

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: ANTIFERROMAGNETISMUS UND HOCHTEMPERATURSUPRALEITUNG

Prof. Dr. Wölfle und Dr. Greiter

Vorlesung Wintersemester 2008/2009

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 2. Januar 2010

Mitschrieb der Vorlesung ANTIFERROMAGNETISMUS UND HOCHTEMPERATURSUPRALEITUNG
von Herrn Prof. Dr. WÖLFLE und Herrn Dr. GREITER im Wintersemester 2008/2009
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

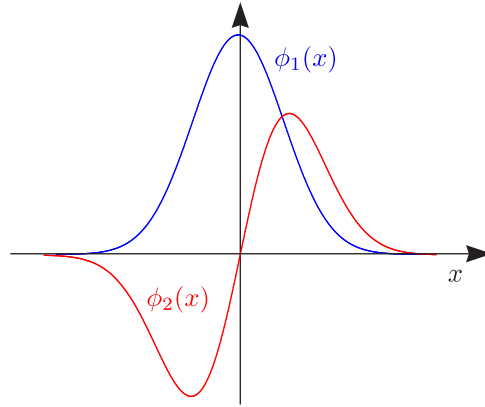
1	Gegenüberstellung: Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus	5
1.1	Ferromagnetischer Austausch	5
1.2	Antiferromagnetischer Austausch	6
1.2.1	Das Hubbard-Modell	6
1.2.2	Fazit	7
1.3	Das t - J -Modell	7
2	Magnetische Ordnung und Spinwellentheorie	9
2.1	Mean-Field-Theorie (Molekularfeldtheorie) für das Heisenberg-Modell	9
2.2	Spinwellentheorie für Ferromagneten	10
2.3	Das Mermin-Wagner- und Nambu-Goldstone-Theorem	11
2.4	Spinwellentheorie für Antiferromagnete	12
3	Fraktionale Quantisierung in Spinketten	15
3.1	Spin-Ladungs-Teilung (Cartoons)	15
3.2	Holonen vs. Löcher	17
3.3	Das Haldane-Shastry-Modell	18
3.4	Fraktionale Statistik der Spinonen	22
3.4.1	Zur fraktionalen Statistik in zwei Dimensionen	24
3.5	Generation des Grundzustands durch Gutzwiller-Projektion	24
4	Supraleitung	27
4.1	Einleitende Bemerkungen	27
4.2	Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie (BCS-Theorie)	27
4.3	London's Gleichungen	30
4.4	Spontane Symmetriebrechung im Supraleiter	31
4.5	Effektive Feldtheorie	33
4.5.1	Landau-Ginzburg-Theorie	33
4.6	Phänomenologie und Higgs-Mechanismus	38
4.6.1	Vortex-Quantisierung	38
4.6.2	Der Higgsmechanismus im Supraleiter	39

Kapitel 1

Gegenüberstellung: Ferromagnetismus und Antiferromagnetismus

1.1 Ferromagnetischer Austausch

Wir nehmen an, dass Orbitale orthogonal sind, aber räumlich überlappen.



$$\psi_{\delta}^{\dagger}(x) = \phi_1(x)c_{1\delta}^{\dagger} + \phi_2(x)c_{2\delta}^{\dagger}. \quad (1.1)$$

$c_{1\delta}^{\dagger}$ bzw. $c_{2\delta}^{\dagger}$ sind Erzeugungsoperatoren, die Teilchen an der Stelle x im Zustand ϕ_1 bzw. ϕ_2 erzeugen. Dies stellt eine Entwicklung des Feldoperators nach den beiden Zuständen $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ dar.

$$V = \frac{1}{2} \int dx dy \sum_{\delta, \delta'} \psi_{\delta}^{\dagger}(x) \psi_{\delta'}^{\dagger}(y) v(x, y) \psi_{\delta'}(y) \psi_{\delta}(x). \quad (1.2)$$

$v(x, y)$ ist das Potential in erster Quantisierung. Das Kochrezept hier ist, den Erwartungswert für den Operator in erster Quantisierung aufzuschreiben und alle Wellenfunktionen durch Feldoperatoren zu ersetzen. V setzt sich aus dem sogenannten direkten Term (Hartree) und dem Austauschterm (Fock) zusammen. Der Austauschterm lässt sich in folgender Form schreiben:

$$J^F \sum_{\delta, \delta'} \sum_{i+j} c_{i, \delta}^{\dagger} c_{j, \delta'}^{\dagger} c_{i, \delta'} c_{j, \delta}. \quad (1.3)$$

Es gilt $J^F > 0$ für abfallende Potentiale $v(x, y)$. Außerdem gilt

$$\sum_{\delta, \delta'} \sum_{i+j} c_{i, \delta}^{\dagger} c_{j, \delta'}^{\dagger} c_{i, \delta'} c_{j, \delta} = -2 \left(\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j + \frac{1}{4} n_i n_j \right), \quad \mathbf{S}_i = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} c_{i, \delta}^{\dagger} \boldsymbol{\sigma}_{\sigma \sigma'} c_{i, \sigma'}. \quad (1.4)$$

Die Komponenten von \mathbf{S}_i erfüllen die Spinalgebra

$$[S_i^{\alpha}, S_j^{\beta}] = \varepsilon^{\alpha \beta \gamma} S_i^{\gamma} \delta_{ij}. \quad (1.5)$$

n_i ist der Dichteoperator:

$$n_i = \sum_{\sigma} c_{i, \sigma}^{\dagger} c_{i, \sigma}. \quad (1.6)$$

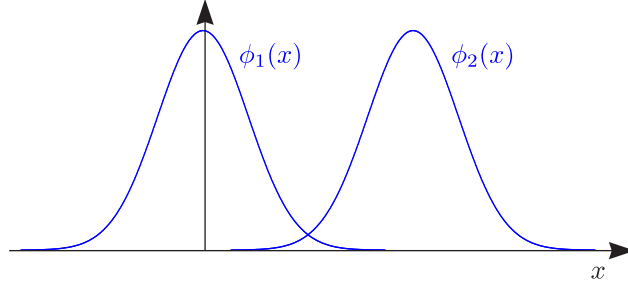
Coulomb-Abstoßung führt dazu, dass eine räumlich antisymmetrische Wellenfunktion günstiger ist. Aufgrund des Pauli-Prinzips muss sie symmetrisch im Spinraum sein und somit gilt $S_{\text{tot}} = 1$. Damit ist der Triplett-Zustand energetisch günstiger als der Singulett-Zustand mit $S_{\text{tot}} = 0$:

$$S_{\text{tot}} = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad S_{\text{tot}} = 0 : \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (1.7)$$

Vergleiche dies mit der Hundt'schen Regel, bei der die Schalen zuerst mit gleichen Spins gefüllt werden.

1.2 Antiferromagnetischer Austausch

1.2.1 Das Hubbard-Modell



Wir wollen die Situation betrachten, dass ϕ_1 und ϕ_2 nicht ganz orthogonal sind. Räumlich sollen sie weitgehend getrennt sein. Das Modell, welches wir für die beiden Gitterplätze betrachten wollen, ist das sogenannte **Hubbard-Modell**. Schauen wir uns dazu den entsprechenden Hamiltonoperator an:

$$H_{\text{Hubbard}} = -t \sum_{\langle i,j \rangle} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1). \quad (1.8)$$

Die Notation $\langle \bullet, \circ \rangle$ bedeutet, dass \bullet und \circ nächste Nachbarn sind. t nennt sich Hüpfparameter (hopping parameter). Hier gilt $\langle i, j \rangle = (1, 2)$ oder $\langle i, j \rangle = (2, 1)$. Der erste Term sorgt dafür, dass entweder ein Elektron vom ersten ins zweite Orbital gebracht wird oder umgekehrt. Dass die Orbitale nicht orthogonal sind, wird durch Einführung des Hopping-Parameters modelliert. Dann sind die Orbitale nämlich keine Eigenzustände des Hamiltonoperators und das Elektron kann zwischen den Orbitalen wechseln. Der zweite Term beschreibt eine sogenannte „On-Site-Abstoßung“. Was diese Energie U widerspiegelt, ist die potentielle Energie zweier Elektronen in demselben Potential. Es gilt hierbei

$$n_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \uparrow, \downarrow & 0 \\ 2 & \uparrow\downarrow & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Wir betrachten nun eine Entwicklung in Potenzen von $1/U$. In Störungstheorie zweiter Ordnung bekommen man Korrekturen zur Energie der Form $\Delta E \sim \mathcal{O}(t^2/U)$. Diagonalisiere H_{Hubbard} für zwei Gitterplätze:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2t^2/U & 2t^2/U & 0 \\ 0 & 2t^2/U & -2t^2/U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

wobei H in der Basis $|\bullet, \circ\rangle$ angegeben wird, wobei \bullet für den Spinzustand im ersten Orbital und \circ für den Spinzustand im zweiten Orbital steht. Die Basis ist somit

$$\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}. \quad (1.11)$$

Das zusätzliche Vorzeichen in den Nebendiagonalelementen kommt daher, weil zwei Fermionen vertauscht werden. Zur Diagonalisierung betrachten wir die 2×2 -Untermatrix

$$H = \frac{2t^2}{U} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Deren Eigenwerte und Eigenzustände sind gegeben durch

$$E_0 = -\frac{4t^2}{U}, \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (1.13)$$

$$E_1 = 0, \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (1.14)$$

Außerdem gilt $E = 0$ für die Zustände $|\psi_2\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ und $|\psi_3\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$. Bemerkung: Die Triplet-Zustände $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ und $|\psi_3\rangle$ müssen entartet sein, da $[H_{\text{Hubbard}}, \mathbf{S}_{\text{tot}}] = 0$ gilt. H_{Hubbard} ist invariant unter globalen $SU(2)$ -Spin-Rotationen.

Vergleiche mit einem Spin-Austausch-Term $J\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$. Dieser führt zu

$$E = \begin{cases} J/4 & \text{für } S = 1 \\ -3/4J & \text{für } S = 0 \end{cases}. \quad (1.15)$$

Das Produkt $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ lässt sich schreiben in der Form

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(S_1^+S_2^- + S_1^-S_2^+) + S_1^zS_2^z, \quad (1.16)$$

woraus $E = J/4$ für die Zustände $|\uparrow\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\downarrow\rangle$ klar wird. Außerdem gilt

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 - \frac{1}{2}\mathbf{S}_1^2 - \frac{1}{2}\mathbf{S}_2^2, \quad (1.17)$$

woraus sich die obigen Energien sofort berechnen lassen. Es folgt dann

$$\frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1) = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\mathbf{S}_i\mathbf{S}_j - \frac{1}{4} \right) \hat{=} J \left(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 - \frac{1}{4} \right), \quad J = \frac{4t^2}{U}. \quad (1.18)$$

Der Faktor $1/2$ wird benötigt, weil jeder Link doppelt gezählt wird.

1.2.2 Fazit

Ferromagnetismus tritt dann auf, wenn Orbitale zueinander orthogonal sind und sich gegenseitig überlappen. Beim Antiferromagnetismus sind die Orbitale nicht orthogonal. Der antiferromagnetische Austausch kommt daher zustande, weil zwei Elektronen in verschiedenen Orbitalen die Plätze tauschen können, sofern deren Spins antiparallel ausgerichtet sind. Für eine parallele Ausrichtung ihrer Spins sind die Elektronen auf ihre jeweiligen Orbitale beschränkt und sitzen fest. Durch solche virtuelle Austauschprozesse senkt sich die Energie des Zweiteilchensystems ab.

1.3 Das t - J -Modell

Dieses Modell wird uns über die ganze Vorlesung hinweg begleiten. Wir betrachten den folgenden Hamiltonoperator

$$H_{t-J} = P_G \left\{ -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i\mathbf{S}_j \right\} P_G, \quad (1.19)$$

wobei P_G der sogenannte Gutzwiller-Projektor ist. Dieser ist definiert über

$$P_G = \prod_i (1 - n_{i,\uparrow}n_{i,\downarrow}). \quad (1.20)$$

Er vernichtet doppelt-besetzte Zustände auf allen Gitterplätzen:

$$P_G\{|0\rangle, |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle\} = \{|0\rangle, |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, 0\}. \quad (1.21)$$

Der Gutzwiller-Projektor sorgt dafür, dass der t -Term nur dann beiträgt, wenn ein Elektron auf einen leeren Gitterplatz hüpfert. Dieses Modell ist einfacher als das Hubbard-Modell, da die Dimension des Hilbertraums dadurch eingeschränkt wird, dass es keine doppelt besetzten Zustände gibt. Es gilt $\dim(\mathcal{H}) = 4^N$ für das Hubbard-Modell und $\dim(\mathbf{H}) = 3^N$ für das t - J -Modell. Der erste Term verlangt Ordnung im Impulsraum und der zweite antiferromagnetische Ordnung im Ortsraum. Die beiden Terme vertragen sich überhaupt nicht, weil Ordnung im Orts- bzw. Impulsraum sich gegenseitig ausschließen.

Kapitel 2

Magnetische Ordnung und Spinwellentheorie

2.1 Mean-Field-Theorie (Molekularfeldtheorie) für das Heisenberg-Modell

Das Heisenberg-Modell wird parametrisiert über den folgenden Hamiltonoperator:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \gamma \mathbf{B} \sum_i \mathbf{S}_i, \quad (2.1)$$

mit beliebigen SU(2)-Spins, welche der Vertauschungsrelation

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad (2.2)$$

genügen. Wir verwenden im Folgenden die Notation $\gamma \mathbf{B} = \mathbf{h}$, wobei \mathbf{B} ein äußeres Magnetfeld ist. Wir betrachten einen Ferromagneten, also sei $J > 0$. Bei der Temperatur $T = 0$ ordnen sich alle N Spins parallel in Richtung von \mathbf{B} an: $|\Psi_0\rangle = |\uparrow \uparrow \dots \uparrow\rangle$. Dies ist ein exakter Eigenzustand des Hamiltonoperators. Für parallele Spins gilt

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_{\text{tot}}^2 - 2\mathbf{S}_1^2) = \frac{1}{2} [2s(2s+1) - 2s(s+1)] = s^2, \quad (2.3)$$

mit der Spinquantenzahl s . Die Grundzustandsenergie folgt damit zu

$$E_0 = -J \frac{z}{2} N s^2 - h N s, \quad (2.4)$$

wobei z die Koordinationszahl, also die Anzahl der nächsten Nachbarn im Gitter ist. Der Gesamtspin von $|\Psi_0\rangle$ ist gleich Ns . Dann hat man $2Ns + 1$ entartete Zustände.

$$|\psi_0\rangle_{S_z = Ns - n} = (S_{\text{tot}}^-)^n |\psi_0\rangle, \quad S_{\text{tot}}^- = \sum_i S_i^-, \quad n = 0, 1, \dots, 2Ns. \quad (2.5)$$

Beispielsweise ist $|\uparrow \uparrow \dots \uparrow \downarrow\rangle$ kein Eigenzustand des Hamiltonoperators, weil $S^- S^+$ die beiden letzten Spins vertauschen würde.

$$|\psi_0\rangle_{S_z = Ns - 1} = \sum_j |\uparrow \uparrow \dots \uparrow \downarrow \uparrow \dots \uparrow\rangle, \quad (2.6)$$

wobei der Spin am Platz j nach unten zeigt (geflippt ist). Durch ein Magnetfeld $\mathbf{B} \neq \mathbf{o}$ ist die Symmetrie **spontan gebrochen**. Der Ordnungsparameter \mathbf{S}_{tot} (beim Ferromagneten) vertauscht mit dem Hamiltonoperator: $[\mathbf{S}_{\text{tot}}, H] = 0$. Somit können Eigenzustände des Ordnungsparameters gleichzeitig Eigenzustände des Hamiltonoperators sein. Dies gilt nicht für Antiferromagneten und Supraleiter.

