

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: EINFÜHRUNG IN DIE FLAVOURPHYSIK

Prof. Dr. Nierste

Vorlesung Wintersemester 2008/2009

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 8. Februar 2009

Mitschrieb der Vorlesung EINFÜHRUNG IN DIE FLAVOURPHYSIK
von Herrn Prof. Dr. NIERSTE und Herrn Dr. im Wintersemester 2008/2009
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Überblick	5
1.1	Standard-Parametrisierung der CKM-Matrix	8
1.2	Meson-Antimeson-Mischung	12
1.3	Die drei Arten der CP-Verletzung	13
1.4	Geschichte der Flavour-Physik	14
1.5	Übersicht über die Messungen von CKM-Elementen	15
2	Flavour im Standardmodell	19
2.1	Elemente der Quantenfeldtheorie	19
2.2	Feld-Quantisierung	21
2.2.1	Skalare Felder	21
2.2.2	Dirac-Felder	21
2.2.3	Vektorfelder	22
2.3	Zeitordnungsoperator und Greenfunktion	23
2.4	Einführung von Wechselwirkungen	24
2.5	Eichwechselwirkungen des Standardmodells	25
3	Die Quantenchromodynamik (QCD)	29
3.1	Feynman-Regeln der QCD	30
3.2	Die Yukawa-Wechselwirkung	32
3.3	Diskrete Symmetrien \mathcal{C} , \mathcal{P} , \mathcal{T}	37
3.3.1	Raumspiegelung und Zeitumkehr	37
3.3.2	Ladungskonjugation	41
3.4	Zusammenfassung (und Ergänzung) für chirale Quarkfelder	43
3.5	CPT -Theorem (nach Lüders, Pauli, Zumino und Schwinger)	45
3.6	Einbau von Mesonen in die Theorie	45
3.7	Flavour-ändernde neutrale Ströme	46
4	Die Quantenchromodynamik	49
4.1	Renormierung	49
4.2	1.Schritt: Regularisieren	50
4.3	Zusammenfassung oder auch „Was bisher geschah“	53
4.4	Multiplikative Renormierung	53
4.5	Systematik der Schleifenintegrale	55
4.6	Entkopplungstheorem (Appelquist-Carrazzone-Theorem)	61
4.7	Anomale Dimension der Quarkmasse (Laufende Quarkmasse)	65
4.7.1	Anomale Dimension des Quarkfeldes	67
4.8	Flavoursymmetrien	68
5	Exklusive (semi-)leptonische Zerfälle	71
5.1	Semileptonische Zerfälle	73
5.2	Effektive Feldtheorien: Schwacher Hamilton-Operator	78
5.3	Meson-Zerfälle, direkte CP-Asymmetrien	85
6	Literatur	87

Kapitel 1

Überblick

Wir betrachten die Anordnung von Quarks und Leptonen in den bekannten drei Familien (Generationen) des Standardmodells:

Quarks	(u, d)	(c, s)	(t, b)
Leptonen	(e, ν_e)	(μ, ν_μ)	(τ, ν_τ)

Wir werden häufig von einer alternativen Notation Gebrauch machen:

$$u_1 = u, \quad u_2 = c, \quad u_3 = t, \quad d_1 = d, \quad d_2 = s, \quad d_3 = b,$$

$$l_1 = e, \quad l_2 = \mu, \quad l_3 = \tau, \quad \nu_{l_1} = \nu_e, \quad \nu_{l_2} = \nu_\mu, \quad \nu_{l_3} = \nu_\tau.$$

Die elektrische Ladung der Teilchen ist gegeben durch:

$$Q(u_i) = \frac{2}{3}, \quad Q(d_i) = -\frac{1}{3}, \quad Q(l_i) = 1, \quad Q(\nu_{l_i}) = 0.$$

Der Begriff „Flavour“ bedeutet nichts anderes als Fermionspezies. Es gibt folgende Flavour-Quantenzahlen:

Flavour-QZ	Quark					
	u	d	s	c	b	t
U	1	0	0	0	0	0
D	0	-1	0	0	0	0
Strangeness S	0	0	-1	0	0	0
Charm C	0	0	0	1	0	0
Beauty B	0	0	0	0	-1	0
T	0	0	0	0	0	1
Baryonzahl	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

Diese Quantenzahlen wurde vor dem Quarkmodell entdeckt. Man hat sie eingeführt, um Auswahlregeln zu beschreiben. Eine weitere Quantenzahl ist der starke Isospin. Die starke Wechselwirkung respektiert die Isospinsymmetrie. Das heißt, man kann Zustände ineinander rotieren, ohne dass sich die Physik ändert.

- Das Dublett (u, d) hat

$$I = \frac{1}{2}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- s, c, b und t haben $I = 0$.

Kommen wir zu den Lepton-Zahlen:

- e, ν_e haben $L_1 = L_e = 1, L_\mu = L_\tau = 0$.
- μ, ν_μ haben $L_2 = L_\mu = 1, L_e = L_\tau = 0$.

