)$$

$$e_4^{(3)} = \frac{17}{54675}, e_5^{(3)} = \frac{134}{229635}, e_6^{(3)} = \frac{128941}{168781725}, e_7^{(3)} = \frac{59716}{68762925} \quad (6.86)$$

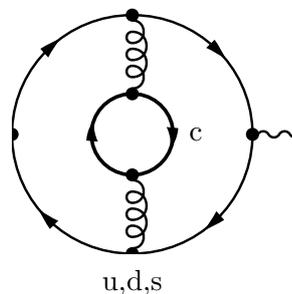
Die ersten drei Koeffizienten der Entwicklung sind gleich Null. In diesem Zusammenhang soll ein Fehler in [39] nicht unerwähnt bleiben. Dort heißt es auf Seite 296, dass die Summe aller Singulett-Graphen mit zwei massiven Triangel-Subdiagrammen in allen Ordnungen der asymptotischen Entwicklung verschwindet, was jedoch nicht so ist, wie durch Berechnung höherer Terme in der Entwicklung gezeigt werden konnte. Zusätzlich ist anzumerken, dass der erste Term, der ungleich Null ist (also $e_4^{(3)}$), mit der Literatur [40] übereinstimmt, was die Richtigkeit der Ergebnisse dieser Diplomarbeit untermauert.



Bis zu $\tau_s = 0,3$ zeichnet sich die Entwicklung durch eine sehr gute Konvergenz aus. Um diese zu verbessern, hätten natürlich weitere Terme berechnet werden können. Das Problem ist jedoch, dass die Berechnung von $e_7^{(3)}$ schon Wochen lief – selbst wenn man nur die Diagramme betrachtete, welche nach dem Landau-Yang-Theorem überhaupt einen Beitrag liefern. Infolgedessen wurde auf die Auswertung weiterer Koeffizienten zugunsten anderer Ergebnisse verzichtet.

6.8.3 Singulett-Anteil: der Fall masseloser u-,d- und s-Quarks

Die leichten Flavours seien u, d und s. Das c-Quark sei massiv. Die Nicht-Singulett-Diagramme sind proportional zu den Ladungsquadraten der jeweiligen masselosen Quarks, da beide Photonen an derselben äußeren Quarkschleifen koppeln, die als masselos betrachtet wird.

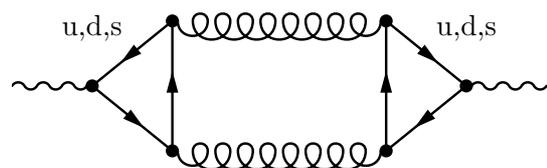


$$\sim N_c \left(\sum_{i=u,d,s} Q_i^2 \right) = 2 \quad (6.87)$$

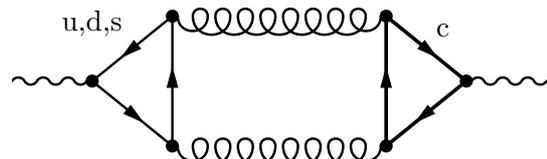
Komplett anders verhält es sich jedoch bei den Singulett-Diagrammen, da dort beide Photonen an unterschiedlichen Schleifen koppeln, die sowohl masselos als auch massiv sein können. Unter Beachtung von

$$\sum_{i=u,d,s} Q_i = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad (6.88)$$

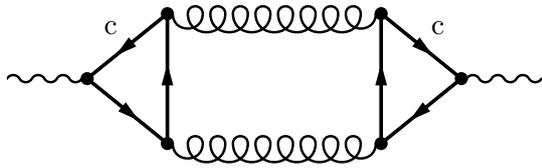
ergibt sich somit:



$$\sim N_c \left(\sum_{i=u,d,s} Q_i \right)^2 = 0 \quad (6.89)$$



$$\sim N_c Q_c \left(\sum_{i=u,d,s} Q_i \right) = 0 \quad (6.90)$$

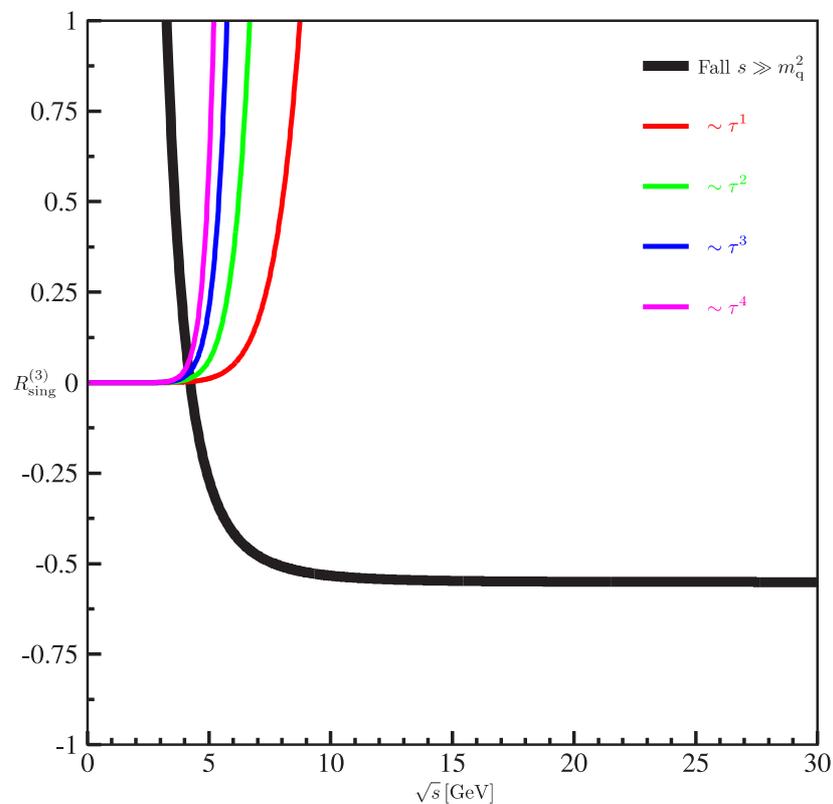


$$\sim N_c Q_c^2 = \frac{4}{3} \quad (6.91)$$

Die einzigen beitragenden Graphen sind die mit zwei c-Quark-Schleifen. Wieder soll zusätzlich die Hochenergieentwicklung [38]

$$r_V^{\text{sing}, s \gg m_q^2} = \frac{55}{216} - \frac{5}{9} \zeta_3 + \left(-\frac{10}{9} + \frac{25}{3} \zeta_3 \right) \frac{m_1^4}{s^2} + \left(-\frac{10}{9} + \frac{25}{3} \zeta_3 \right) \frac{m_2^4}{s^2} \quad (6.92)$$

mit in den Schaubildern präsentiert werden:

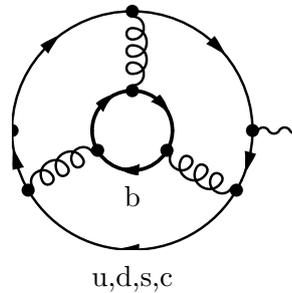


Da nur die Graphen mit zwei massiven Triangel-Subdiagrammen beitragen und deren Entwicklung erst ab τ_s^4 Koeffizienten ungleich Null reproduziert, geht $R_{\text{sing}}^{(3)}$ für diesen Fall für kleine Schwerpunktsenergien schnell gegen Null. Bis zu $\sqrt{s} \approx 5$ verschwindet $R_{\text{sing}}^{(3)}$ und trifft dann auf die schwarze Kurve, die für große Energien gültig ist. Da ab $\sqrt{s} \approx 5$ die für $s \ll m_q^2$ entwickelten Terme sehr schnell divergieren, sollte man sich ab dieser Schwerpunktsenergie auf die schwarze Kurve verlassen. Diese nähert sich für große Energien einem konstanten Wert an, der ungefähr bei -0,5 liegt.

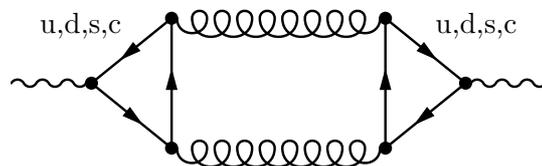


6.8.4 Singulett-Anteil: der Fall masseloser u-, d-, s- und c-Quarks

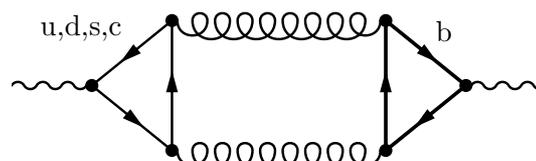
Die masselosen Flavours umfassen nun zusätzlich das c-Quark. Das b-Quark wird als massiv betrachtet. Analog zu vorher gilt:



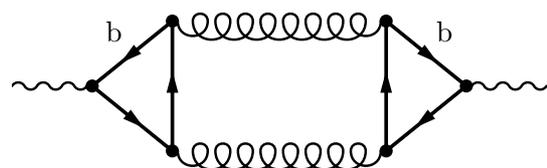
$$\sim N_c \left(\sum_{i=u,d,s,c} Q_i^2 \right) = \frac{10}{3} \quad (6.93)$$



$$\sim N_c \left(\sum_{i=u,d,s,c} Q_i \right)^2 = N_c Q_c^2 = \frac{4}{3} \quad (6.94)$$

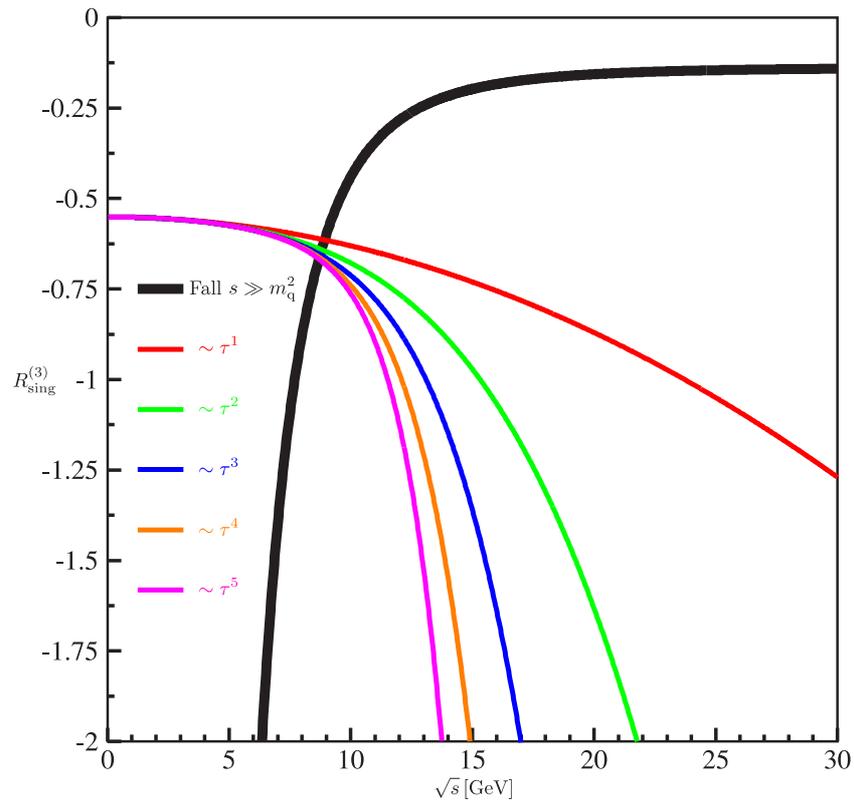


$$\sim N_c Q_b \left(\sum_{i=u,d,s,c} Q_i \right) = N_c Q_b Q_c = -\frac{2}{3} \quad (6.95)$$



$$\sim N_c Q_b^2 = \frac{1}{3} \quad (6.96)$$

Hier sieht das Schaubild folgendermaßen aus:



Die Kurven der Entwicklung für $s \ll m_q^2$ treffen für $\sqrt{s} \approx 10$ GeV auf die schwarze Kurve, welche den Fall großer Schwerpunktsenergien, also $s \gg m_q^2$ beschreibt. Für kleine Energien ist die Entwicklung, die in dieser Diplomarbeit berechnet wurde, sehr zuverlässig, sind doch bis $\sqrt{s} \approx 5$ GeV die Kurven der sukzessiven Terme der Reihe nahezu kongruent. Ab $\sqrt{s} \approx 10$ GeV divergieren jedoch diese Terme und man muss sich auf die Gültigkeit der schwarzen Kurve verlassen.



7 Parform und Tform – parallele Versionen von Form

Die Berechnungen in der phänomenologischen Teilchenphysik können unter Umständen so umfangreich sein, dass sogar **Form** mit speziellen Problemen jahrelang beschäftigt ist. Ein elementarer Ansatz für die Verringerung der Rechenzeit stellt die Aufteilung einer Berechnung auf mehrere Prozessoren dar, nämlich die sogenannte Parallelisierung.

7.1 Parform

An einer parallelen Version von **Form** mit dem bezeichnenden Namen **Parform** wird seit 1998 in Karlsruhe gearbeitet [6].

Die Parallelisierung wird dadurch bewerkstelligt, dass ein Ausdruck auf mehrere Prozessoren verteilt wird. Jeder dieser Prozessoren – bezeichnet werden diese als Slaves – bearbeitet lokal einen Term und am Ende eines Moduls wird der komplette Ausdruck von einem Prozessor erzeugt, der nicht direkt an den Berechnungen beteiligt ist. Man spricht dabei vom sogenannten Master. Ist die Anzahl der Slaves jedoch niedrig, so ist der Master nicht ausgelastet und kann dann selbst mitrechnen. Der Geschwindigkeitszuwachs (Speedup) verläuft bis zu einem gewissen Zahl von Slaves linear, strebt dann aber gegen einen Sättigungswert, wenn immer mehr Slaves im Spiel sind, weil der Master in dem Falle größtenteils für deren Überwachung in Anspruch genommen wird.

Bei UMA-Architekturen wie Mehrprozessorsystemen teilen sich mehrere Prozessoren gleichberechtigt denselben Speicher, auf den sie über einen gemeinsamen Bus zugreifen. Das Problem hierbei ist, dass bei vielen Prozessoren die Wahrscheinlichkeit einer Kollision wächst, falls verschiedene Prozessoren gleichzeitig auf den Speicher zugreifen wollen. Solche Kollisionen müssen geregelt werden, was zusätzliche Zeit beansprucht.

Um dieses Problem zu vermeiden, greift man auf NUMA (Non Uniform Memory Access) zurück. Bei dieser Architektur hat jeder Prozessor seinen eigenen lokalen Speicher (Cache), kann aber zudem auf Speicher von anderen Prozessoren zugreifen. Der Zugriff auf den Speicher anderer Prozessoren funktioniert über Nachrichten, die über das sogenannte MPI (Message Passing Interface) übermittelt werden.

Im Zusammenhang mit NUMA tritt jedoch ein neues Problem der Cachenutzung auf, nämlich die sogenannte Cache-Inkohärenz. Ist ein Prozessor mit den Manipulationen an einem Term fertig, speichert er das Ergebnis im globalen Speicher. In den Caches



der anderen Prozessoren befindet sich jedoch noch der alte, nicht mehr aktuelle Term. Das bedeutet, dass die Daten in den Caches nicht mehr kohärent sind zu den Daten im globalen Speicher, weshalb die alten Terme gelöscht werden sollten. Dafür sorgt ccNUMA (cache-coherent NUMA).

Bei der Verwendung von ccNUMA ist man jedoch mit einer neuen Schwierigkeit konfrontiert, nämlich dass diese Architektur nicht ideal für Berechnungen mit Form ist wegen der Art, wie Form Terme abarbeitet. Jede Ausführung erzeugt bei der Bearbeitung neue Terme, die im globalen Speicher abgelegt werden sollten, was zur Folge hat, dass der Cache immer wieder erneut durch ccNUMA gelöscht wird.

Man greift somit auf das Master-Slave-Modell mit verschiedenen Prozessoren aber ohne die Verwendung von MPI zurück. Die Kommunikation zwischen Master und Slaves findet über einen gemeinsamen Speicher statt und man spricht dann vom „Shared-Memory-Modell“ [6].

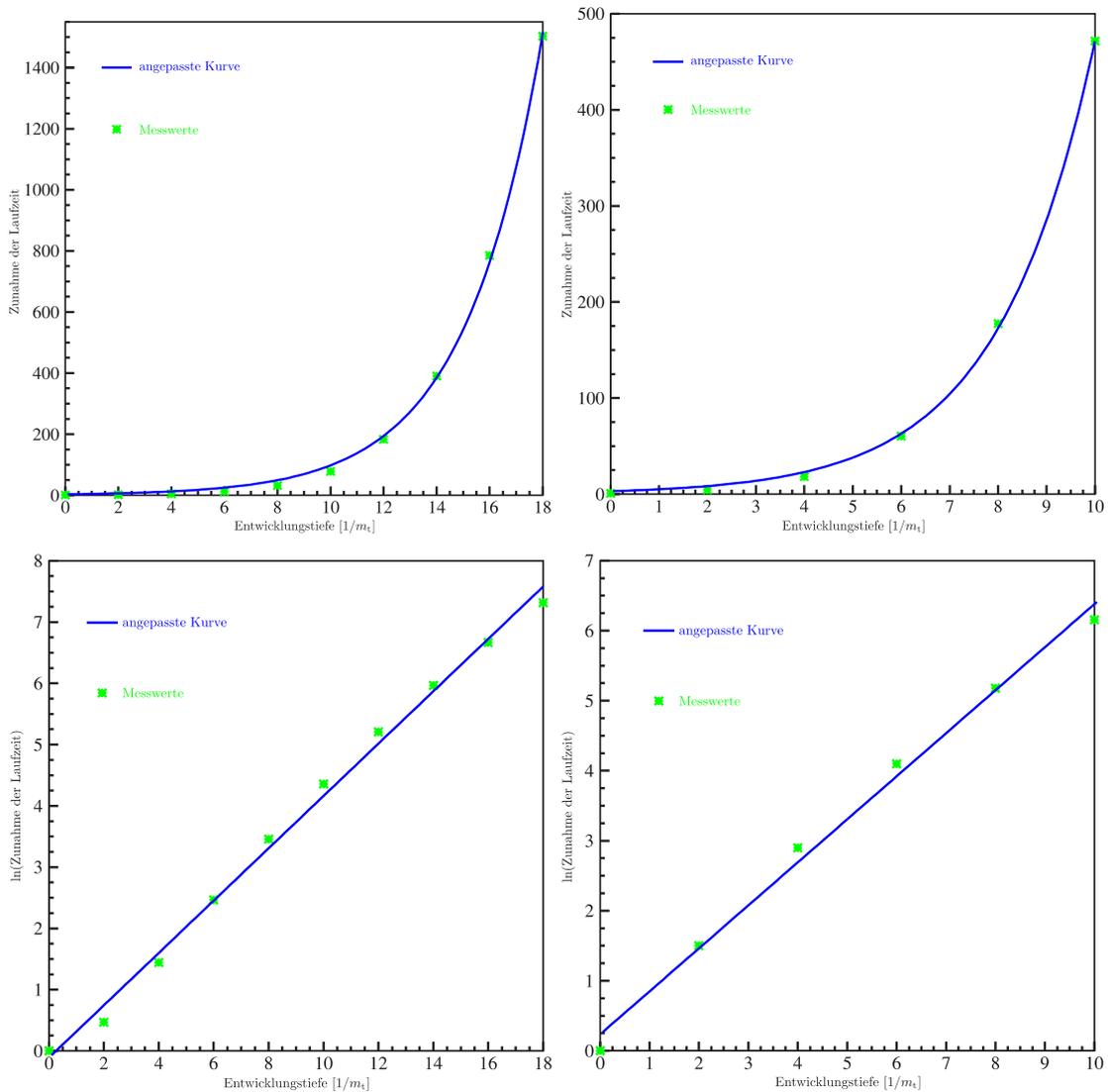
7.1.1 Test der Effizienz von Parform

Im Laufe der Diplomarbeit wurden mit Parform diverse Testläufe an typischen Drei- und Vierschleifendiagrammen durchgeführt. Zum einen bezog sich die Untersuchung darauf, wie sich die Zunahme zusätzlicher Prozessoren auf den Geschwindigkeitszuwachs (Speedup) auswirkt, um welchen Faktor also die Berechnung schneller läuft als nur bei einem einzigen Prozessor. Zum anderen bestand Interesse daran, wie sich die Laufzeit in Abhängigkeit von der Entwicklungstiefe erhöht.

Dies erweist sich vor allem dann als wichtig, wenn man wissen will, wie tief die Entwicklung der Masse durchgeführt werden kann, bevor sich die Zeitdauer einer Berechnung ins Bodenlose steigert. Bei den Messungen mit Parform wurde die Zeitdauer normiert auf die Zeit, welche die Berechnung bei Verwendung zweier Prozessoren ins Anspruch nahm. Im nachfolgenden Schaubild ist der Speedup aufgetragen über der Anzahl der Prozessoren. Es ist erkennbar, dass die Geschwindigkeitszunahme bis etwas vier Prozessoren linear verläuft und danach abflacht, um bei acht Prozessoren einen Sättigungswert von etwa 3,8 zu erreichen.



7.1.2 Laufzeitmessungen



Auf Drei- und Vierschleifenniveau wurde je anhand eines typischen Diagramms die Messung der Laufzeit in Abhängigkeit von der Entwicklungstiefe durchgeführt. Hier sind alle Zeiten normiert auf die Laufzeit, wenn nur Terme $\sim m_t^0$ berechnet werden. Aufgetragen ist die Laufzeitzunahme über der Entwicklungstiefe. Das Wachstum der Laufzeit verläuft exponentiell; bei drei Schleifen nimmt sie bei Berechnung der $1/m_t^{10}$ -Terme um den Faktor 78 zu, bei vier Schleifen sogar um den Faktor 472! Dies ließ schon früh erahnen, dass die Entwicklung auf Fünfschleifenniveau nicht allzu hoch getrieben werden könne, obliegt einem hier doch die Berechnung von über 2600 Diagrammen.

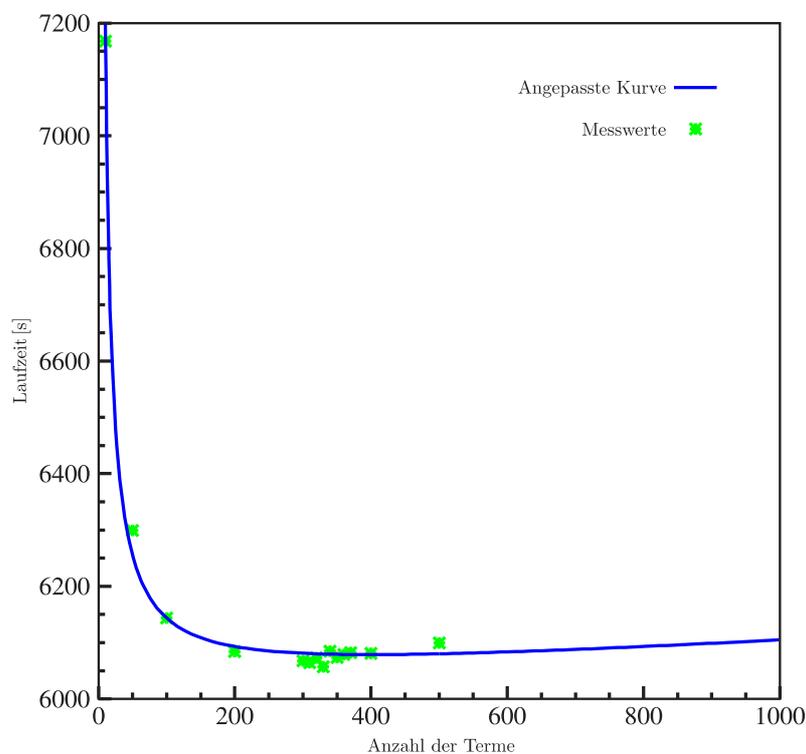
Darunter sind beide Kurven noch einmal mit logarithmischer Auftragung gezeichnet. An die Messwerte lässt sich gut eine Gerade anpassen, wodurch das exponentielle Verhalten



der Laufzeitzunahme deutlich wird.

7.1.3 Die Variable „MAXINTERMS“

Man kann `Parform` bei einer Berechnung einen Parameter mit der Bezeichnung `MAXINTERMS` übergeben. Dieser steht für die maximale Anzahl der Terme, die parallel verarbeitet werden. Die ideale Wahl des Parameters ist problemspezifisch, weshalb vor eigentlichen Rechnungen Messungen daraufhin durchgeführt wurden, wie sich die Laufzeit ändert, wenn man `MAXINTERMS` variiert. Bei den hier betrachteten Problemen lag das Minimum immer bei etwa 300 bis 400, was bei anschließenden Durchläufen natürlich ausgenutzt wurde.



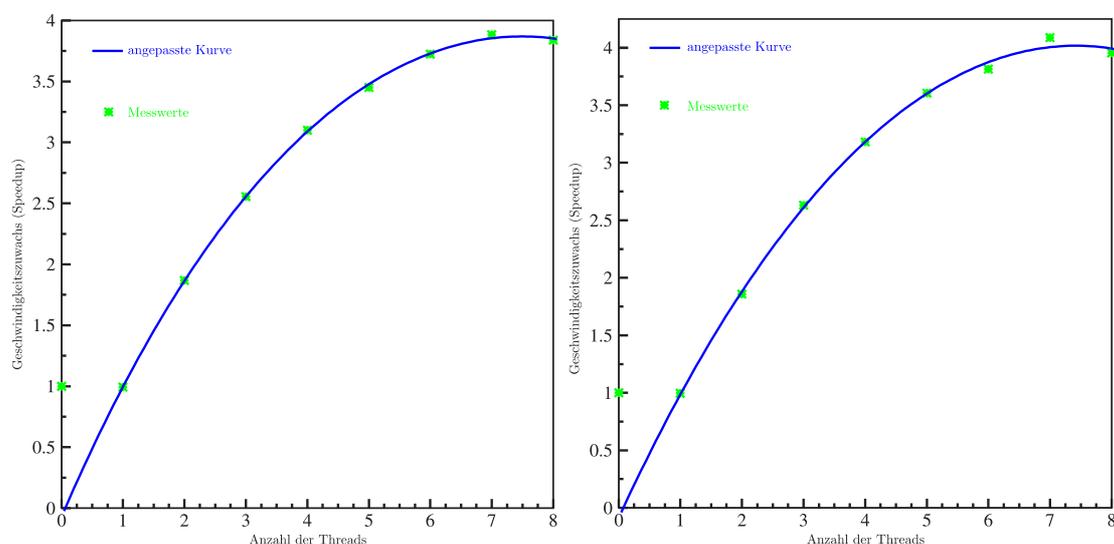
7.2 Tform – eine multiprozessgestützte Version von Form

Der Nachteil von `Parform` ist, dass sich eine Beschleunigung der Laufzeit erst für mehr als zwei Prozessoren einstellt. Infolgedessen wurde eine andere parallele Version mit dem Namen `Tform` [5] in unmittelbarer Zusammenarbeit mit J.A.M. Vermaseren – dem Entwickler von `Form` – konzipiert. Diese kommt vor allem auf Rechnern zum Einsatz, die über Dual- oder Multicore-Prozessoren mit einem gemeinsamen Speicher verfügen.



Bei **Tform** [5] handelt es sich um eine mehrprozessgestützte Version von **Form**, die im Gegensatz zu **Parform** nicht mit dem Standard MPI, sondern mit **POSIX-Threads** (**Portable Operating System Interface for uniX**) arbeitet. Ein Thread ist ein Semi-Prozess, welcher den Speicher mit anderen Threads teilt. Dabei ist eine effizientere Nutzung der Ressourcen möglich und darüber hinaus ist die Anzahl der Threads nicht beschränkt auf die Zahl der vorhandenen Prozessoren. Ein Zeitgewinn ist schon ab der Verwendung von zweien solcher Threads zu verzeichnen.

Mit **Tform** wurden nicht so viele Test durchgeführt wie mit **Parform**, da ein Prozessor mit acht Kernen nur für kurze Zeit zur freien Verfügung stand. Gemessen wurde der Geschwindigkeitszuwachs in Abhängigkeit von der Anzahl der Kerne bei zwei typischen Fünfschleifendiagrammen:



Auch hier verlaufen die Kurven bis zu drei oder vier Cores näherungsweise linear, um danach abzuflachen. Der maximale Speedup liegt in derselben Größenordnung wie bei **Parform**, nämlich ungefähr bei vier. Die Besonderheit ist jedoch, dass dieser dann erreicht wird, wenn sieben Kerne im Spiel sind. Bei acht Kernen sinkt er wieder minimal ab. Somit wurde gezeigt, dass **Tform** der Version **Parform** in nichts nachsteht.