In der Molekularfeldtheorie vernachlässigt man alle Fluktuationen; $\mathbf{S}_i - \langle \mathbf{S}_i \rangle$ soll also klein sein (verstanden als Erwartungswerte der Zustände, die uns interessieren). Dies entspricht einer klassischen Theorie. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j &= (\mathbf{S}_i - \langle \mathbf{S}_i \rangle + \langle \mathbf{S}_i \rangle) (\mathbf{S}_j - \langle \mathbf{S}_j \rangle + \langle \mathbf{S}_j \rangle) = \\ &= (\mathbf{S}_i - \langle \mathbf{S}_i \rangle) (\mathbf{S}_j - \langle \mathbf{S}_j \rangle) + \mathbf{S}_i \langle \mathbf{S}_j \rangle + \langle \mathbf{S}_i \rangle \mathbf{S}_j - \langle \mathbf{S}_i \rangle \langle \mathbf{S}_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Der erste Summand wird vernachlässigt. Betrachten wir einen homogenen Zustand $\langle \mathbf{S}_i \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle$, so gilt

$$H_{\text{MF}} = -(\mathbf{h} + \mathbf{h}_{\text{MF}}) \sum_i \mathbf{S}_i - JN \frac{z}{2} \langle \mathbf{S} \rangle^2, \quad \mathbf{h}_{\text{MF}} = Jz \langle \mathbf{S} \rangle. \quad (2.8)$$

Die Zustandssumme ist gegeben durch

$$Z = (Z_i)^N, \quad Z_i = \sum_{s_i = \pm 1/2} \exp(-\beta H_i), \quad H_i = -(h + h_{\text{MF}}) S_i, \quad (2.9)$$

wobei wir den dritten Term in H_{MF} nicht mitnehmen werden, da dieser nur zu einem zusätzlichen konstanten Vorfaktor führt. Das Ergebnis für die Zustandssumme ist gegeben durch

$$Z_i = 2 \cosh \left(\frac{1}{2} \beta (h + h_{\text{MF}}) \right). \quad (2.10)$$

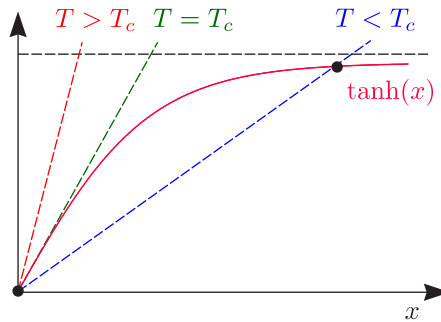
Dies gilt für Spin 1/2 in z -Richtung. Weiterhin folgt

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{h + h_{\text{MF}}} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(Z_i) = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{h + h_{\text{MF}}}{2k_B T} \right). \quad (2.11)$$

Für $h = 0$ (also ohne externes magnetisches Feld) können wir die Gleichung auf die Form

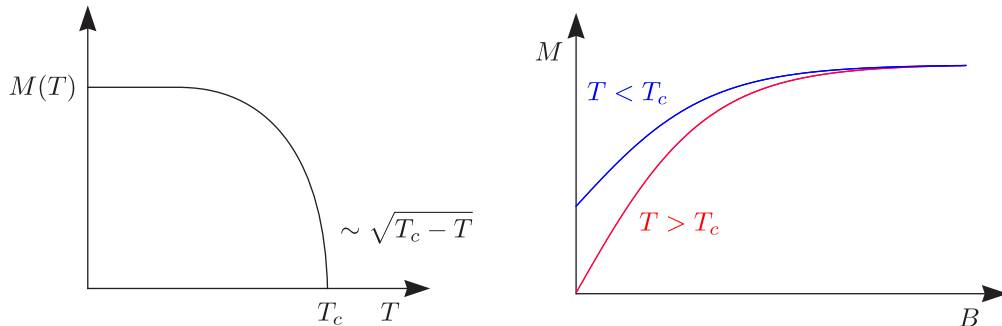
$$\frac{4k_B T}{Jz} x = \tanh(x), \quad (2.12)$$

bringen. Die Gleichung lässt sich graphisch lösen.



Für $T < T_c$ gibt es zwei Lösungen und die zweite entspricht der spontanen Magnetisierung. Es gibt einen geordneten Zustand für $T < T_c$ mit

$$k_B T_c = \frac{Jz}{4}. \quad (2.13)$$



2.2 Spinwellentheorie für Ferromagneten

Wir betrachten das Heisenbergmodell im geordneten Zustand, also für $T < T_c$, und für allgemeinen Spin s . Die Idee ist, Spinoperatoren durch bosonische Operatoren zu ersetzen:

$$S_i^+ = \hbar \sqrt{2S - b_i^\dagger b_i}, \quad S_i^- = \hbar b_i^\dagger \sqrt{2S - b_i^\dagger b_i}, \quad S^z = \hbar (S - b_i^\dagger b_i), \quad (2.14)$$

und wird als Holstein-Primakov-Transformation bezeichnet. b_i^\dagger und b_i sind bosonische Erzeuger bzw. Vernichter. Diese Transformation ist exakt und es gilt

$$[S^\alpha, S^\beta] = i\hbar \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} S^\gamma. \quad (2.15)$$

$|\uparrow \dots \uparrow\rangle$ entspricht einem Zustand ohne Bosonen. Durch Flippen von Spinzuständen werden Bosonen erzeugt bzw. vernichtet. Wir werden eine Störungstheorie um diesen geordneten Zustand durchführen. Setzen wir diese Transformationsgleichungen in den Hamiltonoperator ein und verwenden

$$\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = S_i^z S_j^z + \frac{1}{2}(S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+), \quad (2.16)$$

so folgt:

$$H = -\hbar^2 \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \left(\frac{1}{2} b_i^\dagger \sqrt{2S - b_i^\dagger b_i} \sqrt{2S - b_j^\dagger b_j} b_j + \text{h.c.} + S^2 - 2S b_i^\dagger b_i + b_i^\dagger b_i b_j^\dagger b_j \right) + \hbar h \left(NS - \sum_i b_i^\dagger b_i \right). \quad (2.17)$$

Um besser rechnen zu können, machen wir eine Näherung $\langle b_i^\dagger b_i \rangle \ll S$, was eine sehr gute Näherung ist für große Gitter. Weiterhin benutzen wir

$$\sqrt{2S - b_i^\dagger b_i} \approx \sqrt{2S} \left(1 - \frac{b_i^\dagger b_i}{4S} + \dots \right), \quad (2.18)$$

wobei alle Terme ab dem zweiten vernachlässigt werden sollen. Insgesamt vernachlässigen wir alle Terme quadratischer Ordnung in $b_i^\dagger b_i$ (lineare Spinwellentheorie). Wir setzen ab jetzt $\hbar = 1$ und erhalten

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} S(b_i^\dagger b_j + b_j^\dagger b_i - b_i^\dagger b_i - b_j^\dagger b_j) - N \frac{z}{2} J S^2 + h \left(NS - \sum_i b_i^\dagger b_i \right). \quad (2.19)$$

Durch Fouriertransformation

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j) b_j, \quad b_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j) b_j^\dagger. \quad (2.20)$$

folgt

$$H = \text{const.} + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad \omega_j = S(J(0) - J(k)) + h, \quad J(k) = J \sum_\delta \exp(i\mathbf{k} \cdot \delta) \equiv z \cdot \gamma(k), \quad (2.21)$$

wobei \sum_δ die Summe über alle Verbindungsvektoren ist. Für das zweidimensionale quadratische Gitter ist das gegeben durch

$$J(k) = 2[\cos(k_x) + \cos(k_y)], \quad (2.22)$$

für Gitterkonstante $a = 1$.

2.3 Das Mermin-Wagner- und Nambu-Goldstone-Theorem

Da wir uns mit Bosonen beschäftigen, können wir thermische Erwartungswerte $\langle b_n^\dagger b_n \rangle$ berechnen.

$$\hat{H} = \text{const.} + \sum_k \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad (2.23)$$

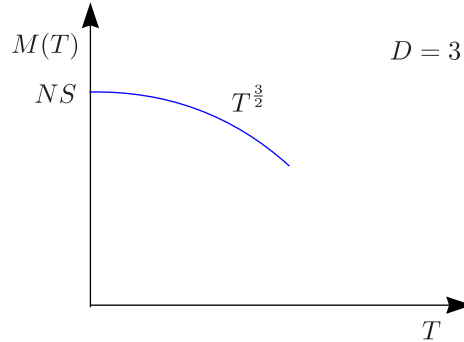
mit

$$\omega_k = Dk^2. \quad (2.24)$$

Je mehr die bosonischen Anregungen vorhanden sind, umso schlechter wird die Näherung. Die Näherung ist jedoch für kleine Temperaturen ausreichend. Ausgehend von einem Grundzustand, bei dem alle Spins nach oben zeigen, gilt für die Magnetisierung:

$$N \langle S^z \rangle = N \cdot S = \sum_k \langle b_k^\dagger b_k \rangle = \int d^D k \frac{1}{\exp(\beta \omega_k) - 1} \approx \int dk k^{D-1} \approx \int dk k^{D-1} \frac{1}{\exp(\beta D k^2) - 1} \approx \text{Zahl} \times T^{\frac{D}{2}}. \quad (2.25)$$

Die Zahl ist endlich für $D = 3$ und Unendlich für $D \leq 2$. In diesem Zusammenhang kommen wir zum **Mermin-Wagner-Theorem**. Dieses besagt, dass es für $D \leq 2$ und $T > 0$ keine spontane Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie (wie beispielsweise $U(1)$, $SO(2)$, $SU(2)$, $SO(3)$) gibt. Dies gilt nicht für diskrete Symmetrien wie $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$. Dies zeigt sich dadurch, dass spontane Symmetriebrechung bei einer Ising-Kette in zwei Dimensionen auch für $T > 0$ möglich ist. Wir betrachten „exakte“ 1-Magnon-Zustände $|\psi_k\rangle = b_k^\dagger |\psi_0\rangle$. Sind im Grundzustand $|\psi_0\rangle$ alle Spins nach oben ausgerichtet, so ist $|\psi_k\rangle$ ein Eigenzustand.



In diesem Modell wird die Wechselwirkung zwischen den Magnonen vernachlässigt. **Nambu-Goldstone-Theorem:** In einem Zustand mit einer spontan gebrochenen **kontinuierlichen Symmetrie** gibt es eine Anregung mit Energie $\omega(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow k_0$ (Goldstone-Boson). (Eine Ausnahme bildet der sogenannte Higgs-Mechanismus.) Wenn Goldstone-Bosonen an ein Eichfeld gekoppelt sind, dann werden sie vom Eichfeld aufgefressen, woraufhin das Eichfeld massiv wird. Danach sind keine Goldstonemoden mehr vorhanden. Bei Spinwellen gibt es eine sanfte Deformierung der Richtung des Spins, die sich wie eine Welle durch den Kristall zieht. Dies ist der Grund, warum die Theorie keine Energielücke hat. Auch bei Phononen gibt es Goldstonemoden, wenn die Translationssymmetrie des Kristalls gebrochen ist. Im Gegensatz dazu tritt bei der Dichteschwingung eines Elektronengases in einem positiv geladenen Hintergrund (langreichweitiges Coulombfeld) eine Energielücke auf, weil auch schon kleine Auslenkungen um den Grundzustand Energie kosten.

2.4 Spinwellentheorie für Antiferromagnete

Wir betrachten den Hamiltonoperator

$$H_{AF} = \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j - \mathbf{h} \sum_i \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{h} = \gamma \mathbf{B}, \quad J > 0. \quad (2.26)$$

Wir betrachten Gitter, die man in **zwei Untergitter** A und B zerlegen kann, sogenannte bi-partite Gitter. Ein Beispiel dafür ist das hyperkubische Gitter:

$$\begin{array}{ccc} A & B & A \\ B & A & B \end{array}$$

Für ein Dreiecksgitter

$$\begin{array}{ccccc} & C & & A & \\ & A & B & & C \\ B & & C & A & B \end{array}$$

funktioniert unsere Spinwellentheorie nicht, da es nicht bi-partit ist. (Dies funktioniert jedoch beispielsweise für eine $SU(3)$ -Theorie.) Beim Antiferromagneten gibt es die Néel-Ordnung, die charakterisiert ist durch

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array}$$

Der Néel-Zustand ist **kein** Eigenzustand von H_{AF} . (Es gilt nämlich beispielsweise $S^- S^+ | \uparrow, \downarrow \rangle \sim | \downarrow, \uparrow \rangle$.) Wir betrachten nun die linearisierte **Holstein-Primakov-Transformation**, bei der Terme mit Wurzeln von a und a^\dagger vernachlässigt werden. Die Störung findet um den Néel-Zustand statt. Auf Untergitter A nehmen wir an, dass der Spin nach oben zeigt, womit der Aufsteigeoperator ein Boson-Vernichtungsoperator ist:

$$S_i^+ = a_i \sqrt{2S}, \quad S_i^- = a_i^\dagger \sqrt{2S}, \quad S^z = S - a_i^\dagger a_i. \quad (2.27)$$

Auf Untergitter B zeige der Spin nach unten:

$$S_j^+ = b_j^\dagger \sqrt{2S}, \quad S_j^- = b_j \sqrt{2S}, \quad S_j^z = -S + b_j^\dagger b_j. \quad (2.28)$$

Einsetzen liefert den folgenden Hamiltonoperator:

$$H = -J \frac{z}{2} N S^2 + JS \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^\dagger a_i + b_j^\dagger b_j + a_i^\dagger b_j^\dagger + a_i b_j), \quad (2.29)$$

wobei $i \in \{A\}$ und $j \in \{B\}$ gilt. Nun führen wir eine Fouriertransformation durch, wobei wir beachten müssen, dass die Operatoren a, a^\dagger bzw. b, b^\dagger jeweils nur auf den Untergittern A und B wirken:

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_i \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i) a_i, \quad b_n = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_j \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_j) b_j, \quad (2.30)$$

wobei das Minuszeichen in der zweiten Transformation die Rechnung vereinfacht. Dies liefert dann

$$H = -JN \frac{z}{2} S^2 + JzS \sum_{\mathbf{k}} \left[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}) \right], \quad z\gamma_{\mathbf{k}} = \sum_{\boldsymbol{\delta}} \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\delta}), \quad (2.31)$$

wobei $\boldsymbol{\delta}$ die Gittervektoren sind. Beispielsweise gilt für ein kubisches Gitter

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{1}{3} (\cos k_x + \cos k_y + \cos k_z). \quad (2.32)$$

Der Hamiltonoperator lässt sich über eine Bogoliubov-Transformation diagonalisieren. Diese unterscheidet sich für Fermionen und Bosonen. Im Falle von Bosonen gilt:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = \cosh(\theta_{\mathbf{k}}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} - \sinh(\theta_{\mathbf{k}}) \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \quad (2.33a)$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}} = -\sinh(\theta_{\mathbf{k}}) \hat{\alpha}_{\mathbf{k}}^\dagger + \cosh(\theta_{\mathbf{k}}) \hat{\beta}_{-\mathbf{k}}. \quad (2.33b)$$

Genau dann sind die Vertauschungsrelationen

$$[\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad [\alpha_{\mathbf{k}}, \beta_{\mathbf{k}}] = [\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger, \beta_{\mathbf{k}}^\dagger] = 0, \quad (2.34)$$

erfüllt. Bei Fermionen müssen die hyperbolischen Funktionen durch entsprechende trigonometrische Funktionen ersetzt werden, um die Antivertauschungsrelationen zu berücksichtigen. Die Transformation (2.33) führt zu

$$H = -JN \frac{z}{2} S(S+1) + \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (\alpha_{\mathbf{k}}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}} + \beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}} + 1), \quad (2.35)$$

wobei alle anderen Terme verschwinden, wenn wir $\tanh(2\theta_{\mathbf{k}}) = \gamma_{\mathbf{k}}$ wählen. $\theta_{\mathbf{k}}$ ist zunächst beliebig und muss natürlich so gewählt werden, dass H diagonal ist, was ja Sinn und Zweck der Transformation ist. Des Weiteren gilt

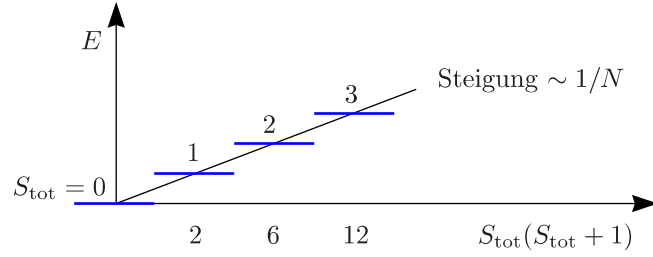
$$\omega_{\mathbf{k}} = JzS \sqrt{1 - \gamma_{\mathbf{k}}^2} \approx c|k|, \quad (2.36)$$

für kleine $|k|$. Dies entspricht einer masselosen Mode, also dem Goldstone-Theorem. Das Verhalten von $\omega_{\mathbf{k}}$ unterscheidet sich in der Hinsicht von Ferromagneten, als dass es linear und nicht quadratisch verläuft. Bei Ferromagneten gilt nämlich $\omega_{\mathbf{k}} \propto k^2$, da der Ordnungsparameter (\mathbf{S}_{tot}) eine Erhaltungsgröße ist: $[H, \mathbf{S}_{\text{to}}] = 0$. Da die beiden Spins auf den Untergittern mit unterschiedlichen Vorzeichen eingehen, ist der Ordnungsparameter $\mathbf{N} = \mathbf{S}_{\text{tot}}^A - \mathbf{S}_{\text{tot}}^B$ keine Erhaltungsgröße und es gilt $\omega \propto |k|$.