Die Gesamt-Leptonenzahl ist gegeben durch $L = L_e + L_\mu + L_\tau$. Die starke Wechselwirkung (QCD) führt zum **Confinement** der Quarks. Wir beobachten keine freien Quarks, sondern Bindungszustände, sogenannte **Hadronen**. Es gibt zwei Kategorien von Hadronen, nämlich **Mesonen** und **Baryonen**. Im naiven Quarkmodell

ist das Meson ein Quark-Antiquark-System: $q\bar{q}$. Hinzu kommt eine beliebige Anzahl von Gluonen und Quark-Antiquark-Paaren desselben Flavours, die sogenannten See-Quarks. Baryonen sind 3-Quark-Systeme. Besser: Ein Hadron h ist ein Eigenzustand zu $H_{\text{stark}} = H_{\text{QCD}}$, dem Hamilton-Operator der starken Wechselwirkung, also

$$H_{\text{QCD}}|h(\mathbf{p})\rangle = E_{\mathbf{p}}|h(\mathbf{p})\rangle, \quad (3)$$

mit

$$E_{\mathbf{p}} = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (4)$$

wobei M , \mathbf{p} und $E_{\mathbf{p}}$ Masse, Impuls und Energie des Hadrons h sind und

$$\hbar = c = 1, \quad (5)$$

gesetzt ist. Oft verwendet man die Einheiten

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = (0,2 \text{ GeV})^{-1}, \quad 1 \text{ GeV} = 1,8 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad 1 \text{ GeV} = 6,582 \cdot 10^{-13} \text{ ps}^{-1}. \quad (6)$$

Die starke Wechselwirkung respektiert die Flavour-Quantenzahlen in (1). Es sind somit gute Quantenzahlen, die benutzt werden können, um die Eigenzustände zu kennzeichnen. Beispiel:

$$\left| I_3 = \frac{1}{2}, S = 1, C = B = T = 0; \mathbf{p} \right\rangle = |u, \bar{s}\rangle = |K^+(\mathbf{p})\rangle. \quad (7)$$

Man schreibt kurz $K^+ \sim \bar{s}u$. (Dies bedeutet, dass K^+ die gleichen Flavour-Quantenzahlen hat wie ein $\bar{s}u$ -System. Unter **Flavourphysik** im engeren Sinne versteht man die Physik **flavour-ändernder Übergänge** und ist ein Teilgebiet der schwachen Wechselwirkung. Im weiteren Sinne umfasst das Gebiet auch Hadron-Spektroskopie (\sim QCD) und die Bestimmung von Quarkmassen aus starken und elektromagnetischen Prozessen. Flavourphysik ist Thema des Nobelpreises 2008 und außerdem Thema des O-Phasen-T-Shirts 2008. Flavouränderung findet im Standardmodell ausschließlich durch Wechselwirkung mit W-Bosonen statt.

g_2 ist hierbei die schwache Kopplungskonstante. P_L ist ein Projektor auf linkshändige Felder. W-Bosonen koppeln nur an linkshändige Anteile der Quark- und Leptonfelder. Die $V_{ij} = V_{u_i, d_j}$ bilden die **Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix)**:

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Die 2×2 -Untermatrix

$$\begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix},$$

bezeichnet man auch als Cabibbo-Matrix. Die CKM-Matrix ist unitär:

$$VV^\dagger = V^\dagger V = 1. \quad (10)$$

$VV^\dagger = 1$ bedeutet für Zeilen von V :

$$\sum_{j=1}^3 |V_{ij}|^2 = 1 \text{ für } i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{k=1}^3 V_{ik}V_{jk}^* = 0 \text{ für } i \neq j. \quad (12)$$

Gleichung (11) stellt drei Bedingungen und Gleichung (12) sechs Bedingungen (Real- und Imaginärteil) an die 18 Real- und Imaginärteile der V_{ij} . Damit hat eine unitäre 3×3 -Matrix neun freie Parameter und zwar drei Winkel und sechs Phasen. Die Physik des Standardmodells ist invariant unter Phasentransformationen der Felder

$$d_j \mapsto \exp(i\varphi_{d,j})d_j, \quad u_i \mapsto \exp(i\varphi_{u,i})u_i. \quad (13)$$

Das liegt daran, dass die Felder eine $U(1)$ -Quantenzahl (Baryonzahl) tragen. Dies impliziert, dass die CKM-Elemente um eine Phase gedreht werden:

$$V_{ij} \mapsto V_{ij} \exp(i(\varphi_{d,j} - \varphi_{u,i})). \quad (14)$$

Diese Eigenschaft nutzt man dazu aus, um möglichst viele Phasen der CKM-Matrix loszuwerden. In der 2×2 -Cabibbo-Matrix kann man dadurch alle Phasen wegstrotieren. Dies ist jedoch bei der CKM-Matrix nicht mehr möglich, weil die Anzahl der freien Parameter stärker wächst als die Anzahl Phasen, die man bei den obigen Transformationen einführen kann.

Also ändert die Multiplikation der i -ten Zeile/ j -ten Spalte mit einer beliebigen Phase $\varphi_{u,i}$ und $\varphi_{d,j}$ die Physik nicht. Aus sechs Phasen folgen fünf unabhängige Phasendifferenzen $\varphi_{d,j} - \varphi_{u,i}$ in (14). Also sind fünf der sechs Phasen in V unphysikalisch und können wegstrotiert werden. Die unphysikalische Phase in V heißt **Kobayashi-Maskawa-Phase** und verletzt die **CP-Symmetrie**.

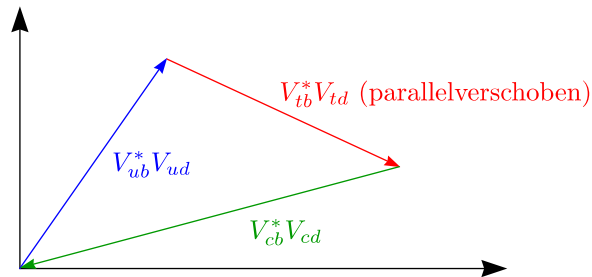
Die zweite Unitaritätsbedingung $V^\dagger V = 1$ (10) liefert Eigenschaften der Spalten, unter anderem

$$\sum_{k=1}^3 V_{ki}^* V_{kj} = 0 \text{ für } i \neq j. \quad (15)$$

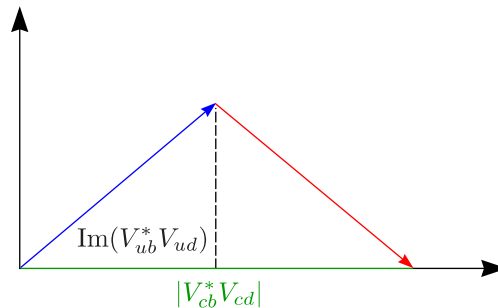
(12) und (15) definieren sechs **Unitaritätsdreiecke**. Das wichtigste erhält man, indem man in Gleichung (15) $(j, i) = (3, 1)$ setzt.