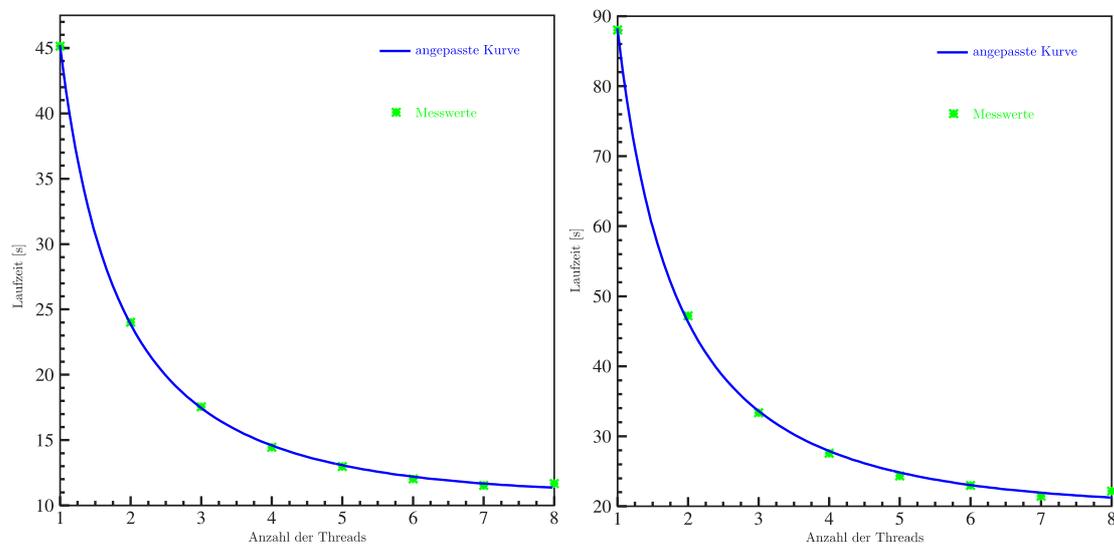
7.2.1 Abhängigkeit der Laufzeit von der Anzahl der Threads

Nach der Internetseite <http://www.nikhef.nl/~form/aboutform/aboutform.html> hängt die Laufzeit T eines über ein Gesetz der Gestalt

$$T(N) = C_1 + \frac{C_2}{N} + C_3 \ln(N) \quad (7.1)$$

von der Anzahl N der Threads ab. Die Konstanten C_1 , C_2 und C_3 sind problemspezifisch. Für zwei unterschiedliche Fünf-Schleifen-Diagramm wurden auf niedrigster Ordnung der

asymptotischen Entwicklung Laufzeitmessungen durchgeführt:



Für das erste Diagramm ergibt sich $C_1 = -3,07987$, $C_2 = 48,2669$, $C_3 = 4,03933$ und für das zweite Diagramm $C_1 = -5,92479$, $C_2 = 94,1595$, $C_3 = 7,40507$. Diese Konstanten unterscheiden sich zwar schon von Diagramm zu Diagramm. Jedoch ist erkennbar, dass sie durchaus in derselben Größenordnung liegen. Dies ist nicht verwunderlich, da es sich um dieselbe Problemklasse handelt, nämlich um die Berechnung eines Fünf-Schleifen-Diagramms.



8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Der hadronische Higgszerfall

Ausgangspunkt bildete der Zerfall $H \rightarrow gg$, der im intermediären Massenbereich des Higgsteilchens durchaus eine Rolle spielt. Berechnet wurde die asymptotische Entwicklung der Zerfallsbreite $\Gamma(H \rightarrow gg)$ auf führender, nächst-zu-führender und nächst-zu-nächst-zu-führender Ordnung im Limes großer Top-Quark-Massen $m_t^2 \gg m_H^2$. Dabei handelt es sich um Beiträge proportional zu α_s^2 , α_s^3 und α_s^4 .

In führender Ordnung ist das Ergebnis für die Zerfallsbreite analytisch bekannt. Der erste Test, der zu Anfang der Diplomarbeit durchgeführt wurde, bestand darin, diese Größe für den Grenzfall $m_H^2 \ll m_t^2$ mit der Methode der asymptotischen Entwicklung auszurechnen. Dies wurde zunächst auf Einschleifenniveau mit einer selbstgeschriebenen **Form**-Routine realisiert und danach unter Verwendung des optischen Theorems mit dem Programmpaket **Qgraf** [8], **Q2E, Exp** [9], **Matad** [11] und **Mincer** [12]. Natürlich müssen diese Ergebnisse mit der Entwicklung des exakten Resultats übereinstimmen und genau das konnte auch erfolgreich gezeigt werden.

Die asymptotische Entwicklung der Zerfallsbreite auf nächst-zu-führender Ordnung wurde bis τ^3 bestätigt [19] und um zwei weitere Terme $\sim \tau^4$ und $\sim \tau^5$ erweitert. Hierbei ist $\tau \equiv m_H^2/(4m_t^2)$ der Entwicklungsparameter. Es war möglich, anhand eines Konvergenzplots zu zeigen, dass die Reihe sogar bis zu $\tau = 1$, was $m_H = 2m_t^2$ entspricht, hervorragende Konvergenzeigenschaften aufweist, was theoretisch nur für kleine τ erwartet wurde.

8.2 Das R-Verhältnis

Berechnet wurde das R-Verhältnis für die Reaktion $e^+e^- \rightarrow$ Hadronen im Grenzfall, dass die Schwerpunktsenergie viel kleiner als die Masse des Top-Quarks ist: $s \ll m_t^2$. Die aus dieser Reaktion zunächst hervorgehenden Quarks werden als masselos betrachtet; nur in virtuellen Korrekturen soll das massive Top-Quark auftreten. Zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ [41], [42] stimmen die Ergebnisse im dem betrachteten Limes mit den schon lange bekannten Resultaten überein.

Zu $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ wird das Ergebnis der asymptotischen Entwicklung durch eine Entwicklung des bekannten analytischen Ausdrucks reproduziert. Diese Entwicklung konvergiert sehr

schnell und ist schon ab τ^4 – wobei $\tau \equiv s/(4m_t^2)$ ist – eine sehr gute Näherung für das exakte Resultat.

Der Nicht-Singulett-Anteil konnte bis τ^3 bestätigt [39] werden. Bei den Summanden $\sim \tau^4$ und $\sim \tau^5$ handelt es sich um neue Ergebnisse. Beim Singulett-Anteil mit einem massiven Triangle-Subdiagramm stimmt die Entwicklung bis τ^3 mit der Literatur [39] überein. Die beiden Terme $\sim \tau^4$ und $\sim \tau^5$ stellen auch hier neue Ergebnisse dar und verbessern die Konvergenz der Entwicklung. Die Singulett-Graphen mit zwei massiven Triangle-Subdiagrammen liefern erst einen Beitrag zu $\mathcal{O}(\tau^4)$, wobei nur dieser Term in der Literatur zu finden ist [40]. Unter Verwendung des Landau-Yang-Theorems [13] war es möglich, eine große Klasse von Diagrammen, die keinen Beitrag liefern, von vornherein auszuschließen und die asymptotische Entwicklung soweit durchzuführen, um die neuen Koeffizienten $\sim \tau^5$, $\sim \tau^6$ und $\sim \tau^7$ berechnen zu können.

8.3 Wie geht es weiter?

8.3.1 Der hadronische Higgszerfall

Bei $H \rightarrow gg$ war es bemerkenswert, festzustellen, dass eine Entwicklung der Zerfallsbreite zu $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ bis τ^5 ausreicht, um diese bis $m_H = 2m_t$ zu beschreiben. Weitere Terme in dieser Entwicklung liefern nur einen sehr kleinen Beitrag. Deshalb ist deren Berechnung nicht unbedingt notwendig.

Zu $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ konnte die Entwicklung für kleine Higgsmassen bis maximal τ^2 durchgeführt werden. Eine sehr gute Konvergenz ist bis $m_H \approx 0,77m_t$ gewährleistet, also auf jeden Fall für $m_H^2 \ll m_t^2$. Die Berechnung weiterer Terme in dieser Entwicklung wird sehr zeitintensiv sein, da die Laufzeit des Terms $\sim \tau^2$ schon mehrere Monate (auf Prozessoren AMD Opteron 248, 2, 2 GHz, 4096 MB RAM und Dual-Core AMD Opteron 2218, 2, 6 GHz, 8192 MB RAM) betrug.

Man wird dann nicht umhin kommen, von den parallelen Versionen von `Form`, also `Tform` oder `Parform`, Gebrauch zu machen. Zusätzlich könnte die Methode der „Building Blocks“ auf andere Diagrammklassen ausgedehnt werden, wie beispielsweise solche mit Drei-Gluon-Vertizes, die auch eine lange Laufzeit aufweisen. Darüber hinaus wäre es wohl sinnvoll, festzustellen, welche Diagramme denselben Wert bis auf das Vorzeichen besitzen und solche dann nur einmal auszurechnen. Dies ist zwar bei über 2600 Diagrammen mit großem Aufwand und einer gewissen Fehleranfälligkeit verbunden, aber ein spürbarer Zeitgewinn sollte dennoch vorhanden sein, da schon auf $\mathcal{O}(\tau^2)$ die Berechnung bestimmter Diagramme tagelang läuft. Dann besteht ab $\mathcal{O}(\tau^3)$ die Gewissheit, dass gerade die Rechenzeit solcher problematischer Diagramme auf Wochen ansteigen wird.

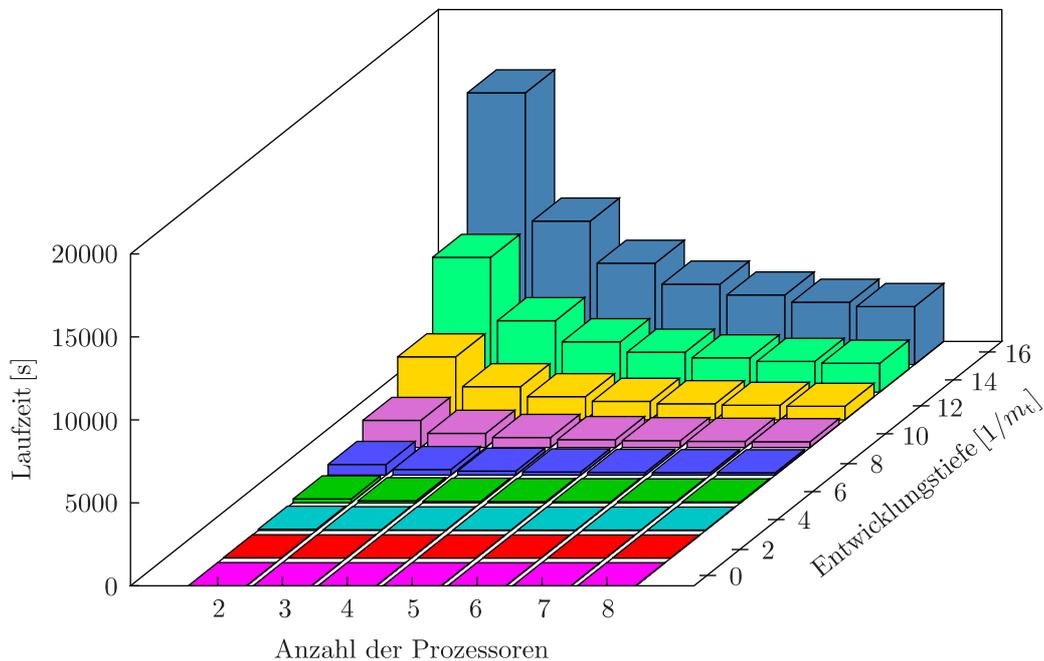


8.3.2 Das R-Verhältnis

Zu $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^3)$ reichen die Terme bis τ^5 gut aus, um den niederenergetischen Bereich zu erfassen, zumindest beim Nicht-Singulett-Anteil. Beim Singulett-Anteil mit einem massiven Triangel-Subdiagramm würde es sich lohnen, noch höher in der Entwicklung zu gehen und weitere Terme jenseits τ^5 zu berechnen, um das Konvergenzverhalten zu verbessern. Das Problem ist jedoch, dass die Laufzeit einiger Diagramme ohne Parallelisierung auf eine oder mehrere Wochen ansteigen wird. Auch bei den Singulett-Graphen mit zwei massiven Triangel-Subdiagrammen könnten noch weitere Terme berechnet werden. Da die ersten vier Beiträge in der Entwicklung verschwinden, muss hoch entwickelt werden, um eine anständige Konvergenz zu gewährleisten. Es sollten jedoch unbedingt nur die Diagramme betrachtet werden, die nach dem Landau-Yang-Theorem überhaupt einen Beitrag ungleich Null liefern. Die Laufzeit schon dieser wenigen Diagramme wird nämlich auf mehrere Tage bis Wochen ansteigen.

8.3.3 Die Parallelisierung von Form

Zu guter Letzt soll noch eine dreidimensionale Statistik von `Parform` gezeigt werden. (Die Graphik wurde mit dem Computerprogramm `DM` [43] erstellt.) Entlang der x -Achse ist die Entwicklungstiefe in $1/m_t$ aufgetragen, entlang der y -Achse die Anzahl der Prozessoren und auf der z -Achse die Laufzeit eines der beiden Dreischleifendiagramme zur führenden Ordnung des Higgszerfalls:



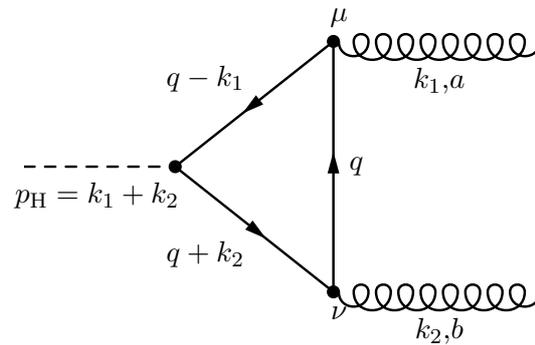
Auch hier ist nochmals erkennbar, wie stark die Laufzeit mit der Entwicklungstiefe anwächst und das schon zur führenden Ordnung. Abhilfe kann nur durch Verwendung

mehrerer Prozessoren bei den Berechnungen geschaffen werden, wobei sich der stärkste Abfall der Laufzeit jedoch bis etwa fünf Prozessoren abspielt und danach der Sättigungsbereich erreicht wird.

Parform wurde bei vielen Berechnungen benutzt und hat sich unter Vollast als sehr nützlich und zuverlässig erwiesen. An der Entwicklung der parallelen Versionen von **Form** – also **Tform** und **Parform** – sollte unbedingt weitergearbeitet werden. Schon bei den Berechnungen, die im Rahmen dieser Diplomarbeit durchgeführt wurden, ist selbst **Form** teilweise an seine Grenzen gestoßen. Deshalb sollte unbedingt an der Weiterentwicklung von **Parform** und **Tform** gearbeitet werden, weil diese Systeme für zukünftige immer aufwändigere Berechnungen unerlässlich werden. Es wäre von Vorteil, wenn der Sättigungsbereich nicht schon bei fünf, sondern erst bei einer höheren Anzahl von Prozessoren erreicht werden würde. Die Speedupkurve sollte also über einen größeren Bereich hinweg linear verlaufen.



A Herleitung der Zerfallsbreite des gluonischen Higgszerfalls auf Ein-Schleifen-Niveau



A.1 Berechnung des Matrixelements „straightforward“

Aus den Feynmanregeln ergibt sich sofort das Matrixelement:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & (-1)(-ig_s)^2 \left(-i\frac{m}{v}\right) i^3 \text{Sp}(T^a T^b) \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \times \\ & \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}[\gamma^\mu (\not{q} - \not{k}_1 + m)(\not{q} + \not{k}_2 + m)\gamma^\nu (\not{q} + m)]}{[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2][q^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Die Berechnung der Spur (vorzugsweise mit Form) im Zähler des Bruchs führt auf:

$$4m[k_1^\nu k_2^\mu - k_1^\mu k_2^\nu + 2k_2^\nu q^\mu - 2k_1^\mu q^\nu + 4q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} k_1 k_2 - g^{\mu\nu} q^2 + g^{\mu\nu} m^2] \quad (\text{A.2})$$

Ausgenutzt wird außerdem, dass die Gluonen onshell sind: $k_1^2 = k_2^2 = 0$. Hieraus ergibt sich sofort $k_1 \cdot k_2 = m_H^2/2$. Die zu lösenden Integrale sind im Wesentlichen von folgender Form:

$$C_{\mu\nu} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \quad (\text{A.3})$$

$$C_\mu = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{q_\mu}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \quad (\text{A.4})$$



$$C_0 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \quad (\text{A.5})$$

Die Integrale C_μ und $C_{\mu\nu}$ können durch eine Passarino-Veltman-Zerlegung auf die Zweipunktfunktionen

$$B_0(1, 2) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)} \quad (\text{A.6})$$

$$B_0(1, 3) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \quad (\text{A.7})$$

$$B_0(2, 3) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \quad (\text{A.8})$$

zurückgeführt werden. Zusammenfassen aller auftretenden Terme

$$2k_2^\nu C^\mu = 2k_2^\nu (k_1^\mu C_1 + k_2^\mu C_2) = \frac{1}{k_1 k_2} (k_2^\nu k_1^\mu [B_0(1, 2) - B_0(2, 3)] + k_2^\nu k_2^\mu [B_0(2, 3) - B_0(1, 3)]) \quad (\text{A.9})$$

$$2k_1^\mu C^\nu = 2k_1^\mu (k_1^\nu C_1 + k_2^\nu C_2) = \frac{1}{k_1 k_2} (k_1^\mu k_1^\nu [B_0(1, 2) - B_0(2, 3)] + k_1^\mu k_2^\nu [B_0(2, 3) - B_0(1, 3)]) \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} 4C^{\mu\nu} &= \frac{1}{k_1 k_2} k_1^\mu k_1^\nu [B_0(1, 3) - B_0(2, 3)] + \frac{1}{k_1 k_2} k_2^\mu k_2^\nu [B_0(1, 2) - B_0(2, 3)] \\ &\quad + 2g^{\mu\nu} (1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \left(\frac{1}{2} B_0(2, 3) + m^2 C_0 \right) \\ &\quad - \frac{2}{k_1 k_2} (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu) \left[\left(\frac{1}{2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) B_0(2, 3) + m^2 C_0 \right] = \\ &= \frac{1}{k_1 k_2} k_1^\mu k_1^\nu [B_0(1, 3) - B_0(2, 3)] + \frac{1}{k_1 k_2} k_2^\mu k_2^\nu [B_0(1, 2) - B_0(2, 3)] \\ &\quad + g^{\mu\nu} (B_0(2, 3) + \varepsilon B_0(2, 3) + 2m^2 C_0) \\ &\quad - \frac{1}{k_1 k_2} (k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu) (\varepsilon B_0(2, 3) + 2m^2 C_0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} C^\mu{}_\nu &= g^{\mu\nu} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) (1 + \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) B_0(2, 3) \right. \\ &\quad \left. + 2m^2 C_0 - \left(\frac{1}{2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) B_0(2, 3) - m^2 C_0 \right] = \\ &= g^{\mu\nu} [m^2 C_0 + B_0(2, 3)] + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$



führt auf:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \sim 4m \left\{ \frac{1}{k_1 k_2} k_1^\mu k_1^\nu [B_0(1, 3) - B_0(1, 2)] + \frac{1}{k_1 k_2} k_2^\mu k_2^\nu [B_0(1, 2) - B_0(1, 3)] \right. \\
+ \frac{1}{k_1 k_2} k_1^\nu k_2^\mu [-2m^2 C_0 + k_1 k_2 C_0 - \varepsilon B_0(2, 3)] \\
+ \frac{1}{k_1 k_2} k_1^\mu k_2^\nu [B_0(1, 2) + B_0(1, 3) - 2B_0(2, 3) - 2m^2 C_0 - k_1 k_2 C_0 - \varepsilon B_0(2, 3)] \\
\left. + g^{\mu\nu} [2m^2 C_0 - k_1 k_2 C_0 + \varepsilon B_0(2, 3)] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

A.2 Berechnung des Matrixelements mittels geeigneter Projektoren

Bei dieser Methode wird angenommen, dass sich die Amplitude in folgender Form schreiben lässt, um die Lorentzstruktur zu respektieren:

$$\mathcal{M} = \text{---} \bullet \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \uparrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \sim Ag^{\mu\nu} + Bk_1^\mu k_2^\nu + Ck_1^\nu k_2^\mu + (Dk_1^\mu k_1^\nu + Ek_2^\mu k_2^\nu) \tag{A.14}$$

Hierbei wird berücksichtigt, dass die Gluonen masselos sind. Unter diesen Umständen treten die beiden letzten Terme nicht auf und werden daher von vornherein weggelassen.

Es sind nun Projektoren zu konstruieren, welche die Streuamplitude \mathcal{M} auf die skalaren Koeffizienten A , B und C projizieren. Diese werden im Folgenden als P_A , P_B und P_C bezeichnet:

$$P_A \left(\text{---} \bullet \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \uparrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = A, \quad P_B \left(\text{---} \bullet \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \uparrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = B \tag{A.15}$$

$$P_C \left(\text{---} \bullet \begin{array}{c} \nearrow \bullet \\ \uparrow \bullet \\ \searrow \bullet \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right) = C \tag{A.16}$$

Die Projektoren selbst müssen die analoge Lorentzstruktur des betrachteten Problems

aufweisen. Es gelte also folgender Ansatz:

$$P_A = p_A^1 g_{\mu\nu} + p_A^2 k_{1,\mu} k_{2,\nu} + p_A^3 k_{1,\nu} k_{2,\mu} \quad (\text{A.17})$$

$$P_B = p_B^1 g_{\mu\nu} + p_B^2 k_{1,\mu} k_{2,\nu} + p_B^3 k_{1,\nu} k_{2,\mu} \quad (\text{A.18})$$

$$P_C = p_C^1 g_{\mu\nu} + p_C^2 k_{1,\mu} k_{2,\nu} + p_C^3 k_{1,\nu} k_{2,\mu} \quad (\text{A.19})$$

Zur Veranschaulichung soll die Berechnung von P_A dienen; für P_B und P_C ist die Rechnung analog durchzuführen. Wendet man P_A auf die Streuamplitude \mathcal{M} an, so folgt:

$$\begin{aligned} P_A \mathcal{M} &= P_A (A g^{\mu\nu} + B k_1^\mu k_2^\nu + C k_1^\nu k_2^\mu) = \\ &= (p_A^1 g_{\mu\nu} + p_A^2 k_{1,\mu} k_{2,\nu} + p_A^3 k_{1,\nu} k_{2,\mu}) [A g^{\mu\nu} + B k_1^\mu k_2^\nu + C k_1^\nu k_2^\mu] = \\ &= [d p_A^1 + (k_1 \cdot k_2) p_A^2 + (k_1 \cdot k_2) p_A^3] A + [(k_1 \cdot k_2) p_A^1 + k_1^2 k_2^2 p_A^2 + (k_1 \cdot k_2)^2 p_A^3] B + \\ &\quad + [(k_1 \cdot k_2) p_A^1 + (k_1 \cdot k_2)^2 p_A^2 + k_1^2 k_2^2 p_A^3] C \stackrel{!}{=} A \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich mittels der On-Shell-Beziehungen $k_1^2 = k_2^2 = 0$ folgendes Gleichungssystem für die Koeffizienten des Projektors P_A :

$$\begin{pmatrix} d & k_1 \cdot k_2 & k_1 \cdot k_2 \\ k_1 \cdot k_2 & 0 & (k_1 \cdot k_2)^2 \\ k_1 \cdot k_2 & (k_1 \cdot k_2)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_A^1 \\ p_A^2 \\ p_A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

Zusammenfassend gilt für alle drei Projektoren P_A , P_B und P_C :

$$\begin{pmatrix} p_A^1 \\ p_A^2 \\ p_A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \frac{m_H^2}{2} & \frac{m_H^2}{2} \\ \frac{m_H^2}{2} & 0 & \frac{m_H^4}{4} \\ \frac{m_H^2}{2} & \frac{m_H^4}{4} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{d-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{m_H^2} \\ -\frac{2}{m_H^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{pmatrix} p_B^1 \\ p_B^2 \\ p_B^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \frac{m_H^2}{2} & \frac{m_H^2}{2} \\ \frac{m_H^2}{2} & 0 & \frac{m_H^4}{4} \\ \frac{m_H^2}{2} & \frac{m_H^4}{4} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{d-2} \frac{1}{m_H^2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{m_H^2} \\ \frac{2(d-1)}{m_H^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{pmatrix} p_C^1 \\ p_C^2 \\ p_C^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \frac{m_H^2}{2} & \frac{m_H^2}{2} \\ \frac{m_H^2}{2} & 0 & \frac{m_H^4}{4} \\ \frac{m_H^2}{2} & \frac{m_H^4}{4} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{d-2} \frac{1}{m_H^2} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2(d-1)}{m_H^2} \\ \frac{2}{m_H^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

Durch Anwenden der Projektoren auf die Amplitude ergeben sich die Koeffizienten A ,

B und C :

$$A = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{A'}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2]} \text{ mit}$$

$$A' = -2mm_{\text{H}}^2 + 4m^3 - 32\frac{m}{m_{\text{H}}^2}(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q) + 4mq^2$$

$$+ \varepsilon \left(-2\frac{m}{m_{\text{H}}^2} + 4m^3 - 32(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q)\frac{m}{m_{\text{H}}^2} + 4mq^2 \right)$$
(A.25)

$$B = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{B'}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2]} \text{ mit}$$

$$B' = -4m + 128\frac{m}{m_{\text{H}}^4}(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q) - 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2}(k_1 \cdot q) + 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2}(k_2 \cdot q) - 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2}q^2$$

$$+ \varepsilon \left(64\frac{m}{m_{\text{H}}^4}(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q) - 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2}q^2 \right)$$
(A.26)

$$C = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{C'}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2]} \text{ mit}$$

$$C' = 4m + 128\frac{m}{m_{\text{H}}^4}(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q) - 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2}q^2 + \varepsilon \left(64\frac{m}{m_{\text{H}}^4}(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q) - 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2}q^2 \right)$$
(A.27)

Nach Auswertung der Integrale kommt man auf folgende Ergebnisse:

$$A = -2mm_{\text{H}}^2 C_0 + 4m^3 C_0 - 32\frac{m}{m_{\text{H}}^2} \cdot \frac{m_{\text{H}}^2}{8} B_0(2, 3) + 4mB_0 + 4m^3 C_0$$

$$+ \varepsilon \left(-32\frac{m}{m_{\text{H}}^2} \cdot \frac{m_{\text{H}}^2}{8} B_0 + 8mB_0 + 8m^3 C_0 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =$$

$$= \boxed{(-2mm_{\text{H}}^2 + 8m^3) C_0 + \varepsilon \cdot 4mB_0(2, 3) + \mathcal{O}(\varepsilon)}$$
(A.28)

$$B = \boxed{8\frac{m}{m_{\text{H}}^2} B_0(1, 2) + 8\frac{m}{m_{\text{H}}^2} B_0(1, 3) - 16\frac{m}{m_{\text{H}}^2} B_0(2, 3)}$$

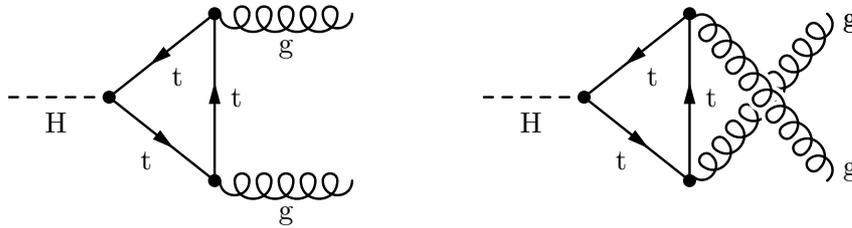
$$- 4mC_0 - 16\frac{m^3}{m_{\text{H}}^2} C_0 - \varepsilon \cdot 8\frac{m}{m_{\text{H}}^2} B_0(2, 3) + \mathcal{O}(\varepsilon)}$$
(A.29)



$$\begin{aligned}
C &= 4mC_0 + 128 \frac{m_H^2}{8} \cdot B_0(2,3) \frac{m}{m_H^4} - 16 \frac{m}{m_H^2} B_0 - 16 \frac{m^3}{m_H^2} C_0 \\
&+ \varepsilon \left(64 \frac{m}{m_H^4} \cdot \frac{m_H^2}{8} B_0 - 16 \frac{m}{m_H^2} B_0(2,3) - 16 \frac{m^3}{m_H^2} C_0 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\
&= \boxed{\left(4m - \frac{16m^3}{m_H^2} \right) C_0 - \varepsilon \cdot 8 \frac{m}{m_H^2} B_0(2,3) + \mathcal{O}(\varepsilon) = -\frac{2}{m_H^2} A}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

A.3 Berechnung der Zerfallsbreite aus dem Matrixelement

Berechnet werden soll der exakte Ausdruck für die Zerfallsbreite von $H \mapsto gg$ auf Ein-Schleifen-Niveau. Zu betrachten sind hierzu die beiden folgenden Diagramme:



Die Amplituden beider Diagramme sind gleich, was nur zu einem zusätzlichen Faktor 2 in der gesamten Amplitude führt.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{Q_t^2 e^2}{v} \{ (-4m^2 m_H^2 + 16m^4) C_0 + 8m^2 \varepsilon B_0(2,3) \} = \\
&= \frac{Q_t^2 e^2}{v} \left\{ (-4m^2 m_H^2 + 16m^4) \cdot \left(-\frac{i}{16\pi^2} \right) \frac{2}{m_H^2} \arcsin^2 \left(\frac{m_H}{2m} \right) + 8m^2 \cdot \frac{i}{16\pi^2} \right\} = \\
&= \frac{i}{2\pi^2} \frac{Q_t^2 e^2}{v} m^2 \left[\left(1 - \frac{4m^2}{m_H^2} \right) \arcsin^2 \left(\frac{m_H}{2m} \right) + 1 \right]
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Für einen $1 \rightarrow 2$ -Prozess ergibt sich über

$$\frac{\lambda(M^2, m_1^2, m_2^2)}{16\pi M^3} \tag{A.32}$$

die Zerfallsbreite Γ , wobei M die Masse des zerfallenden Teilchens und m_1 bzw. m_2 die Massen der aus dem Zerfall hervorgehenden Teilchen sind. λ steht für die Källen-Funktion, die wie folgt definiert ist:

$$\lambda(a, b, c) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc} \tag{A.33}$$

Angewendet auf den Higgszerfall $H \mapsto gg$ folgt

$$\begin{aligned}\Gamma_{H \rightarrow gg} &= \frac{\lambda(m_H^2, 0, 0)}{16\pi m_H^3} \left(\sum_{\lambda_1, \lambda_2} |\mathcal{M}|^2 \right) = \frac{\lambda(m_H^2, 0, 0)}{16\pi m_H^3} \cdot 2|A|^2 = \\ &= \frac{1}{32\pi^5} \frac{Q_t^4 e^4}{v^2} \frac{m^4}{m_H} \left| \left(1 - \frac{4m^2}{m_H^2} \right) \arcsin^2 \left(\frac{m_H}{2m} \right) + 1 \right|^2\end{aligned}\quad (\text{A.34})$$

und somit das aus der Literatur bekannte Ergebnis:

$$\begin{aligned}\Gamma_{H \rightarrow gg} &= \frac{m_H^3}{32\pi} |A_t(\tau_t)|^2 \text{ mit } A_t = \hat{A}_t \left[\frac{3}{2\tau_t} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\tau_t} \right) \arcsin^2 \sqrt{\tau_t} \right) \right] \\ \text{wobei } \hat{A}_t &= \frac{2\alpha}{3\pi v} Q_t^2 \text{ und } \tau_t = \frac{m_H^2}{4m^2}\end{aligned}\quad (\text{A.35})$$

A.4 Passarino-Veltman-Zerlegung

Grundlage für die Berechnung von tensorwertigen Integralen ist, dass deren Ergebnis dieselbe Lorentzstruktur aufweisen muss wie der Integrand selbst. Die Lorentzstruktur ist aus den Skalen aufzubauen, die der Integrand enthält. Die Größen außerhalb dieser Tensorstruktur sind dann skalar und hängen nur noch von Invarianten ab, die ebenfalls aus den Skalen zusammengesetzt sind. Die Methode, einen Ansatz für ein Feynmanintegral zu wählen, welcher die Lorentzstruktur des Integranden berücksichtigt, bezeichnet man als Passarino-Veltman-Zerlegung.