Es gibt $2S_{\text{tot}} + 1$ entartete Grundzustände beim Ferromagneten, wobei $S_{\text{tot}} = NS$ und $m_z = -S, \dots, +S$. Beim Antiferromagneten gilt $[\mathbf{N}, H] = 0$, jedoch auch $[\mathbf{S}_{\text{tot}}, H] = 0$. S_{tot} ist aber hier nicht der Ordnungsparameter. Eigenzustände von H sind auch Eigenzustände von \mathbf{S}_{tot} . Die Möglichkeiten für den totalen Spin sind $S_{\text{tot}} = 0, 1, \dots, NS$. Die Kombination zweier Spin-1/2 liefert einen Singulett-Zustand und drei Triplettzustände:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1. \quad (2.37)$$

Theorem von Marshall: Beim Heisenberg-Antiferromagneten ist der Grundzustand ein **Singulett** (N gerade). Anderson „tower of states“ (Rotationen im Spinraum):



Für $N \mapsto \infty$ gibt es keine Energielücke zwischen den Zuständen. Wir können dann Zustände mit $S_{\text{tot}} = 0, 1, 2, 3, \dots, \mathcal{O}(\sqrt{N})$ kombinieren (da sie alle entartet sind), um einen Zustand mit ausgerichtetem Néel-Vektor \mathbf{N} zu erzeugen. Es gibt keine lokalen Matrixelemente zwischen Zuständen mit verschiedenem \mathbf{N} und deshalb können wir nicht von spontaner Symmetriebrechung sprechen. Es genügt, **einen** dieser Zustände zu betrachten.

$$E = \frac{\mathbf{L}^2}{2I} \sim \frac{\mathbf{S}_{\text{tot}}^2}{SN} \sim \frac{S_{\text{tot}}(S_{\text{tot}} + 1)}{N}, \quad (2.38)$$

wobei S der Spin an einem einzelnen Gitterplatz (beispielsweise $S = 1/2$ für Spin-1/2-Gitter) und I das Trägheitsmoment (klassisch: $\sum_i m_i r_i^2$) ist.

Zur antiferromagnetischen Spinwellentheorie:

$$M_S = |\langle \mathbf{N} \rangle| = S \left\{ 1 - \frac{1}{2S} \left(\frac{2}{N} \sum_k \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}} - 1 \right) \right\}. \quad (2.39)$$

Für ein hyperkubisches Gitter ist M_S gegeben durch

$$M_S = S \left(1 - \frac{0,078}{S} \right) \approx 0,84S, \quad D = 3, \quad (2.40a)$$

$$M_S = S \left(1 - \frac{0,197}{S} \right), \quad D = 2, \quad (2.40b)$$

$$M_S = S(1 - \infty), \quad D = 1, \quad (2.40c)$$

was bedeutet, dass das Modell in $d = 1$ seine Gültigkeit verliert. Die Fluktuationen werden kleiner mit steigendem S und steigendem D (oder Z).

Kapitel 3

Fraktionale Quantisierung in Spinketten

Wir betrachten das t-J-Modell in $D = 1$.

$$H_{t-J} = P_G \left\{ -t \sum_{\langle i,j \rangle, \delta} c_{i,\delta}^\dagger c_{j,\delta} + \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \right\} P_G, \quad (3.1)$$

wobei die Faktoren $1/2$ benötigt werden, weil über jeden Link doppelt gezählt wird. P_G ist der Gutzwiller-Projektor

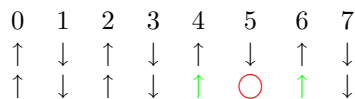
$$P_G = \prod_i (1 - n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}). \quad (3.2)$$

Wir betrachten Antiferromagneten, also $J > 0$. Weiterhin gilt

$$\mathbf{S}_i \mathbf{S}_j = S_i^z S_j^z + \frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+). \quad (3.3)$$

3.1 Spin-Ladungs-Teilung (Cartoons)

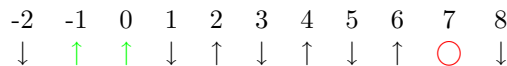
Wir betrachten eine Spinkette ($S = 1/2$) mit Ordnung. (Es gibt eigentlich keine Ordnung, aber die Lehren aus diesen Systemen sind gültig.) $c_{i,\downarrow}$ vernichtet Spin und Ladung:



Der t -Term transportiert Elektronen von rechts nach links, verschiebt also das Loch nach rechts.

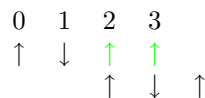


Die Ladung $Q = +1$ hat sich also bewegt, aber nicht der Spin. Der J -Term vertauscht zwei Spins:



In der Kette entsteht also eine Domänengrenze (wenn zwei Spins nebeneinander gleich ausgerichtet sind). Man bezeichnet das System zweier gleich ausgerichteter Spins als **Spinon** und das Loch als **Holon**. Die Dynamik des Spinon ist gegeben durch J und die Dynamik des Holons durch t . Die Anwendung von $S^+ S^-$ führt zur Bewegung des Spinons um zwei Gitterplätze.

Ein Spinon mit beispielsweise \uparrow -Spin (\downarrow -Spin) ist nur auf geraden (ungeraden) Gitterplätzen möglich.



Es gibt nur $1/2$ sovielen Spinonorbitale wie Gitterplätze. Frage: Um wie viele Orbitale reduziert sich mein Hilbertraum für weitere Spinonen, wenn ich zwei Spinonen erzeuge? Wir betrachten eine Kette ohne Spinon mit $N = 4$:

0	1	2	3	4	5	6	7
↑	↓	↑	↓	↑	↓	↑	↓
↑	↓	↑	↑	↓	↑	↑	↓

In der ersten Kette kann man ein Spinon auf den Plätzen 1, 3, 5 und 7 erzeugen; in der zweiten Kette nur auf den Plätzen 1, 4 und 7. Die Spinfreiheitsgrade bewegen sich mit $J/2$. Wenn wir zwei Spinonen kreieren, verringert sich der Hilbertraum um 1 Orbital. Dabei handelt es sich um ein Ausschlussprinzip und man sagt, dass Spinonen der Halb-Fermi-Statistik genügen. Da sich Ordnung im Spinraum und Impulsraum gegenseitig widersprechen, reagiert das System mit Spin-Ladungsteilung.

Ein Spinon kann in ein Holon und ein Elektron „zerfallen“. Das Elektron ist ein Fermion, das Spinon ein Halb-Fermion und ebenso das Holon. Das Elektron zerfällt also in „Teilchen“, die jeweils nur Ladung oder Spin tragen. Jedes dieser „Teilchen“ bekommt die Hälfte der Statistik ab. Löst man eine Spinkette mit $N = 11$, $J = 0, 4t$, $5 \uparrow, 5 \downarrow$, 10 Elektronen in einer Dimension numerisch, so gilt

$$E_t = 0,955E_t|_{J=0}, \quad E_t|_{J=0} = -2. \tag{3.4}$$

Das Loch stört sich also nicht besonders, wenn J endlich ist. Situation, wenn sich das Loch überhaupt nicht bewegt:

$$E_J = 0,965E_J|_{t=0}, \quad E_J|_{t=0} = -1,703. \tag{3.5}$$

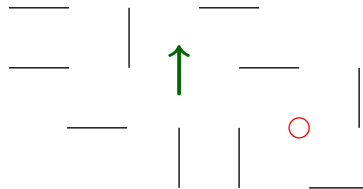
Für Spinonen gibt es nur halb so viele Orbitale wie Gitterplätze und ebenso für Holonen. Das letztere ist jedoch nicht aus den Cartoons ersichtlich. Der Holonzustand ist im Wesentlichen eine Kombination der Form

$$|\dots \uparrow, \circ, \downarrow \dots\rangle - |\dots \downarrow, \circ, \uparrow \dots\rangle. \tag{3.6}$$

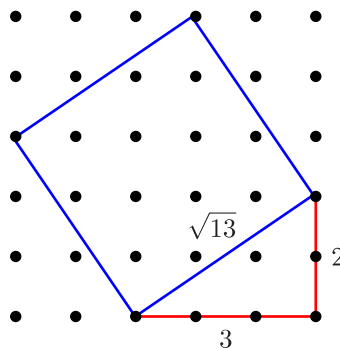
Das Holon hat die Eigenschaft, dass weder Up- noch Down-Spin auf der linken bzw. rechten Seite sind. In zwei Dimensionen funktioniert der Cartoon nicht. c_\uparrow annihiliert ein Up-Spin-Elektron an einem Gitterplatz. Die beiden Spins rechts davon hüpfen nach links:



Es bleibt eine Bahn umgekehrter Spins zurück, was eine Menge Energie kostet. Dies war in der eindimensionalen Kette nicht der Fall. Der Cartoon zeigt also, dass es in zwei Dimensionen keine Spin-Ladungs-Teilung gibt. Jedes Singulett lässt sich schreiben als Linearkombination von Dimerkombinationen, wobei Dimers lokale Singulett sind. Die Summe über alle solche Konfigurationen ist wieder ein Singulett. Man kann jedoch damit nicht rechnen, weil es sich um eine übervollständige Basis handelt.



Schaut man sich numerisch ein Quadratgitter mit periodischen Randbedingungen an. Die Einheitszelle sei quadratisch und besitze $N = 13$ Gitterpunkte.



$$E_t = 0,83E_t|_{J=0}, \quad E_t = -2,92, \quad E_t|_{J=0} = -3,50, \tag{3.7}$$

$$E_J = 0,93E_J|_{t=0}, \quad E_J = -2,49, \quad E_J|_{t=0} = -2,69. \tag{3.8}$$

Das bedeutet, dass sich kinetischer und potentieller Energie gut vertragen, obwohl dies aus dem Cartoon nicht ersichtlich wird.

3.2 Holonen vs. Löcher

Man erzeugt ein Loch durch Anwendung von $c_{i,\uparrow}$ auf den Grundzustand $|\text{gs}\rangle$ (ohne Löcher):

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \circ & \uparrow \end{array}$$

Das Hüpfen wird von t bewirkt, geschieht aber eigentlich mit t_{eff} , wird also renormiert, um der Veränderung der Spin-Konfiguration Rechnung zu tragen. Berechnen wir t_{eff} :

$$t_{\text{eff}} = \langle \text{gs} | c_{j,\uparrow}^\dagger H_{tJ} c_{i,\uparrow} | \text{gs} \rangle, \quad (3.9)$$

mit

$$H_{tJ} = P_G \left\{ -t \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + \frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \right\} P_G. \quad (3.10)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} t_{\text{eff}} &= \langle \text{gs} | c_{j,\uparrow}^\dagger \left(t \sum_{\sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \right) c_{i,\uparrow} | \text{gs} \rangle = t \langle \text{gs} | c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\uparrow} c_{i,\uparrow}^\dagger c_{i,\uparrow} | \text{gs} \rangle + t \langle \text{gs} | + t \langle \text{gs} | c_{j,\uparrow}^\dagger c_{j,\downarrow} c_{i,\downarrow}^\dagger c_{i,\uparrow} | \text{gs} \rangle = \\ &= t \langle \text{gs} | \left(S_j^z + \frac{1}{2} \right) \left(S_i^z + \frac{1}{2} \right) | \text{gs} \rangle + t \langle \text{gs} | S_j^+ S_i^- | \text{gs} \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir nehmen an, dass der Grundzustand invariant unter Rotationen im Spinraum ist, womit

$$\langle \text{gs} | S_j^+ S_i^- | \text{gs} \rangle = \langle \text{gs} | S_j^- S_i^+ | \text{gs} \rangle, \quad (3.12)$$

gilt und somit:

$$\begin{aligned} t_{\text{eff}} &= t \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle \text{gs} | S_j^z + S_i^z | \text{gs} \rangle}_{=0} + \langle \text{gs} | \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j | \text{gs} \rangle \right) = t \left(\frac{1}{4} + \langle \text{gs} | \mathbf{S}_j \mathbf{S}_i | \text{gs} \rangle \right) \approx \\ &\approx \begin{cases} -0,16t & \text{in einer Dimension} \\ -0,08t & \text{in zwei Dimensionen} \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

denn für die Spinkorrelation gilt

$$\langle \text{gs} | \mathbf{S}_j \mathbf{S}_i | \text{gs} \rangle \approx \begin{cases} -0,41 & \text{in einer Dimension} \\ -0,33 & \text{in zwei Dimensionen} \end{cases}. \quad (3.14)$$

Die Numerik zeigt, dass die Ladungsträger im zweidimensionalen t - J -Modell können somit keine Löcher (also Spin-1/2-Teilchen mit Ladung $Q = 1$) sein können.

Betrachten wir nun anstelle von Löchern Holonen. Wir nehmen über $c_{i,\downarrow} | \downarrow -\text{Spinon bei } i \rangle$ am i -ten Gitterplatz ein Elektron raus und erzeugen ein Holon:

$$\begin{array}{cccccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \circ & \downarrow & \uparrow & \downarrow \end{array}$$

Wir definieren in der folgenden Rechnung $|\downarrow -\text{Spinon bei } i \rangle \equiv |\downarrow, i \rangle$ und analog für Bras:

$$\begin{aligned} t_{\text{eff}} &= \langle \downarrow -\text{Spinon bei } j | c_{j,\downarrow}^\dagger \left(-t \sum_{\sigma} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} \right) c_{i,\downarrow} | \downarrow -\text{Spinon bei } i \rangle = \\ &= t \left\{ \langle \downarrow, j | c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\downarrow} c_{i,\downarrow}^\dagger c_{i,\downarrow} | \downarrow, i \rangle + t \langle \downarrow, j | c_{j,\downarrow}^\dagger c_{j,\uparrow} c_{i,\uparrow}^\dagger c_{i,\downarrow} | \downarrow, i \rangle \right\} = \\ &= t \langle \downarrow, j | \downarrow, i \rangle + t \langle \uparrow, j | \uparrow, i \rangle = 2t \langle \downarrow -\text{Spinon bei } j | \downarrow -\text{Spinon bei } i \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Beide Termen geben den Überlapp zwischen Up- bzw. Down-Spin-Spinonen auf Gitterplätzen i und j an. Numerisch ergibt sich $\approx 0,48$ in einer Dimension, was die Beweglichkeit der Löcher in einer Dimension erklärt. Das ist möglicherweise auch des Rätsels Lösung in zwei Dimensionen.

Bemerkung: Betrachtet man numerisch ein Quadratgitter mit $N = 9$, 3 Up-Spins, 3 Down-Spins und 3 Löchern ($J = 0,4t$).

$$E_t = 0,911E_t|_{J=0} = 1,129E_t|_{6\uparrow,3\circ}, \quad (3.16)$$

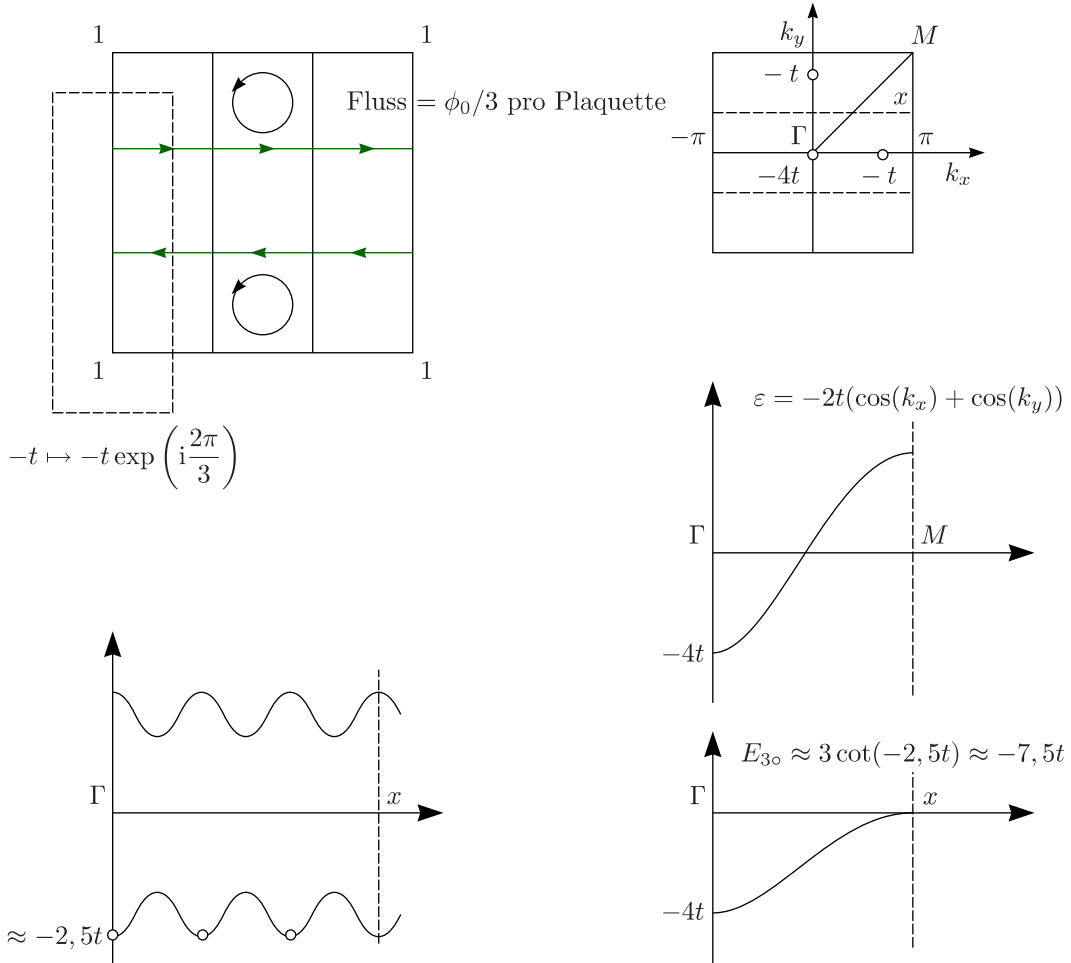
Die kinetische Energie des Systems ist also besser als wenn alle Spins polarisiert sind.

$$E_J = 0,897E_J|_{t=0}. \tag{3.17}$$

Spinkorrelationen renormieren das Hopping. Wenn Up- und Down-Spins ausgerichtet sind, wird die kinetische Energie besser. Da die kinetische Energie mit Löchern assoziiert ist, kann diese renormiert werden, aber wie ist es möglich, dass sie besser wird? Man betrachtet die Energie von Löchern in einem vollständig polarisiertem Hintergrund; diese kann man auch hinschreiben als

$$0,827E_t|_{6\uparrow,3\circ}, \quad \phi_{\text{tot}} = 3\phi_0, \tag{3.18}$$

wobei $\phi_0 = 2\pi\hbar c/e$ das Diracsche Flussquantum (beim Aharanov-Bohm-Effekt) ist. Durchläuft man einen Pfad um ϕ_0 , so bekommt die Wellenfunktion eine zusätzliche Phase $\exp(2\pi i)$.