$$V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0. \quad (16)$$

Dies ist nichts anderes als ein Dreieck in der komplexen Ebene:



Die Phasentransformation (14) dreht das Dreieck. Die Form bleibt gleich. Daraus kann man schließen, dass die Winkel, Seitenlängen und Flächen physikalische Größen sind. Zur Berechnung der Fläche F : Wähle $\varphi_b - \varphi_c$ und $\varphi_c - \varphi_d$ in (14) so, dass $V_{cb}^* V_{cd} \in \mathbb{R}^-$.



$$h = \text{Im}(V_{ub}^* V_{ud}), \quad F = \frac{1}{2} h |V_{cb}^* V_{cd}|.$$

$$F = -\frac{1}{2} \text{Im}(V_{ub}^* V_{ud} V_{cb} V_{cd}^*). \quad (17)$$

(17) ist invariant unter bezüglich (14) und gilt somit in jeder Phasenkonvention. Es gilt $F = 1/2J$ mit der **Jarlskog-Invarianten** J :

$$\sigma_{ik} \sigma_{jl} J = \text{Im}[V_{ij} V_{il}^* V_{kl} V_{kj}^*],$$

wobei hier nicht über wiederholte Indizes summiert wird. Weiterhin ist

$$\sigma_{ik} = \sum_m \varepsilon_{ikm} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, k) = (1, 2), (2, 3), (3, 1) \\ -1 & \text{für } (i, k) = (2, 1), (3, 2), (1, 3) \\ 0 & \text{für } i = k \end{cases} .$$

(18) hängt nicht von i, j, k und l ab. Beispielsweise gilt

$$J \stackrel{i=j=1}{\underset{k=2,l=3}{\equiv}} = -\text{Im}(V_{ud}V_{ub}^*V_{cb}V_{cd}^*) \stackrel{i=j=1}{\underset{k=l=2}{\equiv}} -\text{Im}(V_{ud}V_{us}^*V_{cs}V_{cd}^*). \quad (19)$$

Damit haben alle sechs Unitaritätsdreiecke die gleiche Fläche.

1.1 Standard-Parametrisierung der CKM-Matrix

Wir verwenden die Bezeichnungen $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ und $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. θ_{ij} entspricht der Rotation zwischen der i -ten und j -ten Generation.

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}\exp(-i\delta_{13}) \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}\exp(i\delta_{13}) & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\exp(i\delta_{13}) & s_{23}c_{13} \\ c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}\exp(i\delta_{13}) & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}\exp(i\delta_{13}) & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Vier Elemente sind reell und positiv: V_{ud} , V_{us} , V_{cb} und V_{tb} . θ_{12} heißt **Cabibbo-Winkel** und δ_{13} nennt man **Kobayashi-Maskawa-Phase**.

Die Winkel des Unitaritätsdreiecks sind gegeben durch

$$\alpha = \varphi_2 = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{td}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right), \quad \beta = \varphi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right), \quad \gamma = \varphi_3 = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right). \quad (21)$$

Die Standard-Parametrisierung ist unhandlich, weshalb man oft die Wolfenstein-Parametrisierung verwendet, die ausnutzt, dass der Winkel θ_{12} klein ist.

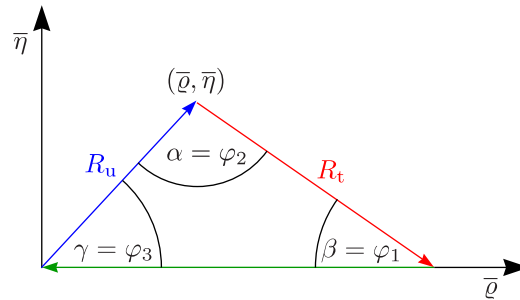
$$\lambda = s_{12}, \quad A = \frac{s_{23}}{\lambda^2}, \quad \varrho + i\eta = \frac{s_{13}\exp(i\delta_{13})}{A\lambda^3}. \quad (22)$$

Man führt dann eine Entwicklung in $\lambda = 0, 22$ durch:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\varrho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \varrho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (23)$$

Diese Entwicklung war gut genug bis zum Jahr 2000, ist aber mittlerweile zu grob für die Präzision von BELLE, CDF und BaBar. Das wichtigste Unitaritätsdreieck ist ein reskaliertes, das aus der Division von (16) durch $-V_{cb}^*V_{cd}$ (die Basis) folgt. Dieses bezeichnet man oft als „das Unitaritätsdreieck“. Das Dreieck kann dann durch seine Spitze klassifiziert werden.

$$\bar{\varrho} + i\bar{\eta} := -\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{ud}V_{cb}^*}. \quad (24)$$



Die Seitenlängen sind gegeben durch

$$R_u = \left| \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{\bar{\varrho}^2 + \bar{\eta}^2}, \quad R_t = \left| \frac{V_{tb}^*V_{td}}{V_{cd}V_{cb}^*} \right| = \sqrt{(1 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\eta}^2},$$

und die Winkel können berechnet werden nach

$$\gamma = \arctan\left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\varrho}}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{\bar{\eta}}{1 - \bar{\varrho}}\right), \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\bar{\eta}}{\bar{\eta}^2 + \bar{\varrho}(\bar{\varrho} - 1)}\right). \quad (26)$$