A.4.1 Das Integral B_μ

$$B_\mu(1, 3) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{(q^2 - m^2)[(q + k_2)^2 - m^2]} = k_{2,\mu} B_2 \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned}2k_2^\mu B_\mu(1, 3) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_2 q}{(q^2 - m^2)[(q + k_2)^2 - m^2]} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2} - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q + k_2)^2 - m^2} \\ &\quad - k_2^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(q + k_2)^2 - m^2]} = 2k_2^2 B_2(1, 3)\end{aligned}\quad (\text{A.37})$$

$$B_\mu(1, 3) = -\frac{1}{2} k_{2,\mu} B_0(1, 3) \quad (\text{A.38})$$

$$B_\mu(1, 2) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{(q^2 - m^2)[(q - k_2)^2 - m^2]} = k_{1,\mu} B_1 \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned}
-2k_1^\mu B_\mu(1, 2) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-2k_1 q}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2]} = \\
&= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2} - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q - k_1)^2 - m^2} \\
&\quad - k_1^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2]} = -2k_1^2 B_1(1, 2)
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\boxed{B_\mu(1, 2) = \frac{1}{2} k_{1,\mu} B_0(1, 2)} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
B_\mu(2, 3) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2]} = \\
&= \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{q'_\mu + k_{1,\mu}}{(q'^2 - m^2)[(q' + k_1 + k_2)^2 - m^2]} = \\
&= B'_\mu(2, 3) + k_{1,\mu} B_0(2, 3)
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Das erste Integral $B'_\mu(2, 3)$ ist von derselben Form wie das Integral $B_\mu(1, 3)$ mit dem Impuls $k = k_1 + k_2$. Damit folgt weiter:

$$B_\mu(2, 3) = -\frac{1}{2}(k_{1,\mu} + k_{2,\mu})B_0(2, 3) + k_{1,\mu}B_0(2, 3) = \boxed{\frac{1}{2}(k_{1,\mu} - k_{2,\mu})B_0(2, 3)} \tag{A.43}$$

A.4.2 Das Integral C_μ

$$C_\mu = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \tag{A.44}$$

Das vektorwertige Integral C_μ hängt von den äußeren Impulsen k_1 und k_2 ab. Infolgedessen ist folgender Ansatz sinnvoll, wobei C_1 und C_2 skalare Größen darstellen:

$$C_\mu = k_{1,\mu} C_1 + k_{2,\mu} C_2 \tag{A.45}$$

Wird dies mit $2k_2^\mu$ multipliziert, so folgt

$$\begin{aligned}
2k_2^\mu C_\mu &= 2k_1 k_2 C_1 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_2 q + q^2 - m^2 - (q^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\
&= \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)} \\
&\quad - \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\
&= B_0(1, 2) - B_0(2, 3)
\end{aligned} \tag{A.46}$$



und damit kann C_1 berechnet werden:

$$\boxed{C_1 = \frac{1}{m_H^2}(B_0(1, 2) - B_0(2, 3))} \quad (\text{A.47})$$

Multiplikation mit $-2k_1^\mu$ führt auf

$$\begin{aligned} -2k_1^\mu C_\mu &= -2k_1 k_2 C_2 = \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-2k_1 q + q^2 - m^2 - (q^2 - m^2)}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\ &= \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \\ &\quad - \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\ &= B_0(1, 3) - B_0(2, 3) \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

woraus C_2 resultiert:

$$\boxed{C_2 = \frac{1}{m_H^2}(B_0(2, 3) - B_0(1, 3))} \quad (\text{A.49})$$

A.4.3 Das Tensorintegral $C_{\mu\nu}$

$$C_{\mu\nu} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \quad (\text{A.50})$$

Für die Kovariantenzerlegung ist folgender Ansatz sinnvoll:

$$C_{\mu\nu} = k_{1,\mu} k_{1,\nu} C_{21} + k_{2,\mu} k_{2,\nu} C_{22} + (k_{1,\mu} k_{2,\nu} + k_{1,\nu} k_{2,\mu}) C_{23} + g_{\mu\nu} C_{24} \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} -4C_{\mu\nu} k_1^\mu k_2^\nu &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{-(2k_1 q)(2k_2 q)}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2} - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + 2k_2 q - m^2} \\ &\quad - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_2 q}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Das zweite der drei Integrale kann durch eine Substitution $q' = q + k_2$ auf die Form des ersten Integrals gebracht werden:

$$I_2 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q + k_2)^2 - m^2} = \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{q'^2 - m^2} = A_0(m) \quad (\text{A.53})$$



Damit heben sich somit die ersten beiden Integrale gegenseitig weg. Für das dritte Integral ergibt sich:

$$I_3 = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_2 q}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = k_1 k_2 B_0(2, 3) \quad (\text{A.54})$$

Darüber hinaus gilt:

$$\begin{aligned} C_\mu{}^\mu &= g^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} + m^2 C_0 = \\ &= B_0(2, 3) + m^2 C_0 \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Mit $-4C_{\mu\nu} k_1^\mu k_2^\nu = -4C_{23}(k_1 k_2)^2 - 4k_1 k_2 C_{24}$ und $C_\mu{}^\mu = 2k_1 k_2 C_{23} + dC_{24}$ folgt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2k_1 k_2 & d \\ k_1 k_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{23} \\ C_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0(2, 3) + m^2 C_0 \\ \frac{1}{4} B_0(2, 3) \end{pmatrix} \quad (\text{A.56})$$

das folgende Lösung besitzt:

$$C_{21} = \frac{1}{4k_1 k_2} (B_0(1, 3) - B_0(2, 3)), \quad C_{22} = \frac{1}{4k_1 k_2} (B_0(1, 2) - B_0(2, 3)) \quad (\text{A.57})$$

$$C_{23} = \frac{1}{k_1 k_2} \left(\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2(d-2)} \right] B_0(2, 3) - \frac{1}{d-2} m^2 C_0 \right) \quad (\text{A.58})$$

$$C_{24} = \frac{1}{d-2} \left(\frac{1}{2} B_0(2, 3) + m^2 C_0 \right) \quad (\text{A.59})$$

Mit einer anderen Kontraktion lassen sich C_{21} und C_{22} berechnen:

$$\begin{aligned} 4C_{\mu\nu} k_2^\mu k_2^\nu &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{4(k_2 q)^2}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2 + 2k_2 q - m^2}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)} \\ &\quad - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2 - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2) + (q^2 - m^2) \cdot 2k_2 q}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - 2k_1 q - m^2} + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_2 q}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1 q - m^2)} \\ &\quad - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - 2k_1 q - m^2} \\ &\quad - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_2 q}{(q^2 - 2k_1 q - m^2)(q^2 + 2k_2 q - m^2)} = \\ &= 2k_2^\mu B_\mu(1, 2) - 2k_2^\mu B_\mu(2, 3) = k_1 k_2 (B_0(1, 2) - B_0(2, 3)) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$



Aus $4C_{\mu\nu}k_2^\mu k_2^\nu = 4(k_1k_2)^2C_{21}$ folgt dann

$$\boxed{C_{21} = \frac{1}{4k_1k_2}(B_0(1, 2) - B_0(2, 3))} \quad (\text{A.61})$$

Analog dazu kann C_{22} bestimmt werden:

$$\begin{aligned} 4C_{\mu\nu}k_1^\mu k_1^\nu &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{4(k_1q)^2}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1q - m^2)(q^2 + 2k_2q - m^2)} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2 - 2k_1q - m^2}{(q^2 - m^2)(q^2 + 2k_2q - m^2)} \\ &\quad - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1q - m^2) - (q^2 - m^2)2k_1q}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1q - m^2)(q^2 + 2k_2q - m^2)} = \\ &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + 2k_2q - m^2} - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_1q}{(q^2 - m^2)(q^2 + 2k_2q - m^2)} \quad (\text{A.62}) \\ &\quad - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 + 2k_2q - m^2} \\ &\quad + \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_1q}{(q^2 - 2k_1q - m^2)(q^2 + 2k_2q - m^2)} = \\ &= -2k_1^\mu B_\mu(1, 3) + 2k_1^\mu B_\mu(2, 3) = k_1k_2(B_0(1, 3) - B_0(2, 3)) \end{aligned}$$

Also folgt schlussendlich

$$\boxed{C_{22} = \frac{1}{4k_1k_2}(B_0(1, 3) - B_0(2, 3))} \quad (\text{A.63})$$

Aus dem Ergebnis für $C_{\mu\nu}$ folgt unter anderem durch Kontraktion mit $k_1^\mu k_2^\nu$:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k_1q)(k_2q)}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2]} = \frac{m_H^2}{8} B_0(2, 3) \quad (\text{A.64})$$

A.4.4 Berechnung der skalaren Integrale

A.4.4.1 Berechnung des Integrals B_0 (Anteil des $1/\varepsilon$ -Pols)

$$B_0(2, 3) = \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)[(q + k_1 + k_2)^2 - m^2]} \quad (\text{A.65})$$



Mittels der Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{D_2 D_3} = \int_0^1 \frac{1}{(xD_2 + (1-x)D_3)^2} dx \quad (\text{A.66})$$

mit

$$\begin{aligned} xD_2 + (1-x)D_3 &= xq^2 - xm^2 + q^2 + 2q(k_1 + k_2) + 2k_1k_2 \\ &\quad - m^2 - xq^2 - 2qx(k_1 + k_2) - 2k_1k_2x + m^2x = \\ &= q^2 + (2q(k_1 + k_2) + 2k_1k_2)(1-x) - m^2 = \\ &= q^2 + 2q(k_1 + k_2)(1-x) + 2k_1k_2(1-x) - m^2 \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} B_0(2, 3) &= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_1 + k_2)(1-x)]^2 - 2k_1k_2(1-x) + m^2]^\varepsilon} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \frac{1}{[2k_1k_2x^2 - 2k_1k_2x + m^2]^\varepsilon} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Benötigt wird nur der Anteil des $1/\varepsilon$ -Pols:

$$B_0(2, 3) = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) \int_0^1 dx \left[1 + \varepsilon \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{2k_1k_2x^2 - 2k_1k_2x + m^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \quad (\text{A.69})$$

$$\boxed{\varepsilon B_0(2, 3) = \frac{i}{16\pi^2} + \mathcal{O}(\varepsilon)} \quad (\text{A.70})$$

A.4.4.2 Berechnung des Integrals C_0

$$C_0 = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2)(q^2 - 2k_1q - m^2)(q^2 + 2k_2q - m^2)} \quad (\text{A.71})$$



Mit der Feynman-Parametrisierung

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1 D_2 D_3} &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(1)^3} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{[D_1 x + D_2 y + D_3 z]^3} = \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[D_1 x + D_2 y + D_3(1-x-y)]^3} \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

mit

$$\begin{aligned} D_1 x + D_2 y + D_3(1-x-y) &= q^2 x - m^2 x + q^2 y - 2k_1 q y - m^2 y + q^2 + 2k_2 q \\ &\quad - m^2 - q^2 x - 2k_2 q x + m^2 x - q^2 y - 2k_2 q y + m^2 y = \\ &= q^2 + 2k_2 q(1-x-y) - 2k_1 q y - m^2 \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

und dem Masterintegral

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-q^2 + 2pq + M^2]^a} = \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma(a - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)} (p^2 + M^2)^{\frac{d}{2} - a} \quad (\text{A.74})$$

mit $p = k_1 y - k_2(1 - x - y) = y(k_1 + k_2) + k_2(x - 1)$ resultiert:

$$\begin{aligned}
C_0 &= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(y(k_1 + k_2) + k_2(x - 1))^2 + m^2} = \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{y^2(k_1 + k_2)^2 + y(k_1 + k_2)(x - 1)2k_2 + k_2^2(x - 1)^2 + m^2} = \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{2k_1 k_2 y^2 + 2k_1 k_2 y(x - 1) + m^2} = \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2k_1 k_2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{y^2 + y(x - 1) + \frac{m^2}{2k_1 k_2}} = \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{2k_1 k_2} \int_0^1 dx \frac{2 \arctan\left(\frac{x+2y-1}{\sqrt{4C-(x-1)^2}}\right)}{\sqrt{4C-(x-1)^2}} \Bigg|_0^{1-x} = \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{k_1 k_2} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{4C-x^2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{4C-x^2}}\right) = \\
&= -\frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{k_1 k_2} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{4C-x^2}} \arcsin\left(\frac{x}{2\sqrt{C}}\right) = -\frac{i}{16\pi^2} \frac{2}{k_1 k_2} \frac{1}{2} \arcsin^2\left(\frac{x}{2\sqrt{C}}\right) \Bigg|_0^1 = \\
&= \boxed{-\frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{k_1 k_2} \arcsin^2\left(\frac{1}{2\sqrt{C}}\right)} \quad \text{mit } C = \frac{m^2}{2k_1 k_2}
\end{aligned} \tag{A.75}$$

A.5 Der erste Test: Durchführung einer Taylorentwicklung des Matrixelements

Ausgangspunkt bildet das zuvor betrachtete Matrixelement des Higgszerfalls $H \rightarrow gg$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= (-1)(-ig_s)^2 \left(-i\frac{m}{v}\right) i^3 \text{Sp}(T^a T^b) \varepsilon_\mu(k_1) \varepsilon_\nu(k_2) \times \\
&\quad \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}[\gamma^\mu(\not{q} - \not{k}_1 + m)(\not{q} + \not{k}_2 + m)\gamma^\nu(\not{q} + m)]}{[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2][q^2 - m^2]}
\end{aligned} \tag{A.76}$$

Der Integrand der Streuamplitude ist von folgender Form:

$$\frac{[q \cdot k_1, q \cdot k_2, q^2, \dots]}{(q^2 - m^2)[(q - k_1)^2 - m^2][(q + k_2)^2 - m^2]} \quad (\text{A.77})$$

Unter Verwendung der geometrischen Reihe können die auftretenden Nenner in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q - k_1)^2 - m^2} &= \frac{1}{q^2 - m^2 - 2q \cdot k_1 + k_1^2} = \frac{1}{(q^2 - m^2) \left(1 + \frac{k_1^2 - 2q \cdot k_1}{q^2 - m^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{q^2 - m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2q \cdot k_1 - k_1^2}{q^2 - m^2}\right)^n = \\ &= \frac{1}{q^2 - m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2q \cdot k_1}{q^2 - m^2}\right)^n \quad \text{da } k_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Analog funktioniert dies für $\text{Den}(k_2, q, m)$. Nach dieser Entwicklung treten nur noch Integrale der Form A_0 auf. Zur Lösung dieser Integrale ist das allgemeine Vorgehen folgendes: Zunächst werden die konstanten Impulse k_1 und k_2 , über die nicht integriert wird, aus dem Integral herausgezogen, was zu einem tensorwertigen Integranden führt. Da es einfacher ist, mit skalaren Integranden zu rechnen, wird ein tensorwertiger Integrand mittels Lorentz-Kovarianten ausgedrückt, so dass dessen Tensorstruktur erhalten bleibt. Die skalaren Integrale, die daraus resultieren, sind über Standardmethoden auszuwerten. In den nachfolgenden Rechnungen werden die Integrale mit $A_0(k_1^i, k_2^j, a, m)$ bezeichnet. Hier stehen die Indizes i bzw. j für die Potenz von k_1 bzw. k_2 und a für die Potenz des Nenners.

1.) Integrale, die nur einen Impuls k_1 bzw. k_2 enthalten:

a.) Ungerade Integrale:

$$A_0(k_1, a, m) = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2k_1 \cdot q}{(q^2 - m^2)^a} = 2k_1^\mu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{(q^2 - m^2)^a} = 0 \quad (\text{A.79})$$

Dieses Integral verschwindet, weil es bezüglich q ungerade ist, genauso wie das nächste:

$$\begin{aligned} A_0(k_1^3, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{8(k_1 \cdot q)^3}{(q^2 - m^2)^a} = 8k_1^\mu k_1^\nu k_1^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu q_\sigma}{(q^2 - m^2)^a} = \\ &= 8k_1^\mu k_1^\nu k_1^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (g_{\mu\nu} q_\sigma + g_{\nu\sigma} q_\mu + g_{\mu\sigma} q_\nu) \frac{q^2}{(q^2 - m^2)^a} = \\ &= 8k_1^2 k_1^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\sigma q^2}{(q^2 - m^2)^a} + 8k_1^2 k_1^\mu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q^2}{(q^2 - m^2)^a} \\ &\quad + 8k_1^2 k_1^\nu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\nu q^2}{(q^2 - m^2)^a} = 0 \end{aligned}$$



(A.80)

Es ist ersichtlich, dass dieses Integral sowieso verschwindet, wenn man die On-Shell-Beziehung $k_1^2 = 0$ ausnutzt.

b.) Gerade Integrale:

$$\begin{aligned}
A_0(k_1^2, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{4(q \cdot k_1)^2}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= 4k_1^\mu k_1^\nu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= 4k_1^\mu k_1^\nu \left(g_{\mu\nu} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - m^2)^a} \right) = \\
&= 4k_1^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - m^2)^a} = 0
\end{aligned} \tag{A.81}$$

$$\begin{aligned}
A_0(k_1^4, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{16(q \cdot k_1)^4}{(q^2 - m^2)^a} = 16k_1^\mu k_1^\nu k_1^\rho k_1^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= 16k_1^\mu k_1^\nu k_1^\rho k_1^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \frac{1}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= 3 \cdot 16k_1^4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)^a} = 0
\end{aligned} \tag{A.82}$$

Die geraden Integrale selbst liefern auch keinen Beitrag aufgrund der On-Shell-Beziehung $k_1^2 = 0$.

Die Argumentation funktioniert analog für Integrale, die nur den äußeren Impuls k_2 enthalten.

2.) Integrale, die sowohl k_1 als auch k_2 enthalten:

In diesem Fall muss differenzierter argumentiert werden als zuvor.

$$\begin{aligned}
A_0(k_1, k_2, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k_1 \cdot q)(k_2 \cdot q)}{(q^2 - m^2)^a} = k_1^\mu k_2^\nu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= k_1^\mu k_2^\nu g_{\mu\nu} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - m^2)^a} = k_1 \cdot k_2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - m^2)^a}
\end{aligned} \tag{A.83}$$



Die $A_0(k_1, k_2, a, m)$ verschwindet somit nicht.

$$\begin{aligned}
A_0(k_1^2, k_2, q, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k_1 \cdot q)^2 (k_2 \cdot q)}{(q^2 - m^2)^a} = k_1^\mu k_1^\nu k_2^\rho \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu q_\rho}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= k_1^\mu k_1^\nu k_2^\rho \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (g_{\mu\nu} q_\rho + g_{\mu\rho} q_\nu + g_{\nu\rho} q_\mu) \frac{1}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= k_1^2 k_2^\rho \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\rho}{(q^2 - m^2)^a} + (k_1 \cdot k_2) k_1^\nu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\nu}{(q^2 - m^2)^a} + \\
&\quad + (k_1 \cdot k_2) k_1^\mu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu}{(q^2 - m^2)^a} = 0
\end{aligned} \tag{A.84}$$

$$\begin{aligned}
A_0(k_1^3, k_2, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k_1 \cdot q)^3 (k_2 \cdot q)}{(q^2 - m^2)^a} = k_1^\mu k_1^\nu k_1^\rho k_2^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= k_1^\mu k_1^\nu k_1^\rho k_2^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \frac{q^4}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= 3k_1^2 (k_1 \cdot k_2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^4}{(q^2 - m^2)^a} = 0
\end{aligned} \tag{A.85}$$

$$\begin{aligned}
A_0(k_1^2, k_2^2, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k_1 \cdot q)^2 (k_2 \cdot q)^2}{(q^2 - m^2)^a} = k_1^\mu k_1^\nu k_2^\rho k_2^\sigma \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= k_1^\mu k_1^\nu k_2^\rho k_2^\sigma (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^4}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= (k_1^2 k_2^2 + 2(k_1 \cdot k_2)^2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^4}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= 2(k_1 \cdot k_2)^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^4}{(q^2 - m^2)^a}
\end{aligned} \tag{A.86}$$

Zu guter Letzt soll der allgemeinste Fall, der auftreten kann, betrachtet werden, nämlich:

$$\begin{aligned}
A_0(k_1^n, k_2^n, a, m) &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(k_1 \cdot q)^n (k_2 \cdot q)^n}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= k_1^\mu k_1^\nu \dots k_1^\xi k_2^\rho k_2^\sigma \dots k_2^\zeta \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu q_\nu \dots q_\xi q_\rho q_\sigma \dots q_\zeta}{(q^2 - m^2)^a} = \\
&= \frac{n!(k_1 \cdot k_2)^n + ((2n)!! - n!) f(k_1^2, k_2^2, k_1 \cdot k_2)}{(2n)!!} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q \cdot q)^n}{(q^2 - m^2)^a}
\end{aligned}$$



(A.87)

Es gibt $n!$ Möglichkeiten, Skalarprodukte mit jeweils einem k_1 und einem k_2 zu konstruieren. Die gesamte Anzahl der Möglichkeiten, Paare zu bilden ist $(2n)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 1$. f ist eine Funktion, in der k_1^2 , k_2^2 und $k_1 \cdot k_2$ multiplikativ miteinander verknüpft sind. Aufgrund der On-Shell-Beziehungen $k_1^2 = k_2^2 = 0$ verschwindet f . Die Symmetrisierung des Integrals vereinfacht sich also:

$$A_0(k_1^n, k_2^n, a, m) = \frac{n!}{(2n)!!} (k_1 \cdot k_2) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{(q \cdot q)^n}{(q^2 - m^2)^a} \quad (\text{A.88})$$

Bis jetzt wurde untersucht, welche Integrale verschwinden und welche einen Beitrag zum Ergebnis liefern. Die letzteren haben nach einer Kovariantenzerlegung die Form, um sie über das wohlbekanntes Masterintegral

$$\begin{aligned} I_d(q, a) &= \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - 2q \cdot p - M^2)^a} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)} (p^2 + M^2)^{\frac{d}{2}-a} (-1)^a \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

berechnen zu können. Für die Auswertung des einfachsten dieser Integrale muss in der obigen Beziehung $p = 0$ gesetzt werden:

$$\mu^{4-d} A_0(a, m) = \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 - m^2)^a} = \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)} m^{d-2a} \cdot (-1)^a \quad (\text{A.90})$$

Es ist möglich, die Integrale der Form

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{[q, q^2, q^3, \dots]}{(q^2 - m^2)^a} \quad (\text{A.91})$$

durch Differentiation des Masterintegrals $I_d(q, a)$ (und dessen Ergebnis) nach p zu bestimmen. Anschließend ist $p = 0$ zu setzen. Dies lässt sich für den einfachsten Fall wie folgt durchführen:

$$\left. \frac{\partial}{\partial p} \right|_{p=0} = \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2aq}{(q^2 - 2q \cdot p - m^2)^{a+1}} \Big|_{p=0} = 2a\mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q}{(q^2 - m^2)^{a+1}} \Big|_{p=0} \quad (\text{A.92})$$

$$\begin{aligned}
\mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q}{(q^2 - m^2)^a} &= \\
&= (-1)^a \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{2(a-1)} \frac{\Gamma(a-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)} \frac{\partial}{\partial p} \left[(p^2 + m^2)^{\frac{d}{2}+1-2a} \right] \Bigg|_{p=0} = 0
\end{aligned} \tag{A.93}$$

Natürlich ist das von vornherein klar, weil dieses Integral ungerade ist. Allgemein gilt:

$$\boxed{\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^n}{(q^2 - m^2)^a} = 0 \text{ für ungerade } n} \tag{A.94}$$

Die Integrale mit geradem n verschwinden nicht. Beispielsweise gilt für den einfachsten Fall mit $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial p^2} I_d(q, a) \Bigg|_{p=0} &= \mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{4q^2 a(a+1)}{(q^2 - 2q \cdot p - m^2)^{a+2}} \Bigg|_{p=0} = \\
&= \mu^{4-d} 4a(a+1) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - m^2)^{a+2}} = \\
&= (-1)^a \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left[(p^2 + m^2)^{\frac{d}{2}-a} \right] \Bigg|_{p=0} = \\
&= (-1)^a \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)} m^{d-2-2a} (d-2a)
\end{aligned} \tag{A.95}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{4-d} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q^2}{(q^2 - M^2)^a} &= (-1)^a \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{4(a-1)(a-2)} \times \\
&\quad \times \frac{\Gamma(a-2-\frac{d}{2})}{\Gamma(a-2)} m^{d+2-2a} (d+4-2a) = \\
&= \frac{(-1)^{a+1}}{2} \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(a-1-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)} m^{d+2-2a}
\end{aligned} \tag{A.96}$$

Auf diese Weise können die restlichen Integrale berechnet werden. Da die Berechnungen jedoch mit steigender Potenz von p im Zähler sehr aufwändig werden, wurde eine Form-Prozedur (`integral.prc`) geschrieben, welche diese Arbeit übernimmt.

Die Entwicklung der projizierten Amplitude muss natürlich mit der Entwicklung des Endergebnisses

$$\hat{A}_t = \hat{A}_t \left[\frac{3}{2\tau_t} \left(1 + \left(1 - \frac{1}{\tau_t} \right) \arcsin^2 \sqrt{\tau_t} \right) \right] = \hat{A}_t \left(1 + \frac{7}{30}\tau_t + \frac{2}{21}\tau_t^2 + \frac{26}{525}\tau_t^3 \right. \\ \left. + \frac{512}{17325}\tau_t^4 + \frac{1216}{63063}\tau_t^5 + \frac{128}{9555}\tau_t^6 + \frac{640}{65637}\tau_t^7 + \frac{229376}{31177575}\tau_t^8 + \frac{507904}{88913825}\tau_t^9 \right. \\ \left. + \frac{65536}{14435421}\tau_t^{10} + \mathcal{O}(\tau_t^{11}) \right)$$

(A.97)

übereinstimmen. Genau das konnte mit dem Form-Programm in Anhang H.1 auf Seite 195 bestätigt werden.



B Schleifenintegrale: Probleme, Techniken und Anwendungen

Die Quantenfeldtheorie stellt einen überaus mächtigen Formalismus zu Verfügung, der in der Lage ist, theoretische Probleme zu behandeln, die sonst nicht praktikabel zu lösen wären.

B.1 Das Auftreten von Divergenzen

Schon die Physiker, welche sich zuerst quantenfeldtheoretischen Überlegungen widmeten, standen einigen grundlegenden Problemen gegenüber, die erst Jahrzehnte später gelöst werden sollten. So ist beispielsweise in einem Buch aus den Gründerjahren der Quantenfeldtheorie [44] nachzulesen, dass die Anwendung feldtheoretischer Verfahren auf unendlich große Selbstenergien von Teilchen führt. In Kapitel 23 heißt es beispielsweise „[...] doch führt sie andererseits bei den Selbstenergieproblemen immer wieder zu Divergenzschwierigkeiten, und um diese zu beseitigen, sind wir bisher auf die nicht-invarianten und zudem mit starker Willkür behafteten „Abschneidemethoden“ angewiesen. Ob hier durch eine rein formale Ausgestaltung der Theorie (vgl § 19) Abhilfe geschaffen werden kann, erscheint zum mindesten fraglich. [...]“

Physikalisch messbare Größen wie Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten können aber keinen unendlichen Wert annehmen. Noch nie hat ein Experimentalphysiker einen unendlich großen Wirkungsquerschnitt gemessen. Das hieße ja, dass Teilchen auch dann noch sehr stark miteinander wechselwirken würden, wenn sich diese unendlich weit voneinander entfernt befänden, was jeglichem physikalischen Vernunftdenken widerspricht. Man könnte nun angeregt sein, das zugrundeliegende Modell zu verwerfen und sich zurück ans Reißbrett zu begeben. Dass dies jedoch nicht geschehen ist, haben wir Physikern wie Feynman [45], Schwinger [46], Tomonaga und Dyson [47] zu verdanken, die Konzepte zur Beseitigung dieser Divergenzen entwickelten, so dass die Theorie weiterhin aussagekräftig bleibt.

Die Ursache des Problems mit den Divergenzen liegt darin, dass in Feynmandiagrammen Schleifen auftreten können, wenn höhere Ordnungen Störungstheorie berücksichtigt werden. Mathematisch entsprechen solche Schleifen Integralen über den vierdimensionalen Minkowskiraum mit dem Integrationsmaß $d^4k = dk^0 d\vec{k}$. Ein gewisser Anteil dieser auftretenden Integrale ist in vier Dimensionen konvergent und sorgt für keine Probleme. Es gibt jedoch auch welche, die ein divergentes Verhalten aufweisen.