Dies wirkt sich so aus, dass die Brillouin-Zone reduziert wird und man drei Bänder erhält. Mit magnetischem Fluss ist es für das System möglich, eine bessere kinetische Energie zu haben. Die einzelne Energie ist zwar schlechter, aber aufgrund der Entartung haben wir drei Minima. Das System generiert spontan einen magnetischen Fluss, um die kinetische Energie zu minimieren. t wird effektiv renormiert:

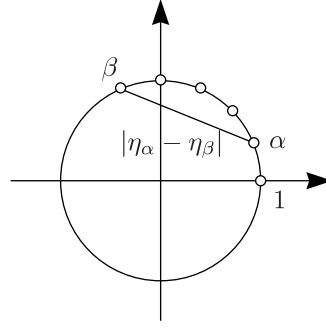
$$t_{\text{eff}} = r \exp(i\varphi)t, \tag{3.19}$$

wobei r reell und $\lesssim 1$ ist. Über die Spinkorrelationen wird der Renormierung eine Phase verpasst. Über die Spinon-Overlaps wählt das System die Phase so, dass es die kinetische Energie minimiert. Wir haben einen Konflikt zwischen kinetischer Energie und potentieller Energie. Das effektive magnetische Feld wirkt für die Spinonen im Zweidimensionalen wie ein State-Counting-Device (analog zu den Landau-Niveaus). Mit magnetischem Feld kann das System die Zustände abzählen, weil es flächenentartete Zustände sind. Im Endeffekt läuft das Ganze auf Holonen hinaus.

3.3 Das Haldane-Shastry-Modell

Das Modell wurde simultan von Haldane und Shastry unabhängig in derselben Woche im Jahre 1988 entdeckt. Wir betrachten eine eindimensionale Kette mit N Gitterplätzen und periodischen Randbedingungen. Die

periodischen Randbedingungen sind besonders elegant ausgedrückt, wenn wir die Kette auf den Einheitskreis in der komplexen Ebene legen.



Es ist somit eine Einbettung des eindimensionalen Modells in zweidimensionale komplexe Ebene möglich. (Ein zweidimensionales Modell muss auf einem Torus parametrisiert werden.)

$$\eta_\alpha = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\alpha\right), \quad \alpha = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.20)$$

Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$H = \left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 \sum_{\alpha < \beta} \frac{\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}_\beta}{|\eta_\alpha - \eta_\beta|}. \quad (3.21)$$

$|\eta_\alpha - \eta_\beta|$ ist der Abstand zwischen den Teilchen modifiziert auf die periodischen Randbedingungen. Die Wechselwirkung fällt wie die Distanz im Quadrat ab; deshalb bezeichnet man solche Modelle als $1/r^2$ -Modelle. Der Grundzustand ist gegeben durch

$$|\psi_0^{\text{HS}}\rangle = \sum_{\{z_1 \dots z_n\}} \psi_0(z_1, \dots, z_M) S_{z_1}^\dagger \dots S_{z_M}^\dagger |\downarrow \dots \downarrow\rangle, \quad (3.22)$$

wobei alle N Spins nach unten zeigen und $M = N/2$ die Anzahl der Up-Spins oder Down-Spins in der uniformen Spinflüssigkeit sind. Man nimmt also einen Vakuum-Zustand, in dem alle Spins nach unten zeigen und generiert auf der Hälfte der Plätze durch einen Spin-Flip Up-Spins.

$$\psi_0(z_1, \dots, z_M) = \prod_{i < j}^M (z_i - z_j)^2 \prod_{i=1}^M z_i, \quad (3.23)$$

wobei z_1, \dots, z_M die Koordinaten der Up-Spins auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene sind. $\prod_{i=1}^M z_i$ ist ein reiner Phasenfaktor. Der Faktor $\prod_{i < j}^M (z_i - z_j)^2$ sorgt dafür, dass die Spins voneinander ferngehalten werden. ψ wird also dann maximal, wenn die Up-Spins möglichst weit voneinander entfernt sind. Die günstigste Konfiguration ist eine, in der sich Up- mit Down-Spins abwechseln und die ungünstigste, wenn Up- und Down-Spins auf getrennten Halbkreisen sitzen. Es gilt

$$E_0 = -\frac{\pi^2}{24} \left(N - \frac{5}{N}\right), \quad (3.24)$$

wobei dieses nicht sofort ersichtlich ist. ψ_0 ist reell und $|\psi_0\rangle$ ist ein Spin-Singulett. Dass ψ_0 reell ist, kann man zeigen unter Verwendung von

$$(z_i - z_j)^2 = z_i z_j \left(\frac{1}{z_j} - \frac{1}{z_i}\right) (z_i - z_j) = z_i z_j (\bar{z}_j - \bar{z}_i) (z_i - z_j) = -z_i z_j |z_i - z_j|^2, \quad (3.25)$$

und man erhält dann

$$\psi_0[z] = \pm \prod_{i < j}^M |z_i - z_j|^2 \prod_{i < j}^M (z_i z_j) \prod_{i=1}^M z_i, \quad (3.26)$$

wobei das globale Vorzeichen für die weitere Betrachtung unwichtig ist. Das zweite Produkt $\prod_{i < j}^M (z_i z_j)$ enthält $M(M-1)/2$ Faktoren. Es gilt

$$\prod_{i < j}^M (z_i z_j) \prod_{i=1}^M z_i = \left(\prod_{i=1}^M z_i\right)^\alpha, \quad (3.27)$$

mit einer Potenz α , die gegeben ist durch

$$\alpha = \frac{1}{M} \left(2 \frac{M(M-1)}{2} + M \right) = M, \quad (3.28)$$

und damit folgt aus (3.27):

$$\left(\prod_{i=1}^M z_i \right)^M = \prod_{i=1}^M z_i^M, \quad (3.29)$$

mit

$$z_j^M = z_j^{\frac{N}{2}} = \left\{ \exp \left(i \frac{2\pi}{N} \alpha_j \right) \right\}^{\frac{N}{2}} = \exp(i\pi \alpha_j) = (-1)^{\alpha_j} = \pm 1 \equiv G(z_j). \quad (3.30)$$

Spinonen und Holonen treten als exakte Eigenzustände auf. Besonders an diesem Modell ist, dass Spinonen und Holonen nicht wechselwirken, es sich also um ein freies Modell handelt (analog zur Fermi-Flüssigkeit, bei der die Fermionen aufgrund des Pauliprinzips den Fermisee bilden). Die Beschreibung ist hier jedoch nicht so einfach wie bei der Fermiflüssigkeit, weil Elektronen und Löcher nicht die richtigen Teilchen sind, sondern Spinonen und Holonen. Das Haldane-Shastry-Modell ist das einfachste Modell (zusammen mit Quantenhalleffekt) für fraktionale Quantisierung.

Der obige Eichfaktor wird benötigt, dass ψ_0 reell ist, aber auch dazu, dass $|\psi_0\rangle$ ein Spin-Singulett ist.

$$\psi_0[z] = \prod_{i<j}^M |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^M G(z_i), \quad (3.31)$$

wobei $G(z_i)$ auf abwechselnden Gitterplätzen + oder - ist. Um zu zeigen, dass $|\psi_0\rangle$ ein Singulett ist, müssen wir

$$S_{\text{tot}}^z |\psi_0\rangle = 0, \quad S_{\text{tot}}^- |\psi_0\rangle = 0, \quad (3.32)$$

zeigen. Die erste Bedingung ist automatisch erfüllt, weil $M = N/2$ ist. Kommen wir zur zweiten Bedingung:

$$\begin{aligned} S_{\text{tot}}^- |\psi_0\rangle &= \sum_{\alpha=0}^{N-1} S_{\alpha}^- \sum_{\{z_1, \dots, z_M\}} \psi_0(z_1, z_2, \dots) S_{z_1}^+ \dots S_{z_M}^+ |\downarrow \dots \downarrow\rangle = \\ &= M \sum_{\alpha=0}^{N-1} \sum_{\{z_1, \dots, z_M\}} \psi(\eta_{\alpha}, z_2, \dots, z_M) S_{z_2}^+ \dots S_{z_M}^+ |\downarrow \dots \downarrow\rangle = \\ &= M \sum_{\{z_2, \dots, z_M\}} \left\{ \sum_{\alpha=0}^{N-1} \psi(\eta_{\alpha}, z_2, \dots, z_M) \right\} S_{z_2}^+ \dots S_{z_M}^+ |\downarrow \dots \downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Der Faktor M in der zweiten Zeile rührt von der Symmetrisierung her, davon dass man über alle Konfigurationen summiert. Die Summe in der geschweiften Klammer verschwindet:

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \prod_{i=2}^M (\eta_{\alpha} - z_i)^2 \prod_{2 \leq i < j}^M (z_i - z_j)^2 \eta_{\alpha} \prod_{i=2}^M z_i. \quad (3.34)$$

Die Produkte enthalten Potenzen $\eta_{\alpha}^1, \eta_{\alpha}^2, \dots, \eta_{\alpha} \cdot \eta_{\alpha}^{2(M-1)} = \eta_{\alpha}^{N-1}$. Die Summe verschwindet, weil

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1} \eta_{\alpha}^m = N \delta_{m,0} \text{ mod } N. \quad (3.35)$$

Die Anregungen sind Ein-Spinon-Anregungen. Wir nehmen an, dass N ungerade sei und dann gilt $M = (N-1)/2$.

$$\psi_{\alpha, \downarrow}(z_1, \dots, z_M) = \underbrace{\prod_{i=1}^M (\eta_{\alpha} - z_i) \prod_{i < j}^M (z_i - z_j)^2}_{\text{wird abgeschirmt wie } 1/2 \text{ Spin-Flip obgleich ein } \downarrow\text{-Spin auf Gitterplatz } \eta_{\alpha} \text{ sitzt}} \prod_{i=1}^M z_i. \quad (3.36)$$

Die Spinflips, die generiert werden, werden als bosonische Teilchen betrachtet, die sich gegenseitig abstoßen. Wir wenden nun S_{tot}^z auf $|\psi_{\alpha,\downarrow}\rangle$ an:

$$S_{\text{tot}}^z |\psi_{\alpha,\downarrow}\rangle = -\frac{1}{2} |\psi_{\alpha,\downarrow}\rangle, \quad S_{\text{tot}}^- |\psi_{\alpha,\downarrow}\rangle = 0. \quad (3.37)$$

Damit handelt es sich somit um einen Spin-1/2-Zustand. Die letzte der beiden Formeln kann als Übung gezeigt werden. $|\psi_{\alpha,\downarrow}\rangle$ ist kein Eigenzustand von H_{HS} .

$$\psi_{m,\downarrow}[z] = \sum_{\alpha=1}^N (\bar{\eta}_\alpha)^m \psi_{\alpha,\downarrow}[z] = \sum_{\alpha=1}^N \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}m\alpha\right) \psi_{\alpha,\downarrow}[z]. \quad (3.38)$$

Da α im Wesentlichen eine Ortskoordinate ist, handelt es sich bei m um eine Impulsquantenzahl (analog zu $\exp(iqx)$). Weiterhin gilt, weil sich unterschiedliche Phasen zu null addieren:

$$\sum_{\alpha=1}^N (\bar{\eta}_\alpha)^m \eta_\alpha^n = N \delta_{m,n} \bmod N. \quad (3.39)$$

$\psi_{\alpha,\downarrow}$ enthält nur Potenzen $\eta_\alpha^0, \eta_\alpha^1, \dots, \eta_\alpha^M$. Damit ist $\psi_{m,\downarrow} \neq 0$ für $m = 0, 1, \dots, N$ und somit existieren $M+1 \approx N/2$ Ein-Spinon-Zustände. Wir haben also etwa halb so viele Zustände wie Gitterplätze, was mit der Halb-Fermi-Statistik der Spinonen zusammenhängt. Um den Gesamtimpuls des Zustandes in Erfahrung zu bringen, führen wir den Translationsoperator T ein, welcher den Gesamtzustand um einen Gitterplatz dreht:

$$T : z_i \mapsto z_i \eta_1, \quad \eta_1 = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\right). \quad (3.40)$$

Wir definieren den Impuls des Spinonzustandes, indem wir

$$T|\psi_{m,\downarrow}\rangle = \exp(iq_m)|\psi_{m,\downarrow}\rangle, \quad (3.41)$$

fordern. $\exp(iq_m)$ entspricht η_1 hoch der totalen Potenz in allen z_i . Wie groß ist diese totale Potenz? Dies folgt durch Abzählen der Potenzen der z_i in der Wellenfunktion $\psi_{\alpha,\downarrow}(z_1, \dots, z_M)$:

$$M - m + 2 \cdot \frac{M(M-1)}{2} + M, \quad (3.42)$$

womit gilt:

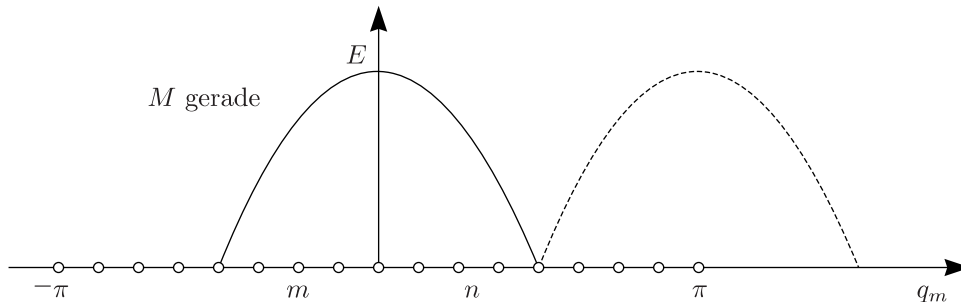
$$q_m = \frac{2\pi}{2M+1}(M^2 + M - m) = \pi M + \pi \frac{M-2m}{2M+1}, \quad 0 \leq m \leq M. \quad (3.43)$$

Es ist außerdem:

$$-\frac{1}{2} \lesssim \frac{M-2m}{2M+1} \lesssim \frac{1}{2}. \quad (3.44)$$

Das Besondere an diesem Modell ist also die einfache Dispersionsrelationen der Spinonen und dass diese freie Halb-Fermionen sind:

$$E_q = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - q^2 \right] \bmod \pi. \quad (3.45)$$



Was Laughlin zunächst für eine Wechselwirkung gehalten hat, war die Natur der fraktionalen Statistik. (Spinonen führen zu fraktionalen Impulsabständen.)

3.4 Fraktionale Statistik der Spinonen

Sei N gerade. Haben wir L Spinonen, so ist auch L gerade, weil wir zwei Spins benötigen, um ein Spinon zu erzeugen. Die Anzahl der verfügbaren Orbitale (Ein-Teilchen-Zustände) für weitere Spinonen ist $M + 1$ mit $M = (N - L)/2$. (M ist die Gesamtzahl der Spins der uniformen Flüssigkeit; es gibt halb so viele Up- wie Down-Spins.) Die Erzeugung von zwei Spinonen ($L \mapsto L + 2$) reduziert die für weitere Spinonen verfügbaren Orbitale um 1. (Dies liegt an der Halb-Fermi-Statistik.) Der Hilbertraum des Systems kann durch Zustände mit $L = 0, 2, 4, \dots, N$ parametrisiert werden. Die Anzahl der Möglichkeiten, x Bosonen in y Orbitalen zu verteilen, ist gegeben durch

$$\frac{(x + y - 1)!}{x!(y - 1)!} = \binom{y + x - 1}{x}. \quad (3.46)$$

Nebenbei bemerkt, ist für Fermionen die Anzahl der Möglichkeiten $\binom{y}{x}$. Für $x = L$, $y = 2(M + 1) = N - L + 2$ (\uparrow - und \downarrow -Spinonen) gilt für die Dimensionalität des Hilbertraums:

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{H}_{\text{HS}}) &= \sum_{L \text{ gerade}}^N \binom{N+1}{L} = \sum_{L \text{ gerade}}^N \frac{1}{2} \left\{ \binom{N+1}{L} + \binom{N+1}{N+1-L} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{alle } L=0}^{N+1} \binom{N+1}{L} = \frac{1}{2} \cdot 2^{N+1} = 2^N. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Für $L = N$ gilt

$$S_{\text{tot}} = \frac{N}{2}, \quad S_{\text{tot}}^z = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}, \quad (3.48)$$

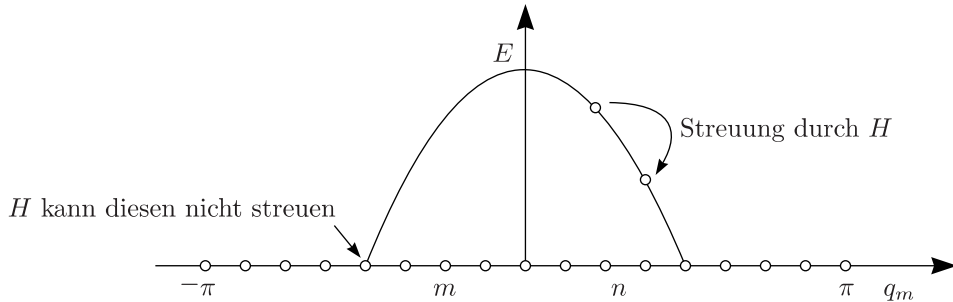
was $N + 1$ Werte sind. Daraus folgt, dass Spinonen 1/2-Fermi-Statistik besitzen müssen, um eine konsistente Darstellung (bezüglich $\dim(\mathcal{H})$) zu ermöglichen. Dies gilt in allen Dimensionen. (Für andere Symmetriegruppen als $SU(2)$ ist die Statistik anders.)