Die Ausmessung dieses Dreiecks hat in den letzten Jahren viel Aktivität in der experimentellen Teilchenphysik eingenommen. Das reskalierte Unitaritätsdreieck liefert

$$\bar{\varrho} + i\bar{\eta} + (1 - \bar{\varrho} - i\bar{\eta}) = 1.$$

Ausgedrückt durch R_u , R_t , γ und β lautet diese Gleichung

$$R_u \exp(i\gamma) + R_t \exp(-i\beta) = 1. \quad (27)$$

Das wichtige an dieser Beziehung ist, dass die Seiten R_u , R_t mit den Winkel γ und β verknüpft werden. Wolfenstein-Parameter:

$$\bar{\varrho} = \varrho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad \bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^4). \quad (28)$$

Für die B_s -Physik brauchen wir

$$\beta_s = \arg\left(-\frac{V_{ts}V_{tb}^*}{V_{cs}V_{cb}^*}\right) = \lambda^2\bar{\eta} + \mathcal{O}(\lambda^4) = 0,02. \quad (29)$$

Für V in (20) gibt es bis auf Korrekturen der Ordnung λ^4 :

$$V_{ub} = |V_{ub}| \exp(-i\gamma), \quad V_{td} = |V_{td}| \exp(-i\beta), \quad V_{ts} = |V_{ts}| \exp(i\beta_s), \quad (30)$$

und alle anderen Elemente sind reell. Die Phasen in (29) stimmen bis auf Terme der Ordnung λ^4 , also $0,1^\circ \approx \arg(-V_{cd})$, also $\gamma = \delta_{13} + \mathcal{O}(0,1^\circ)$.

Die **starke Wechselwirkung** respektiert bestimmte **diskrete Symmetrien**:

- Ladungskonjugation \mathcal{C} :

$$\mathcal{C}|h(\mathbf{p})\rangle = |\bar{h}(\mathbf{p})\rangle, \quad (31)$$

wobei $h(\mathbf{p})$ ein Hadron und $\bar{h}(\mathbf{p})$ ein Antihadron ist.

- Paritätstransformation (Raumspiegelung) \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}|h(\mathbf{p})\rangle = \eta_p|h(-\mathbf{p})\rangle, \quad \eta_p = \pm 1. \quad (32)$$

- Zeitumkehr \mathcal{T} :

$$\mathcal{T}|h(\mathbf{p})\rangle = |h(-\mathbf{p})\rangle^*. \quad (33)$$

Zu beachten ist, dass diese Transformation antilinear ist.

Es ist $\mathcal{C}^2 = \mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = 1$ und \mathcal{C} , \mathcal{P} , \mathcal{T} vertauschen. Die Kombination \mathcal{CPT} ist in jeder Quantenfeldtheorie erhalten (CPT-Theorem von Lüders, Pauli):

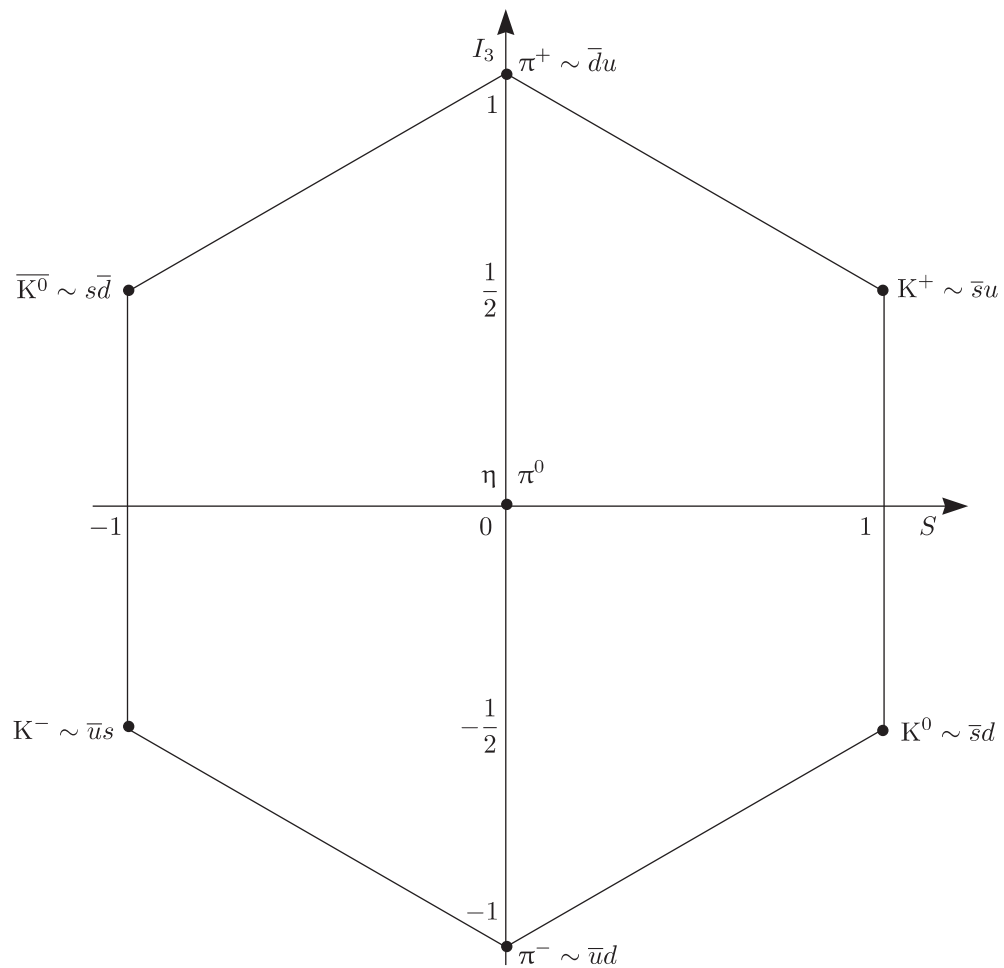
$$[H, \mathcal{CPT}] = 0.$$

Für ein Hadron mit Masse M gilt im Ruhesystem ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\eta_p = 1$)