B.1.1 Unterscheidung der möglichen Divergenzen

Im Allgemeinen können folgende Arten von Divergenzen bei Schleifenintegralen zu Tage treten:

- 1.) Ultraviolett-Divergenzen (UV-Divergenzen):

Man spricht von einer UV-Divergenz, wenn ein Feynmanintegral für große Integrationsimpulse k divergiert. Große Impulse entsprechen hohen Frequenzen und kleinen Wellenlängen, also dem ultravioletten Regime.

- 2.) Infrarot-Divergenzen (IR-Divergenzen):

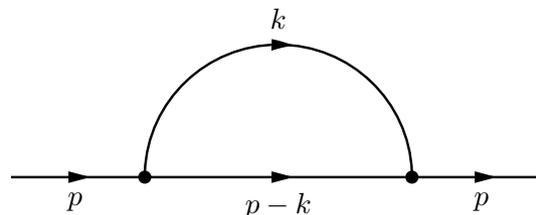
Liegt eine IR-Divergenz vor, so entspricht das einem divergierenden Verhalten für kleine Integrationsimpulse. Kleine Impulse bedeuten niedrige Frequenzen und große Wellenlängen und stehen somit für den infraroten Bereich.

- 3.) Kollineare Divergenzen:

Diese treten auf, wenn der Integrand für eine bestimmte geometrische Konfiguration des Integrationsimpulses und eines äußeren Impulses eine Polstelle aufweist.

B.1.2 Beispiel: Selbstenergie eines skalaren Feldes

Als Beispiel soll der Einfachheit halber die Selbstenergie eines masselosen skalaren Feldes mit ϕ^3 -Wechselwirkung betrachtet werden. Ein möglicher Beitrag auf Ein-Schleifen-Niveau liefert das folgende Diagramm:



Einsetzen der Feynmanregeln führt auf das Integral

$$I(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-q)^2} \quad (\text{B.1})$$

welches geschickt durch Einführung vierdimensionaler Kugelkoordinaten

$$k_0(r, \chi, \vartheta, \varphi) = r \cos(\chi), \quad k_1(r, \chi, \vartheta, \varphi) = r \sin(\chi) \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \quad (\text{B.2})$$

$$k_2(r, \chi, \vartheta, \varphi) = r \sin(\chi) \sin(\vartheta) \sin(\varphi), \quad k_3(r, \chi, \vartheta, \varphi) = 4 \sin(\chi) \cos(\vartheta), \quad (\text{B.3})$$

untersucht werden kann. Wird beachtet, dass die Jacobi-Determinante $r^3 \sin(\chi)^2 \sin(\vartheta)$ lautet, so ist das Verhalten des radialen Anteils erkennbar. Der Winkelanteil wird nicht



betrachtet, weil dieser sowieso beschränkt ist. Da das Integral nur für große Werte von k untersucht werden soll, schließt man den Integrationsbereich kleiner k aus mittels eines Parameters Λ_1 :

$$\int_{|k| \leq \Lambda_1} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(q-k)^2} \xrightarrow[k \text{ groß}]{\text{radialer Anteil}} \int_{\Lambda_1}^{\Lambda_2} \frac{dr}{r} = \ln\left(\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}\right) \mapsto \infty \text{ für } \Lambda_2 \mapsto \infty \quad (\text{B.4})$$

Für große k bzw. r ist das Integral also logarithmisch divergent.

B.1.3 Feststellung des Divergenzgrades durch Power Counting

Das oben verwendete Verfahren zur Feststellung des Divergenzverhaltens mit vierdimensionalen Kugelkoordinaten sollte nur der Anschauung dienen. In der Praxis stellt man das Verhalten mittels „Power Counting“ fest:

- 1.) Alle Impulse und Massen, die im zu betrachtenden Bereich klein sind, werden vernachlässigt.
- 2.) Danach bestimmt man den Divergenzgrad über die Differenz

$$\boxed{\begin{array}{l} D = \text{Potenz des Schleifenimpulses im Zähler} \\ \quad - \text{Potenz des Schleifenimpulses im Nenner} \end{array}} \quad (\text{B.5})$$

Dabei wird auch das Differential d^4k berücksichtigt. Ist $D \geq 0$, so ist das Integral divergent, für $D < 0$ konvergent. Dabei bedeutet $D = 0$ logarithmische Divergenz, $D = 1$ lineare Divergenz, $D = 2$ quadratische Divergenz usw.

B.2 Regularisierung

Wie kann das Divergenzverhalten mit analytischen Methoden untersucht werden? Die Beantwortung dieser Frage führt zum Begriff der „Regularisierung“. Kurz gesagt handelt es sich bei der Regularisierung [48], [49], [4] um ein mathematisches Verfahren zur Parametrisierung des Divergenzverhaltens und zur Abspaltung des divergenten Anteils. Die Divergenz des Integrals spielt sich dann ab, wenn der eingeführte Parameter gegen einen bestimmten Wert strebt, welcher von der verwendeten Methode der Regularisierung abhängt. Auf die verschiedenen Vorgehensweisen soll im Folgenden kurz eingegangen werden:

- 1.) Einführung eines Abschneideparameters (Cut-Offs)

Dabei handelt es sich um die einfachste Methode. Deren Anwendung vollzieht sich dadurch, dass man die obere Integrationsgrenze des Impulsintegrals abschneidet;



es wird also nur bis zu einem sogenannten Cut-Off Λ integriert. Diese Methode ist jedoch nicht lorentzinvariant und wird daher in der Praxis selten angewendet.

2.) Pauli-Villars-Regularisierung

Bei diesem Verfahren ersetzt man alle Propagatoren

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \text{ durch } \frac{1}{k^2 - m^2} - \sum_n \frac{C_n}{k^2 - \Lambda^2} \quad (\text{B.6})$$

wobei die Konstanten C_n so zu wählen sind, dass das Schleifenintegral konvergiert. Dieses Vorgehen muss zum Teil mehrere Male wiederholt werden, um die Konvergenz aller Integrale zu gewährleisten. Da von der Pauli-Villars-Regularisierung in dieser Arbeit kein Gebrauch gemacht wird, soll auf sie nicht näher eingegangen werden. Zum näheren Studium wird auf einschlägige Literatur [48], [49], [4] verwiesen.

3.) dimensionale Regularisierung:

Diese stellt die prominenteste Methode dar und wird meistens verwendet, da sie die Lorentzinvarianz nicht zerstört. Die Vorgehensweise ist wie folgt: Man macht eine Anleihe aus der Funktionentheorie und setzt die Dimensionalität des Feynmanintegrals auf die komplexe Ebene fort. Das Integral, welches in vier Dimensionen Schwierigkeiten bereitet, wird nun in $d \in \mathbb{C}$ Dimensionen betrachtet, wo es wohldefiniert ist. Dabei zerbricht sich niemand den Kopf darüber, wie man sich einen Raum mit einer nicht ganzzahligen (oder gar komplexen) Dimension vorzustellen hat, denn das Verfahren liefert keinerlei Anschauung, sondern ist „nur“ ein geschickter Rechenrick, um bei der Berechnung des Integrals die Divergenz in vier Dimensionen zunächst zu umgehen. Der nächste Schritt ist, den Parameter d als $d = 4 - 2\varepsilon$ zu schreiben. (In manchen Büchern und Papers wird auch die Konvention $d = 4 - \varepsilon$ verwendet, was jedoch prinzipiell nichts an dem Divergenzverhalten ändert.) Der Grenzübergang $\varepsilon \mapsto 0$ bringt einen dann in die vierdimensionale Welt zurück, in der die Divergenzen als Pole von Γ -Funktionen ersichtlich werden.

B.3 Renormierung

Der vorherige Abschnitt diente dazu, die Regularisierung kurz abzuhandeln, ein Verfahren, um das Divergenzverhalten von Feynmanintegralen zu parametrisieren und die divergenten von den endlichen Anteilen abzuspalten. Dadurch werden jedoch die Divergenzen keineswegs beseitigt, also besteht das ursprüngliche Problem weiterhin. Benötigt wird nun zusätzlich eine Methode, welche dafür sorgt, dass die divergenten Terme nicht mehr in den experimentell zugänglichen Größen wie Wirkungsquerschnitten, Zerfallsbreiten usw. auftauchen. Genau dies leistet die sogenannte Renormierung [48], [4]. Als Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen soll die Lagrangedichte der QED konsul-



tiert werden:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}F_{0,\mu\nu}F_0^{\mu\nu} - e_0\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_{0,\mu} \quad \text{mit } F_0^{\mu\nu} = \partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu \quad (\text{B.7})$$

Die Schwierigkeit mit den Divergenzen fußt in der Naivität, die in \mathcal{L} auftretenden Parameter (Masse m_0 , elektrische Ladung e_0) als experimentell messbare Größen zu interpretieren. Genau das stellt nämlich der entscheidende Knackpunkt dar. Diese Parameter sind als unphysikalisch und unbeobachtbar anzusehen; sie werden auch als „nackte“ Größen bezeichnet. Über die Renormierung werden die nackten Parameter so umdefiniert, dass sie in die physikalischen Parameter übergehen, was dadurch geschieht, dass man die divergenten Anteile in die nackten Parameter steckt.

Im Grunde genommen gibt es zwei in der Praxis gängige Methoden zur Durchführung der Renormierung, nämlich die sogenannte nackte Störungstheorie bzw. die renormierte Störungstheorie. Die nackte Störungstheorie soll nur im Rahmen der QED kurz angesprochen werden.

1.) Nackte Störungstheorie:

Beim ersten Verfahren wird die zu einem Diagramm gehörende Feynmanamplitude nach den nackten Feynmanregeln aufgestellt. Die nackten Feynmanregeln sind die Regeln, welche nackte Parameter m_0 , e_0 , usw. beinhalten. Die divergenten Terme, die bei gewissen Schleifenintegralen auftreten, werden identifiziert und in die nackten Parameter der Theorie gesteckt, was zu einer Umdefinition (Renormierung) dieser Parameter führt. Als Beispiel soll der Photonpropagator dienen. Die Summe aller ein-Teilchen-irreduziblen Korrekturen führt zum renormierten Propagator, welcher in der Form

$$\frac{Z_3 e_0^2 g_{\mu\nu}}{q^2} \quad \text{wobei } Z_3 = 1 + \delta_3 \quad \text{mit } \delta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n C_n \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (\text{B.8})$$

geschrieben werden kann. Z_3 ist eine Reihe in der elektromagnetischen Kopplungskonstanten α . Die divergenten Entwicklungskoeffizienten C_n sind Korrekturen höherer Ordnung. Zu beachten ist, dass es sich bei e_0 um die nackte Elementarladung handelt. Die divergente Konstante Z_3 steckt man nun in e_0 ; also wird die Ladung über $e_0 = \sqrt{Z_3}e$ multiplikativ renormiert. Der Photon-Propagator weist nach der Renormierung dieselbe Form auf wie in der Bornschen Näherung mit dem Unterschied, dass e_0 durch die renormierte Ladung e ersetzt wurde.

Bei komplizierten Einschleifenberechnungen hat diese Technik durchaus ihre Vorteile, jedoch ist sie bei einer höheren Anzahl von Schleifen nicht praktikabel durchführbar, womit sie in dieser Arbeit nicht verwendet wird. Interessanter für unsere Zwecke die renormierte Störungstheorie.

2.) Renormierte Störungstheorie:

Ausgangspunkt für die jetzigen Betrachtungen bildet die Lagrangedichte mit den



nackten Parametern m_0, e_0 und der nackten Wellenfunktion ψ_0 . Der Einfachheit halber sollen der Fermion- und Photonpropagator der QED betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
 \text{Bare propagator} &= \text{Feynman diagram with fermion line and self-energy loop} + \text{Feynman diagram with fermion line and photon loop} \\
 &+ \text{Feynman diagram with fermion line and photon self-energy loop} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Bare propagator} &= \text{Feynman diagram with photon loop} + \text{Feynman diagram with fermion loop} \\
 &+ \text{Feynman diagram with photon loop and fermion self-energy loop} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{B.10}$$

Summiert man jeweils alle ein-Teilchen-irreduziblen Korrekturen dieser beiden Propagatoren, so resultieren daraus Ausdrücke der folgenden Form:

$$\int d^4x \langle 0|T(\psi_0(x)\bar{\psi}_0(0))|0\rangle \exp(ipx) = \frac{iZ_2}{\not{p} - m}$$

wobei $Z_2 = 1 + \delta_2$ mit $\delta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n C_n^{(2)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$\tag{B.11}$$

$$\int d^4x \langle 0|T(A_0^\mu(x)A_0^\nu(0))|0\rangle \exp(ipx) = \frac{-iZ_3 g^{\mu\nu}}{q^2}$$

wobei $Z_3 = 1 + \delta_3$ mit $\delta_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n C_n^{(3)}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

$$\tag{B.12}$$

Um die Vorfaktoren Z_2 und Z_3 zu eliminieren und damit das Residuum der Propagatoren wieder auf 1 zu setzen, werden die Wellenfunktionen ψ_0 und A_0^μ renormiert

gemäß der Vorschrift $\psi_0 = \sqrt{Z_2}\psi$ und $A_0^\mu = \sqrt{Z_3}A^\mu$. Die Lagrangedichte geht dann über in:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = Z_2\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}Z_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e_0Z_2\sqrt{Z_3}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (\text{B.13})$$

An dieser Stelle ist es geschickt, \mathcal{L}_{QED} folgendermaßen aufzuspalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_C \text{ mit } \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \text{ und} \\ \mathcal{L}_C &= \bar{\psi}(i\delta_2\not{\partial} - \delta_m)\psi - \frac{1}{4}\delta_3F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\delta_1\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \text{ wobei} \\ \delta_1 &= \frac{e_0}{e}Z_2\sqrt{Z_3} - 1 \equiv Z_1 - 1, \delta_2 = Z_2 - 1, \delta_3 = Z_3 - 1, \delta_m = Z_2m_0 - m \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Der erste Anteil, der sich aus der freien und der wechselwirkenden Lagrangedichte \mathcal{L}_0 bzw. \mathcal{L}_I zusammensetzt, weist dieselbe Form wie die ursprüngliche Lagrangedichte auf mit dem Unterschied, dass die nackten Parameter bzw. Wellenfunktionen durch die renormierten ersetzt wurden. Im zweiten Teil stecken die divergenten Anteile δ_2, δ_3 , welche auch als Counterterme bezeichnet werden. Aus \mathcal{L}_0 und \mathcal{L}_I folgen die altbekannten Feynmanregeln der QED mit den renormierten Parametern anstelle der nackten. \mathcal{L}_C führt auf einen Satz neuer Feynmanregeln, nämlich den Countertermen. Da diese in Potenzen der Kopplungskonstanten unterdrückt sind, werden sie als Wechselwirkungsterme, also Vertizes, interpretiert. Um die Feynmanregeln dieser neuen Vertizes abzulesen, lässt man sie auf $\exp(-ipx)$ wirken, streicht die Felder weg (weil diese in die Propagatoren gesteckt werden) und schreibt einen zusätzlichen Faktor i davor.

B.3.1 Ein Beispiel aus der klassischen Elektrodynamik

Ein schönes und überschaubares Beispiel für die Renormierung liefert die klassische Elektrodynamik. Betrachtet wird eine Linienladung, die sich entlang der x -Achse von $-L$ bis L erstrecken soll. Deren räumliche Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\varrho(\vec{x}) = \sigma\delta(y)\delta(z)\theta(L-x)\theta(x+L) \quad (\text{B.15})$$

mit der Linienladungsdichte $\sigma = Q/(2L)$. Das Potential ergibt sich über die Lösung der Poissonschen Gleichung:

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\varrho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sigma \ln \left(\frac{L-x + \sqrt{(L-x)^2 + a^2}}{-L-x + \sqrt{(L+x)^2 + a^2}} \right) \quad (\text{B.16})$$



Interessant ist der Grenzwert des Potentials für $L \mapsto \infty$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{L \mapsto \infty} \phi(\vec{x}) &= \lim_{L \mapsto \infty} \sigma \ln \left(\frac{L - x + \sqrt{(L - x)^2 + a^2}}{-L - x + \sqrt{(L + x)^2 + a^2}} \right) = \\
 &= \lim_{L \mapsto \infty} \sigma \ln \left[L^2 \frac{\left(1 - \frac{x}{L} + \sqrt{\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 + \frac{a^2}{L^2}}\right) \left(1 + \frac{x}{L} + \sqrt{\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2 + \frac{a^2}{L^2}}\right)}{a^2} \right] = \\
 &= \lim_{L \mapsto \infty} \sigma \ln \left(L^2 \cdot \frac{4}{a^2} \right) = \lim_{L \mapsto \infty} \left(2\sigma \ln(L) + \sigma \ln \left(\frac{4}{a^2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Wird die Länge L der Linienladung unendlich groß, so strebt auch das Potential gegen unendlich, was unphysikalisch ist. Deshalb führt man die Renormierung des Potentials durch Subtraktion einer Konstanten $2\sigma \ln(L)$ durch:

$$\tilde{\phi}(\vec{x}) = \phi(\vec{x}) - 2\sigma \ln(L) \tag{B.18}$$

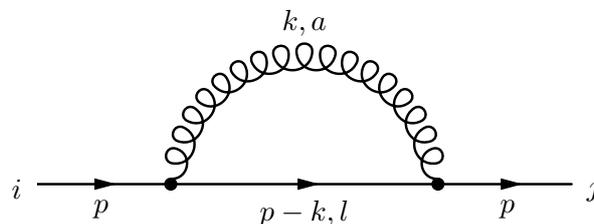
Dies ist möglich, da sich eine solche Verschiebung nicht auf Messgrößen auswirkt, weil immer nur Potentialdifferenzen gemessen werden. Damit bleibt das renormierte Potential $\tilde{\phi}(\vec{x})$ endlich für $L \mapsto \infty$:

$$\lim_{L \mapsto \infty} \tilde{\phi}(\vec{x}) = \sigma \ln \left(\frac{4}{a^2} \right) = \sigma \ln(4) - 2\sigma \ln(a) \tag{B.19}$$

Die Unendlichkeit wurde in eine absolute Verschiebung $2\sigma \ln(L)$ des Nullpunktes gesteckt, die zwar unendlich, aber nicht beobachtbar ist.

B.3.2 Beispiel: Herleitung des Massencounterterms in der QCD

Wir berechnen den Gluonbeitrag der Selbstenergie eines Quarks:



$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} (ig_s \gamma_\nu T_{il}^a) \frac{i[(\not{p} - \not{k}) + m]}{(p-k)^2 - m^2} (ig_s \gamma_\mu T_{lj}^a) \left(-i \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \right) = \\
&= -g_s^2 T_{il}^a T_{lj}^a \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \gamma_\nu \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \gamma_\mu \left(\frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Benötigt wird

$$\gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma_\mu g^{\mu\nu} = \gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu = dm \mathbf{1}_d + (2-d)(\not{p} - \not{k}) \tag{B.21}$$

und damit ist es möglich, die Integrale auszuwerten:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dm \mathbf{1}_d + (2-d)\not{p}}{k^2[(p-k)^2 - m^2]} = \\
&= \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dm \mathbf{1}_d + (2-d)\not{p}}{(1-x)k^2 + x[(p-k)^2 - m^2]} = \\
&= \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dm \mathbf{1}_d + (2-d)\not{p}}{k^2 - xk^2 + xp^2 - 2pkx + k^2x - m^2x} = \\
&= \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{dm \mathbf{1}_d + (2-d)\not{p}}{k^2 - 2kpx + (p^2 - m^2)x} = \\
&= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx \frac{dm \mathbf{1}_d + (2-d)\not{p}}{[p^2x^2 - (p^2 - m^2)x]^{2-\frac{d}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Für das zweite Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)\not{k}}{k^2[(p-k)^2 - m^2]} = -\frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \times \\
&\times \int_0^1 dx \frac{(2-d)\not{p}x}{[p^2x^2 - (p^2 - m^2)x]^{2-\frac{d}{2}}}
\end{aligned} \tag{B.23}$$

und folglich:

$$\mathcal{M} = -g_s^2 C_F \delta_{ij} \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx \frac{dm \mathbf{1}_d + (2-d)\not{p}(1-x)}{[p^2x^2 - (p^2 - m^2)x]^{2-\frac{d}{2}}} \tag{B.24}$$



An dieser Stelle wird $d = 4 - \varepsilon$ gesetzt und nach ε entwickelt. Dabei werden Terme $\mathcal{O}(\varepsilon)$ benötigt:

$$\mathcal{M} = -g_s^2 C_F \delta_{ij} \frac{i}{(16\pi^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \frac{(4-2\varepsilon)m\mathbf{1}_d + (2\varepsilon-2)\not{p}(1-x)}{[p^2 x^2 - (p^2 - m^2)x]^\varepsilon} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \frac{(4-2\varepsilon)m\mathbf{1}_d + (2\varepsilon-2)\not{p}(1-x)}{[p^2 x^2 - (p^2 - m^2)x]^\varepsilon} = \\ &= \int_0^1 dx \left\{ -2\not{p}(1-x) + 4m + (2\not{p}(1-x) - 2m + (-2\not{p}(1-x) + 4m) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\ln(p^2 x) + \ln\left(x - \frac{p^2 - m^2}{p^2}\right) \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ &= \int_0^1 dx [A'm + B'(\not{p} - m)] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Die skalaren Funktionen A' und B' sind bis zu $\mathcal{O}(\varepsilon)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} A' &= m \left\{ 3 + \varepsilon \left[-7 + \frac{m^2}{p^2} - \frac{m^2}{p^2} \left(\frac{p^2}{m^2} - 4 \right) \ln(m^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(3 - \frac{4m^2}{p^2} + \frac{m^4}{p^4} \right) \ln(m^2 - p^2) \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$B' = (\not{p} - m) \left\{ -1 + \varepsilon \left[3 + \frac{m^2}{p^2} - \frac{m^4}{p^4} \ln(m^2) + \left(\frac{m^4}{p^4} - 1 \right) \ln(m^2 - p^2) \right] \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (\text{B.28})$$

Die Durchführung der Integration liefert:

$$\Sigma_{ij}(\not{p}, m) = \delta_{ij} [Am + B(\not{p} - m)] \quad (\text{B.29})$$

$$A = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[3 \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right) + 7 - \frac{m^2}{p^2} + \left(-3 + \frac{4m^2}{p^2} - \frac{m^4}{p^2} \right) \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{B.30})$$

$$B = -C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 3 - \frac{m^2}{p^2} + \left(-\frac{m^4}{p^4} + 1 \right) \ln\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2}\right) \right] \quad (\text{B.31})$$

Der Propagator muss über die Renormierungskonstante $Z_2 \equiv 1 + \alpha_s C_2 + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$ wie folgt renormiert werden:

$$S_r(k, m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_2^{-1} S_0(k, m_0, \varepsilon)$$

$$\text{mit } S_0(k, m_0, \varepsilon) = \frac{1}{\not{k} - m_0 - \Sigma(k, \varepsilon)} = \frac{1}{\not{k} - m_0 - (A m_0 + (\not{k} - m_0) B)}$$
(B.32)

Um nun die Renormierungskonstanten zu bestimmen, schreibt man als erstes den Nenner des Propagators geschickt um:

$$S_r^{-1}(k, m) = Z_2 [1 - B(m_0)] \left(\not{k} - m_0 \left(1 + \frac{A(m_0)}{1 - B(m_0)} \right) \right)$$
(B.33)

Zur Absorbtion der Pole ist nun zunächst Z_2 geeignet zu wählen:

$$Z_2 [1 - B] = (1 + \alpha_s C_2 + \mathcal{O}(\alpha_s^2)) [1 - B] = 1 + \alpha_s C_2 - B + \alpha_s C_2 B + \mathcal{O}(\alpha_s^2) =$$

$$= 1 + \alpha_s C_2 - B + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$
(B.34)

Verlangt wird, dass der Term $\sim \alpha_s$, also $\alpha_s C_2 - B$ endlich ist, woraus sich

$$\boxed{C_2 = -\frac{C_F}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon}}$$
(B.35)

ergibt. Die Massenrenormierungskonstante wird aus

$$m_0 = Z_m m_r = (1 + \alpha_s C_m + \mathcal{O}(\alpha_s^2)) m_r \text{ und } m_0^2 = (1 + \alpha_s C_m + \mathcal{O}(\alpha_s^2))^2 m_r^2 = m_r^2 (1 + \mathcal{O}(\alpha_s))$$
(B.36)

bestimmt wie folgt:

$$m_0 Z_2 [1 - B + A] = Z_2 [Z_m m_r] (1 - B + A) =$$

$$= (1 + \alpha_s C_2 + \mathcal{O}(\alpha_s^2)) m_r (1 + \alpha_s C_m + \mathcal{O}(\alpha_s^2)) [1 - B + A] =$$

$$= [1 + A - B + \alpha_s (C_2 + C_m)] m_r + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$$
(B.37)

Man fordert hier ebenso, dass der Term $\sim \alpha_s$, also $\alpha_s (C_2 + C_m)$, endlich ist, woraus schlussendlich der Koeffizient $\sim \alpha_s$ der Massenrenormierungskonstanten Z_m folgt:

$$\boxed{C_m = -\frac{C_F}{4\pi} \frac{3}{\varepsilon}}$$
(B.38)



B.4 Die Berechnung von Schleifenintegralen

Die Berechnung von Einschleifenintegralen stellt heutzutage keine Herausforderung mehr dar, wurden die ersten Berechnungen von solchen Integralen doch schon vor Jahrzehnten durchgeführt. Für die allgemeinsten Fälle existieren inzwischen geschlossene Ausdrücke, wenn diese auch bisweilen sehr kompliziert sind. Im Falle von Zweischleifenintegralen sind bisher die Zweipunktfunktionen sehr gut unter Kontrolle, was praktikable Berechnungen im elektroschwachen und supersymmetrischen Sektor erlaubt. An der Berechnung von Drei- und Vierpunktfunktionen auf Zweischleifenniveau wird aktuell gearbeitet.

Für Dreischleifenintegrale mit mehreren Skalen, wie sie in typischen Problemen in der theoretischen Teilchenphysik auftreten, lassen sich bis jetzt keine geschlossenen Ausdrücke angeben. Deshalb teilt man diese in zwei Klassen ein:

- 1.) masselose Integrale vom Propagatortyp mit einem externen Impuls $\neq 0$:

$$I(n_1, \dots, n_\alpha) = \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{P(q, k_1, k_2, k_3)}{(p_1^2)^{n_1} \cdot \dots \cdot (p_\alpha^2)^{n_\alpha}} \quad (\text{B.39})$$

- 2.) massive Tadpole-Diagramme ohne externe Impulse, deren innere Linien masselos oder massebehaftet sind mit einer einheitlichen Masse m :

$$I(n_1, \dots, n_\alpha) = \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{P(k_1, k_2, k_3)}{(m_1^2 + p_1^2)^{n_1} \cdot \dots \cdot (m_\alpha^2 + p_\alpha^2)^{n_\alpha}} \quad \text{mit}$$

$$m_i = \begin{cases} 0 \\ m \quad \text{falls } \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

Grundlage für die Berechnungen von Schleifenintegralen stellt die Beziehung

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial p_\mu} f(p, \dots) = 0 \quad (\text{B.41})$$

dar, welche im d -dimensionalen Minkowskiraum gilt. Mittels dieser Formel ist es möglich, die Potenz der im Nenner auftretenden Propagatoren $(m_i^2 + p_i^2)$ so lange zu verringern, bis diese verschwindet, was auf ein einfacheres Integral führt. Integrale, die sich auf diese Weise nicht weiter reduzieren lassen, werden als Masterintegrale bezeichnet. Der Vorteil ist, dass diese Masterintegrale nur einmal berechnet werden müssen und einem dann das Ergebnis für die Auswertung anderer Integrale zur Verfügung steht.

Die eben beschriebene Methode hat sich bewährt für masselose Integrale vom Propagatortyp und massive Tadpole-Integrale.

B.4.1 Die Topologie eines Feynmangraphen

Oft werden Schleifenintegrale als Graphen mit einer bestimmten Topologie dargestellt. Die Topologie eines solchen Graphens – nicht der Graph selbst – steht dann stellvertretend für das jeweilige Integral, welchem der Graph entspricht. Nur die topologische Struktur ist also wichtig, d.h. wie viele Schleifen, ein- bzw. auslaufende Linien und innere (massive) Linien der Graph besitzt. Die Topologie ändert sich nicht unter sogenannten Homöomorphismen. Das sind bijektive, stetige Abbildungen, deren Umkehrabbildung auch stetig ist. In diese Klasse von Abbildungen gehört beispielsweise das Dehnen, Stauchen und Verzerren.

Ist das Interesse nur auf die Topologie gerichtet, so werden die Linien eines Graphen als Kanten und die Verknüpfungspunkte als Knoten bezeichnet. Erst wenn man ein bestimmtes physikalisches Modell zugrunde legt und den Linien Teilchen zuordnet, nennt man die inneren Linien Propagatoren und die Knoten Vertizes.

Genau von der Sprechweise wird in dieser Diplomarbeit Gebrauch gemacht.





C Form

C.1 Einführung

Form ist kein Computeralgebrasystem im eigentlichen Sinne, wie es beispielsweise **Maple** oder **Mathematica** sind. Solche Systeme sind mit einer benutzerfreundlichen graphischen Oberfläche ausgestattet und stellen mannigfaltige komplexe mathematische Methoden zur Verfügung, die es dem Anwender erlauben, Funktionen zu differenzieren bzw. zu integrieren, Differentialgleichungen zu lösen oder das Schaubild einer Funktion zu erstellen. Im Gegensatz dazu ist **Form** eher als Programmiersprache aufzufassen, beherrscht es doch „nur“ die Grundrechenarten, Tensoralgebra und gewisse andere Anweisungen, über die beispielsweise Terme ab einer Potenz bezüglich einer bestimmten Variablen weggelassen werden können. Jedoch genau der geringe und spezialisierte Funktionsumfang macht es zu einem mächtigen und schnellen Werkzeug für die umfangreichen Berechnungen, wie sie in der theoretischen Teilchenphysik auf der Tagesordnung stehen.