Für Zwei-Spinon-Zustände (bei α und β) machen wir einen analogen Ansatz für die Wellenfunktion:

$$\psi_{\alpha, \downarrow; \beta, \uparrow}[z] = \prod_{i=1}^M (\eta_\alpha - z_i)(\eta_\beta - z_i) \prod_{i < j}^M (z_i - z_j)^2 \prod_{i=1}^M z_i, \quad M = \frac{N-2}{2}. \quad (3.49)$$

$$\psi_{mn}[z] = \sum_{\alpha < \beta}^N (\bar{\eta}_\alpha)^m (\bar{\eta}_\beta)^n \psi_{\alpha\beta}[z], \quad M \geq m \geq n \geq 0. \quad (3.50)$$

Dabei handelt es sich um keine Eigenzustände (außer für m oder $n = M$ oder 0), weil ψ_{mn} und $\psi_{m+l, n-l}$ nicht orthogonal sind.



Eigenzustände haben die folgende Form:

$$|\phi_{mn}\rangle = \sum_{l=0}^{l_M} a_l^{mn} |\psi_{m+l, n-l}\rangle. \quad (3.51)$$

Die Koeffizienten a_l^{mn} sind dadurch bestimmt, dass man die $|\phi_{mn}\rangle$ orthogonal wählt. Es gilt dann

$$H|\phi_{mn}\rangle = E_{mn}|\phi_{mn}\rangle. \quad (3.52)$$

Die Zustände $|\psi_{mn}\rangle$ formen eine **nicht-orthogonale** Basis.

$$H|\psi_{mn}\rangle = E_{mn}|\psi_{mn}\rangle + \sum_{l=1}^{l_M} V_l^{mn} |\psi_{m+l, m-l}\rangle, \quad l_M = \min(M - m, n). \quad (3.53)$$

Dass $|\psi_{nm}\rangle$ keine Eigenzustände sind, kommt nur daher, dass sie nicht orthogonal sind. Bilde deshalb eine orthogonale Basis

$$|\phi_{mn}\rangle = \sum_{l=0}^{l_M} a_l^{mn} |\psi_{m+l, n-l}\rangle. \quad (3.54)$$

Die $|\phi_{mn}\rangle$ sind dann Eigenzustände von H

$$H|\phi_{mn}\rangle = E_{mn}|\phi_{mn}\rangle, \quad (3.55)$$

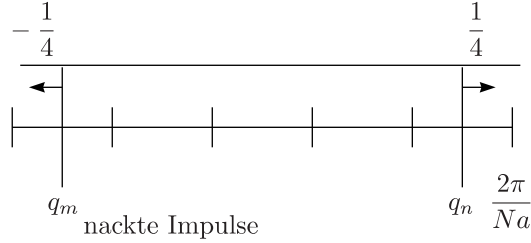
mit den Eigenwerten

$$E_{mn} = \text{const.} + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 \left[m \left(\frac{N}{2} - 1 - m \right) + n \left(\frac{N}{2} - 1 + n \right) - \frac{m-n}{2} \right]. \quad (3.56)$$

Man vermutete zuerst, dass hinter $(m-n)/2$ eine Wechselwirkung steckt. Dazu schreibt man zunächst E_{mn} in der Form

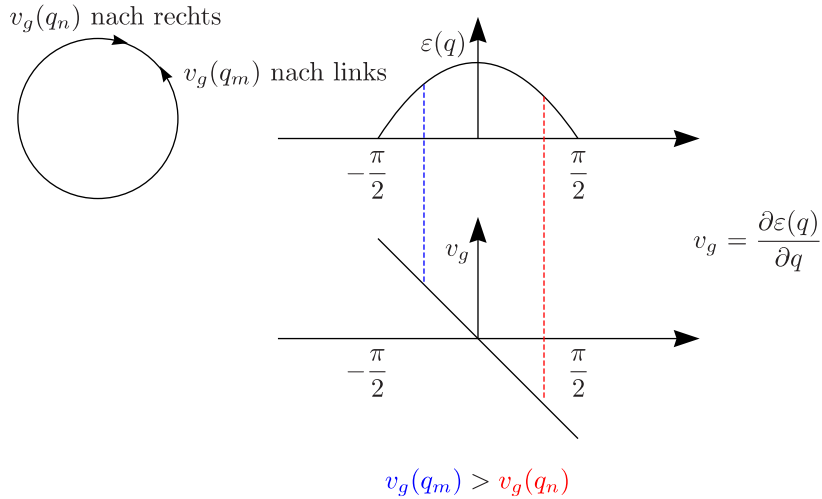
$$E_{mn} \approx E_0 + \varepsilon(q_m) + \varepsilon(q_n), \quad \varepsilon(q) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - q^2 \right] + \frac{\pi^2}{8N^2}, \quad q_{m/n} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{N} \left(m + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \right). \quad (3.57)$$

Dabei handelt es sich um die Energie nicht-wechselwirkender Spinonen, wenn die Spinonimpulse voneinander wegverschoben werden.



$$q_n - q_m = \frac{2\pi}{Na} \left(\frac{1}{2} + \text{ganze Zahl} \right). \quad (3.58)$$

Die Abstände zwischen den Impulsen bekommen also einen zusätzlichen Faktor $1/2$ durch die Halb-Fermi-Statistik.



Die Relativbewegung von Spinon mit q_m erfolgt wegen $v_g(q_m) > v_g(q_n)$ in Bezug auf q_n immer im Gegenuhrzeigersinn.

Im Folgenden sei $a = 1$. Wir nehmen an, dass die gesamte Wellenfunktion beim Kreuzen der Teilchen eine Phase bekommt

$$|\psi\rangle \mapsto \exp(i\theta)|\psi\rangle, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (3.59)$$

dann führt das dazu, dass

$$q_m \mapsto q_m - \frac{\theta}{N}, \quad q_n \mapsto q_n + \frac{\theta}{N}, \quad (3.60)$$

wobei

$$q_n - q_m \mapsto (q_n - q_m) + \frac{2\pi}{N} \frac{\theta}{\pi}. \quad (3.61)$$

$\theta = 0$ entspricht Bosonen und $\theta = \pi$ Fermionen.

3.4.1 Zur fraktionalen Statistik in zwei Dimensionen

Man definiert den Begriff einer Windungszahl. Dass es eine solche Windungszahl gibt, liegt an der Topologie der zweidimensionalen Ebene. (In drei Dimensionen gibt es keine solche Windungszahl.) Es gibt nur einen Generator von Rotationen L_z ; die Gruppe ist abelsch und es handelt sich um die $U(1)$. Weil es nur einen Generator gibt, ist der Spin nicht quantisiert. Welche Aussagen lassen sich dann über die Statistik treffen? Es ist möglich, dass fraktionale Statistik vorliegt. Dreht man zwei Teilchen im Gegenuhrzeigersinn gegeneinander, so kann die Wellenfunktion eine Phase $\exp(i\theta)$ bekommen, wobei es in drei Dimensionen nur die Möglichkeit $\theta = 0$ für Bosonen und $\theta = \pi$ für Fermionen gibt. Dies liegt daran, dass man den Pfad in die dritte Dimension „rausheben“ und zu einem Punkt schrumpfen lassen kann. In zwei Dimensionen geht das jedoch nicht und θ kann beliebig sein. $\theta = \pm\pi/2$ ist die Halb-Fermi-Statistik, welche für unsere $SU(2)$ -Spinonen wichtig ist. Fraktionale Statistik in zwei Dimensionen bricht Parität \mathcal{P} und Zeitumkehr \mathcal{T} . \mathcal{P} und \mathcal{T} sorgt für $\theta \mapsto -\theta$; man bekommt also die entgegengesetzte Phase.

$$l_{\text{rel}} = \hbar \left(-\frac{\theta}{\pi} + \text{ganze Zahl} \right) = \hbar \begin{cases} -2, 0, 2, \dots & \text{für Bosonen} \\ -3, -1, 1, \dots & \text{für Fermionen} \\ -1/2, 3/2, 7/2 \dots & \\ -3/2, 1/2, 5/2, \dots & \end{cases}. \quad (3.62)$$

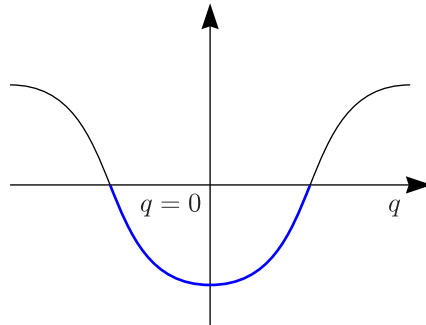
3.5 Generation des Grundzustands durch Gutzwiller-Projektion

Betrachte freie Fermionen in einer Dimension.

$$H = -t \sum_{\langle \alpha, \beta \rangle} c_\alpha^\dagger c_\beta. \quad (3.63)$$

$$E_q = -2t \cos \left(\frac{2\pi}{N} q \right), \quad q = 0, \dots, N-1, \quad (3.64)$$

mit der Gitterkonstanten $2\pi/N$.



untere Hälfte des Bandes gefüllt mit M Spin-Up-Elektronen und M Spin-Down-Elektronen, $M = N/2$

Jeweils zwei Elektronen mit unterschiedlicher Spinausrichtung nehmen denselben Impulszustand ein. Wir betrachten zunächst spinlose Fermionen.

$$|q\rangle = \sum_{\alpha} \exp \left(i \frac{2\pi}{N} \alpha q \right) |\eta_{\alpha}\rangle, \quad (3.65)$$

wobei $|\eta_{\alpha}\rangle$ der Einteilchen-Fermion-Zustand ist, bei dem ein Elektron auf dem Gitterplatz α sitzt. Dies lässt sich nun in der folgenden Form schreiben:

$$|q\rangle = \sum_{\alpha} \bar{\eta}_{\alpha}^q |\eta_{\alpha}\rangle, \quad \psi_q(z) = \langle z|q\rangle = z^q. \quad (3.66)$$

3.5. GENERATION DES GRUNDZUSTANDS DURCH GUTZWILLER-PROJEKTION

Sofern das untere Band gefüllt ist, gilt (wobei wir annehmen, dass M ungerade sei):

$$\phi^{(-)}(z_1, \dots, z_M) = \left(\prod_k z_k \right)^{-\frac{M-n}{2}} \mathcal{A}\{z_1^0 z_2^1 \dots z_M^{M-1}\}. \quad (3.67)$$

Hierbei ist \mathcal{A} eine antisymmetrisierte Summe. Diese lässt sich in der Form

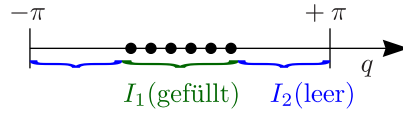
$$\mathcal{A}\{z_1^0 z_2^1 \dots z_M^{M-1}\} = \prod_{i < j}^M (z_i - z_j), \quad (3.68)$$

schreiben. Behauptung:

$$|\psi_{\text{HS}}^0\rangle = P_{\text{GW}} |\psi_{\text{SD}}^{M\uparrow, M\downarrow}\rangle. \quad (3.69)$$

$$\psi[z, w] = P_{\text{GW}} \phi^{(-)}(z_1 \dots z_M) \phi^{(-)}(w_1 \dots w_M). \quad (3.70)$$

Es ist zu zeigen, dass diese Form äquivalent zu Haldane-Shastry-Modell ist. Für den Beweis benötigen wir die Teilchen-Loch-Symmetrie:



$$\begin{aligned} \phi_1(z_1 \dots z_M) &= \left\langle 0 \left| c_{z_1} \dots c_{z_M} \prod_{q \in I_1} c_q^\dagger \right| 0 \right\rangle = \left(\left\langle 0 \left| \prod_{q \in I_1} c_q c_{z_M}^\dagger \dots c_{z_1}^\dagger \right| 0 \right\rangle \right)^* \\ &= (\text{sign} \phi_2(w_1 \dots w_{N-M}))^* \end{aligned} \quad (3.71)$$

w sind die Gitterplätze, die nicht z 's sind. (Wenn z Teilchen sind, sind w die Löcher und umgekehrt.)

$$\psi[z, w] = \phi_1(z_1 \dots z_M) \cdot \text{sign} \cdot \phi_2^*(z_1 \dots z_M). \quad (3.72)$$

Das andere Intervall ist nur verschoben (Shift bei $\Delta q = \pi$):

$$\phi(z_1 \dots z_M) = \prod_{i=1}^M (z_i)^{\frac{N}{2}} \phi_1(z_1 \dots z_M). \quad (3.73)$$

Damit wird I_1 auf I_2 verschoben. Analog gilt

$$\phi^*(z_1 \dots z_M) = \prod_{i=1}^M (\bar{z}_i)^{\frac{N}{2}} \phi_1^*(z_1 \dots z_M), \quad (3.74)$$

und damit erhalten wir:

$$\psi[z, w] = \prod_{i < j}^M |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^M G(z_i), \quad (3.75)$$

wobei

$$G(\eta_\alpha) = \begin{cases} +1 & \text{für } \alpha \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } \alpha \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (3.76)$$

Füllt man das untere Band also mit freien Fermionen und machen eine Gutzwiller-Projektion, folgt der Haldane-Shastry-Grundzustand. Deshalb bezeichnet man sie auch als Gutzwiller-Wellenfunktion. Der Verdienst von Haldane und Shastry war die Ableitung eines Hamiltonians.

Kapitel 4

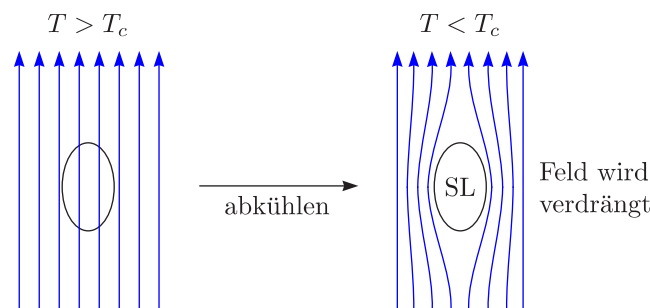
Supraleitung

4.1 Einleitende Bemerkungen

Zur Literatur:

- Schrieffer: „Theory of Superconductivity“ (1964) (etwas knappe Darstellung)
- de Gennes: „Superconductivity in Metals and Alloys“ (1966) (Darstellung der BCS-Theorie schlägt die anderen, weil der Autor viel physikalischer denkt)
- Tinkham: „Introduction to Superconductivity“ (1975, 1995)
- Greiter: Annals of Physics 319 (2005), 217. (Pädagogischer Artikel zur Supraleitung: Zugang über effektive Feldtheorie, Higgsmechanismus, spontane Symmetriebrechung, was so nicht in Textbüchern steht. Findet man bei Google mit den Suchbegriffen „electromagnetic gauge invariance“ sofort.)

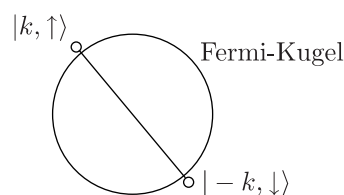
Die Phänomenologie wurde ergründet von London. Beim Meissner-Effekt wird ein Magnetfeld, welches für $T > T_C$ den Supraleiter durchdringt, für $T < T_C$ nach außen verdrängt.



Dies besagt, dass ein Supraleiter mehr ist als ein perfekter, nicht-dissipativer Leiter ist. Ein Supraleiter nimmt genau den eindeutigen Quantenzustand an, in dem kein magnetisches Feld erlaubt ist und ist somit ein **Spezialfall** des perfekten Leiters.

4.2 Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie (BCS-Theorie)

Ausgangspunkt der Theorie (1957) bildet die Cooper-Instabilität.