$$\mathcal{CPT}|h\rangle = |\bar{h}\rangle^*,$$

$$M|h\rangle = H|h\rangle = H\mathcal{CPT}|\bar{h}\rangle^* \Rightarrow M\mathcal{CPT}|h\rangle = M|\bar{h}\rangle^* = H|\bar{h}\rangle^*.$$

Somit haben Hadron h und Antihadron \bar{h} dieselbe Masse und außerdem dieselbe Lebensdauer. Wegen $[\mathcal{P}, H_{\text{stark}}] = 0$ können wir allen Hadronen eine Paritätsquantenzahl (+1 oder -1) zuordnen; beispielsweise gilt $\mathcal{P}|\pi\rangle = -|\pi\rangle$. Einige neutrale Mesonen sind Eigenzustände zu \mathcal{C} . Beispielsweise gilt $\mathcal{C}|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$, das heißt π^0 ist ein Meson mit $J^{PC} = 0^{-+}$ (Pseudoskalar). Die Grundzustandsmesonen sind stabil bezüglich der QCD und diese sind alle 0^- . Man kann die Grundzustandsmesonen als Oktett (nach Gell-Mann, Ne'eman) anordnen:

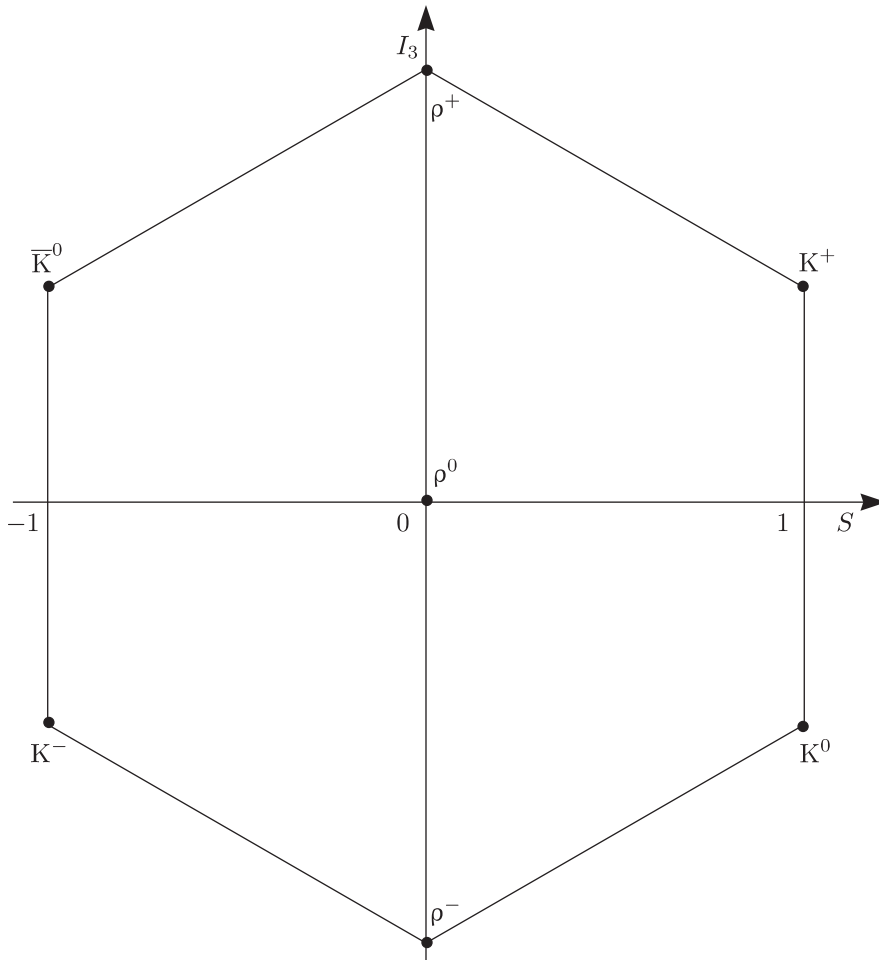


$$\pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d), \quad \eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s), \quad I = 0.$$

Es gilt $m_\pi = 140 \text{ MeV}$, $m_K = 495 \text{ MeV}$ und $m_\eta = 548 \text{ MeV}$. Weiterhin gibt es ein wesentlich schwereres Singulett, nämlich

$$\eta^1 \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s).$$

In der Realität mischen η und η' (mit einem kleinen Mischungswinkel). Ebenso lassen sich die Vektormesonen 1^- in einem Multiplett anordnen.