Ein großer Vorteil von **Form** ist, dass es keine Fließkommaarithmetik benutzt, sondern intern mit Brüchen arbeitet, womit Rundungsfehler vermieden werden können. Dies ist natürlich bei der Renormierung besonders wichtig. Würden nämlich nach derselbigen noch Pole in Kombination mit kleinen Koeffizienten auftreten, also beispielsweise $10^{-5}\epsilon^{-1}$, so wüsste man nicht, ob die Ursache dieses Terms ein Rundungsfehler oder ein grundsätzlicher Fehler in der Renormierungsprozedur ist.

C.2 Gliederung eines Form-Programmes

Strukturell besteht ein **Form**-Programm aus sogenannten Modulen. Dabei handelt es sich um Teile des Programms, die vom Compiler sukzessive, unabhängig voneinander bearbeitet werden. Ist das Ende eines Moduls erreicht, wird dieses kompiliert und danach ausgeführt. Nach Abarbeitung aller Anweisungen für jeden Ausdruck, fasst **Form** alle Terme soweit wie möglich zusammen. Nachfolgend wird der Puffer des Compilers geleert und mit dem nächsten Modul fortgefahren.

Ein Modul selbst ist gegliedert in:

- 1.) Deklarationen (von Datentypen wie **symbols**, **vectors**)
- 2.) Spezifikationen (Festlegung, ob und wie Statistiken ausgegeben werden)



- 3.) Definitionen (lokaler bzw. globaler Variablen)
- 4.) Ausführbare Anweisungen (Ersetzungsregeln, Berechnung von Spuren)
- 5.) Ausgabe (Ausklammern)

Zu Beginn eines **Form**-Programms steht die Deklaration von Variablen. **Form** unterstützt verschiedene Datentypen, die auf mathematische bzw. physikalische Problemstellungen zugeschnitten sind, wie beispielsweise

- **symbols** für skalare Größen (Massen, Energien, usw.)
- **vectors** für Vektoren (Viererimpuls)
- **tensors** [**ctensors**] für nicht kommutierende [kommutierende] Tensoren (Levi-Civita-Symbol)
- **functions** [**cfunctions**] für nicht kommutierende [kommutierende] Funktionen oder (Sinus, Kosinus)
- **indices** für Indizes von Vektoren und Tensoren.

Nach der Deklaration sind die umzuformenden Ausdrücke als lokale bzw. globale Variablen festzulegen. Im Gegensatz zur einer globalen Variablen ist eine lokale nur innerhalb des aktuellen Moduls aktiv und der ihr zugeordnete Ausdruck wird nur in diesem Modul bearbeitet.

Bei einer Berechnung werden Terme nach und nach erzeugt und im kleinen Puffer temporär ausgelagert. Sobald dessen Kapazität erschöpft ist, vereinfacht **Form** den Ausdruck und gibt eine Statistik aus, sofern dies vom Nutzer erwünscht. Danach wird der resultierende Ausdruck als Paket an den großen Puffer weitergeleitet, bis dort kein Platz mehr vorhanden ist, wonach **Form** alle Pakete kombiniert und den gesamten Ausdruck in einer externen Datei speichert. Nach Ende der Rechnungen werden die Inhalte dieser Datei nochmals zusammengefasst und schließlich ausgegeben.

C.3 Funktionsweise

Das grundlegende Konzept von **Form** besteht in der Anwendung sogenannter Ersetzungsregeln. Ein Ausdruck wird umgeformt und vereinfacht, indem sukzessive Terme durch andere Terme ersetzt werden. Diese Regeln sind vom Anwender innerhalb des **Form**-Programmes anzugeben, denn **Form** führt im Gegensatz zu **Mathematica** oder **Maple** nur die Umformungen durch, die man ihm beibringt – abgesehen von Grundrechenarten, elementaren Potenzgesetzen, usw. Zur Erläuterung soll folgendes Beispiel dienen:

```
symbols x;
local term = sin_(x)^2 + cos_(x)^2;
identify cos_(x)^2 = 1 - sin_(x)^2;
print;
```



```
.sort
.end
```

Dieses kleine Programm beginnt mit der Deklaration des Arguments x als `symbol`. In der zweiten Zeile wird eine lokale Variable mit dem Namen `term` definiert und ihr der Ausdruck $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ zugeordnet. `sin_` und `cos_` müssen nicht als `cfunctions` deklariert werden, da diese Platzhalter bereits von `Form` bereitgestellt werden, wie bereits erwähnt wurde. Obwohl das Ergebnis, nämlich 1, natürlich bekannt ist, wird `Form` ohne Zutun des Nutzers den Ausdruck so stehen lassen und nicht weiter vereinfachen. Deshalb muss man `Form` in der dritten Zeile die notwendige Ersetzungsregel über das Schlüsselwort `identify` beibringen. Daraufhin wird $\cos^2(x)$ durch $1 - \sin^2(x)$ ersetzt und das richtige Ergebnis mittels des Schlüsselwortes `print` ausgegeben. `.sort` schließt das aktuelle Modul ab und `.end` beendet das Programm.

C.3.1 Der Präprozessor

Ein wichtiger Bestandteil von `Form` ist der sogenannte Präprozessor. Dieser liest das Programm ein und bearbeitet die Eingabe für den `Form`-internen Compiler weiter. Der Präprozessor selbst manipuliert die vom Nutzer definierten Ausdrücke nicht, sondern ändert nur an den Stellen, wo Präprozessorinstruktionen auftreten, den Quellcode dementsprechend ab. Präprozessorinstruktionen werden im Gegensatz zu den Anweisungen sofort beim Einlesen des Programms bearbeitet. `Form` unterstützt über solche Instruktionen Schleifen, nämlich beispielsweise über die Konstruktion

```
#do Zähler = untere Grenze, obere Grenze
  Anweisungen
#enddo
```

und bedingte Anweisungen von der Gestalt

```
#if ('Variable' == "Zeichenkette1")
  Anweisung1;
#elseif ('Variable' == "Zeichenkette2")
  Anweisung2;
#else
  Anweisung3;
#endif
```

bzw.

```
#switch 'Variable'
#case Wert1
  Anweisung1;
#case Wert2
  Anweisung2;
#break
```



```
#endswitch
```

analog zur Programmiersprache C. Trifft der Präprozessor beispielsweise auf eine Schleife der Form

```
#for 'i' = 1,2
    tracen,'i';
#enddo
```

so macht er nichts anderes, als diese durch den Befehlsablauf

```
tracen,1;
tracen,2;
```

zu ersetzen. Eine andere Aufgabe des Präprozessors besteht darin, die für den Compiler nicht wichtigen Nutzerkommentare (welche über die Instruktion `#message` eingegeben werden) sowie unnötige Leerzeichen zu entfernen.

Weiterhin werden Namen für mathematische Funktionen zur Verfügung gestellt (zum Beispiel `sin_` für die Sinusfunktion oder `ln_` für den natürlichen Logarithmus). Diese Bezeichner dienen jedoch nur als Platzhalter für die entsprechende Funktion, etwaige Rechenregeln muss man `Form` mittels Ersetzungsregeln selbst beibringen. Ebenso werden keine Funktionswerte bezüglich eines bestimmten Arguments berechnet. Das wäre zum Großteil auch nicht möglich, da `Form` nur rationale Zahlen kennt.

C.4 Anwendung auf Probleme in der phänomenologischen Teilchenphysik

Wie schon erwähnt wurde, ist eine große Menge von Feynmanintegralen in vier Dimensionen divergent. Um diese Divergenzen zu erfassen bzw. zu parametrisieren, muss man zunächst in d Dimensionen rechnen, also auch mit den entsprechenden d -dimensionalen γ -Matrizen oder den metrischen Tensor $g^{\mu\nu}$. (Diese sogenannte dimensionale Regularisierung wurde in Kapitel B.2 auf Seite 144 besprochen.) Deshalb ist es für Berechnungen in der theoretischen Teilchenphysik essentiell, über ein Programm zu verfügen, welches mit diesen Objekten in einer beliebigen Dimensionen umgehen kann. Genau das leistet `Form`.

Darüber hinaus ist bekanntlich bei geschlossenen Fermionschleifen die Spur über das Produkt der beteiligten Propagatoren zu bilden. Mit `Form` können solche Spuren über die Anweisung `trace4` in 4 bzw. `tracen` in d Dimensionen schnell berechnet werden.



C.5 Schoonschip – der Vorgänger von Form

Schoonschip wurde von Veltman im Jahre 1964 am CERN entwickelt. Es handelt sich dabei um ein Programm, das algebraische Manipulationen an sehr umfangreichen Ausdrücken durchführen kann, womit zum ersten mal umfangreiche Rechnungen in der theoretischen Teilchenphysik mit Hilfe des Computers möglich waren. Veltman führte mit **Schoonschip** damals neue Konzepte ein, die in ähnlichen Programmen (beispielsweise **Form**), die Jahre danach erschienen, übernommen wurden. Geschrieben wurde die Anwendung in Maschinensprache. Sie ist damit überaus schnell und benötigt wenig Speicherplatz. Leider bringt sie nicht so viele eingebaute Funktionen mit wie **Form**, so dass der Nutzer einiges selbst implementieren muss. Ein großer Nachteil gegenüber **Form** ist, dass es numerisch rechnet, womit sich Rundungsfehler im Endergebnis nicht vermeiden lassen.





D Einführung des Programmpakets Qgraf, Exp, Matad/Mincer

D.1 Qgraf

Bevor man überhaupt mit phänomenologischen Berechnungen loslegen kann, sind Feynmandiagramme notwendig, die den zu betrachtenden Prozess feldtheoretisch beschreiben. Auf Baumgraphenniveau bzw. im Ein- und Zweischleifenfalle mit der QCD als zugrundeliegende Theorie lassen sich alle benötigten Diagramme noch manuell aufzeichnen. Geht man jedoch in der Störungstheorie zu hohen Ordnungen in der Kopplungskonstanten über, so ist es keine Seltenheit, dass zu einem vorgegebenem Prozess mehrere Hundert oder sogar Tausend Diagramme existieren, was die Überlegungen von Hand erschwert bzw. unmöglich macht. In solchen Fällen ist man auf ein Computerprogramm angewiesen, das einem diese Arbeit abnimmt und alle Diagramme automatisch generiert. Das im Rahmen dieser Diplomarbeit verwendete Programm heißt **Qgraf** [8]. Dabei handelt es sich um ein **Fortran**-Programm, dessen Vorteile vor allem in seiner Schnelligkeit und Stabilität begründet sind.

In einer sogenannten Modelldatei sind die Propagatoren und Vertizes aller Teilchen der Theorie, die man betrachtet (beispielsweise der QCD), aufzulisten. Es stellt kein Problem dar, diese Datei auf ein bestimmtes Modell anzupassen, was **Qgraf** sehr interessant macht für Feldtheorien jenseits des Standardmodells wie beispielsweise Supersymmetrie oder andere exotische Modelle der Elementarteilchenphysik. Unter der Angabe von topologischen Informationen, also der Anzahl von ein- bzw. auslaufenden Teilchen und der Schleifenzahl werden alle Diagramme mit Symmetriefaktor und Vorzeichen erzeugt. In seltensten Fällen, nämlich bei bestimmten zugrundeliegenden Theorien, kann es vorkommen, dass einige Diagramme nicht generiert werden, was jedoch bei den hier betrachteten Prozessen nicht der Fall war. Die Ausgabe der Diagramme erfolgt nicht graphisch, sondern in Form einer Textdatei, welche zur Verwendung von anderen Programmen (wie zum Beispiel **Exp**) weiterverarbeitet werden kann.

D.1.1 Die Modell- und die Stildatei

In der Modelldatei sind zuerst die Propagatoren und danach die Vertizes festzulegen. Propagatoren werden in der Form [**<Feld1>**,**<Feld2>**,**Vorzeichen(Optional)**] eingegeben. (**Feld1** beschreibe das Teilchen und **Feld2** das assoziierte Antiteilchen.) Über das



Vorzeichen legt man die Statistik der Teilchen fest. Ein Pluszeichen steht für kommutierende Felder und ein Minuszeichen für antikommutierende. Zusätzlich werden Optionen zur Verfügung gestellt, welche die Erzeugung von gewissen Diagrammen – beispielsweise solchen mit Tadpoles (\mathfrak{t}) oder Propagatoren (\mathfrak{p}) bestimmter Felder – verhindert.

Mit Propagatoren allein kann man noch keine interessante Feldtheorie betreiben, es werden also zusätzlich Vertizes benötigt. Vertizes vom Grad n muss man über ein Schema der Gestalt [$\langle\text{Feld1}\rangle$, $\langle\text{Feld2}\rangle$, ..., $\langle\text{Feldn}\rangle$] angeben. Dabei ist es wesentlich, dass die Reihenfolge der Fermionfelder konsistent mit der entsprechenden Feynmanregel ist.

Über eine Datei mit der Endung `.sty` – der sogenannten Stildatei – lässt sich die Form, wie `Qgraf` die Diagramme ausgibt, manipulieren. Dies ist sehr hilfreich, weil sich die Ausgabe auf diese Weise so verändern lässt, dass andere Programme damit umgehen können. Im Unterkapitel über `Exp` soll darauf kurz eingegangen werden.

D.1.2 Spezifikation des Problems (Topologie)

Sind Modell- und Stildatei vorhanden, fehlt `Qgraf` schließlich noch die Datei, welche sich auf das interessierende Problem bezieht. Diese soll die topologischen Informationen der Problemstellung enthalten. Die ein- und auslaufenden Felder werden angegeben über `in = Feld1, Feld2, ...`; bzw. `out = Feld3, Feld4, ...`; Es ist möglich, dass man sowohl die Impulse der externen Felder als auch die Schleifenimpulse selbst angibt. Tut man dies nicht, so legt `Qgraf` diese fest und berechnet die sonstigen unter Berücksichtigung der Viererimpulserhaltung an jedem Vertex. Über den Befehl `loops` wird die Anzahl der Schleifen spezifiziert. Zuletzt lassen sich noch mittels `options` zusätzliche Bedingungen angeben, um nur Diagramme mit bestimmten Eigenschaften zu generieren. Beispielsweise erzeugt `options = onepi` ausschließlich ein-Teilchen-irreduzible Diagramme oder `options = nosigma` nur Diagramme ohne Selbstenergiebeiträge.

D.2 Q2E und Exp

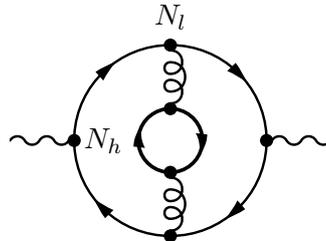
D.2.1 Q2E

Q2E [9] ist ein C++-Programm, das als Schnittstelle zwischen `Qgraf` und `Exp` [9] fungiert. Um Q2E überhaupt verwenden zu können, muss die Ausgabe von `Qgraf` bereits über die Stildatei `Q2E.sty` erzeugt worden sein. Danach wandelt Q2E die von `Qgraf` erstellte Datei um, woraus zwei neue Dateien hervorgehen, nämlich eine, in welcher alle Diagramme in einer von `Exp` lesbaren Form gespeichert sind und eine zweite mit topologischen Informationen dieser Diagramme, die von `Exp` weiterverarbeitet werden können.

Für die Ausführung von Q2E ist eine Konfigurationsdatei notwendig. Über diese lassen sich den Feldern Massen zuordnen. Außerdem sind die charakteristischen physikalischen



Skalen des Problems (also Massen und externe Impulse) anzugeben und zwar in der Reihenfolge ihrer Gewichtung. Als überaus sinnvoll erweist sich die Möglichkeit, jeder Fermionschleife ein Kennzeichen zuzuordnen. Natürlich ist es erforderlich, diese Kennzeichen für massive bzw. masselose Fermionen unterschiedlich zu wählen. Zur Veranschaulichung soll folgendes Diagramm dienen:



Das Fermion, welches in der äußeren Schleife umläuft, sei masselos und das in der inneren Schleife massiv. Betrachten wir eine Theorie mit N_l leichten und N_h schweren Fermionen, so gibt es $N_l \cdot N_h$ Diagramme dieser Gestalt, obwohl es von `Qgraf` nur einmal erzeugt wird. Also ist dessen Ergebnis mit $N_l \cdot N_h$ zu multiplizieren. Der Vorteil dieser Herangehensweise liegt praktisch auf der Hand. Erstens ist das Endergebnis allgemeingültig für eine beliebige Theorie mit N_l leichten und N_h schweren Fermionen. Zweitens lassen sich Terme mit einem solchen Vorfaktor den Diagrammen zuordnen, die Fermionschleifen enthalten, was die Fehlersuche manchmal erleichtern kann. Sind diese Terme nämlich falsch, so lässt sich vermuten, bei welcher Klasse von Graphen der Fehler möglicherweise liegt.

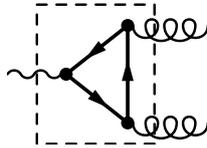
D.2.2 Exp

In Kapitel 3.2, Seite 17 wurde gezeigt, wie man bei der asymptotischen Entwicklung für große Massen alle notwendigen Subgraphen eines Diagramms findet. Diese Methodik funktioniert immer, sofern man die Entwicklung von Hand macht. Leider lässt sie sich jedoch in algorithmischer Form innerhalb eines Computerprogramms nicht in diesem Sinne umsetzen. Hierbei muss man anders vorgehen, wie im Folgenden erklärt wird.

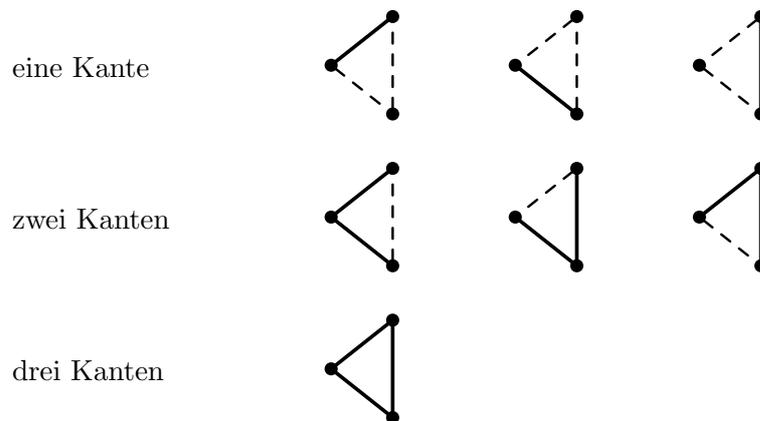
D.2.2.1 Suche nach Subgraphen innerhalb eines Diagramms

Eigentlich stellt die Identifikation von Subgraphen nichts anderes dar, als die Suche aller möglichen Kombinationen von Kanten des zugrundeliegenden Diagramms. Die Suche dieser Subgraphen wurde in `Exp` [10, 9] über einen sogenannten Backtracking-Algorithmus realisiert. Die rekursive Funktion, welche das ganze leistet, heißt `SearchSubgraph`. Diese tut nichts anderes, als sukzessive alle Möglichkeiten durchzuspielen, einen Subgraphen aus einer Kombination von Kanten aufzubauen. Die Anzahl der Kanten, aus denen die

Subgraphen zusammengesetzt sind, läuft von einer bis zur Anzahl der Kanten des gesamten Diagramms. Zur Illustration soll folgendes Beispiel einer massiven Dreipunktfunktion dienen:



Das für die asymptotische Entwicklung im Grenzfall großer Masse benötigte Subgraph ist das Dreieck im Kästchen bestehend aus massiven Linien.



Exp erzeugt alle möglichen Subgraphen, nämlich die mit einer, zwei oder drei Kanten. Für die asymptotische Entwicklung ist jedoch nur der letzte Subgraph von Bedeutung, da nur dieser alle massiven Linien enthält. Die restlichen sind für die Entwicklung uninteressant und werden damit verworfen.

Von der Funktion `SearchSubgraph` werden also alle Subgraphen gefunden, bestehend aus einer, zwei oder drei Linien. Die meisten werden für die asymptotische Entwicklung nicht benötigt, in diesem Falle nur der letzte. Dafür gibt es zwei Gründe. Wie aus Kapitel [?] bekannt ist, müssen erstens der Subgraph alle massiven Linien enthalten und zweitens muss dieser asymptotisch irreduzibel sein, was bei den ersten sechs Fällen nicht gewährleistet ist. Deshalb wird innerhalb von `SearchSubgraph` über eine bedingte Anweisung eine Funktion `CorrectSubgraph` aufgerufen, welche diese Eigenschaften überprüft. Liefert `CorrectSubgraph` den Rückgabewert `true`, so ist eine weitere Funktion an der Reihe, ihre Aufgabe durchzuführen, nämlich `TreatSubgraph`. (Für obiges Beispiel wird `TreatSubgraph` nur für den letzten Subgraphen aufgerufen.) Was macht nun diese Funktion?

D.2.2.2 Zuordnung der Impulse

Besitzt ein Graph bzw. Subgraph l Schleifen, so sind diesem l Schleifenimpulse zuzuordnen. Mit der Funktion `DistributeMomenta` verteilt `Exp` die Impulse auf jede erdenkliche Art über alle Linien. Für jede dieser Möglichkeiten lässt unter Berücksichtigung der Viererimpulserhaltung an jedem Vertex ein lineares Gleichungssystem für die Schleifenimpulse erzeugen, welches unter Zuhilfenahme des Gauß-Algorithmus gelöst wird. Besitzt das System keine Lösung, so wurden zwei oder mehrere Integrationsimpulse einer Schleife zugeordnet, womit die zugehörige Impulsverteilung ausscheidet. Berücksichtigt wird nur eine Verteilung, für welche das Gleichungssystem eine Lösung hergibt.

Ist dieser Arbeitsschritt erledigt, so werden über die Funktion `SetExpansion` die kleinen Skalen für die Entwicklung markiert, wobei `CheckExpansions` überprüft, ob pro Propagator mindestens eine Skala vorhanden ist, nach der nicht entwickelt wird. Danach fasst `Exp` alle Linien mit demselben Schleifenimpuls zu einer Gruppe zusammen.

D.2.2.3 Abbildung auf Topologien

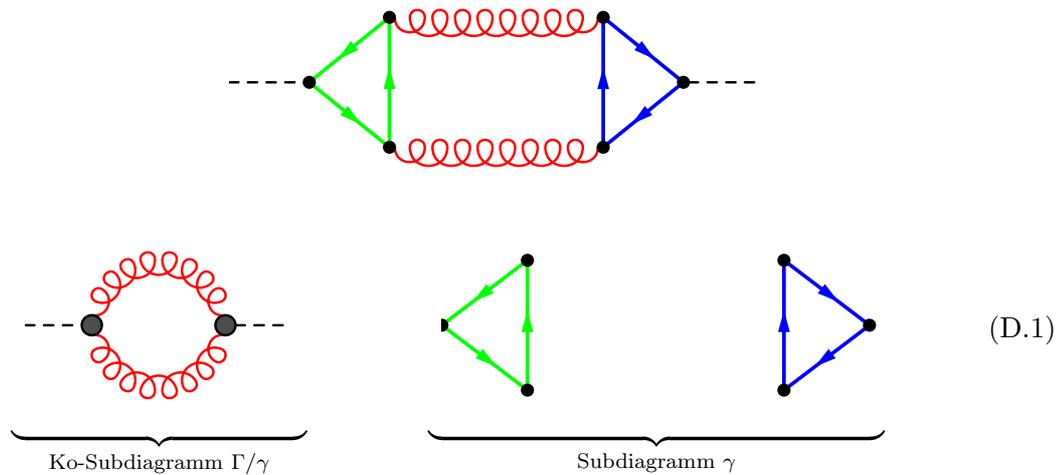
Jede Integration entspricht einer bestimmten Topologie. Vom Nutzer bereitgestellt werden die sogenannten Zieltopologien, mit denen `Matad` bzw. `Mincer` umgehen kann. (Zur weiteren Erläuterung dienen die nächsten beiden Abschnitte.) Deshalb ist es notwendig, dass alle Subgraphen auf solche Zieltopologien abgebildet werden können. Ist das nicht möglich, so stellt sich das zugrundeliegende Problem mittels dieser Programme als unlösbar heraus. Ein Beispiel hierzu findet sich in Kapitel [?].

Bei einer Abbildung eines Subgraphen auf eine Topologie werden alle Massen, nach denen entwickelt wird, bzw. die zu einer anderen Gruppe gehören, ignoriert. Topologien, welche sich in der Anzahl der Schleifen bzw. der Massen vom betrachteten Subdiagramm unterscheiden, werden sofort ausgeschlossen. Bei den restlichen vergleicht `Exp` die Impulsverteilung innerhalb des Subdiagramms mit allen möglichen Verteilungen in der Zieltopologie, welche mittels der Funktion `DistributeMomenta2` berechnet werden. Es ist wesentlich, dass Position und Namen der externen Impulse auf jeden Fall übereinstimmen. Über `FindMapping` werden alle externen und Integrationsimpulse abgebildet und über `TryMapOfLine` erfolgt rekursiv die Abbildung eines Impulses der Zieltopologie auf die Quelltopologie in beiden Richtungen. Schließlich überprüft `Exp` die Massenverteilung.

D.2.3 Ausgabe von Exp (auf dem Bildschirm)

Wie `Exp` die erstellten Daten ausgibt (sei es auf dem Bildschirm oder in Form der Quelldatei) soll an einem Beispiel veranschaulicht werden. Dazu wird das in Kapitel 3.2 schon betrachtete Dreischleifendiagramm nochmal herangezogen:





Nach dem Erstellen eines Subdiagramms (und des assoziierten Ko-Subdiagramms) gibt Exp ein Schema folgender Form auf dem Bildschirm aus:

```

diagram : d311  subdiagram : 1
Q1 in : 1 ; out : 2

p1 : 3,1 M1 :: S 1 Q1 : 0   L0 : 1 L1 : 0 L2 : 0   Grp 2 . tad11,  p1
p2 : 1,4 M1 :: S 1 Q1 : 1 e L0 : 1 L1 : 0 L2 : 0   Grp 2 . tad11,  p1
p3 : 5,2 M1 :: S 1 Q1 : 0   L0 : 0 L1 : 1 L2 : 0   Grp 3 . tad11,  p1
p4 : 2,6 M1 :: S 1 Q1 : -1 e L0 : 0 L1 : 1 L2 : 0   Grp 3 . tad11,  p1
p5 : 4,3 M1 :: S 1 Q1 : 0   L0 : 1 L1 : 0 L2 : -1 e Grp 2 . tad11,  p1
p8 : 6,5 M1 :: S 1 Q1 : 0   L0 : 0 L1 : 1 L2 : 1 e Grp 3 . tad11,  p1

p6 : 5,3      ::   1 Q1 : 0   L0 : 0 L1 : 0 L2 : 1   Grp 1 . inpl1, -p1
p7 : 6,4      ::   1 Q1 : -1  L0 : 0 L1 : 0 L2 : -1  Grp 1 . inpl1, -p2

*****
#####
    
```

In der ersten Zeile findet man die Bezeichnung des aktuellen Diagramms bzw. die laufende Nummer des Subdiagramms und in der zweiten Zeile sowohl den ein- als auch auslaufenden Impuls mit den zugehörigen Vertizes. Die nachfolgende Ausgabe erfolgt in Form einer Tabelle, deren einzelne Spalten durch Doppelpunkte voneinander getrennt sind.

In den ersten beiden Spalten gibt Exp die Vertizes einer Linie mit dem zugehörigen Impuls und der Masse aus. Die Bezeichnungen werden direkt von Qgraf bzw. der Konfigurationsdatei übernommen. Das S und die Nummer in der dritten Spalte markiert das

entsprechende Subdiagramm bzw. das zugehörige Ko-Subdiagramm, falls kein S vorhanden ist. Nachfolgend werden die externen Impulse ($Q1$) und Integrationsimpulse ($L0$, $L1$, $L2$) ausgegeben. Die 1 bzw. 0 deutet an, ob der Impuls durch diese Linie läuft oder nicht. Zeigt der Impuls bezüglich der **Qgraf**-Notation in entgegengesetzte Richtung, ist dies durch ein zusätzliches Minuszeichen gekennzeichnet. Ein e bedeutet, dass der entsprechende Propagator nach dem zugehörigen Impuls entwickelt wird. Dabei handelt es sich um den externen Impuls $Q1$ und den Integrationsimpuls $L2$ der Schleife in der Mitte des Diagramms, weil diese bezüglich des massiven Subgraphen die externen Impulse sind. Schlussendlich befinden sich in der letzten Spalte die jeweilige Schleife (**Grp**), zu der sich die Linie zuordnen lässt und die Topologie, auf welcher der Subgraph abgebildet wird. Die Impulse, welche von der Zieltopologie her den Linien zugewiesen werden, gibt **Exp** zum Schluss aus mit einem zusätzlichen Minuszeichen, sofern sich deren Richtung in der Zieltopologie von der Richtung des Impulses unterscheidet, wie sie **Qgraf** festgelegt hat.