Dieses Paar soll etwas außerhalb der Fermikugel angeregt werden. Dazu benötigt man kinetische Energie

$$\varepsilon_{\text{kin}} = \frac{k^2}{2m}. \quad (4.1)$$

Angenommen, es gibt eine attraktive Wechselwirkung $V < 0$ zwischen den beiden Teilchen, dann resultiert daraus ein gebundener Zustand ($E < 0$) selbst für infinitesimales V . Es kostet kinetische Energie und die potentielle Energie, die man gewinnt, ist etwas größer als die kinetische Energie, die benötigt wird. Betrachte nach diesen Vorüberlegungen einen reduzierten Hamiltonoperator H mit attraktiver Wechselwirkung im Cooper-Kanal:

$$H = \sum_{k,\sigma} \xi_k c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma} + \sum_{k,l} V_{k,l} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow} c_{l,\downarrow} c_{l,\uparrow}, \quad \xi_k = \frac{k^2}{2m} - \mu. \quad (4.2)$$

Für eine attraktive Wechselwirkung ist $V_{k,l} < 0$. Die Annahme ist, dass die Cooper-Instabilität zu einer spontanen Symmetriebrechung führt mit einem Ordnungsparameter

$$b_k \equiv \langle c_{-k,\downarrow} c_{k,\uparrow} \rangle. \quad (4.3)$$

Es bildet sich ein Kondensat dieser Paare. Ersetze hierzu $c_{-k,\downarrow} c_{k,\uparrow}$ durch den Molekularfeldwert $b_k + (c_{-k,\downarrow} c_{k,\uparrow} - b_k)$, wobei der zweite Term in der Klammer die Fluktuationen beschreibt. Quadratische Terme in diesem Fluktuationen sollen vernachlässigt werden, wie dies in einer Molekularfeldtheorie üblich ist. Man definiert eine Größe

$$\Delta_k \equiv - \sum_l V_{k,l} b_l, \quad (4.4)$$

und erhält dann

$$H = \sum \dots - \sum_k (\Delta_k c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger + \Delta_k^\dagger c_{-k,\downarrow} c_{k,\uparrow} - \Delta_k b_k^*). \quad (4.5)$$

Wir diagonalisieren den Hamiltonoperator durch eine Bogoliubov-Transformation:

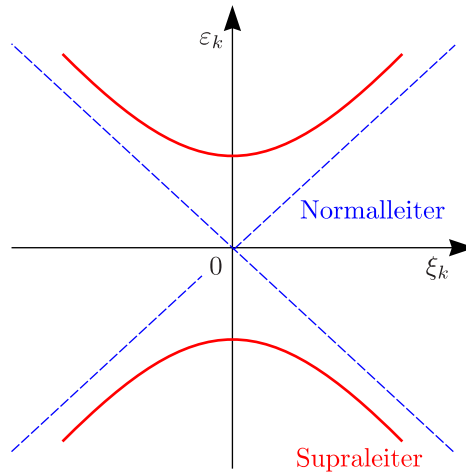
$$\begin{pmatrix} c_{k,\uparrow} \\ c_{-k,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k & v_k \\ -v_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{k,\uparrow} \\ \gamma_{-k,\downarrow}^\dagger \end{pmatrix}, \quad |u_k|^2 + |v_k|^2 = 1. \quad (4.6)$$

Unter dieser Annahme genügen auch die $\gamma_{k,\sigma}$ fermionischen Vertauschungsregeln. Wir bestimmen u_k und v_k so, dass

$$H = E_0 + \sum_{k,\sigma} \varepsilon_k \gamma_{k,\sigma}^\dagger \gamma_{k,\sigma}. \quad (4.7)$$

In den neuen Variablen $\gamma_{k,\sigma}$ ist dies also eine freie Theorie. u_k und v_k sind gegeben durch

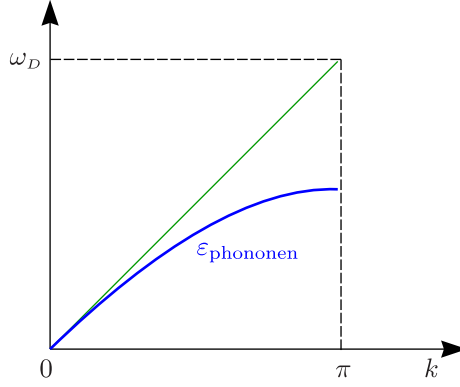
$$|u_k|^2 = 1 - |v_k|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{\varepsilon_k} \right), \quad \varepsilon_k \equiv \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta_k|^2}. \quad (4.8)$$



Näherung von BCS:

$$V_{k,l} = \begin{cases} -|\lambda| & \text{für } |\xi_k| \leq \omega_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.9)$$

ω_D ist die Frequenz, oberhalb derer es keine Phononen mehr gibt.



$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta & \text{für } |\xi_k| \leq \omega_D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.10)$$

Mit (4.3) und (4.4) ergibt sich dann

$$\Delta = |\lambda| \sum_k' \langle c_{-k,\downarrow} c_{k,\uparrow} \rangle, \quad \langle c_{-k,\downarrow} c_{k,\uparrow} \rangle = u_k v_k = \frac{\Delta_k}{2\varepsilon_k}, \quad (4.11)$$

wobei der Strich an der Summe bedeutet, dass nur über den Bereich mit $|\xi_k| \leq \omega_D$ summiert wird. Die letzte Gleichung ist selbstkonsistent und man kann diese nach Δ auflösen. Führen wir zusätzlich eine Zustandsdichte ν ein, so können wir das Ganze als Integral schreiben und man erhält

$$1 = |\lambda| \nu \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}. \quad (4.12)$$

Es wird dabei über eine sehr dünne Schale der Dicke $2\omega_D$ integriert, innerhalb derer der Rand der Fermikugel eingebettet ist. Weiterhin folgt

$$1 = |\lambda| \nu \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\omega_D}{\Delta} \right) \approx \ln \left(\frac{2\omega_D}{\Delta} \right), \quad (4.13)$$

also

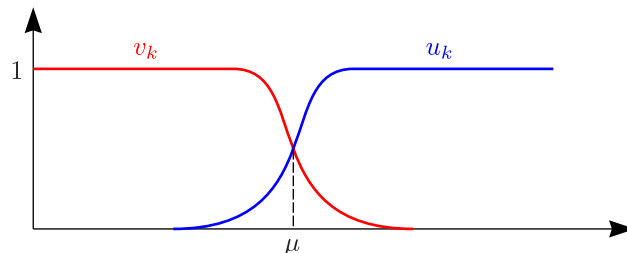
$$\Delta = 2\omega_D \exp \left(-\frac{1}{|\lambda| \nu} \right). \quad (4.14)$$

Die Energielücke ist sehr klein. Unabhängig, wie groß $|\lambda|$ ist, erreicht sie niemals einen Wert größer als ω_D ; ω_D ist gewissermaßen ein Cut-Off. Für Δ existiert keine Taylorentwicklung in λ , was der Grund dafür ist, dass der supraleitende Zustand nicht aus einer störungstheoretischen Beschreibung folgt.

$$E_0 = E_0(V_{k,l} = 0) - \frac{\nu \Delta^2}{2}. \quad (4.15)$$

$\nu \Delta^2/2$ ist die Kondensationsenergie, welche gegenüber der Energielücke nochmal um etwa einen Faktor 100 unterdrückt ist. Wenn die Temperaturen vergleichbar mit der Energielücke sind, werden immer mehr Paare angeregt und der Supraleiter bricht zusammen. Die BCS-Wellenfunktion lautet

$$|\psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_k \gamma_{k,\uparrow}^\dagger \gamma_{-k,\downarrow}^\dagger |0\rangle = \prod_k (u_k + v_k c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger) |0\rangle. \quad (4.16)$$



Projiziere auf feste Teilchenzahl (oder Zahl der Paare) N . Definiere dazu

$$|\psi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \exp(-iN\phi) |\psi_\phi\rangle, \quad (4.17)$$

wobei $|\psi_\phi\rangle$ einen Faktor $\exp(iN\phi)$ enthalten muss, weil ansonsten das Integral verschwindet. Ignoriere Normierung

$$\begin{aligned} |\psi_\phi\rangle &= \prod_k \left(1 + \exp(i\phi) \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle = \prod_k \exp \left(\exp(i\phi) \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \right) = \\ &= \exp \left(\exp(i\phi) \sum_k \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \equiv \exp(\exp(i\phi) a^\dagger) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.18)$$

wobei wir über

$$\sum_k \frac{v_k}{u_k} c_{k,\uparrow}^\dagger c_{-k,\downarrow}^\dagger \equiv a^\dagger, \quad (4.19)$$

einen Erzeugungsoperator für Paare eingeführt haben.

$$c_{k,\sigma}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \psi_\sigma^\dagger(x), \quad (4.20)$$

und somit

$$a^\dagger = \int d^3x_1 d^3x_2 \sum_k \frac{v_k}{u_k} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \psi_\uparrow^\dagger(x_1) \psi_\downarrow^\dagger(x_2), \quad (4.21)$$

mit der Ortsraumwellenfunktion für Paare

$$\sum_k \frac{v_k}{u_k} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)) \equiv \varphi(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|). \quad (4.22)$$

$$|\psi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \exp(-iN\phi) \exp(\exp(i\phi) a^\dagger) |0\rangle = \frac{2\pi}{N!} (a^\dagger)^N |0\rangle. \quad (4.23)$$

a^\dagger erzeugt ein Paar mit einer Wellenfunktion, die nur vom Betrag vom Abstand abhängt (Singulettzustand). Alle diese Paare stecken in einer makroskopischen Wellenfunktion, im selben Quantenzustand, für den der Gesamtimpuls des Paares immer $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ist. Die relative Wellenfunktion eines Paares ist immer dieselbe. Vergleiche mit dem Bose-Kondensat mit der Wellenfunktion

$$|\psi_N\rangle = (b_{\mathbf{k}=0}^\dagger)^N |0\rangle. \quad (4.24)$$

4.3 London's Gleichungen

Wir machen den Ansatz einer reibungsfreien Flüssigkeit (mit verschwindender Viskosität), welche einen perfekten Leiter beschreibt. Die Kraft auf die einzelnen Elektronen ist gegeben durch die Lorentzkraft:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right). \quad (4.25)$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{d\mathbf{v}(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (4.26)$$

In der Hydrodynamik bezeichnet man $\partial \mathbf{v} / \partial t$ als lokale Beschleunigung und $d\mathbf{v} / dt$ als substantielle Beschleunigung. Damit gilt nun

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \frac{e}{m} \mathbf{E} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} - \frac{e}{mc} \mathbf{H}. \quad (4.27)$$

Bilden wir auf beiden Seiten die Rotation und benutzen das Induktionsgesetz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}, \quad (4.28)$$

so ergibt sich:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (4.29)$$

Wenn $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ bei $t = 0$ gegeben ist, dann gilt immer $\boldsymbol{\omega} = 0$. (4.27) beschreibt einen perfekten Leiter. Die Bedingung $\boldsymbol{\omega} = 0$ beschreibt den Meissner-Effekt wie dieser bei einem Supraleiter auftritt. Aus $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ergibt sich aus (4.27):

$$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{e}{mc} \mathbf{H}, \quad (4.30a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \frac{e}{m} \mathbf{E} = 0. \quad (4.30b)$$

Führen wir die Stromdichte $\mathbf{J} = -en_s \mathbf{v}$ und die Größe

$$\Lambda = \frac{m}{n_s e^2} = \frac{4\pi \lambda^2}{c^2}, \quad (4.31)$$

ein, so gilt

$$\nabla \times (\Lambda \mathbf{J}) = -\frac{1}{c} \mathbf{H}, \quad (4.32a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Lambda \mathbf{J}) = \mathbf{E}, \quad (4.32b)$$

wobei in (4.32b) der Term $\nabla(\mathbf{v}^2/2)$ vernachlässigt wurde. (4.32a) ist die berühmtere der beiden Gleichungen. Mit der Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi J}{c}, \quad (4.33)$$

folgt aus (4.32a):

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{H}.} \quad (4.34)$$

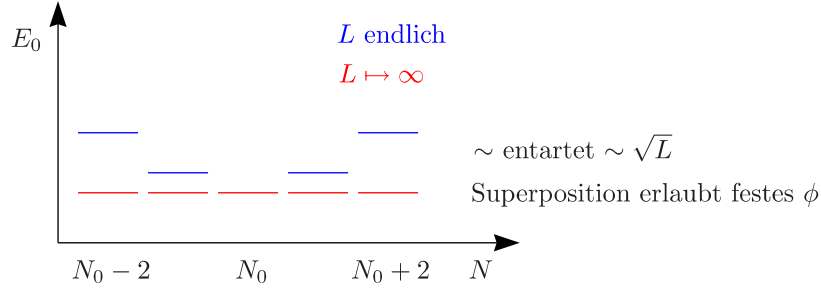
Der supraleitende Zustand ist **klassisch** eindeutig. Gebrochen ist die Phasensymmetrie. Da jedoch die Phase klassisch nicht existiert, ist die Symmetriebrechung rein quantenmechanisch.

$$|\psi_{\text{BCS}}^{N \text{ fest}}\rangle = (a^\dagger)^N |0\rangle, \quad (4.35)$$

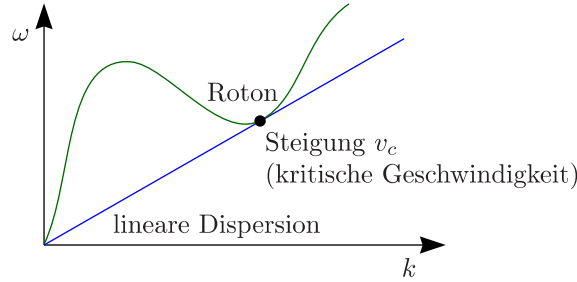
wobei a^\dagger ein Cooper-Paar mit $\mathbf{k}_{\text{tot}} = 0$ erzeugt. Der supraleitende Zustand für festes N ist eindeutig.

4.4 Spontane Symmetriebrechung im Supraleiter

Der Ordnungsparameter ist ein klassisches Feld und ist gegeben durch $\Psi^*(x) = \langle \psi_0^\phi | \psi_\uparrow^\dagger(x) \psi_\downarrow^\dagger(x) | \psi_0^\phi \rangle$. Dieser ist nur dann $\neq 0$, wenn für die BCS-Wellenfunktion $|\psi_0^\phi\rangle$ die Phase fest ist, aber nicht die Teilchenzahl. Der Ordnungsparameter lässt sich auch schreiben als $\Psi^\dagger(x) = \sqrt{n_s} \exp(i\phi)$, wobei die Phase ϕ verschiedene Zustände charakterisiert. Bei einem idealen Supraleiter ist n_s die Elektronendichte. n_s ist ein Materialparameter, welcher gegeben ist durch die Suprafluidität, wenn keine Ströme vorhanden sind. Zwar kann die Elektronendichte in einem Supraleiter räumlich inhomogen sein. Um jedoch eine effektive Feldtheorie formulieren zu können, nimmt man an, dass n_s konstant ist. Tower of states beim Antiferromagneten:



Für jedes endliche System hat man den Singulett-Grundzustand. Für $L \mapsto \infty$ wurden alle entartet und man konnte eine Superposition bilden und der Neel-Vektor zeigt in eine bestimmte Richtung. Der Ordnungsparameter ist eigentlich nicht $\langle (-1)^i \mathbf{S}_i \rangle$, sondern $\langle (-1)^{i-j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \rangle$ für $i - j \mapsto \infty$. Supraleiter für L endlich:



Der Ordnungsparameter ist eigentlich $\langle \psi_0 | \psi_1(x) \psi_1^\dagger(y) \psi_1^\dagger(x) \psi_1(x) | 0 \rangle$ und ist konstant für $x - y \mapsto \infty$. Die Phaseninformation ist eine Variable, welche die Ordnung charakterisiert, genauso wie es beim Antiferromagneten der Neel-Vektor ist.