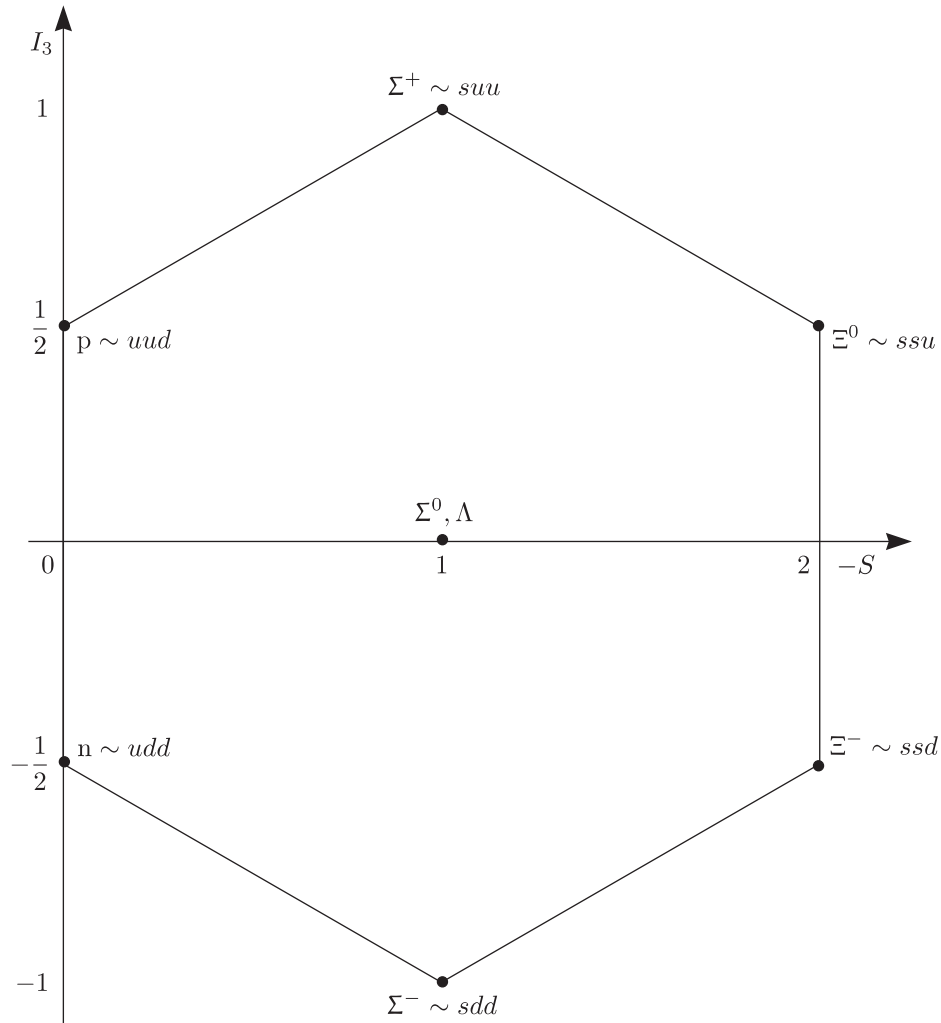


$$\phi \sim \bar{s}s, \quad \omega \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d),$$

sind Linearkombinationen aus dem Oktettzustand mit $I = 0, S = 0$ und dem Singulett. Die Ursache dieser Schemata (Multipletts) ist, dass H_{stark} eine **naherungsweise SU(3)-Flavoursymmetrie** aufweist.

$$\text{SU}(3)_F : \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}, \tag{36}$$

mit $U^\dagger U = \mathbb{1}$ und $\det(U) = 1$. Diese Symmetrie gilt nicht exakt, sondern ist durch die unterschiedlichen Quarkmassen gebrochen. Auch bei den Baryonen gibt es ein Oktett



$$\Lambda \sim \frac{1}{\sqrt{2}}s(ud + du), \quad \Sigma^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}s(ud - du).$$

Außerdem gibt es auch noch ein Dekuplett.

1.2 Meson-Antimeson-Mischung

Man beobachtet die Zerfälle $K^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-$ und $\bar{K}^0 \mapsto \pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-$.

Da in jeder QFT alle realen Teilchen auch als virtuelle Teilchen auftreten können, kann man ein Diagramm spiegeln: Gell-Mann und Pais (1955) sagten vorher, dass K^0 und \bar{K}^0 mischen zu K_l und K_s (wobei die Indizes l bzw. s für long bzw. short stehen). Überlegung: $|K^0\rangle$ und $|\bar{K}^0\rangle$ sind exakt entartete (CPT-Theorem) Eigenzustände zu $H_{\text{stark}} + H_{\text{em}}$, aber nicht zu $H = H_{\text{em}} + H_{\text{stark}} + H_{\text{schwach}}$. Damals hat man geglaubt, dass die diskreten Symmetrien erhalten sind, also beispielsweise $[\mathcal{CP}, H] = 0$ gilt. Heute weiß man jedoch, dass $[\mathcal{CP}, H]_{\text{Kaon}} \approx 0$ gilt; im Kaon-System also eine kleine CP-Verletzung auftritt. Also sind $|K_{\mathcal{CP}+}\rangle$ und $|K_{\mathcal{CP}-}\rangle$ (approximative) Eigenzustände zu H . Weil $K_{\mathcal{CP}-} \not\rightarrow \pi^+\pi^-$, π^0, π^0 stark unterdrückt ist: Wenn CP exakt erhalten wäre, muss $K_l \approx K_{\mathcal{CP}-}$ sehr langlebig sein, weil $K_l \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ kinematisch unterdrückt ist. Mit

$$\mathcal{CP}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle, \tag{38}$$

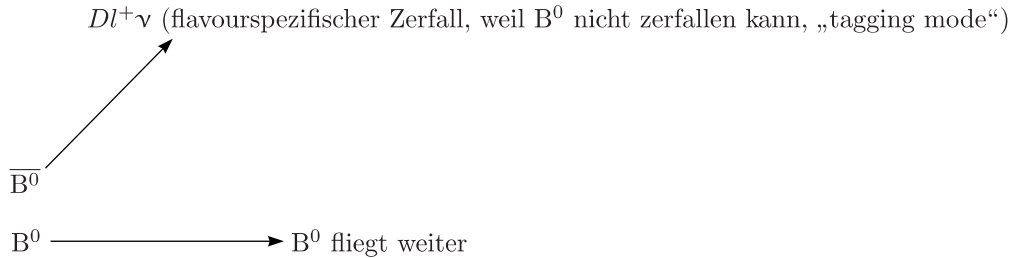
ist

$$|K_{\mathcal{CP}\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle \mp |\bar{K}^0\rangle). \tag{39}$$