D.2.4 Ausgabe von Exp (Quelldatei)

Exp erzeugt bei der Ausgabe außerdem Quelldateien, die schließlich von **Matad** bzw. **Mincer** zur Berechnung der Diagramme verwendet werden. Im Falle des betrachteten Beispiels sieht ein Ausschnitt aus dieser Datei (und zwar das oben erwähnte Subdiagramm mit dem zugehörigen Ko-Subdiagramm) folgendermaßen aus:

```
*--#[ d311sub1 :

(+1)*1*nh1*nh2
*FT1(nu16)
*FT1(
  L,26,+p21,pM1,M1,pM1,exp,+p11,pQ1,26,L
)
*FT1(nu18)
*FT1(
  L,17,+p21,pM1,M1,pM1,exp,+q1,pQ1,17,L
)
*FT1(M1,pM1)
*FT1(
  L,14,+p21,pM1,M1,pM1,14,L
)
*FT2(nu15)
*FT2(
  L,35,+p31,pM1,M1,pM1,exp,-p11,pQ1,35,L
)
*FT2(nu17)
*FT2(
  L,23,+p31,pM1,M1,pM1,exp,-q1,pQ1,23,L
```



```

    )
  *FT2(M1,pM1)
  *FT2(
    L,20,+p31,pM1,M1,pM1,20,L
  )
  *Dg(nu15,nu16,
    L,29,-p11,pQ1,29,L
  )
  *Dg(nu17,nu18,
    L,32,-p12,pQ1,32,L
  )
;

#define TOPOLOGY "arb"

#define INT1 "inpl1"
#define EXTMOM1 "Q1"
#define INT2 "tad11"
#define MASS2 "M1"
#define INT3 "tad11"
#define MASS3 "M1"

```

*--#] d311sub1 :

Am Anfang eines jedes Subdiagramms werden Vorzeichen und Symmetriefaktor, sowie die Kennzeichnungen $nh1$ und $nh2$ für die schweren Fermionschleifen abgedruckt. Die ersten zwei Abschnitte – markiert mit FT1 bzw. FT2 (wobei FT für einen Fermionpropagator steht) – umfassen die beiden Schleifen des massiven Subdiagramms und der dritte Abschnitt das masselose Ko-Subdiagramm mit Dg als Gluonpropagator. Die Impulse $p\%j$ wurden von Exp ersetzt durch Zeichenketten der Gestalt

$$L, \#, \langle \text{gro\ss e Skalen} \rangle, \text{exp}, \langle \text{kleine Skalen} \rangle, \#, L.$$

ist eine Zahl, welche für die Berechnung der Diagramme keine Bedeutung hat. Diese Notation bedeutet, dass der zugehörige Propagator nach den kleinen Skalen entwickelt wird. Der Vorteil der zunächst kryptisch erscheinenden Schreibweise besteht darin, dass sie sich von Form mit Hilfe geeigneter Ersetzungsregeln effektiv weiterverarbeiten lässt.

Darüber hinaus werden innere Indizes mit $nu\%i$ und innere Impulse mit $p\%i\%j$ bezeichnet. $\%i$ steht für die laufende Nummer der Integration und $\%j$ für den Impuls der Quelltopologie, auf den der Impuls dieser Linie abgebildet wird. $pM\%i$ und $pQ\%i$ sind Variablen, die für das Power Counting notwendig sind.

Erkennbar ist, dass der massive Subgraph bezüglich der kleinen Skalen $q1$ und $p11$ entwickelt wird, was in dieser Notation nichts anderes ist als der äußere Impuls q_1 und



der Schleifenimpuls des Ko-Subdiagramms.

Unterhalb des Codes für Subdiagramm und Ko-Subdiagramm zählt `Exp` die verwendeten Topologien auf. Das Ko-Subdiagramm wird auf die masselose Propagatortopologie `inp11` abgebildet und die beiden Schleifen des massiven Subdiagramms auf `tad11t`.

D.3 Matad

D.3.1 Unterstützte Integrale und Topologien

Vakuuminintegrale stellen eine wichtige Subklasse von Schleifenintegralen dar und werden insbesondere bei der asymptotischen Entwicklung benötigt. Das `Form`-Programm `Matad` [11] leistet die Berechnung von massiven Tadpoleintegralen auf Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Niveau, falls innere Linien entweder masselos sind oder eine einheitliche Masse m tragen. Die Integrale, die von `Matad` gelöst werden können, sind also von folgender Gestalt:

- 1.) Ein-Schleifen-Vakuuminintegral:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + M^2)^a} \quad (\text{D.2})$$

- 2.) Zwei-Schleifen-Vakuuminintegral:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_1^2 + M_1^2)^{n_1} (p_2^2 + M_2^2)^{n_2} (p_3^2 + M_3^2)^{n_3}} \quad (\text{D.3})$$

mit $M_1, M_2, M_3 \in \{0, M\}$

- 3.) Drei-Schleifen-Vakuuminintegral:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_1^2 + M_1^2)^{n_1} (p_2^2 + M_2^2)^{n_2} (p_3^2 + M_3^2)^{n_3}} \times \quad (\text{D.4})$$

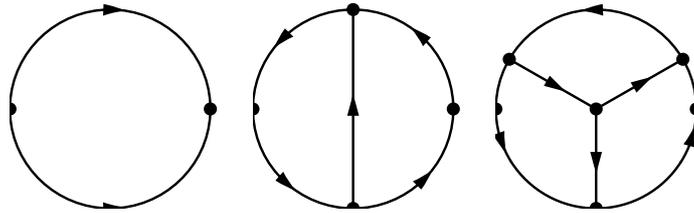
$$\times \frac{1}{(p_4^2 + M_4^2)^{n_4} (p_5^2 + M_5^2)^{n_5} (p_6^2 + M_6^2)^{n_6}}$$

mit $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 \in \{0, M\}$

In dieser Darstellung sind alle Impulse im euklidischen Raum definiert.

`Matad` unterstützt folgende Topologien:





D.3.2 Die Berechnung der Schleifenintegrale

Der Algorithmus zur Berechnung dieser Integrale geht von folgender Beziehung aus:

$$\int d^d p \frac{\partial}{\partial p^\mu} f(p, \dots) = 0 \quad (\text{D.5})$$

Dies ist nichts anderes als der Gaußsche Satz im d -dimensionalen Minkowskiraum. Aus dieser elementaren Gleichung ergeben sich Rekursionsbeziehungen, welche Feynmanintegrale unterschiedlicher Komplexität miteinander verknüpfen. Durch mehrmalige Anwendung einer solchen Rekursionsbeziehung lassen sich Feynmanintegrale auf sogenannte Masterintegrale zurückführen, die nicht weiter reduziert werden können. Der große Vorteil ist, dass diese Masterintegrale nur ein einziges mal berechnet werden müssen. Betrachten wir als Veranschaulichung folgendes Zwei-Schleifen-Integral:

$$I(n_1, \dots, n_5) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p_1^2 + m_1^2)^{n_1} \cdot \dots \cdot (p_5^2 + m_5^2)^{n_5}} \quad (\text{D.6})$$

Für $m_5 = 0$, $m_3 = m_4$ und $m_1 = m_2$ kommt man auf:

$$I(n_1, \dots, n_5) = \frac{1}{D - 2n_5 - n_2 - n_3} [n_2 \mathbf{2}^+ (\mathbf{5}^- - \mathbf{1}^-) + n_3 \mathbf{3}^+ (\mathbf{5}^- - \mathbf{4}^-)] I(n_1, \dots, n_5) \\ \text{mit } \mathbf{I}^\pm I(\dots, n_i, \dots) = I(\dots, n_i \pm 1, \dots) \quad (\text{D.7})$$

Eine wiederholte Anwendung der Rekursion reduziert einen der Indizes n_1 , n_4 oder n_5 auf Null.

Das Problem dieser Vorgehensweise ist, dass während der Rekursion künstliche $1/\varepsilon$ -Pole erzeugt werden. Damit müssen Terme höherer Ordnung in ε mitgenommen werden, um dafür zu sorgen, dass die konstanten Terme weiterhin stimmen. Ist die Ordnung in ε zu niedrig, so führt dies zu falschen Ergebnissen. Ist sie zu hoch, wird die Berechnung stark verlangsamt.

D.3.3 Sequentieller Ablauf

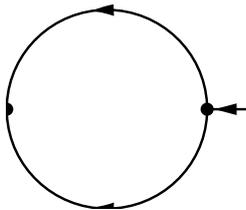
Folgende Schritte werden von Matad durchgeführt:

- 1.) Zunächst setzt **Matad** die vom Nutzer angegebenen Feynmanregeln ein (zuerst die Propagatoren, dann die Vertizes) und wendet den Projektor auf die Feynmanamplitude an, so dass keine freien Lorentz- bzw. Farbindizes mehr auftreten.
- 2.) Danach werden die skalaren Nenner in den kleinen Größen entwickelt, also die asymptotische Entwicklung durchgeführt, gefolgt von der Berechnung der Spuren und der Wick-Rotation. In den Amplituden, die im Rahmen dieser Diplomarbeit berechnet wurden, war es immer effizienter, die Spuren unmittelbar nach dem ersten Schritt auszuwerten. Dafür lässt sich jedoch keine allgemein gültige Regel angeben, da dies vom speziellen Problem abhängt, das man betrachtet.
- 3.) An jetziger Stelle besteht der Ausdruck nur noch aus Lorentzinvarianten, also Vierer-Skalarprodukten. Die Skalarprodukte in den Zählern werden mittels der Nenner ausgedrückt. Danach führt **Matad** die auftretenden Integrale über Rekursionsbeziehungen auf Masterintegrale zurück, deren Ergebnisse bekannt sind und eingesetzt werden. Dies stellt der zeitaufwendigste Schritt dar.
- 4.) Zum Schluss wird das Ergebnis nach ε entwickelt und ausgegeben.

D.4 Mincer

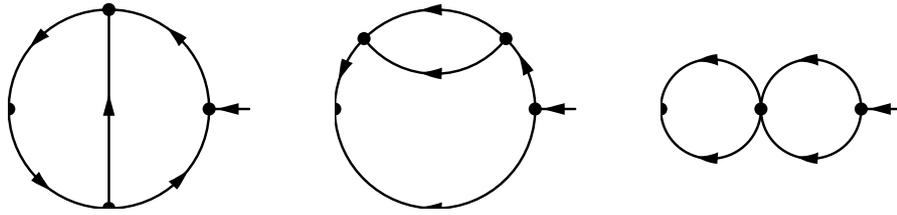
Es ist aus der Einführung bekannt, dass für die asymptotische Entwicklung sowohl massive Tadpoleintegrale als auch Integrale vom Propagatortyp benötigt werden. Da jedoch **Matad** nur Integrale vom ersten Typ berechnen kann, ist ein weiteres Programm nötig, welches für Integrale mit äußerem Impuls konzipiert ist. Das Form-Programm **Mincer** [12] weiß mit solchen Integralen umzugehen. Die Topologien, mit denen **Mincer** umgehen kann, sind die folgenden:

- 1.) Ein-Schleifen-Topologie:

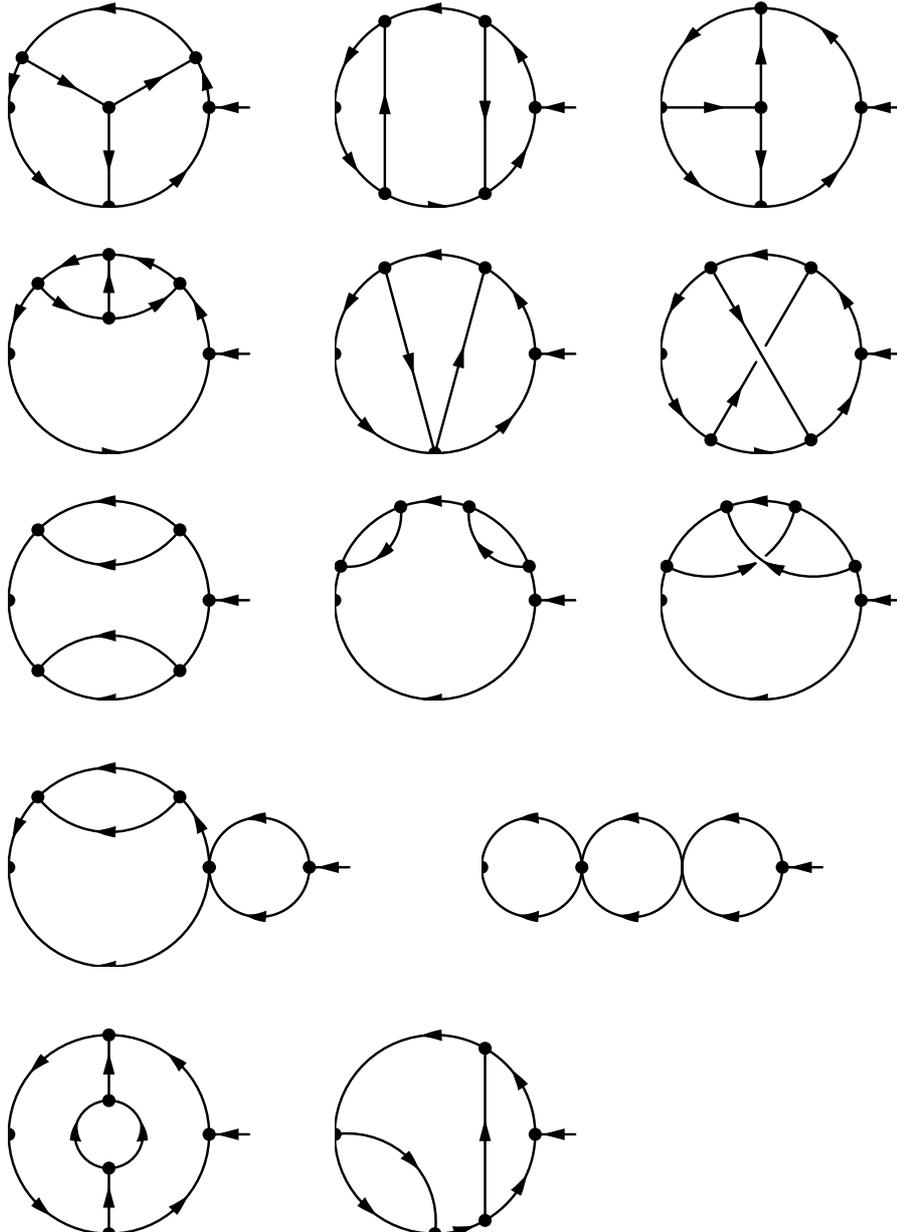


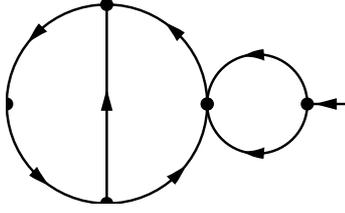
- 2.) Zwei-Schleifen-Topologien:





3.) Drei-Schleifen-Topologien:





D.4.1 Konzepte

Die analytische Lösung für den allgemeinsten Fall eines masselosen Einschleifenintegrals (mit einem beliebigen Polynom $\mathcal{P}_n(p) = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \dots p_{\mu_n}$ im Zähler) ist analytisch bekannt:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{P}(p)}{p^{2\alpha}(p-q)^{2\beta}} = \frac{1}{(4\pi)^2} (Q^2)^{\frac{D}{2}-\alpha-\beta} \times \sum_{\sigma \geq 0}^{[n/2]} G(\alpha, \beta, n, \sigma) q^{2\sigma} \left[\frac{1}{\sigma!} \left(\frac{\square}{4} \right)^\sigma \mathcal{P}_n(p) \right]_{p=q} \quad \text{mit } \square = \frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{G(\alpha, \beta, n, \sigma)}{(4\pi)^\varepsilon} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \sigma - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} - \alpha + n - \sigma) \Gamma(\frac{D}{2} - \beta + \sigma) \Gamma(\frac{D}{2} - \beta + \sigma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(D - \alpha - \beta + n)} \quad (\text{D.9})$$

Im Allgemeinen ist es Konvention, $\varepsilon G(1, 1, 0, 0)$ pro Impulsintegration herauszufaktorisieren. Die erste Methode, solche Integrale auszuwerten, besteht darin, die $G(\alpha, \beta, n, \sigma)$ rekursiv auf die Form $G(1+m\varepsilon, 1+n\varepsilon, 0, 0)$ zu reduzieren. In der praktischen Anwendung wird nur $(m, n) \in \{(0, 0); (1, 0); (2, 0); (1, 1)\}$ Es erweist sich im Folgenden als geschickt, $e(x) = 1/(1+x\varepsilon)$ zu setzen, weil diese Funktion generell in allen Ausdrücken auftaucht. Dies führt auf viele verschiedene Terme mit unterschiedlichen Kombinationen von $e(x)$. Definiert man

$$\varepsilon e(x) = \frac{1}{x}(1-e(x)), \quad \frac{e(x)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - x e(x) \quad \text{und} \quad e(x)e(y) = \frac{x e(x) - y e(y)}{x - y} \quad \text{für } x \neq y \quad (\text{D.10})$$

kommt $e(x)$ nur noch in Kombination mit x , aber nicht mehr mit ε vor und die Entwicklung nach ε kann durchgeführt werden. Der Nachteil dieser Vorgehensweise ist in ihrer Langsamkeit begründet. Die zweite Methode besteht darin, alle auftretenden $G(\alpha, \beta, n, \sigma)$ über normierte Γ -Funktionen (Pochhammer-Funktionen) auszudrücken. Bei der Entwicklung von $P_0(n, x)$ müssen Terme bis zur Ordnung ε^6 mitgenommen werden, so dass die konstanten Anteile im Endergebnis richtig sind. Aus dieser notwendigen, tiefen Entwicklung resultieren oft sehr viele Terme, bei einem Produkt aus n Γ -Funktionen beispielsweise 7^n . Dieser gravierende Nachteil lässt sich jedoch mit der Hilfe von Form ausmerzen. Ersetzt man $P_0(n, x)$ durch $A(P_0(n, x))$, wobei A eine kommutierende Funktion mit der Eigenschaft $A(x)A(y) = A(xy)$ ist, so wird Form nach jeder Multiplikation



zweier dieser Funktionen $A(x)$ und $A(y)$ das Argument $z \equiv xy$ des Produktes zusammenfassen und – wenn vom Anwender gewünscht – alle überflüssige Terme der Ordnung $> \varepsilon^7$ wegwerfen. Am Ende wird $A(z)$ wieder durch z ersetzt, was die Gesamtzahl der im Zwischenergebnis auftretenden Summanden drastisch reduziert und somit die Geschwindigkeit nicht unerheblich verbessert.

D.4.2 Verbesserungen der neuen Version von Mincer

Es soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass die ursprüngliche Version von **Mincer** in **Schoonschip** implementiert worden war. Die Nachteile von **Schoonschip** gegenüber **Form** spiegeln sich auch in der alten Version von **Mincer** wider. Beispielsweise benutzt **Schoonschip** Fließkommaarithmetik, wodurch größere Rundungsfehler bei längeren Rechnungen vorprogrammiert sind. Des Weiteren führte die Einführung des allgemeinen Eichparameters ξ zu Testzwecken zu riesigen Ausdrücken, die nicht weiter behandelt werden konnten. Im neuen **Mincer** hat man diese Probleme durch spezielle Techniken beseitigt. Außerdem werden nun alle auftretenden Topologien separat behandelt, was sich als vorteilhaft erwiesen hat, weil bestehende Routinen für jeweilige Topologien optimiert werden können. Natürlich soll der Erfolg der alten Version keineswegs geschmälert werden, führte sie doch beispielsweise zu Ergebnissen des Wirkungsquerschnitts von $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$!



E Die Myon-Paarproduktion durch Elektron-Positron-Kollision auf Baumgraphenniveau

Das zugehörige Matrixelement (bzw. das komplex konjugierte) ist gegeben durch:

$$\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{v}_{s_2}(p_2) \gamma^\mu u_{s_1}(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \bar{u}_{s_2}(p_2) \gamma^\nu v_{s_4}(p_4) \quad (\text{E.1})$$

$$\mathcal{M}^* = (ie)^2 \bar{v}_{s_4}(p_4) \gamma^{\nu'} u_{s_3}(p_3) \frac{ig_{\mu'\nu'}}{k^2} \bar{u}_{s_1}(p_1) \gamma^{\mu'} v_{s_2}(p_2) \quad (\text{E.2})$$

Im Folgenden wird das Betragsquadrat berechnet. Dabei ist über die Spins s_1, s_2 im Anfangszustand zu mitteln (jeweils durch einen Faktor 2 aufgrund der beiden möglichen Eigenzustände $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$) und über die Spins s_3, s_4 im Endzustand ohne Mittelung zu summieren:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} e^4 \bar{v}_{s_4}^e(p_4) \gamma_{\rho\sigma}^{\nu'} u_{s_3}^\sigma(p_3) \frac{ig_{\mu'\nu'}}{k^2} \bar{u}_{s_1}^\xi(p_1) \gamma_{\xi\omega}^{\mu'} v_{s_2}^\omega(p_2) \times \\ &\quad \times \bar{v}_{s_2}^\alpha(p_2) \gamma_{\alpha\beta}^\mu u_{s_1}^\beta(p_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2} \bar{u}_{s_3}^\gamma(p_3) \gamma_{\gamma\delta}^\nu v_{s_4}^\delta(p_4) = \\ &= \frac{e^4}{4} (\not{p}_2 - m_e)^{\omega\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p}_1 + m_e)^{\beta\xi} \gamma_{\xi\omega}^{\mu'} (\not{p}_3 + m_\mu)^{\sigma\gamma} \gamma_{\gamma\delta}^\nu (\not{p}_4 - m_\mu)^{\delta\rho} \gamma_{\rho\sigma}^{\nu'} \frac{g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'}}{k^4} = \\ &= \frac{e^4}{4k^4} \text{Sp}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\nu] \cdot \text{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma^\nu] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Die Berechnung der Spuren funktioniert besonders schnell mit Form:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{k^4} (2m_e^2 m_\mu^2 + (p_1 \cdot p_2) m_\mu^2 + (p_3 \cdot p_4) m_e^2 \\ &\quad + (p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)) = \\ &= e^4 (3 + \beta_\mu^2 (\cos^2 \theta - 1) - \beta_e^2) \quad \text{mit } \beta_{\mu,e} = \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu,e}^2}{s^2}} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$



Damit ist man auch schon beim Wirkungsquerschnitt in niedrigster Ordnung Störungstheorie angelangt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{v_f}{v_i} \left(\frac{1}{4} \sum_{\substack{s_1, s_2 \\ s_3, s_4}} |\mathcal{M}|^2 \right) = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\beta_\mu}{\beta_e} (3 - \beta_\mu^2 \sin^2 \theta - \beta_e^2) \quad (\text{E.5})$$

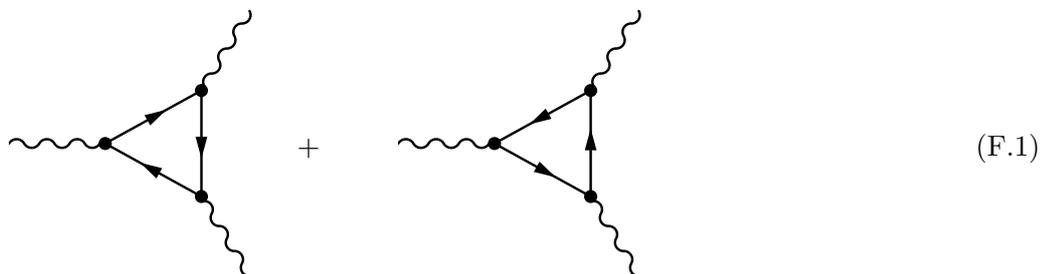
Durch Integration über den Raumwinkel ergibt sich schließlich der totale Wirkungsquerschnitt :

$$\sigma_0 = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{\alpha^2 \pi}{3s} \frac{\beta_\mu}{\beta_e} (9 - 2\beta_\mu^2 - 3\beta_e^2) = \boxed{\frac{4\pi\alpha^2}{3s} \frac{\beta_\mu}{2} (3 - \beta_\mu^2) + \mathcal{O}\left(\frac{m_e^2}{s}\right)} \quad (\text{E.6})$$



F Das Landau-Yang-Theorem

Das Landau-Yang-Theorem [13] stellt eine Verallgemeinerung des Furryschen Theorems dar, welches besagt, dass n -Punkt-Funktionen mit Photonen als externe Teilchen genau dann verschwinden, wenn n eine ungerade Zahl ist. Infolgedessen liefert beispielsweise die Dreipunktfunktion



$$(F.1)$$

keinen Beitrag. Im Folgenden soll begründet werden, dass dies auch für beliebige Vektorbosonen (also nicht nur Photonen) gilt.

Betrachtet wird der Zerfall eines Teilchens mit Gesamtdrehimpuls J in zwei Photonen ① und ②, die zirkular polarisiert sein sollen. Photon ① bewege sich in z - und Photon ② in $-z$ -Richtung. Hierbei gilt:

$$J_{z,①} = \begin{cases} \hbar & \text{falls rechtszirkular} \\ -\hbar & \text{falls linkszirkular} \end{cases} \quad \text{und} \quad J_{z,②} = \begin{cases} -\hbar & \text{falls rechtszirkular} \\ \hbar & \text{falls linkszirkular} \end{cases} \quad (F.2)$$

Der Zustand eines Photons wird im Folgenden mit $\psi^{\text{Polarisation von } ①, \text{Polarisation von } ②}$ bezeichnet. Vier solcher Endzustände sind möglich, nämlich $\psi^{R,R}$, $\psi^{R,L}$, $\psi^{L,R}$ und $\psi^{L,L}$, wobei R für rechtszirkulare und L für linkszirkulare Polarisation steht. Für die weitere Diskussion ist es wichtig, wie sich diese Zustände unter den Transformationen

- Rotation R_φ um die z -Achse mit dem Winkel φ
- Rotation R_ξ um die x -Axe mit dem Winkel π
- Inversion

verhalten. Die Antwort wird in der Tabelle



	$\psi^{R,R} + \psi^{L,L}$	$\psi^{R,R} - \psi^{L,L}$	$\psi^{R,L}$	$\psi^{L,R}$
R_φ	1	1	$\exp(2i\varphi)$	$\exp(-2i\varphi)$
R_ξ	1	1		
Inversion	1	-1	1	1

zusammengefasst. Aus diesen Ergebnissen lässt sich folgendes schließen, wobei zwei Fälle betrachtet werden sollen:

- 1.) Der Anfangszustand habe $J = 1, 3, 5, \dots$:

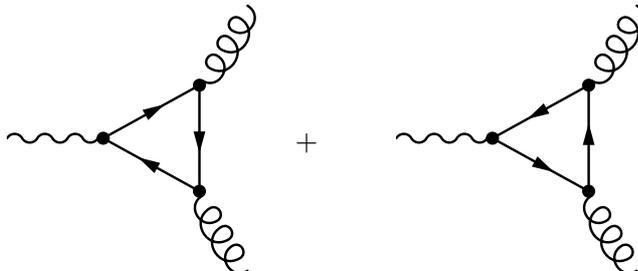
Dann sind nur die Zustände $\psi^{R,L}$ und $\psi^{L,R}$ erlaubt. Der Grund dafür ist, dass $\psi^{R,R} + \psi^{L,L}$ und $\psi^{R,R} - \psi^{L,L}$ simultane Eigenzustände sowohl von R_φ als auch R_ξ mit dem Eigenwert 1 sind. Jedoch ist der Anfangszustand ein Eigenzustand von R_φ mit Eigenwert 1 und verhält sich somit wie die Kugelflächenfunktionen Y_J^0 . Diese produzieren aber bei einer Drehung um die x -Achse mit dem Winkel π einen zusätzlichen Faktor $(-1)^J = -1$, was zur Folge hat, dass der Eigenwert von R_ξ dann $\neq 1$ ist.

- 2.) Der Anfangszustand habe $J = 0, 1$:

In diesem Falle sind die Endzustände $\psi^{R,R} + \psi^{L,L}$ und $\psi^{R,R} - \psi^{L,L}$ erlaubt. Für $\psi^{R,L}$ bzw. $\psi^{L,R}$ gilt aber $J_z = \pm 2\hbar$, was nicht mit $J = 0, 1$ korrespondiert.

Damit sind für $J = 1$ alle möglichen Endzustände $\psi^{R,R} + \psi^{L,L}$, $\psi^{R,R} - \psi^{L,L}$, $\psi^{R,L}$ und $\psi^{L,L}$ nicht möglich, womit der Zerfall eines Teilchens mit $J = 1$ in zwei beliebige Vektorbosonen wegen der Auswahlregeln verboten ist.

Nach dem Landau-Yang-Theorem verschwindet deshalb auch die Summe der folgenden Diagramme:



(F.3)

G Entkoppelte Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für die Zerfallsbreite des Higgszerfalls und für den Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ in einer effektiven Theorie mit fünf leichten Quarks dargestellt. Dazu wird die Entkopplungsrelation auf Zwei-Schleifen-Ebene [39] benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_s^{(6)}}{\pi} &= \frac{\alpha_s^{(5)}}{\pi} + \left(\frac{\alpha_s^{(5)}}{\pi} \right)^2 \frac{T_f N_h}{3} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \\ &+ \left(\frac{\alpha_s^{(5)}}{\pi} \right)^3 \left[\frac{T_f^2 N_h^2}{9} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{5C_A T_f N_h - 3C_F T_f N_h}{12} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{13}{48} T_f N_h C_F - \frac{2}{9} T_f N_h C_A \right] \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Es werden sowohl die Ergebnisse für eine beliebige Eichtheorie $SU(N_c)$ dargestellt als auch für die QCD mit $N_c = 3$. N_l und N_h werden nicht eingesetzt, um die Struktur der Ergebnisse in Abhängigkeit dieser Konstanten erkennen zu können.