Man liest oft, dass im Supraleiter die Eichsymmetrie gebrochen ist. Dies ist jedoch falsch. In der Teilchenphysik sind die Begriffe „Higgsmechanismus“ und „spontan gebrochene Eichsymmetrie“ oft äquivalent. Die Eichsymmetrie kann nicht gebrochen werden, weil es keine echte Symmetrie ist. Beispielsweise ändern Translationen und Rotationen den physikalischen Zustand; eine Eichtransformation ändert jedoch nur die Beschreibung des physikalischen Zustands. Ob man die Länge eines Tisches in Zoll oder Zentimeter misst, ändert nichts an der Länge des Tisches. Die Invarianz einer Beschreibung kann als solche nicht gebrochen werden. Außer, wenn wir zur Beschreibung eine bestimmte Eichung wählen. In der Literatur wird oft erwähnt, dass „die BCS-Theorie die Eichsymmetrie bricht“: $c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \mapsto \exp(i e \Lambda) c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$. Dies ist gleichbedeutend zu einer Änderung der Phase $|\psi_0\rangle$ ist die analog zu $\phi \mapsto \phi + 2e\Lambda$. Die Änderung der Phase ist die gebrochene Symmetrie, was aber einfach falsch ist. Hilfreich ist, sich die Eichsymmetrie allgemeiner anzuschauen. Wir betrachten einen kinetischen Hamiltonoperator für irgendwelche Teilchen:

$$H_{\text{kin}} = \frac{1}{2m} \sum_{\sigma} \int d^3x \psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \left(-i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \psi_{\sigma}(x). \quad (4.36)$$

Eine Eichtransformation besitzt die Gestalt

$$\psi_{\sigma}^{\dagger}(x) \mapsto \exp\left(i \frac{e\Lambda(x)}{\hbar c}\right) \psi_{\sigma}^{\dagger}(x), \quad \mathbf{A}(x) \mapsto \mathbf{A}(x) + \nabla \Lambda(x). \quad (4.37)$$

Darunter ist H_{kin} invariant. Wenn H_{kin} invariant ist, muss dies auch für die Zustände gelten. Betrachten wir einen Vielteilchenzustand in zweiter Quantisierung:

$$|\varphi\rangle = \sum_{\sigma_1, \dots} \int d^3x_1 \dots \varphi(x_1, \dots, x_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \psi_{\sigma_1}^{\dagger}(x_1) \dots \psi_{\sigma_N}^{\dagger}(x_N) |0\rangle. \quad (4.38)$$

Weil die Felder eine Phase bekommen, muss φ dementsprechend eine Phase erhalten, welche diese kompensiert:

$$\varphi(x_1, \dots, x_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \mapsto \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{i e \Lambda(x_i)}{\hbar c}\right) \varphi(x_1, \dots, x_N, \sigma_1, \dots, \sigma_N). \quad (4.39)$$

In erster Quantisierung (blau markierte Stellen) ändert sich der Hamiltonian und die Wellenfunktion. Dies liegt an der Unvollständigkeit der Beschreibung.

Die Multiplikation mit einer globalen Phase ist keine Eichtransformation. Die Eichtransformation ist definiert als die Transformation, welche weder den Hamiltonian noch den Zustand ändert, weil man nur die Beschreibung

ändert. Verbindet man zwei Supraleiter mit verschiedenen Phasen, so fließt zwischen ihnen ein Strom. Die Gesamtphase besitzt damit eine physikalische Realität. Die globale U(1)-Symmetrie ist gebrochen; sie ist jedoch Teil der physikalischen Beschreibung und keine Eichsymmetrie, weil sie keine Untergruppe der Eichgruppe ist. Ψ^* entspricht keiner klassischen Observablen. Es handelt sich um eine makroskopische Größe, welche klassisch kein Äquivalent hat. Die Phase ist dennoch physikalisch. Eichtransformation für die BCS-Theorie:

$$c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \mapsto \exp\left(i\frac{e\Lambda}{\hbar c}\right) c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger, \quad \phi \mapsto \phi - 2e\Lambda. \quad (4.40)$$

Der Zustand

$$\left(u_k + \exp(i\phi)v_k c_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger c_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger\right) |0\rangle, \quad (4.41)$$

ist invariant, aber das Label „ ϕ “ ändert sich. Ordnungsparameter in BCS-Theorie:

$$\Psi^* = \frac{1}{V} \sum_k v_k^* u_k^* \exp(-i\phi), \quad (4.42)$$

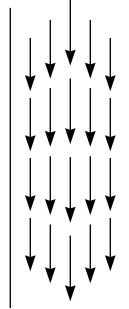
mit der Eichtransformation

$$\Psi^*(x) \mapsto \exp\left(i\frac{2e\Lambda}{\hbar c}\right) \Psi^*(x). \quad (4.43)$$

Der Ordnungsparameter ist ein geladenes Feld. Dieses muss Eichtransformationseigenschaften haben wie eine Ladung 2. Das Ordnungsparameterfeld hat Ladung $2e$. Aus dieser Tatsache folgt die gesamte Phänomenologie der Supraleitung.

4.5 Effektive Feldtheorie

Wir arbeiten im Folgenden in CGS-Einheiten. Ein Suprafluid ist dadurch charakterisiert, dass sie ein masseloses Anregungsspektrum hat:



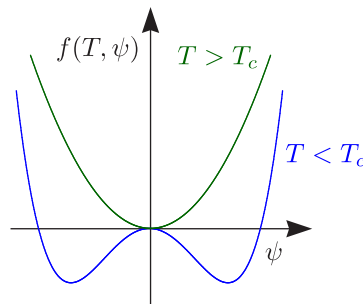
Die Geschwindigkeit des Rohres muss größer als v_c sein, um Anregungen des Fluids zu schaffen. Ansonsten ist nicht genügend Energie da, um den entsprechenden Impuls zu erzeugen. Dann gibt es keine Dissipation und das Suprafluid kann fließen ohne Reibungseffekte.

4.5.1 Landau-Ginzburg-Theorie

Dies ist eine Theorie, mit der man einen Phasenübergang beschreiben kann. Wir betrachten das Landau-Ginzburg-Funktional für das klassische Ordnungsparameterfeld $\Psi(x)$:

$$f(T, \Psi) = \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla + \frac{e^*}{c} A(x) \right) \Psi(x) \right|^2 + a(T) |\Psi(x)|^2 + \frac{1}{2} b |\Psi(x)|^4 + \frac{1}{8\pi} \mathbf{B}(x)^2. \quad (4.44)$$

Es gilt $a(T) \sim (T - T_c)$, also $a < 0$ für $T < T_c$.



Das Eichfeld wird benötigt, weil das Ordnungsparameterfeld ein geladenes Feld ist. Für $T < T_c$ nimmt $\Psi(x)$ einen endlichen konstanten Wert an. Für den endlichen Wert gilt

$$|\psi(x)|^2 = -\frac{a}{b}, \quad (4.45)$$

was jedoch nicht die Phase festlegt. Wir machen daher Ansatz

$$\Psi(x) = \Psi_0 \exp(i\phi). \quad (4.46)$$

Man könnte die Phase gleich Null setzen. Wir haben jedoch den Eichfreiheitsgrad und solange

$$\nabla\phi = -\frac{e^*}{\hbar c} \mathbf{A}(x), \quad (4.47)$$

gilt, ist dies immer eine Lösung der Landau-Ginzburg-Theorie. Für die freie Energie gilt

$$f_{\text{mag}} = \frac{n_s}{2m^*} \left(\hbar \nabla\phi(x) + \frac{e^*}{c} \mathbf{A}(x) \right)^2, \quad n_s = |\psi|^2. \quad (4.48)$$

Wir werden erkennen, dass bei Temperatur $T = 0$ bei einem sauberen Supraleiter n_s so etwas wie eine Elektronendichte ist. Eigentlich ist n_s so etwas wie die Steifigkeit des Systems und ist charakteristisch für die Energie, die es kostet, das System zu verändern. Weiterhin folgt die effektive Elektronmasse $m^* = 2m_e$ aus der Theorie. Für die freie elektrische Energie gilt

$$f_{\text{el}} = -n_s e^* \Phi(x), \quad (4.49)$$

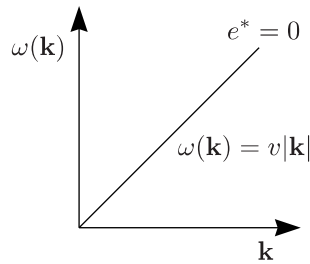
Der Term kürzt sich immer durch die Lagrangedichte des Hintergrundes (positive Atomrümpfe) $\mathcal{L}_b = -n_s e^* \Phi(x)$. Wenn wir eine effektive Theorie des Suprafluids hinschreiben möchten, benötigen wir \mathcal{L}_b nicht, weshalb wir f_{el} mitnehmen werden. Unter Eichtransformationen gilt

$$\phi(x) \mapsto \phi(x) - \frac{e^*}{\hbar c} \Lambda(x), \quad \Phi(x) \mapsto \Phi(x) - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda(x), \quad \mathbf{A}(x) \mapsto \mathbf{A}(x) + \nabla \Lambda(x). \quad (4.50)$$

f_{el} ist nicht eichinvariant, weshalb wir die Theorie modifizieren müssen. Die Lagrangedichte für das Suprafluid lautet damit

$$\mathcal{L}_S = -n_s [\hbar \partial_t \phi(x) - e^* \Phi(x)] - \frac{n_s}{2m^*} \left[\hbar \nabla \phi(x) + \frac{e^*}{c} \mathbf{A}(x) \right]^2. \quad (4.51)$$

Der erste Term wurde so konstruiert, dass er eichinvariant ist. Die zusätzliche Zeitableitung geht nicht in die Euler-Lagrange-Gleichungen ein. In dieser Beschreibung ist der Suprafluid immer für $e^* = 0$ enthalten.



Mit dem geladenen Ordnungsparameter wollen wir diese Mode, welche phänomenologisch bestätigt ist, beschreiben. Man fügt damit als Korrektur einen zusätzlichen Term hinzu:

$$\mathcal{L}_S = -n_s [\hbar \partial_t \phi(x) - e^* \Phi(x)] - \frac{n_s}{2m^*} \left\{ \left[\hbar \nabla \phi(x) + \frac{e^*}{c} \mathbf{A}(x) \right]^2 - \frac{1}{v^2} (\hbar \partial_t \phi(x) - e^* \Phi(x))^2 \right\}. \quad (4.52)$$

Wir führen nun die kovariante Schreibweise

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right), \quad A_\mu \equiv (\Phi, -\mathbf{A}), \quad (4.53)$$

ein und definieren

$$D_\mu \phi \equiv \hbar \partial_\mu \phi - \frac{e^*}{c} A_\mu. \quad (4.54)$$

In Viererschreibweise ist somit die Lagrangedichte gegeben durch:

$$\mathcal{L}_S = -cn_s D_0\phi + \frac{n_s}{2m^*} \left\{ \frac{c^2}{v^2} (D_0\phi)^2 - (D_i\phi)^2 \right\}, \quad (4.55)$$

mit dem elektromagnetischen Anteil

$$\mathcal{L}_{\text{em}} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.56)$$

Was uns nun interessiert, sind Symmetrien der Theorie. Die erste Symmetrie ist eine globale U(1)-Rotation des Ordnungsparameters: $\phi(x) \mapsto \phi(x) + \lambda$. Nach dem Noethertheorem ergibt sich aus der Symmetrie eine Erhaltungsgröße. Falls

$$D\mathcal{L} \equiv \frac{d\mathcal{L}(x, \lambda)}{d\lambda} = \partial_\mu F^\mu(x), \quad (4.57)$$

gilt, gibt es einen erhaltenen Strom

$$J^\mu(x) = \text{const.} \left\{ \frac{\delta L_S}{\delta(\partial_\mu\phi)} D\phi - F^\mu \right\}, \quad D\phi \equiv \left. \frac{d\phi(x, \lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (4.58)$$

für den also $\partial_\mu J^\mu = 0$ gilt. Für die U(1)-Symmetrie $\phi \mapsto \phi + \lambda$ ist $D\mathcal{L} = 0$ und wir wählen $F^\mu = 0$. Mit $D\phi = 1$ ergibt sich der erhaltene Strom

$$J^\mu = -\frac{1}{\hbar} \frac{\delta L_S}{\delta(\partial_\mu\phi)} = -\frac{\delta L_S}{\delta(D_\mu\phi)}. \quad (4.59)$$

Physikalisch bedeutet die Symmetrie eine Erhaltung der Ladung. Der Strom, der aus dem Neother-Theorem folgt, ist ein Teilchenstrom. Der elektromagnetische Strom in der Elektrodynamik ist definiert als

$$-c \frac{\delta L_S}{\delta(A_\mu(x))} \stackrel{!}{=} -e^* J^\mu, \quad (4.60)$$

für $e^* > 0$. Mit $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ gilt

$$\rho(x) = -\frac{1}{c} \frac{\delta L_S}{\delta(D_0\phi)} = n_s - \frac{n_s}{m^*} \frac{c}{v^2} (D_0\phi), \quad (4.61)$$

und darüber hinaus

$$J_i(x) = -\frac{\delta L_S}{\delta(D_i\phi)} = \frac{n_s}{m^*} (D_i\phi). \quad (4.62)$$

Der zugehörige Erhaltungssatz ist $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Die dynamische tatsächliche Dichte des Suprafluids ist also $\rho(x)$ und nicht n_s . Bemerkung: Die Euler-Lagrange-Gleichung für ϕ ist wegen $\delta\mathcal{L}_S/\delta\phi = 0$ gegeben durch

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu(-\hbar J^\mu) = 0. \quad (4.63)$$

Diese gibt nichts mehr als die Teilchenzahlerhaltung. Dies hängt damit zusammen, dass ϕ im Wesentlichen physikalisch invariant ist. Wir benötigen das Feld für einen Erhaltungssatz, um mit einer spontan gebrochenen Symmetrie in Verbindung zu stehen, trägt aber nicht mehr zur Physik bei. Führen wir nun den Check $e^* = 0$ (neutrales Suprafluid) durch, so reduziert sich die Gleichung (4.63) auf

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \phi(x) = 0, \quad (4.64)$$

und der zugehörigen Mod ist $\omega(\mathbf{k}) = v|\mathbf{k}|$, also der, den wir gefordert haben.

Das zugehörige Impulsfeld

$$\pi(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta(\partial_t\phi)} = -\hbar \rho(x), \quad \left(\text{vergleiche } p \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} \right), \quad (4.65)$$

ist physikalisch wichtig, wenn wir die Hamiltondichte einführen. Wenn wir das Phasenfeld verwenden, um die Feldtheorie zu formulieren, ist das konjugierte Feld dazu die Dichte. Wollen wir die Feldtheorie kanonisch quantisieren, führen wir Feldoperatoren ein, für die wir

$$[\hat{\phi}(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}(\mathbf{y}, t)] = i\hbar \delta(x - y), \quad (4.66)$$

fordern. Integration über d^3y führt auf, weil eine Integration über die Dichte die Teilchenzahl ergibt: $[\widehat{\phi}, \widehat{N}] = -i$. Die zugehörige Unschärferelation ist dann gegeben durch

$$\Delta\phi \cdot \Delta N \geq \frac{1}{2}. \quad (4.67)$$

Ist $N \approx 10^{22}$ und $\Delta N \approx 10^{11}$, so ist $\Delta\phi \approx 10^{-11}$. Die Phase kann man durchaus als klassische Variable betrachten, weil die relative Unschärfe im Vergleich zum Wertebereich $[0, 2\pi)$ sehr klein ist. In dem Sinne ist der Supraleiter makroskopisch und die Feldtheorie lässt sich als klassisch behandeln. Mittels des Impulsfeldes können wir nun die Hamiltondichte

$$\mathcal{H}_S \equiv -\hbar\varrho(x)\partial_t\phi(x) - \mathcal{L}_S, \quad (4.68)$$

eingeführen. Hierbei betrachten wir \mathcal{H}_S als Funktional von ϱ , $\partial_i\phi$, Φ und \mathbf{A} , aber nicht $\partial_t\phi$. Der Hamiltonoperator ist gegeben durch die räumliche Integration der Hamiltondichte:

$$H_S = \int d^3x \mathcal{H}_S. \quad (4.69)$$

In der klassischen Mechanik gelten die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad (4.70)$$

und in der Feldtheorie analog dazu

$$\partial_t\phi = \frac{\delta H_S}{\delta\pi(x)} = -\hbar\frac{\delta H_S}{\delta\varrho(x)}, \quad (4.71a)$$

$$-\hbar\partial_t\varrho = \partial_t\pi = \partial_i\frac{\delta H_S}{\delta(\partial_i\phi(x))} - \frac{\delta H_S}{\delta\phi(x)}. \quad (4.71b)$$

Aus den Gleichungen folgt eine ganze Menge an Physik. Bevor wir uns das jedoch näher anschauen werden, betrachten wir eine weitere Symmetrie und zwar die Raum- und Zeit-Transformation $x^\nu \mapsto x^\nu - e^\nu\lambda$. Um Eichinvarianz zu gewährleisten, muss die gleichzeitige Eichtransformation

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \quad \Lambda = \lambda e^\nu A_\nu(x), \quad (4.72)$$

durchgeführt werden, also

$$\phi \mapsto \phi + \lambda e^\nu \left(\partial_\nu\phi - \frac{e^*}{\hbar c} A_\nu \right), \quad A_k \mapsto A_k + \lambda e^\nu (\partial_\nu A_k - \partial_k A_\nu). \quad (4.73)$$

Ohne die Eichtransformation bekommt man den kanonischen Energie-Impuls-Tensor, der selbst nicht eichinvariant ist. Mit der Eichtransformation ergibt sich der eichinvariante kinematische Energie-Impuls-Tensor.

$$T_S^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathcal{L}_S}{\delta(D_\mu\phi)} D^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_S. \quad (4.74)$$

Die ($\nu = 0$)-Komponenten in der Gleichung $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ liefern die (kinematische) Energie- und Impulsdichte. Die Energiedichte lautet

$$T_S^{00} = -\varrho(x)(\hbar\partial_t\phi - e^*\Phi) - \mathcal{L}_S = \mathcal{H}_S + \varrho(x)e^*\Phi, \quad (4.75)$$

und die Impulsdichte ist gegeben durch

$$\frac{1}{c}T_S^{0i} = \varrho(x) \left(\hbar\nabla\phi + \frac{e^*}{c}\mathbf{A}(x) \right)^i \stackrel{!}{=} \varrho m^* v_i. \quad (4.76)$$