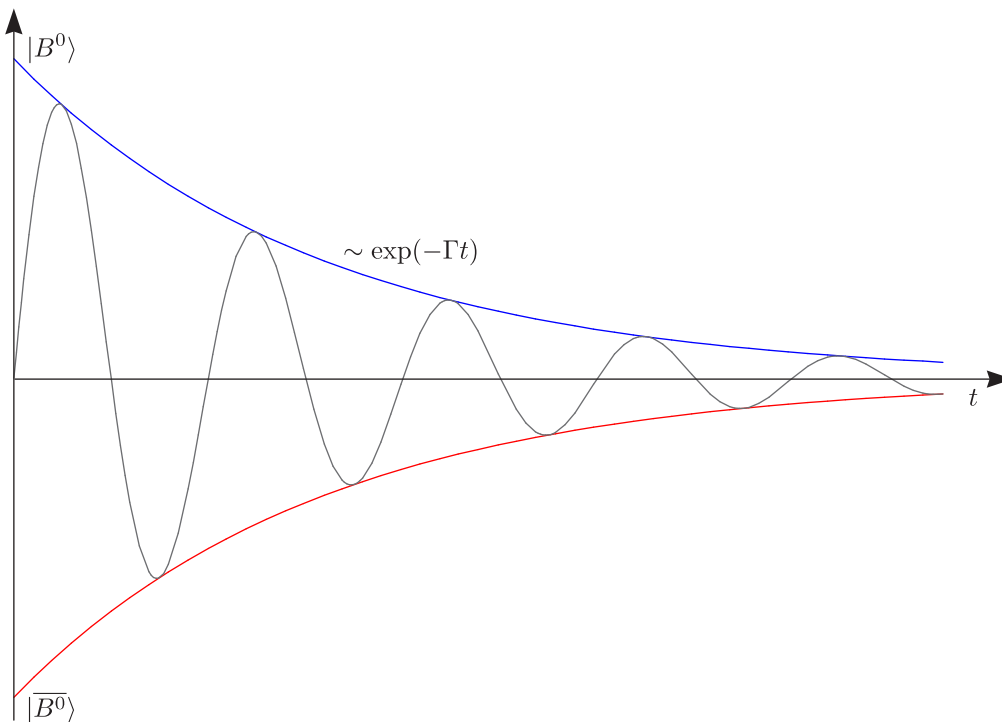
Die beiden wichtigsten Aspekte der Meson-Antimeson-Mischung sind

- 1.) Masseneigenzustände (Eigenzustände von H) sind Linearkombinationen der Flavour-Eigenzustände.
- 2.) Ein zum Zeitpunkt $t = 0$ als Flavour-Eigenzustand identifiziertes („getaggetes“) Meson ist für $t > 0$ eine oszillierende Linearkombination aus dem Meson- und dem Antimesonzustand.

Die B-Physik nutzt den zweiten Aspekt. Asymmetrische B-Fabriken (BaBar, BELLE), wo man Elektronen und Positronen mit den Impulsen \mathbf{p}_- und \mathbf{p}_+ aufeinander schießt. Hierbei gilt $|\mathbf{p}_-| \neq |\mathbf{p}_+|$ und $\sqrt{s} = M_{Y(4s)}$, so dass resonante $Y(4s)$ -Produkte entstehen können. Diesen Zustand produziert man, weil dieser sich gerade über der Schwelle befindet, um in zwei B-Mesonen zerfallen zu können. Das $Y(4s)$ bewegt sich im Laborsystem. Damit kann man die zeitliche Oszillation der B-Mesonen beobachten. $Y(4s)$ kann in B^+B^- und $B^0\bar{B}^0$ zerfallen. Da $Y(4s)$ ein Spin-1-Teilchen ist, befinden sich die B-Mesonen in einer P-Welle. Das (B^0, \bar{B}^0) -Paar ist quantenmechanisch verschränkt. Tagging:



Damit ist das zerfallende Meson als \bar{B}^0 identifiziert (Einstein-Podolski-Rosen-Effekt). Das **andere** (unzerfallene) Meson ist bei $t = 0$ ein \bar{B}^0 . Man kann dann einen Zustand $|B^0(t)\rangle$ identifizieren:



Bei einem Hadronenkollider sind die B's nicht verschränkt. Der Unterschied ist, dass die b unterschiedlich hadronisieren können, beispielsweise in B^- oder B_s .

1.3 Die drei Arten der CP-Verletzung

1.) Direkte CP-Verletzung:

Diese besagt, dass für die partielle Zerfallsbreite $\Gamma(M \rightarrow f) \neq \Gamma(\bar{M} \rightarrow \bar{f})$ gilt, wobei M ein Meson ist. Hierbei gilt außerdem $\mathcal{P}\mathcal{C}|f\rangle = |\bar{f}\rangle$ und $\mathcal{C}\mathcal{P}|M\rangle = -|\bar{M}\rangle$. Beispielsweise gilt dies für $M = B^+$, $\bar{M} = B^-$, $f = K^+\pi^0$ und $\bar{f} = \bar{K}\pi^0$. (Dies gilt nicht für die totale Zerfallsbreite, welche die Summe aller partiellen Zerfallsbreiten in einen bestimmten Endzustand ist.)