G.1 Hadronischer Higgszerfall

G.1.1 Nächst-zu-führende Ordnung

Hier lauten die Entwicklungskoeffizienten auf nächst-zu-führender Ordnung:

$$\begin{aligned} h_0^{\text{nlo}} &= C_A \left[\frac{103}{12} - \frac{11}{6} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[-\frac{3}{2} \right] \\ &+ N_l T_f \left[-\frac{7}{3} + \frac{2}{3} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

$$\begin{aligned} h_1^{\text{nlo}} &= C_A \left[\frac{71}{20} - \frac{77}{90} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[\frac{13}{180} - \frac{7}{10} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \\ &= N_l T_f \left[-\frac{29}{30} + \frac{14}{45} \ln \left(\frac{m_H^2}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$



$$h_2^{\text{nlo}} = C_A \left[\frac{47459}{27000} - \frac{16973}{37800} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[\frac{83}{630} - \frac{1543}{2100} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\ + N_l T_f \left[-\frac{89533}{189000} + \frac{1543}{9450} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.4})$$

$$h_3^{\text{nlo}} = C_A \left[\frac{47071}{47250} - \frac{1243}{4725} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] + C_F \left[\frac{22418}{496125} - \frac{113}{175} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\ + N_l T_f \left[-\frac{3763}{14175} + \frac{452}{4725} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.5})$$

$$h_4^{\text{nlo}} = C_A \left[\frac{948509587}{1528065000} - \frac{27677}{165375} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \\ + C_F \left[-\frac{433333}{18191250} - \frac{110708}{202125} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\ + N_l T_f \left[-\frac{10426231}{63669375} + \frac{110708}{1819125} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.6})$$

$$h_5^{\text{nlo}} = C_A \left[\frac{24693249811}{59594535000} - \frac{730612}{6449625} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \\ + C_F \left[-\frac{39985822}{606981375} - \frac{730612}{1576575} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) \right] \\ + N_l T_f \left[-\frac{807445598}{7449316875} + \frac{2922448}{70945875} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.7})$$

Mit $C_A = 3$, $C_F = 4/3$ und $T_f = 1/2$ ergibt sich:

$$h_0^{\text{nlo}} = \frac{95}{4} - \frac{11}{2} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) + N_l \left[-\frac{7}{6} + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.8})$$

$$h_1^{\text{nlo}} = \frac{5803}{540} - \frac{14}{15} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{77}{30} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \\ + N_l \left[-\frac{29}{60} + \frac{7}{45} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.9})$$

$$h_2^{\text{nlo}} = \frac{1029839}{189000} - \frac{1543}{1575} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{16973}{12600} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \\ + N_l \left[-\frac{89533}{378000} + \frac{1543}{18900} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.10})$$

$$h_3^{\text{nlo}} = \frac{9075763}{2976750} - \frac{452}{525} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_{\text{t}}^2} \right) - \frac{1243}{1575} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \\ + N_l \left[-\frac{3763}{28350} + \frac{226}{4725} \ln \left(\frac{m_{\text{H}}^2}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.11})$$



$$h_4^{\text{nlo}} = \frac{50854463}{27783000} - \frac{442832}{606375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{27677}{55125} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + N_t \left[-\frac{10426231}{127338750} + \frac{55354}{1819125} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (\text{G.12})$$

$$h_5^{\text{nlo}} = \frac{252432553361}{218513295000} - \frac{2922448}{4729725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{730612}{2149875} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + N_t \left[-\frac{403722799}{7449316875} + \frac{1461224}{70945875} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] \quad (\text{G.13})$$

G.1.2 Nächst-zu-nächst-zu-führende Ordnung

Auf nächst-zu-nächst-zu-führender Ordnung gilt:

$$h_0^{\text{nnlo}} = \frac{155}{24} + \frac{9}{16} N_c^{-2} + \frac{3}{16} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1093}{48} N_c^2 \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{121}{48} N_c^2 \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{121}{24} N_c^2 \zeta_2 - \frac{55}{8} N_c^2 \zeta_3 + \frac{12311}{216} N_c^2 + \frac{11}{16} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{11}{8} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + N_h T_f \left[\frac{1}{12} N_c^{-1} - \frac{3}{16} N_c \right] + N_t T_f \left[-\frac{1}{2} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{3}{2} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{31}{24} N_c^{-1} + \frac{1}{2} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{95}{6} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{11}{6} N_c \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{11}{3} N_c \zeta_2 + N_c \zeta_3 - \frac{8345}{216} N_c \right] + N_t^2 T_f^2 \left[\frac{127}{27} - \frac{7}{3} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{3} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{2}{3} \zeta_2 \right] \quad (\text{G.14})$$



$$\begin{aligned}
h_1^{\text{nnlo}} = & \frac{433313}{20736} + \frac{41}{192} N_c^{-2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{21}{160} N_c^{-2} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& + \frac{63917}{15360} N_c^{-2} \zeta_3 - \frac{112267}{23040} N_c^{-2} + \frac{77}{120} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{24763}{8640} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{7}{240} N_c^2 \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{5653}{540} N_c^2 \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{847}{720} N_c^2 \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{847}{360} N_c^2 \zeta_2 + \frac{167}{12} N_c^2 \zeta_3 \\
& + \frac{183973}{34560} N_c^2 - \frac{77}{120} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{11551}{4320} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& - \frac{49}{480} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{143}{2160} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{134171}{7680} \zeta_3 \\
& + N_h N_l T_f^2 \left[-\frac{4}{45} \right] \\
& + N_h T_f \left[-\frac{7}{72} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{7}{120} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{77}{96} N_c^{-1} \zeta_3 \right. \\
& \quad + \frac{9067}{12960} N_c^{-1} + \frac{47}{360} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{7}{120} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{1}{30} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1309}{1536} N_c \zeta_3 - \frac{147299}{172800} N_c \right] \\
& + N_l T_f \left[-\frac{29}{30} + \frac{14}{45} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l T_f \left[\frac{7}{30} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1001}{1080} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{7}{120} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{139}{540} N_c^{-1} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{7}{10} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{71837}{64800} N_c^{-1} \\
& \quad - \frac{7}{30} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1153}{1080} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{7}{120} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad + \frac{1511}{216} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{77}{90} N_c \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{77}{45} N_c \zeta_2 \\
& \quad \left. + \frac{7}{15} N_c \zeta_3 - \frac{102083}{6480} N_c \right] \\
& + N_l^2 T_f^2 \left[\frac{5597}{3240} - \frac{29}{30} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{7}{45} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{14}{45} \zeta_2 \right]
\end{aligned} \tag{G.15}$$



$$\begin{aligned}
h_2^{\text{nnlo}} = & \frac{4113881237}{124416000} + \frac{10333}{67200} N_c^{-2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{5600} N_c^{-2} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& + \frac{24925603}{3225600} N_c^{-2} \zeta_3 - \frac{44067053}{4838400} N_c^{-2} + \frac{16973}{25200} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{27293899}{9072000} N_c^2 \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{14400} N_c^2 \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{382208}{70875} N_c^2 \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{186703}{302400} N_c^2 \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{186703}{151200} N_c^2 \zeta_2 + \frac{219977}{10080} N_c^2 \zeta_3 \\
& - \frac{3844438817}{254016000} N_c^2 - \frac{16973}{25200} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{2089313}{756000} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& - \frac{1543}{4032} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{913}{7560} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{40080823}{1433600} \zeta_3 \\
& + N_h N_l T_f^2 \left[-\frac{1468}{23625} \right] \\
& + N_h T_f \left[-\frac{107}{3024} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1543}{25200} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{1}{15} N_c^{-1} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{134911}{184320} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{16698263}{29030400} N_c^{-1} + \frac{4811}{75600} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad - \frac{1543}{25200} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{121}{3150} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{29141}{40960} N_c \zeta_3 - \frac{732196649}{1219276800} N_c \right] \\
& + N_l T_f \left[-\frac{89533}{189000} + \frac{1543}{9450} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l T_f \left[\frac{1543}{6300} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{193889}{226800} N_c^{-1} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{1543}{25200} N_c^{-1} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{96029}{567000} N_c^{-1} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad - \frac{1543}{4200} N_c^{-1} \zeta_3 + \frac{125430253}{238140000} N_c^{-1} \\
& \quad - \frac{1543}{6300} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{552401}{567000} N_c \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad + \frac{1543}{25200} N_c \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{64471}{18144} N_c \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad - \frac{16973}{37800} N_c \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{16973}{18900} N_c \zeta_2 \\
& \quad \left. + \frac{1543}{6300} N_c \zeta_3 - \frac{482032339}{63504000} N_c \right] \\
& + N_l^2 T_f^2 \left[\frac{3829289}{4860000} - \frac{89533}{189000} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{18900} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1543}{9450} \zeta_2 \right]
\end{aligned}$$



(G.16)

Auch diese Koeffizienten sollen für die QCD angegeben werden:

$$\begin{aligned}
h_0^{\text{nnlo}} = & \frac{24935}{48} + \frac{19}{8} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{3301}{16} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& + \frac{363}{16} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{363}{8} \zeta_2 - \frac{495}{8} \zeta_3 \\
& + N_h \left[-\frac{77}{288} \right] \\
& + N_l \left[-\frac{4157}{72} + \frac{2}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{95}{4} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{11}{4} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{11}{2} \zeta_2 + \frac{5}{4} \zeta_3 \right] \\
& + N_l^2 \left[\frac{127}{108} - \frac{7}{12} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1}{12} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1}{6} \zeta_2 \right]
\end{aligned} \tag{G.17}$$

$$\begin{aligned}
h_1^{\text{nnlo}} = & \frac{2831081}{41472} + \frac{77}{15} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1663}{72} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& - \frac{7}{20} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{40673}{432} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{847}{80} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{847}{40} \zeta_2 + \frac{14963399}{138240} \zeta_3 \\
& + N_h N_l \left[-\frac{1}{45} \right] \\
& + N_h \left[-\frac{3614393}{3110400} + \frac{97}{540} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{7}{90} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{20} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{10549}{9216} \zeta_3 \right] \\
& + N_l \left[-\frac{29}{60} + \frac{7}{45} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l \left[-\frac{9115633}{388800} - \frac{14}{45} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{586}{405} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad + \frac{7}{90} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{67717}{6480} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{77}{60} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{77}{30} \zeta_2 + \frac{7}{12} \zeta_3 \right] \\
& + N_l^2 \left[\frac{5597}{12960} - \frac{29}{120} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{7}{180} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{7}{90} \zeta_2 \right]
\end{aligned} \tag{G.18}$$

$$\begin{aligned}
h_2^{\text{nnlo}} = & -\frac{634987991279}{6096384000} + \frac{16973}{3150} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{3673639}{151200} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& + \frac{1543}{2520} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{9150167}{189000} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{186703}{33600} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{186703}{16800} \zeta_2 + \frac{19660371109}{116121600} \zeta_3 \\
& + N_h N_l \left[-\frac{367}{23625} \right] \\
& + N_h \left[-\frac{392562853}{487710720} + \frac{2539}{28350} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1543}{18900} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{293}{6300} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{2090599}{2211840} \zeta_3 \right] \\
& + N_l \left[-\frac{89533}{378000} + \frac{1543}{18900} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l \left[-\frac{64572644753}{5715360000} - \frac{1543}{4725} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{8973773}{6804000} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right. \\
& \quad + \frac{1543}{18900} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{10306537}{1944000} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{16973}{25200} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{16973}{12600} \zeta_2 + \frac{1543}{5040} \zeta_3 \right] \\
& + N_l^2 \left[\frac{3829289}{19440000} - \frac{89533}{756000} \ln\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) + \frac{1543}{75600} \ln^2\left(\frac{m_H^2}{\mu^2}\right) - \frac{1543}{37800} \zeta_2 \right]
\end{aligned} \tag{G.19}$$

G.2 Das R-Verhältnis

G.2.1 Nicht-Singulett-Anteil

Als erstes sollen die Koeffizienten für die Entwicklung des Nicht-Singulett-Anteils $\sim \alpha\alpha_s^2$ präsentiert werden:

$$\begin{aligned}
b_0^{(2)} = & C_F^2 \left[-\frac{3}{32} \right] + C_A C_F \left[\frac{123}{32} - \frac{11}{4} \zeta_3 - \frac{11}{16} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right] \\
& + N_l C_F T_f \left[-\frac{11}{8} + \zeta_3 + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right]
\end{aligned} \tag{G.20}$$

$$b_1^{(2)} = N_h C_F T_f \left[\frac{88}{225} - \frac{4}{45} \ln\left(\frac{s}{m_t^2}\right) \right] \tag{G.21}$$

$$b_2^{(2)} = N_h C_F T_f \left[-\frac{1303}{44100} + \frac{1}{105} \ln\left(\frac{s}{m_t^2}\right) \right] \tag{G.22}$$



$$b_3^{(2)} = N_h C_F T_f \left[\frac{26288}{4465125} - \frac{32}{14175} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.23})$$

$$b_4^{(2)} = N_h C_F T_f \left[-\frac{64858}{36018675} + \frac{8}{10395} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.24})$$

$$b_5^{(2)} = N_h C_F T_f \left[\frac{50041984}{71016820875} - \frac{512}{1576575} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.25})$$

$$b_6^{(2)} = N_h C_F T_f \left[-\frac{1183096}{3652293645} + \frac{64}{405405} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.26})$$

$$b_7^{(2)} = N_h C_F T_f \left[\frac{82187264}{492572669589} - \frac{4096}{48243195} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.27})$$

$$b_8^{(2)} = N_h C_F T_f \left[-\frac{14143760192}{151206406225875} + \frac{512}{10392525} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.28})$$

Für $C_F = 4/3$, $C_A = 3$ und $T_f = 1/2$ gilt:

$$b_0^{(2)} = \frac{365}{24} - 11\zeta_3 - \frac{11}{4} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + N_l \left[-\frac{11}{12} + \frac{2}{3}\zeta_3 + \frac{1}{6} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right] \quad (\text{G.29})$$

$$b_1^{(2)} = N_h \left[\frac{176}{675} - \frac{8}{135} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.30})$$

$$b_2^{(2)} = N_h \left[-\frac{1303}{66150} + \frac{2}{315} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.31})$$

$$b_3^{(2)} = N_h \left[\frac{52576}{13395375} - \frac{64}{42525} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.32})$$

$$b_4^{(2)} = N_h \left[-\frac{129716}{108056025} + \frac{16}{31185} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.33})$$

$$b_5^{(2)} = N_h \left[\frac{100083968}{213050462625} - \frac{1024}{4729725} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.34})$$

$$b_6^{(2)} = N_h \left[-\frac{2366192}{10956880935} + \frac{128}{1216215} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.35})$$

$$b_7^{(2)} = N_h \left[\frac{164374528}{1477718008767} - \frac{8192}{144729585} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.36})$$

$$b_8^{(2)} = N_h \left[-\frac{28287520384}{453619218677625} + \frac{1024}{31177575} \ln \left(\frac{s}{m_t^2} \right) \right] \quad (\text{G.37})$$

Die Terme des Nicht-Singulett-Anteils $\sim \alpha\alpha_s^3$ sind von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
b_1^{(3)} = & N_h C_F^2 T_f \left[\frac{93599}{91125} - \frac{529}{540} \zeta_3 + \frac{1421}{6075} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{11}{135} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1333}{6075} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) - \frac{4}{135} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{7}{135} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{11}{405} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[-\frac{716839}{1458000} + \frac{53}{216} \zeta_3 - \frac{7301}{48600} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{11}{270} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{27547}{48600} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) - \frac{11}{135} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{11}{90} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) - \frac{11}{810} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{23}{243} \right] \\
& + N_l N_h C_F T_f^2 \left[-\frac{6052}{30375} + \frac{28}{135} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{4}{135} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{4}{75} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{4}{135} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{4}{405} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.38}$$



$$\begin{aligned}
b_2^{(3)} = & N_h C_F T_f \left[-\frac{1303}{44100} + \frac{1}{105} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{1}{105} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_h C_F^2 T_f \left[-\frac{211867}{444528} + \frac{2291}{20160} \zeta_3 + \frac{126523}{793800} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{43}{2520} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad + \frac{37109}{158760} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{79}{1260} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. - \frac{23}{504} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{43}{7560} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[-\frac{61445851}{333396000} + \frac{271}{1152} \zeta_3 - \frac{175597}{3175200} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{43}{5040} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{347593}{3175200} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{29}{840} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{131}{5040} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{43}{15120} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{599}{40500} - \frac{4}{675} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{4}{675} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{15209}{6945750} - \frac{11}{630} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{1}{315} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{74}{33075} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1}{315} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1}{945} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.39}$$



$$\begin{aligned}
b_3^{(3)} = & N_h C_F T_f \left[\frac{26288}{4465125} - \frac{32}{14175} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{32}{14175} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \\
& + N_h C_F^2 T_f \left[\frac{3395030363}{84390862500} - \frac{121}{4200} \zeta_3 - \frac{138346}{13395375} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{8}{212625} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \quad - \frac{63982}{1913625} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{2144}{212625} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{2152}{212625} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{8}{637875} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[\frac{22635964507}{32148900000} - \frac{6217}{10800} \zeta_3 + \frac{28963}{535815000} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \quad + \frac{4}{212625} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{1937441}{178605000} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \\
& \quad - \frac{872}{212625} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \\
& \quad \left. - \frac{292}{70875} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) - \frac{4}{637875} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[-\frac{107908}{22325625} + \frac{16}{7875} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{16}{7875} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \\
& + N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{1298704}{4219543125} + \frac{112}{30375} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{32}{42525} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{3184}{13395375} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{32}{42525} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{32}{127575} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.40}$$



$$\begin{aligned}
b_4^{(3)} = & N_h C_F T_f \left[-\frac{64858}{36018675} + \frac{8}{10395} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{8}{10395} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_h C_F^2 T_f \left[-\frac{2350396652687}{89859390390000} + \frac{3463}{332640} \zeta_3 + \frac{37327579}{3241680750} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{331}{155925} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{68608699}{3241680750} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad - \frac{1382}{155925} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. - \frac{1051}{155925} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{331}{467775} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[-\frac{290372908200523}{179718780780000} + \frac{58193}{43200} \zeta_3 - \frac{75747817}{16208403750} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad + \frac{331}{311850} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{129255667}{16208403750} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad + \frac{551}{155925} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{257}{103950} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{331}{935550} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[\frac{170266}{93767625} - \frac{244}{297675} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{244}{297675} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h C_F T_f^2 \left[-\frac{131644888}{374414126625} - \frac{548}{467775} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{8}{31185} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3128}{108056025} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{8}{31185} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{8}{93555} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.41}$$



$$\begin{aligned}
b_5^{(3)} = & N_h C_F T_f \left[\frac{50041984}{71016820875} - \frac{512}{1576575} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{512}{1576575} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_h C_F^2 T_f \left[\frac{3718479567664559}{2015340198678056250} - \frac{29167}{6306300} \zeta_3 - \frac{7705805248}{22370298575625} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad - \frac{256}{165540375} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{8848669696}{1720792198125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad + \frac{2816}{1157625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. + \frac{402944}{165540375} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{256}{496621125} \pi^2 \right] \\
& + N_h C_A C_F T_f \left[\frac{3262812119583673073}{806136079471222500} - \frac{98933}{29400} \zeta_3 + \frac{1333664144}{22370298575625} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad + \frac{128}{165540375} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{30232909904}{22370298575625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \quad - \frac{32768}{55180125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \quad \left. - \frac{98432}{165540375} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{128}{496621125} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 C_F T_f^2 \left[-\frac{11744416}{14707625625} + \frac{4864}{12733875} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{4864}{12733875} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h C_F T_f^2 \left[\frac{1845615488896}{9596858088943125} + \frac{233984}{496621125} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{512}{4729725} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{295168}{213050462625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{512}{4729725} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{512}{14189175} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.42}$$

Auch hier sollen alle Koeffizienten für $C_F = 4/3$, $C_A = 3$ und $T_f = 1/2$ angegeben werden:

$$\begin{aligned}
b_1^{(3)} = & \frac{23}{729} + N_h \left[-\frac{92243}{1312200} - \frac{1847}{4860} \zeta_3 - \frac{20237}{218700} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{11}{1215} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{205267}{218700} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{46}{243} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{241}{1215} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{11}{3645} \pi^2 \right] \\
& + N_l N_h \left[-\frac{6052}{91125} + \frac{28}{405} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{4}{405} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{4}{225} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{4}{405} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{4}{1215} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.43}$$



$$\begin{aligned}
b_2^{(3)} = N_h & \left[-\frac{396204553}{500094000} + \frac{103693}{181440} \zeta_3 + \frac{88799}{2857680} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{43}{22680} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& - \frac{159617}{14288400} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{151}{11340} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \left. + \frac{37}{3240} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{43}{68040} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{599}{121500} - \frac{4}{2025} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{4}{2025} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[\frac{15209}{20837250} - \frac{11}{1890} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{1}{945} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{74}{99225} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1}{945} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{1}{2835} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.44}$$

$$\begin{aligned}
b_3^{(3)} = N_h & \left[\frac{4386838263439}{3038071050000} - \frac{4943}{4200} z_3 - \frac{21874693}{2411167500} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{8}{1913625} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& - \frac{19348933}{2411167500} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{208}{273375} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \\
& \left. + \frac{1448}{1913625} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{8}{5740875} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[-\frac{107908}{66976875} + \frac{16}{23625} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{16}{23625} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[\frac{1298704}{12658629375} + \frac{112}{91125} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{32}{127575} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \left. - \frac{3184}{40186125} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{32}{127575} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) + \frac{32}{382725} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.45}$$

$$\begin{aligned}
b_4^{(3)} = N_h & \left[-\frac{2632159347026203}{808734513510000} + \frac{40466269}{14968800} \zeta_3 + \frac{64821227}{72937816875} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& + \frac{331}{1403325} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{208872977}{72937816875} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \\
& \left. - \frac{1138}{1403325} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{1469}{1403325} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{331}{4209975} \pi^2 \right] \\
& + N_h^2 \left[\frac{170266}{281302875} - \frac{244}{893025} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) - \frac{244}{893025} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) \right] \\
& + N_l N_h \left[-\frac{131644888}{1123242379875} - \frac{548}{1403325} \ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right) + \frac{8}{93555} \ln^2\left(\frac{s}{\mu^2}\right) \right. \\
& \left. + \frac{3128}{324168075} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{8}{93555} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right) - \frac{8}{280665} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.46}$$



$$\begin{aligned}
b_5^{(3)} = N_h \left[\frac{11296637939831277289}{1395235522161731250} - \frac{382213649}{56756700} \zeta_3 - \frac{37640487392}{201332687180625} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
+ \frac{256}{1489863375} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{376069270112}{201332687180625} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \\
+ \frac{1452032}{1489863375} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{1451776}{1489863375} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \\
\left. - \frac{256}{4469590125} \pi^2 \right] \\
+ N_h^2 \left[-\frac{11744416}{44122876875} + \frac{4864}{38201625} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) + \frac{4864}{38201625} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \right] \\
+ N_l N_h \left[\frac{1845615488896}{28790574266829375} + \frac{233984}{1489863375} \ln \left(\frac{s}{\mu^2} \right) - \frac{512}{14189175} \ln^2 \left(\frac{s}{\mu^2} \right) \right. \\
\left. + \frac{295168}{639151387875} \ln \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{512}{14189175} \ln^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right) + \frac{512}{42567525} \pi^2 \right]
\end{aligned} \tag{G.47}$$

G.2.2 Singulett-Anteil

Auf die Angabe des entkoppelten Singulett-Anteils soll hier verzichtet werden, das sich die Koeffizienten der Entwicklung in τ_s nicht von den ursprünglichen der vollen Theorie unterscheiden. Dies liegt daran, dass der Singulett-Anteil erst zu $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ auftritt und damit keine neuen Terme auf derselben Ordnung Störungstheorie hinzukommen, sofern man $\alpha_s^{(n_f)}$ durch $\alpha_s^{(n_f-1)}$ ersetzt.





H Form-Programme

H.1 Programme zur Berechnung der Entwicklung von

$$\mathcal{M}(H \rightarrow gg) \sim \alpha_s^2$$

H.1.1 Die Prozedur integral

```
1  #procedure integral(n,c)
2
3  *****
4  * Prozedur zur Berechnung von Integralen der A0-Form: *
5  * Int dq/(2*Pi)^d q^n/(q^2-m^2)^a *
6  *****
7
8  Off Statistics;
9
10 *****
11 * Konvention: *
12 * *
13 * mu^(4-d)*Int dq/(2*Pi)^d 1/(-q^2+2*q*p+M^2)^a = *
14 * = i/(16*Pi^2)*(4*Pi*mu^2)^(2-d/2) *
15 * * Gamma(a-d/2)/Gamma(a)*(p^2+M^2)^(d/2-a) *
16 *****
17
18 CFunctions Gamma, GammaN;
19 Functions D, [P^2+m^2], P, TERM;
20 Symbols a, b, d, p, [p^2+m^2], m, pi, Zaehler;
21
22 *****
23 * Eingabe der Potenzen n (in n) und a (in c) *
24 *****
25
26 Local [Ableitung_rechts] = D>('n')*[P^2+m^2]^(d/2-a);
27
28 *****
29 * Berechnung der Ableitungen auf der rechten Seite *
30 * Do-Schleife mit .sort viel schneller als Repeat! *
```



```

31 *****
32
33 #do Zaehler = 1, 'n'
34     Identify D*TERM?^b? = 2*P*b*TERM^(b-1) + TERM^b*D;
35     Identify D*P = d + P*D;
36     If ( (count(D,1) == 0) && (count(p,1) >= 1) ) Discard;
37     .sort: step Zaehler;
38 #enddo
39
40 .sort
41
42 *****
43 * Ersetzung nicht kommutierender durch kommutierende Größen *
44 *****
45
46 Identify P=p;
47 Identify [P^2+m^2] = [p^2+m^2];
48 Argument;
49     Identify [P^2+m^2] = [p^2+m^2];
50     Identify P = p;
51 EndArgument;
52
53 .sort
54
55 Identify D = 0;
56 Identify p = 0;
57
58 .sort
59
60 *****
61 * Auflösen nach dem Integral Int dq q^n/(q^2-m^2)^a *
62 * Konstanter Faktor i_/(16*pi^2)*(4*pi*mu)^2 wegen *
63 * Übersichtlichkeit weggelassen *
64 *****
65
66 Local Ergebnis = Gamma(a-d/2)/GammaN(a+'n')*
    [Ableitung_rechts]/(-2)^(+'n')*(-1)^(+'c');
67
68 .sort
69
70 Skip [Ableitung_rechts];
71
72 *****
73 * Verschiebung der Potenz a, weil durch Ableiten a+n (linke Seite) *

```



```

74 *****
75
76 #b = 'c' - 'n';
77
78 Identify a = a - 'n';
79 Argument;
80     Identify a = a - 'n';
81     Argument;
82     Identify a = a - 'n';
83     EndArgument;
84 EndArgument;
85
86 *****
87 * p=0 in [p^2+m^2] setzen, (m^2)^2=m^(2*a) und Gammafunktion als *
88 * Fakultät schreiben *
89 *****
90
91 Multiply Replace_([p^2+m^2],m^2);
92 Multiply Replace_(a,'c');
93
94 Identify (m^2)^a? = m^(2*a);
95 Argument;
96     Identify GammaN(a?) = fac_(a-1);
97     Identify (m^2)^a? = m^(2*a);
98 EndArgument;
99 Identify Gamma(-1/2*d) = Gamma(1-1/2*d)*(-2/d);
100
101 *****
102 * Argument der Gammafunktion > 0: d = 4 setzen *
103 * Argument der Gammafunktion = 0: Gamma(0) stehen lassen *
104 * Argument der Gammafunktion < 0: alles stehen lassen *
105 *****
106
107 #if ( 'b' > 2 );
108 Identify Gamma(a?) = fac_(a-1);
109     Multiply Replace_(d,4);
110     Argument;
111         Identify GammaN(a?) = fac_(a-1);
112     EndArgument;
113 #elseif ( 'b' == 2 );
114     Multiply Replace_(d,4);
115     Argument;
116         Identify GammaN(a?) = fac_(a-1);
117     EndArgument;

```



```

118 #endif;
119
120 .sort
121
122 #endprocedure

```

H.1.2 Die Prozedur taylor

```

1  #procedure taylor(n)
2
3  .sort
4
5  Symbol Zahl;
6
7  *****
8  * Nenner der Dreipunktfunktion *
9  *****
10
11 Identify Den(k?,q?,m?) = 1/[q^2-m^2]*
    sum_(n,0,'n',(2*q.k/[q^2-m^2])^n);
12
13 *****
14 * Abbruch der Entwicklung für n < 'n' *
15 * Weglassen der Integrale mit Wert 0 *
16 *****
17
18 If ( count([q^2-m^2],1) < -'n' ) Discard;
19
20 If ( (count(k1.q,1) != count(k2.q,1)) );
21     Discard;
22 EndIf;
23
24 .sort
25
26 *****
27 * Symmetrisierung der Integrale *
28 *****
29
30 #do Zaehler1 = 'n', 1, -1
31     #do Zaehler2 = 1, 'Zaehler1';
32         Identify (k1.q)^( 'Zaehler1' )*(k2.q)^( 'Zaehler1' ) =
            (k1.q)^( 'Zaehler1' )*(k2.q)^( 'Zaehler1' )/(2*'Zaehler2'-1);
33     #enddo

```



```

34     Identify (k1.q)^( 'Zaehler1')*(k2.q)^( 'Zaehler1') =
           fac_( 'Zaehler1')*(k1.k2)^( 'Zaehler1')*q.q^( 'Zaehler1')/
           (4^( 'Zaehler1'));
35     .sort: step Zaehler1;
36 #enddo
37
38 .sort
39
40 #endprocedure