Wir definieren damit die **suprafluide Geschwindigkeit** als

$$m^*\mathbf{v} = \hbar\nabla\phi + \frac{e^*}{c}\mathbf{A}(x). \quad (4.77)$$

Für einen ungeladenen Supraleiter ist diese der Gradient der Phase. Die obige Formel ist die eichinvariante Kombination. (4.77) gilt exakt! Bemerkung: Machen wir eine Galileitransformation $\mathbf{v}_s \rightarrow \mathbf{v}_s + \mathbf{u}$, so ergibt sich

$$\frac{1}{c} \int d^3x T^{00}(x) \mapsto \frac{1}{c} \int d^3x T^{00}(x) + \int d^3x \varrho(x) m^* \mathbf{u}, \quad (4.78)$$

woraus folgt, dass

$$\int d^3x \varrho(x) m^*, \quad (4.79)$$

die Masse des Suprafluids ist. m^* ist die unrenormierte Masse der Cooper-Paare (oder im ungeladenen Suprafluid die Teilchen). Es geht keine Bandstruktur mit ein. Es sollte sein, dass der Teilchenstrom $\mathbf{J}(x)$ durch $\varrho(x)\mathbf{v}_s(x)$ gegeben ist. Dies stimmt aber nur in führender Ordnung! Wir fordern, dass

$$\frac{1}{c} T_S^{0i} = m^* J^i, \quad T_S^{0i} = \frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta(D_0\phi)} D^i\phi, \quad J^i = \frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta(D_i\phi)}, \quad (4.80)$$

gilt, also der Teilchenstrom der Impulsdichte entspricht. Damit fordern wir die Form

$$\mathcal{L}_S = P(cD_0\phi + \frac{1}{2m^*}(D_i\phi)^2), \quad (4.81)$$

der Lagrangedichte und somit:

$$\mathcal{L}_S = -n_s \left(cD_0\phi + \frac{1}{2m^*}(D_i\phi)^2 \right) + \frac{n_s}{2m^*} \frac{1}{v^2} \left(cD_0\phi + \frac{1}{2m^*}(D_i\phi)^2 \right)^2. \quad (4.82)$$

Neu ist also $1/(2m^*)(D_i\phi)^2$ im quadratischen Term. Somit folgt weiter:

$$\varrho(x) = -\frac{1}{c} \frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta(D_0\phi)} = -n_s - \frac{n_s}{m^*} - \frac{1}{v^2} \left(cD_0\phi + \frac{1}{2m^*}(D_i\phi)^2 \right), \quad (4.83)$$

und

$$\mathbf{J}(x) = -\frac{\delta \mathcal{L}_S}{\delta(D_i\phi)} = \varrho(x)\mathbf{v}_s(x). \quad (4.84)$$

Bei der Definition der suprafluiden Geschwindigkeit stimmt m^* nicht mit dem Parameter von \mathcal{L}_S überein. Dies sieht man erst später. Zurück zu (4.71a):

$$\hbar \partial_t \phi = -\frac{\partial \mathcal{H}_S}{\partial(\varrho(x))} = -\frac{\partial T_S^{00}(x)}{\partial \varrho(x)} + e^* \Phi, \quad (4.85)$$

und daraus ergibt sich mit der Definition des chemischen Potentials $\partial T_S^{00}(x)/\partial \varrho(x) \equiv \mu$:

$$\boxed{\hbar \partial_t \phi - e^* \Phi = -\mu \Leftrightarrow cD_0\phi = -\mu.} \quad (4.86)$$

Dies ist die erste charakteristische Gleichung der Supraleitung (Anderson 1966). Die Phasenrotation des Supraleiters ist durch den Unterschied zwischen chemischen und elektrostatischem Potential gegeben. Diese Rotationsgeschwindigkeit der Phase ist keine physikalische Größe, das sie von der Eichung abhängt. Trotzdem hat sie physikalische Implikationen, worauf wir später zurückkommen werden. Wir bilden nun den Gradienten der Gleichung und addieren auf beiden Seiten $e^*/c\partial_t \mathbf{A}$:

$$\partial_t \left(\hbar \nabla \phi + \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right) = -\nabla \mu(x) - e^* \left(-\nabla \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right), \quad (4.87)$$

also

$$\boxed{m^* \partial_t \mathbf{v}_s = -\nabla \mu(x) - e^* \mathbf{E} = -\nabla \mu_{\text{el.chem.}}} \quad (4.88)$$

Ein stationärer Fluss im Suprafluid ist gleichbedeutend mit $\nabla \mu_{\text{el.chem}} = 0$. Gibt es einen Gradienten des elektrochemischen Potentials, wird das Suprafluid beschleunigt. Das heißt nicht, dass ein Teilchen im Suprafluid nicht beschleunigt werden kann. Betrachten wir die Strömung eines Suprafluids in einem Rohr, dessen Dicke sich in Abhängigkeit von der zurückgelegten Wegstrecke ändert. Hier ist der Gradient des elektrochemischen Potentials gleich Null, weil sich das Geschwindigkeitsfeld mit der Zeit nicht ändert. Der Zusammenhang zwischen Kraft und \mathbf{v}_s im Supraleiter ist:

$$\frac{1}{m^*} F = \frac{dv_s}{dt} = \partial_t v_s + \frac{dv_s}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \partial_t v_s + (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s. \quad (4.89)$$

dv_s/dt ist eine substantielle Beschleunigung und $\partial_t v_s$ die lokale Beschleunigung. Die lokale Beschleunigung führt zu einer Änderung des Geschwindigkeitsfeldes. Kommen wir nun zu Gleichung (4.71b):

$$-\hbar\partial_t\varrho(x) = \partial_i \frac{\delta\mathcal{H}_s}{\delta(\partial_i\phi)} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\delta\phi(x)}, \quad (4.90)$$

und integrieren über d^3x . Hierbei fällt der erste Term auf der rechten Seite weg, weil dies ein Randterm ist. Dann ergibt sich:

$$-\hbar\partial_t \int d^3x \varrho(x) = -\frac{\partial}{\partial\phi(x)} \int d^3x T_S^{00}(x), \quad (4.91)$$

mit

$$\frac{\partial F[\phi(x)]}{\partial\phi} \equiv \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x) + \Delta\phi] - F[\phi(x)]}{\Delta\phi}. \quad (4.92)$$

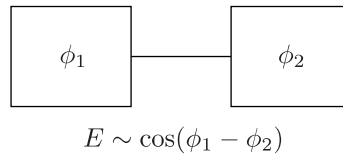
Unter Verwendung von

$$N_S = \int d^3x \varrho(x), \quad \int d^3x T_S^{00}(x) = E_S, \quad (4.93)$$

ergibt sich die zweite charakteristische Gleichung von Anderson:

$$\boxed{-\hbar\partial_t N_S = -\frac{\partial E_S}{\partial\phi}}. \quad (4.94)$$

Dass die Energie von der Phase abhängt, kann man nur realisieren, indem man zwei Supraleiter miteinander verbindet. Dann fließt ein Strom und die Phasen gleichen sich an (Josephson-Effekt).



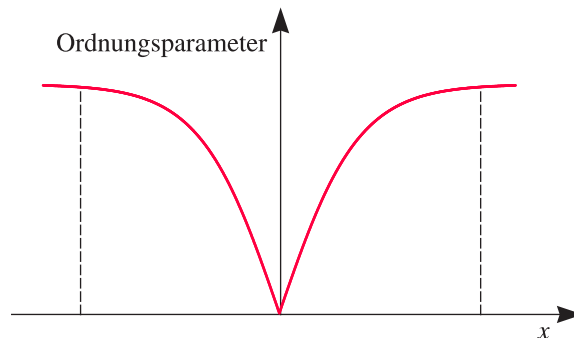
4.6 Phänomenologie und Higgs-Mechanismus

4.6.1 Vortex-Quantisierung

Schauen wir uns zunächst das neutrale Suprafluid mit $e^* = 0$ an. Im neutralen Suprafluid besitzt man nicht die Möglichkeit einer Eichtransformation und dann besitzt ϕ eine absolute Bedeutung. (Die globale Symmetrie ist eine physikalische Symmetrie, die zur Erhaltung der Teilchenzahl beiträgt und spontan gebrochen ist.)

$$m^* \mathbf{v}_s = \hbar \nabla \phi. \quad (4.95)$$

Es gibt viele Lösungen für $\mathbf{v}_s(x)$. Ist das Suprafluid einfach zusammenhängend, dann gilt per Definition $\nabla \times \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$. Betrachten wir nun einen Vortex. Im Vortextkern gilt $|\Psi(x)| \mapsto 0$. (Dann verschwindet der Ordnungsparameter und es handelt sich um ein normalleitendes Gebiet \equiv Loch/Pol.)



Integriert man über die Oberfläche, folgt:

$$\oint_{\partial S} \nabla \phi(x) \, dl = 2\pi n, \quad (4.96)$$

wobei n eine ganze Zahl ist und die Stärke des Vortex angibt. Dann ist der Drehimpuls der Teilchen um den Vortex quantisiert und zwar über $n\hbar$. Man kann nun eine Größe, genannt Vortizität, einführen:

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \nabla \times \mathbf{v}_s \Rightarrow \int_S \boldsymbol{\omega}(x) \, \mathbf{n} \, da = \frac{2\pi\hbar n}{2m^*}. \quad (4.97)$$

Diese sogenannte Vortex-Quantisierung tritt nur im Suprafluid, aber nicht im Supraleiter auf. Quantisierte Vortizes (quantisierte Wirbel) gibt es zwar im Supraleiter auch, jedoch handelt es sich nur beim Suprafluid um Wirbel im suprafluiden Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}_s(x)$.

4.6.2 Der Higgsmechanismus im Supraleiter

Das Feld $\phi(x)$ verliert seine physikalische (und formale) Bedeutung in Gegenwart des Eichfeldes. Man kann zum Beispiel eine Eichtransformation in den Bewegungsgleichungen mit $\Lambda(x) = \hbar c/e^* \phi(x)$ durchführen, so dass $\phi(x)$ verschwindet:

$$-\frac{e^*}{c} A'_\mu \equiv D_\mu \phi = \hbar \partial_\mu \phi - \frac{e^*}{c} A_\mu. \quad (4.98)$$

Die Lagrangedichte in den neuen Variablen lautet dann

$$\mathcal{L} = -n_s \left(cD_0\phi + \frac{1}{2m^*} (D_i\phi)^2 \right) + \frac{n_s}{2m^*} \frac{1}{v^2} \left(cD_0\phi + \frac{1}{2m^*} (D_i\phi)^2 \right)^2. \quad (4.99)$$

\mathcal{L} enthält Massenterme $\sim A_0^2, \sim A_i^2$. Das A -Feld ist nun kein masseloses Eichfeld mehr, weil wir eine bestimmte Eichung gewählt haben; es handelt sich nun um ein massives Feld. Schauen wir uns die Euler-Lagrange-Gleichungen für $A'_\mu \equiv A_\mu$ an:

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = 0, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}. \quad (4.100)$$

Die gewählte Eichung lässt den Maxwellterm unverändert (bis auf Randterme). Die zugehörigen Feldgleichungen sind die Maxwellgleichungen mit Ladungs- und Stromdichte der Superfluid-Lagrangedichte:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e^* (\varrho - n_s), \quad (4.101a)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} = -\frac{4\pi e^*}{c} \mathbf{J}, \quad (4.101b)$$

mit

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.102)$$

Dichte und Stromdichte für $\phi(x) \equiv 0$ sind gegeben durch:

$$4\pi e^* (\varrho - n_s) = \frac{1}{\lambda_L^2} \left(\Phi - \frac{e^*}{2m^* c^2} A^2 \right), \quad \frac{1}{\lambda_L^2} = \frac{4\pi e^* n_s}{m^* v^2}, \quad (4.103)$$

wobei v die Geschwindigkeit des masselosen Modes ist, der das Superfluid beschreibt. (Dieser Mod verschwindet durch den Higgsmechanismus und ist dann nicht mehr messbar. Dennoch ist v eine wohldefinierte Größe.)

$$\frac{4\pi e^*}{c} \mathbf{J} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{A} \left\{ 1 + \frac{e^*}{m^* v^2} \left[\Phi - \frac{e^*}{m^* v^2} \left(\Phi - \frac{e^*}{2m^* c^2} A^2 \right) \right] \right\}. \quad (4.104)$$

Wir betrachten nun quasistatische Prozesse ($\omega \ll c/\lambda_L$) und damit können wir den Term $\partial_t \mathbf{E}$ in den Maxwellgleichungen und $\partial_t \mathbf{A}$ im Ausdruck des elektrischen Feldes vernachlässigen. Dies führt auf:

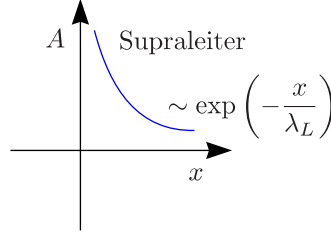
$$\nabla^2 \Phi = \frac{c^2}{v^2} \frac{1}{\lambda_L^2} \left(\Phi - \frac{e^*}{2m^* c^2} A^2 \right), \quad (4.105a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{\lambda_L^2} \left\{ 1 + \frac{e^*}{m^* v^2} \left(\Phi - \frac{e^*}{2m^* v^2} A^2 \right) \right\}. \quad (4.105b)$$

Aus (4.101b) ergibt sich $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ und aus (4.104) folgt in führender Ordnung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. In linearer Ordnung gilt:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{c^2}{v^2} \frac{1}{\lambda_L^2} \Phi, \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{A}. \quad (4.106)$$

Ein Supraleiter schirmt also sowohl elektrisches als auch magnetisches Feld ab. Die Abschirmung des elektrischen Feldes ist jedoch um viele Größenordnungen stärker, also gewissermaßen perfekt.



Aus (4.103) ergibt sich

$$\Phi - \frac{e^*}{2m^* c} \mathbf{A}^2 = 0, \quad (4.107)$$

und in (4.104) eingesetzt, liefert das:

$$\mathbf{J} = \frac{e^* n_s}{m^* c} \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \times \mathbf{J} = \frac{e^* n_s}{m^* c} \mathbf{B}, \quad (4.108)$$

was eine der Londonschen Gleichungen ist. Diese beschreibt einen Bernoulli-Hall-Effekt, welcher der Masse eine unabhängige Bedeutung gibt. Man kann nachmessen, dass die Masse gleich der doppelten Elektronenmasse ist. Weiterhin gilt:

$$-e^* \Phi + \frac{1}{2} m^* \mathbf{v}_s^2 = 0. \quad (4.109)$$

Wir betrachten die Lorentzkraft

$$F_{\text{em}} = -e^* \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_s}{c} \times \mathbf{B} \right) = m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt}. \quad (4.110)$$

In einer masselosen Theorie gibt es die masselose Mode und der Fluss ist beliebig. Dies ist im Supraleiter nicht so. Weiterhin besitzt das Phasenfeld ϕ keine unabhängige physikalische Bedeutung. Neutrales Suprafluid: Aus Lösungen für $\phi(x)$ folgen Lösungen für $\mathbf{v}_s(x)$. Bei einem Supraleiter ($e^* \neq 0$) entsprechen den Lösungen für $\phi(x)$ lediglich verschiedene Eichungen; es gibt **nur** eine physikalische Lösung. A'_μ ist ein Vektorfeld, aber kein Eichfeld mehr! (Wir haben die Theorie formuliert in eichinvarianten Größen.)

$$-\frac{e^*}{c} (A'_\mu) \equiv D_\mu \phi = \left(-\frac{\mu}{c}, m^* \mathbf{v}_s \right), \quad A'_\mu = \left(\frac{\mu}{e^*}, -\frac{m^*}{e^*} c \mathbf{v}_s \right). \quad (4.111)$$

Man betrachtet das chemische Potential μ und \mathbf{v}_s als Felder und formuliert die Theorie des Supraleiters mit diesen Größen. Der Gewinn dieser Formulierung ist, dass die Eichinvarianz nicht gebrochen ist, sondern keine Rolle mehr spielt, weil wir die Theorie in eichinvarianten Größen formuliert haben. Die spontan gebrochene Symmetrie im Supraleiter ist eine **globale** U(1)-Symmetrie, wohingegen $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda$ eine physikalische Symmetrietransformation ist, weil sie verschiedene Zustände ineinander transformiert. Diese ist jedoch keine Untergruppe der Eichgruppe, weil sich unter der Eichgruppe zusätzlich noch andere Felder transformieren. Die Kopplung an das Eichfeld führt zu einer langreichweitigen Wechselwirkung (analog zur Coulombwechselwirkung). Infolge der langreichweitigen Wechselwirkung kann das Phasenfeld nicht gedreht werden, weil dies Energie kostet. Die damit assoziierte Energielücke ist die Plasmafrequenz, mit der das ganze Gas gegenüber den positiv geladenen Hintergrund schwingt. Unter dieser Bedingung verschwindet die masselose Mode. Eine lokale Schwinger der Phase führt zu einem Gradienten derselben und damit verbunden ist eine suprafluide Geschwindigkeit. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Inhomogenität der Ladung. Jede Änderung der Ladung kostet die Plasmafrequenz, was zu einer perfekten Abschirmung führt.