```

H.1.3 Das eigentliche Programm zur Taylorentwicklung

```

1  Dimension d;
2  Symbols a, d, e, m, mH, n, [q^2-m^2], [mH^2/(4*m^2)], [Vorfaktor];
3  Indices mu, nu;
4  Vectors k, k1, k2, q;
5  CFunctions Den, Gamma, GammaD;
6
7  *****
8  * Ordnung der Taylorentwicklung = '$n'/2-3 *
9  *****
10
11 # $n = 26;
12
13 Off Statistics;
14
15 *****
16 * Definition der Integranden *
17 *****
18
19 Local Ausdruck1 = 1/[q^2-m^2]*Den(-k1,q,m)*Den(k2,q,m);
20 Local Ausdruck2 = (k1.q*k2.q)/[q^2-m^2]*Den(-k1,q,m)*Den(k2,q,m);
21 Local Ausdruck3 = q.q/[q^2-m^2]*Den(-k1,q,m)*Den(k2,q,m);
22
23 *****
24 * Festlegung der zu berechnenden Groeßen als lokale Variablen *
25 *****
26
27 Local C = (4*m-16*m^3/mH^2)*Ausdruck1-8*m/mH^2;
28 Local Vorfaktor = C;
29
30 *****
31 * Durchfuehrung der Taylor-Entwicklung mit Prozedur taylor.prc *

```



```

32 * Einfuehren der berechneten Integrale *
33 *****
34
35 #call taylor('$n')
36
37 *****
38 * Berechnung der Integrale mittels der Prozedur integral.prc *
39 * Erstes Argument: Zahl der q im Zaehler *
40 * Zweites Argument: Potenz des Nenners *
41 *****
42
43 #do Zaehler = '$n'/2, 0, -1
44     #call integral(2*'Zaehler',2*'Zaehler'+3);
45     Identify q.q^('Zaehler')/[q^2-m^2]^(2*'Zaehler'+3) = Ergebnis;
46     .sort
47 #enddo
48
49 *****
50 * Kinetimatik *
51 * Vernachlaessigung hoeherer Terme in e *
52 * Einfuehren des Entwicklungskoeffizienten mH^2/(4*m^2) *
53 * Term hoechster Ordnung weglassen ((noch) nicht korrekt) *
54 *****
55
56 Identify k1.k2 = mH^2/2;
57 Identify e*Gamma(0) = 1;
58 Identify e = 0;
59 Identify mH^2/m^2 = [mH^2/(4*m^2)]*4;
60
61 #$w = '$n$'/2-2;
62 If (count([mH^2/(4*m^2)],1) >= '$w') Discard;
63
64 .sort
65
66 *****
67 * Ermittlung und Ausklammern des Vorfaktors *
68 * Ausgabe des Ergebnisses *
69 *****
70
71 Skip C0;
72 Skip C;
73
74 If (count([mH^2/(4*m^2)],1) > 0) Discard;
75

```



```
76 .sort
77
78 Skip Vorfaktor;
79
80 Local Amplitude = C/Vorfaktor;
81
82 Multiply [Vorfaktor];
83
84 .sort
85
86 Bracket [Vorfaktor];
87
88 Print +s Amplitude, Vorfaktor;
89 .sort
90 .end
```

H.2 Renormierung des Fünf-Schleifen-Beitrags zum hadronischen Higgszerfall

```
1 Symbols sqrt2, v, GF, mH, M1ren, eM1ren, pi, tau, tauren, alpha4p,
  alphapren, alpha4pren, lmm1ren, lmmH, lmm1, lqq, Zm, deltam, nl,
  nh, nf, CA, CF, T;
2
3 Off Statistics;
4
5 Load results/lo10neu3l1to2.res;
6
7 Load results/nlo10neu4l1to71.res;
8
9 Load results/nnlo85l1to2649.res;
10
11 .sort
12
13 Local loop3 = lo10neu3l1to2;
14 Local loop4 = nlo10neu4l1to71;
15 Local loop5 = nnlo85l1to2649;
16
17 .sort
18
19 Skip loop5;
20
21 If ( count(nh2,1) > 1 ) Discard;
```



```
22
23 .sort
24
25 Skip loop3, loop4;
26
27 If ( count(nh2,1) > 1 ) Discard;
28
29 .sort
30
31
32 *****
33 * Multipliziere 3-Loop mit  $\alpha_4^2 = (\alpha/(4\pi))^3$  *
34 *****
35
36 Skip loop4, loop5;
37
38 Multiply  $(\alpha_4)^2$ ;
39
40 .sort
41
42 *****
43 * Multipliziere 4-Loop mit  $\alpha_4^3 = (\alpha/(4\pi))^3$  *
44 *****
45
46 Skip loop3, loop5;
47
48 Multiply  $(\alpha_4)^3$ ;
49
50 .sort
51
52 *****
53 * Multipliziere 5-Loop mit  $\alpha_4^4 = (\alpha/(4\pi))^4$  *
54 *****
55
56 Skip loop3, loop4;
57
58 Multiply  $(\alpha_4)^4$ ;
59
60 .sort
61
62 *****
63 * Renormierung der Top-Quark-Masse *
64 *****
65
```



```
66 Skip loop4, loop5;
67
68 Identify eM1 = eM1ren * (1 - 2*ln_(Zm)*ep + 2*(ln_(Zm))^2*ep^2);
69
70 Identify eM1ren = 1 + lmm1ren*ep + 1/2*lmm1ren^2*ep^2
  + 1/6*lmm1ren^3*ep^3;
72 Identify ln_(Zm) = deltam - deltam^2/2 + deltam^3/3;
73
74 .sort
75
76 Skip loop3, loop5;
77
78 Identify eM1 = eM1ren * (1 - 2*ln_(Zm)*ep + 2*(ln_(Zm))^2*ep^2);
79
80 Identify eM1ren = 1 + lmm1ren*ep + 1/2*lmm1ren^2*ep^2
  + 1/6*lmm1ren^3*ep^3;
81 Identify ln_(Zm) = deltam - deltam^2/2 + deltam^3/3;
82
83 .sort
84
85 *****
86 * 3-Loop *
87 *****
88
89 Skip loop4, loop5;
90
91 Identify deltam = -3*alpha4pren*CF/ep + alpha4pren^2 *
  ( (11/2*nc*CF + 9/2*CF^2 - CF*nf )/ep^2 +
  (-97/12*nc*CF - 3/4*CF^2 + 5/6*CF*nf)/ep );
92
93 .sort
94
95 *****
96 * 4-Loop *
97 *****
98
99 Skip loop3, loop5;
100
101 Identify deltam = -3*alpha4pren*CF/ep;
102
103 .sort
104
105 *****
106 * 5-Loop *
```



```
107 *****
108
109 Skip loop3, loop4;
110
111 Identify eM1 = eM1ren;
112
113 Identify eM1ren = 1 + lmm1ren*ep + 1/2*lmm1ren^2*ep^2
      + 1/6*lmm1ren^3*ep^3;
114
115 .sort
116
117 Identify CF = (nc^2 - 1)/(2*nc);
118
119 .sort
120
121 *****
122 * Renormierung der Kopplungskonstanten alpha (3-Loop) *
123 *****
124
125 Skip loop4, loop5;
126
127 Identify alpha4p = alpha4pren*(1 + alpha4pren * (-11/3*nc+2/3*nf)/ep
      + alpha4pren^2 * ( (-44/9*nc*nf + 121/9*nc^2 + 4/9*nf^2)/ep^2 +
      (5/3*nc*nf - 17/3*nc^2 + CF*nf)/ep ) );
128
129 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;
130
131 .sort
132
133 *****
134 * Renormierung der Kopplungskonstanten alpha (4-Loop) *
135 *****
136
137 Skip loop3, loop5;
138
139 Identify alpha4p = alpha4pren*(1 +
      alpha4pren * (-11/3*nc+2/3*nf)/ep);
140
141 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;
142
143 .sort
144
145 *****
146 * Renormierung der Kopplungskonstanten alpha (5-Loop) *
```



```

147 *****
148
149 Skip loop3, loop4;
150
151 Identify alpha4p = alpha4pren;
152
153 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;
154
155 .sort
156
157 Identify eQ1 = 1 - lqq*ep + 1/2*lqq^2*ep^2 - 1/6*lqq^3*ep^3
      + 1/24*lqq^4*ep^4;
158 Identify lqq = lmmH - i_*pi;
159
160 If ( count(ep,1) > 2 ) Discard;
161
162 Multiply Q1.Q1^-2;
163
164 Identify Q1.Q1 = -mH^2;
165
166 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;
167
168 .sort
169
170 If ( count(i_,1) == 0 ) Discard;
171
172 Identify mH^2 = tau*4*M1^2;
173
174 .sort
175
176 Skip loop4, loop5;
177
178 If ( count(tau,1) > 2 ) Discard;
179
180 Identify tau = tauren*(1 - 2*deltam + 3*deltam^2);
181
182 Identify M1 = (1+deltam)*M1ren;
183
184 Identify deltam = -3*alpha4pren*CF/ep + alpha4pren^2 *
      ( (11/2*nc*CF + 9/2*CF^2 - CF*nf )/ep^2 +
      (-97/12*nc*CF - 3/4*CF^2 + 5/6*CF*nf)/ep );
185 Identify CF = (nc^2 - 1)/(2*nc);
186
187 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;

```



```
188
189 If ( count(ep,1) >= 1 ) Discard;
190
191 .sort
192
193 Skip loop3, loop5;
194
195 If ( count(tau,1) > 2 ) Discard;
196
197 Identify tau = tauren*(1 - 2*deltam);
198
199 Identify M1 = (1+deltam)*M1ren;
200
201 Identify deltam = -3*alpha4pren*CF/ep;
202 Identify CF = (nc^2 - 1)/(2*nc);
203
204 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;
205
206 If ( count(ep,1) >= 1 ) Discard;
207
208 .sort
209
210 Skip loop3, loop4;
211
212 Identify tau = tauren;
213
214 Identify M1 = M1ren;
215
216 .sort
217
218 If ( count(alpha4pren,1) > 4 ) Discard;
219
220 If ( count(ep,1) >= 1 ) Discard;
221
222 .sort
223
224 Skip loop3;
225 Skip loop4;
226 Skip loop5;
227
228 Local result = loop3 + loop4 + loop5;
229
230 Multiply nh1^-1*nh2^-1;
231
```



```
232 Identify nh1 = nh;
233 Identify nh2 = nh;
234 Identify nf = nl + nh;
235
236 .sort
237
238 Skip loop3;
239 Skip loop4;
240 Skip loop5;
241
242 If ( count(ep,1) >= 0 ) Discard;
243
244 If ( count(tauren,1) > 2 ) Discard;
245
246 Identify alpha4pren = 1/4*alphapren;
247
248 Multiply Replace_(nc,3);
249
250 Bracket tauren, alphapren, nl, nh;
251
252 Print +s result;
253
254 .sort
255 .end
```

Zunächst deklariert man in Zeile 1 die benötigten Variablen; in diesem Falle handelt es sich um `symbols`. In Zeile 5, 7 und 9 werden Drei-, Vier- und Fünf-Schleifen-Ergebnis geladen, die danach mit den richtigen Potenzen der starken Kopplungskonstanten zu multiplizieren sind. Anschließend macht man Gebrauch von den Formeln (5.15) und (5.16) von Seite 39 und setzt dann in Zeile 91 und 101 die entsprechenden Counterterme für die Massenrenormierung (5.35) von Seite 47 ein. Ab Zeile 121 wird die Kopplungskonstante renormiert über die Formel (5.34). Zeile 157 und 158 extrahieren mit den Gleichungen (5.6) und (5.8) von Seite 32 bzw 33 den Imaginärteil. Zum Schluss muss noch der Entwicklungsparameter τ selbst renormiert werden. Dies geschieht in Zeile 180 für das Drei- und in Zeile 197 für das Vier-Schleifen-Resultat unter Verwendung von (5.18) von Seite 39. Danach werden alle überflüssigen Potenzen in α_s , τ und ε weggelassen und das Ergebnis ausgegeben.





Danksagung

Großen Dank gebührt meinen Eltern für Kost, Logis und die seelische Unterstützung während meiner Diplomarbeit.

Weiterhin möchte ich mich bei Matthias Steinhauser, Luminita Mihaila, Philipp Kant und Stefan Bekavac für die angenehme Arbeitsatmosphäre, sehr gute Betreuung und hilfreichen Diskussionen bedanken.

An dieser Stelle sollen Andreas Bauer, Melanie Ganz, Lars Hofer, Matthias Kauth, Andreas Maier, Philipp Maierhöfer, Susanne Mertens, Dominik Scherer, Karsten Schnitter, Matthias Seiler, Susanne Westhoff und Michael Wittmann nicht vergessen werden, da sie sehr zu einer gemütlichen Stimmung im Diplomandenzimmer beitrugen.

Zu guter letzt möchte ich mich noch bei Luminita Mihaila, Peter Marquard und Michael Rückauer für das Korrekturlesen meiner Diplomarbeit und die Verbesserungsvorschläge bedanken, die ich im Großen und Ganzen umgesetzt habe.

Vielen Dank euch allen!



I Abkürzungen

LEP Large Electron Collider
LHC Large Hadron Collider
PAW Physics Analysis Workstation
QCD QuantenChromoDynamik
QED QuantenElektroDynamik
SLC SLAC Linear Electron Positron Collider



Symbolverzeichnis

α	elektromagnetische Kopplungskonstante
α_s	starke Kopplungskonstante
$\not{\partial}$	$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial}$
\not{p}	$\gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p}$
ϵ	Parameter zur Angabe der Kausalität des Propagators
Γ	Zerfallsbreite
γ^μ	Dirac-Matrix
γ_E	Euler-Mascheroni-Konstante ($\gamma \approx 0,5772$)
γ_{AI}	Subgraph (asymptotisch irreduzibel)
\mathcal{L}	Lagrangedichte
\mathcal{M}	Matrizelement
$\mathcal{O}(x)$	Terme der Ordnung x (Landau-Symbol)
$\mathcal{T}^{(N)}$	Taylorentwicklung N -ter Ordnung
d^4p	Differential des vierdimensionalen Minkowski-Raums
$d^d p$	Differential des d -dimensionalen Minkowski-Raums
e^+, e^-	Positron, Elektron
W^\pm, Z	W^\pm -Boson, Z -Boson
μ	Renormierungsskala
Π	skalare Vakuumpolarisationsfunktion
$\Pi^{\mu\nu}$	tensorielle Vakuumpolarisationsfunktion
σ	Wirkungsquerschnitt
\sqrt{s}	Schwerpunktsenergie
γ, γ^*	Photon, virtuelles Photon
μ^+, μ^-	Antimyon, Myon
ϵ	Parameter der dimensionalen Regularisierung
A^μ, ψ	renormierte Felder
A_0^μ, ψ_0	nackte Felder
d	Raum-Zeit-Dimension
e, m	renormierte Parameter
e_0, m_0	nackte Parameter
G_F	Fermikonstante, $G_F = \sqrt{2}g^2/(8m_Z^2 \cos^2 \vartheta)$



$g_{\mu\nu}$	Minkowski-Metrik, $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$
$m_{e,\mu}$	Masse des Elektrons, Myons
m_H	Higgsmasse
$m_{u,d,c,s,b,t}$	Masse des Up-, Down-, Charm-, Strange-, Bottom- bzw. Top-Quarks
N_f	Gesamtanzahl der Quarks
N_h	Anzahl der schweren Quarks
N_l	Anzahl der leichten Quarks
$R(s)$	R-Verhältnis
s_1, s_2, s_3, s_4	Eigenwerte des Spins in z -Richtung
u, \bar{u}, v, \bar{v}	Dirac-Spinoren
Z_m	Renormierungskonstante der Masse
$Z_{\alpha_s} = Z_g^2$	Renormierungskonstante der starken Kopplung
g	Gluon
H	Higgsteilchen



Index

- Auswahlregel, 178
- B-Meson, 71
- Babar, 71
- Baumgraphenniveau, 3, 8, 73, 76, 161, 175
- Belle, 71
- Bjorken-Prozess, 10
- Cleo, 71
- Counterterm, 38, 39, 47, 48, 86–90, 147, 148
- CP-Verletzung, 71
- Divergenz, 14, 17, 87, 141–145, 158
- Sub, 86
 - infrarote, 14, 23, 76, 142
 - kolineare, 142
 - lineare, 143
 - logarithmische, 143
 - quadratische, 143
 - Sub-, 38, 39, 48, 86–90
 - ultraviolette, 142
- Divergenzgrad, 143
- Eichboson, 5, 7, 9
- Eichinvarianz, 5, 75, 77
- Eichtheorie, 26, 40, 49
- ein-Teilchen-irreduzibel, 19, 84, 145, 146
- Elektron-Positron-Kollision, 71, 73, 175
- Entwicklung
- asymptotische, 2, 13–15, 17–19, 23, 29, 30, 35, 43, 57, 61, 84, 91, 94, 104, 105, 116–118, 163, 164, 169, 171
- Exp, 3, 30–32, 85, 117, 161–169
- Feld, 147, 162
- antikommutierendes, 162
 - externes, 162
 - kommutierendes, 162
 - nacktes, 145
 - renormiertes, 147
 - skalares, 142
- Feynmangraph, 17, 18
- Feynmanintegral, 14, 127, 142, 144, 158, 170
- Feynmanregel, 142, 147, 162, 171
- nackte, 145
- Form, 2, 3, 30, 32, 36, 39, 55, 57, 61, 85, 111, 112, 114, 115, 121, 139, 140, 155–159, 168, 173–175
- Fragmentation, 72
- Furrysches Theorem, 177
- Gupta-Bleuler-Formalismus, 5
- GUT-Skala, 7
- Hadron, 2, 71, 72
- Hadronisierung, 72
- Higgsmasse, 1, 2, 5–7, 9–11, 40, 43, 54, 118
- große, 7, 9
 - intermediäre, 7, 9
 - niedrige, 7
- Higgsstrahlungsprozess, 10
- Higgsteilchen, 1, 2, 5, 7, 9–11, 31, 82, 117
- Higgszerfall, 1, 2, 7, 8, 21–23, 29, 40, 82, 83, 118, 119, 121, 127, 134
- Integral
- Propagatortyp, 23, 32, 61, 152, 171
- Källen-Funktion, 126



- Ko-Subdiagramm, 23, 31, 58, 62, 85, 166–169
 Ko-Subgraph, 17–20
 Korrektur, 1, 6, 23, 24, 26, 40, 74–76, 78, 83, 103, 145, 146
 QCD-, 30, 74, 75
 reelle, 25, 83
 Vertex-, 38
 virtuelle, 25, 83
 Kugelflächenfunktion, 178
 Kugelkoordinaten
 vierdimensionale, 142, 143

 Lagrangedichte, 147
 QED, 144, 145, 147
 Landau-Pol, 6, 7, 72
 Landau-Yang-Theorem, 3, 93, 106, 118, 119, 177, 178
 LEP, 2, 5, 7, 10
 LHC, 1, 5

 Masterintegral, 133, 138, 152, 170, 171
 Matad, 3, 30, 32, 37, 85, 117, 161, 165, 167, 169–171
 Matricelement, 21, 23, 29, 30, 74, 75, 121, 123, 126, 134, 175
 Mincer, 3, 23, 30, 32, 57, 61, 62, 85, 117, 161, 165, 167, 171, 174
 Myon-Paarproduktion, 76, 175

 optisches Theorem, 2, 21, 22, 24, 26, 30, 33, 61, 74, 76, 83, 117

 Parameter
 nackter, 145–147
 renormierter, 147
 Parform, 2, 55, 111, 112, 114, 115, 118–120
 Parton, 72
 Passarino-Veltman-Zerlegung, 3, 122, 127
 Power Counting, 143, 168
 Propagator, 18, 32, 144, 146, 147, 151–153, 158, 161, 162, 165, 167, 168, 171

 Σ -, 37
 -korrektur, 38, 82
 -korrekturen, 23
 Fermion-, 146, 168
 Gluon-, 168
 masselos, 15, 19
 masseloser, 18
 massiv, 15, 16
 Photon-, 75, 78, 145, 146
 renormierter, 145
 Propagatortopologie, 169

 Q2E, 3, 117, 162
 QCD, 30, 41, 72, 103, 148, 161
 QED, 144–147
 Qgraf, 3, 30, 117, 161–163, 166, 167
 Quantenfeldtheorie, 141

 R-Verhältnis, 2, 3, 73, 74, 76, 78, 90, 94, 103, 117, 119
 Regularisierung, 3, 13, 55, 143, 144
 dimensionale, 144, 158
 Pauli-Villars-, 144

 Schleifenintegral, 2, 13, 57, 61, 85, 141, 142, 144, 145, 152, 153, 169, 170
 Drei-, 61, 152
 Ein-, 13, 152, 173
 Zwei-, 61, 152
 Selbstenergie, 36, 86, 88, 141, 142, 148, 162
 Spin, 75, 175
 Störungstheorie, 2, 5–7, 9, 21, 22, 94, 141, 161, 176
 nackte, 145
 renormierte, 145
 Standardmodell, 1, 71
 Subdiagramm, 29–32, 62, 84, 85, 165–169
 Triangel, 103
 Triangel-, 24, 36, 58, 62, 103, 105, 107, 118, 119
 Subgraph, 17–20, 163–165, 167, 168
 asymptotisch irreduzibler, 17, 18
 Subgraph



- asymptotisch irreduzibler, 212
- Topologie, 31, 32, 58, 62, 64, 70, 78, 153,
162, 165, 167, 169, 171, 174
 - Drei-Schleifen-, 64–66, 172
 - Ein-Schleifen-, 31, 62, 171
 - Quell-, 165, 168
 - Vier-Schleifen-, 103
 - Ziel-, 165, 167
 - Zwei-Schleifen-, 63, 171
- Trivialitätsschranke, 7
- Unitaritätsschranke, 5, 6
- Vektorboson, 5, 177, 178
- Vertex, 17, 36, 37, 147, 162, 165, 166
 - $gg\Sigma$, 37
 - Drei-Gluon-, 35, 36
 - Vier-Gluon-, 36, 37
- Verzweigungsverhältnis, 1, 7–9
- Vorwärtsstreuamplitude, 21, 23, 74
- W-Boson, 5
- Wechselwirkung, 1, 7
 - ϕ^3 -, 142
 - elektroschwache, 72
 - schwache, 5
 - starke, 72
- Wirkungsquerschnitt, 2, 7, 21, 55, 73, 74,
76, 141, 144, 174, 176
- Z-Boson, 5, 10, 11
- Zerfall, 8–11, 29, 40, 72, 117, 126, 177,
178
 - bosonischer, 6
 - fermionischer, 6
- Zerfallsbreite, 1, 2, 7, 9, 21–24, 29, 30,
33, 34, 39, 44, 49, 56, 57, 117,
118, 121, 126, 141, 144



Literaturverzeichnis

- [1] HIGGS, Peter W.: Broken symmetries, massless particles and gauge fields. In: *Phys. Lett.* 12 (1964), S. 132–133
- [2] SMIRNOV, V. A.: *Applied Asymptotic Expansions in Momenta and Masses*. Springer-Verlag, 2001
- [3] VERMASEREN, J. A. M.: New features of FORM. (2000)
- [4] PESKIN, M. E. ; SCHROEDER, V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995
- [5] TENTYUKOV, M. ; VERMASEREN, J. A. M.: The multithreaded version of FORM. (2007)
- [6] TENTYUKOV, M. ; STAUDENMAIER, H. M. ; VERMASEREN, J. A. M.: ParFORM: Recent development. In: *Nucl. Instrum. Meth.* A559 (2006), S. 224–228
- [7] HARLANDER, R. ; STEINHAUSER, M.: Automatic computation of Feynman diagrams. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 43 (1999), S. 167–228
- [8] NOGUEIRA, P.: Automatic Feynman graph generation. In: *J. Comput. Phys.* 105 (1993), S. 279–289
- [9] SEIDENSTICKER, T.: *Using q2e and exp*
- [10] SEIDENSTICKER, T.: Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams. (1999)
- [11] STEINHAUSER, Matthias: MATAD: A program package for the computation of massive tadpoles. In: *Comput. Phys. Commun.* 134 (2001), S. 335–364
- [12] LARIN, S. A. ; TKACHOV, F. V. ; VERMASEREN, J. A. M.: The FORM version of MINCER. . – NIKHEF-H-91-18
- [13] YANG, Chen-Ning: Selection Rules For The Dematerialization Of A Particle Into Two Photons. In: *Phys. Rev.* 77 (1950), S. 242–245
- [14] DJOUADI, Abdelhak: Higgs phenomenology: A short review. In: *Acta Phys. Polon.* B27 (1996), S. 3837–3853
- [15] RIESELDMANN, Kurt: Limitations of a standard model Higgs boson. (1997)



- [16] HARLANDER, Robert: Asymptotic expansions: Methods and applications. In: *Acta Phys. Polon.* B30 (1999), S. 3443–3462
- [17] ELLIS, John R. ; GAILLARD, Mary K. ; NANOPOULOS, Dimitri V.: A Phenomenological Profile of the Higgs Boson. In: *Nucl. Phys.* B106 (1976), S. 292
- [18] SHIFMAN, Mikhail A. ; VAINSHTEIN, A. I. ; VOLOSHIN, M. B. ; ZAKHAROV, Valentin I.: Low-Energy Theorems for Higgs Boson Couplings to Photons. In: *Sov. J. Nucl. Phys.* 30 (1979), S. 711–716
- [19] LARIN, S. A. ; RITBERGEN, T. van ; VERMASEREN, J. A. M.: The Large top quark mass expansion for Higgs boson decays into bottom quarks and into gluons. In: *Phys. Lett.* B362 (1995), S. 134–140
- [20] SPIRA, M. ; DJOUADI, A. ; GRAUDENZ, D. ; ZERWAS, P. M.: Higgs boson production at the LHC. In: *Nucl. Phys.* B453 (1995), S. 17–82
- [21] DJOUADI, A. ; SPIRA, M. ; ZERWAS, P. M.: Production of Higgs bosons in proton colliders: QCD corrections. In: *Phys. Lett.* B264 (1991), S. 440–446
- [22] MUTA, T.: *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories.* World Scientific Publishing, 1998
- [23] CHETYRKIN, K. G. ; KNIEHL, Bernd A. ; STEINHAUSER, M.: Hadronic Higgs decay to order $\alpha(s)^{**4}$. In: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), S. 353–356
- [24] STEINHAUSER, Matthias: Results and techniques of multi-loop calculations. In: *Phys. Rept.* 364 (2002), S. 247–357
- [25] GROSS, D. J. ; WILCZEK, Frank: ULTRAVIOLET BEHAVIOR OF NON-ABELIAN GAUGE THEORIES. In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), S. 1343–1346
- [26] POLITZER, H. D.: RELIABLE PERTURBATIVE RESULTS FOR STRONG INTERACTIONS? In: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973), S. 1346–1349
- [27] CASWELL, William E.: Asymptotic Behavior of Nonabelian Gauge Theories to Two Loop Order. In: *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974), S. 244
- [28] LARIN, S. A. ; VERMASEREN, J. A. M.: The Three loop QCD Beta function and anomalous dimensions. In: *Phys. Lett.* B303 (1993), S. 334–336
- [29] LARIN, S. A.: The Renormalization of the axial anomaly in dimensional regularization. In: *Phys. Lett.* B303 (1993), S. 113–118
- [30] CHETYRKIN, K. G.: Quark mass anomalous dimension to $O(\alpha(s)^{**4})$. In: *Phys. Lett.* B404 (1997), S. 161–165
- [31] CHETYRKIN, K. G. ; KUHN, Johann H. ; STEINHAUSER, M.: RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. In: *Comput. Phys. Commun.* 133 (2000), S. 43–65
- [32] A combination of CDF and D0 results on the mass of the top quark. (2007)



- [33] BETHKE, Siegfried: Experimental tests of asymptotic freedom. In: *Prog. Part. Nucl. Phys.* 58 (2007), S. 351–386
- [34] GROUP, Particle D.: *The Review of Particle Physics: <http://pdg.lbl.gov/>*
- [35] STEVENSON, Paul M.: Optimized Perturbation Theory. In: *Phys. Rev.* D23 (1981), S. 2916
- [36] WOLFRAM, Stephen: PARTON AND HADRON PRODUCTION IN $e^+ e^-$ ANNIHILATION. . – Largely based on a talk given at 15th Rencontre de Moriond, Les Arcs, France, Mar 9-21, 1980
- [37] HOANG, A. H. ; JEZABEK, M. ; KÜHN, Johann H. ; TEUBNER, T.: Radiation of heavy quarks. In: *Phys. Lett.* B338 (1994), S. 330–335
- [38] HARLANDER, Robert V. ; STEINHAUSER, Matthias: rhad: A program for the evaluation of the hadronic R-ratio in the perturbative regime of QCD. In: *Comput. Phys. Commun.* 153 (2003), S. 244–274
- [39] LARIN, S. A. ; RITBERGEN, T. van ; VERMASEREN, J. A. M.: The Large quark mass expansion of $\Gamma(Z_0 \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$ in the order α_s^3 . In: *Nucl. Phys.* B438 (1995), S. 278–306
- [40] GROOTE, S. ; PIVOVAROV, A. A.: Low-energy gluon contributions to the vacuum polarization of heavy quarks. In: *JETP Lett.* 75 (2002), S. 221
- [41] KALLEN, A. O G. ; SABRY, A.: Fourth order vacuum polarization. In: *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.* 29N17 (1955), S. 1–20
- [42] SCHWINGER, Julian S.: PARTICLES, SOURCES AND FIELDS. VOLUME II. . – Reading 1973, 459p
- [43] SCHNEIDER, Frank: *DM: <http://www2.uni-siegen.de/~pciii/dm/#kurzinfo>*
- [44] WENTZEL, Gregor: Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. (1943), S. 201–204
- [45] FEYNMAN, R. P.: Relativistic cutoff for quantum electrodynamics. In: *Phys. Rev.* 74 (1948), S. 1430–1438
- [46] SCHWINGER, Julian S.: Quantum electrodynamics. I: A covariant formulation. In: *Phys. Rev.* 74 (1948), S. 1439
- [47] DYSON, F. J.: The Radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman. In: *Phys. Rev.* 75 (1949), S. 486–502
- [48] BOGOLJUBOV, D. V.: *Quantenfelder*. Physik-Verlag Weinheim, 1984
- [49] MANDL, F. ; SHAW, G.: *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons Inc, 1984