2.) CP-Verletzung in $M^0-\bar{M}^0$ -Mischung:

Für die Wahrscheinlichkeit gilt $P(M \rightarrow \bar{M}, t) \neq P(\bar{M} \rightarrow M, t)$.

3.) Mischungsinduzierte CP-Verletzung („CP-Verletzung in der Interferenz von Mischung und Zerfall“):

Dies ist der wichtigste Mechanismus, weil er zu großen Asymmetrien führt. Wir betrachten einen CP-Eigenzustand f_{CP} , also $\mathcal{C}\mathcal{P}|f_{CP}\rangle = \pm|f_{CP}\rangle$. Dies bedeutet für die Rate

$$\Gamma(M^0(t) \rightarrow f_{CP}) = \Gamma(\bar{M}^0(t) \rightarrow f_{CP}),$$

wobei M^0 ein neutrales Meson ist. Die Mischung findet statt zwischen M^0 und $\bar{M}^0(t)$. Wenn es zerfällt in einen CP-Eigenzustand, tragen beide Komponenten bei. Dieser Prozess ist sensitiv auf die relative Phase der beiden Amplituden. Das berühmteste Beispiel ist $B^0 \rightarrow J/\psi K_S$ und gibt uns einen der Winkel des Unitaritätsdreiecks. Man nutzt also die Meson-Antimeson-Mischung aus, um die CP-Phase des Zerfallsprodukts zu untersuchen.

1.4 Geschichte der Flavour-Physik

- 1940er Jahre: Entdeckung der K-Mesonen (strangeness S (Gell-Mann))

	$I_3 = -1/2$	$I_3 = 1/2$
$S = 1$	K^0	K^+
$S = -1$	K^-	\bar{K}^0

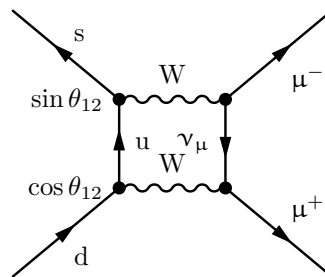
K-Mesonen wurden im Jahre 1942 in der Höhenstrahlung entdeckt.

- 1955: K^0 - \bar{K}^0 -Mischung postuliert (Gell-Mann, Pais)
- 1956: „ θ - τ -Rätsel:

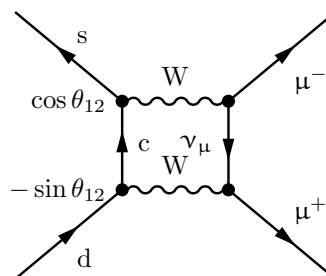
Betrachte $\tau^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$ (Parität $P = -1$) und $\theta^+ = \pi^+\pi^0$ (Parität $P = 1$) mit der gleichen Masse und Lebensdauer. Nach Lee-Yang: Parität ist verletzt „ $\tau^+ = \theta^+ = K^+$. Aus den Feldgleichungen folgt auch, dass die Ladungskonjugation verletzt ist.

- 1970: $\text{Br}(K_L \rightarrow \mu^+\mu^+)$ ist experimentell sehr klein

Bekannt war:



Postuliert:



Beide Diagramme löschen sich aus bis auf einen Faktor $(m_c^2 - m_u^2)/M_W^2$. Diese Auslöschung wird nach Glashow, Iliopoulos und Mariani als GIM-Mechanismus bezeichnet (Auslöschung von Diagrammen als Folge der Unitarität der CKM-Matrix). Daraus ließ sich das Charm-Quark vorhersagen.

- 1964: Entdeckung der CP-Verletzung

Man beobachtet den Zerfall $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$ wobei $\pi^+\pi^-$ ein Zustand mit CP-Quantenzahl 1 ist. K_L hielt man ebenso für einen Zustand mit CP-Quantenzahl 1 (Christenson, Cronin, Fitch, Turlay).

Erklärung in 1972 durch Makob Kobayashi und Toshihide Maskawa durch eine **dritte Fermionengeneration**.

- 1987: Die B-Fabrik DORIS (mit dem Experiment ARGUS) am DESY entdeckt die B_d - \bar{B}_d -Mischung (verwendet große Mischungsfrequenz). Beobachtet werden like-sign dilepton events. Dies war der erste Hinweis auf ein schweres Top-Quark.
- 1999: Direkte CP-Verletzung bei K-Mesonen entdeckt.

- ~ 2004 : Mischungsinduzierte CP-Verletzung in der B_d - \overline{B}_d -Mischung ($\sin 2\beta$) entdeckt bei BaBar und BELLE (Drehung der CP-Phase in Zerfall oder Mischung)
- 2006: CDF entdeckt die B_s - \overline{B}_s -Mischung
- ~ 2006 : direkte CP-Verletzung in der B-Physik $B^0 \rightarrow K^+ \pi^-$.
- zur Zeit: Entdeckung der D- \overline{D} -Mischung

1.5 Übersicht über die Messungen von CKM-Elementen

1.) $|V_{ud}|$:

	Präzision	
	Theorie	Experiment
a) Kernphysik (Nuklearer β -Zerfall)	*	***
b) $n \rightarrow p l \nu_e (\gamma)$	**	**
c) $\pi^- \rightarrow \pi^0 l \nu_l$	***	*

Aus a) folgt $|V_{ud}| = 0,97418 \pm 0,00026$.

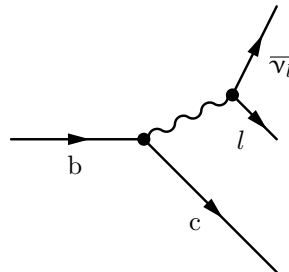
2.) $|V_{us}| \mapsto \lambda$:

	Präzision	
	Theorie	Experiment
a) $K \rightarrow \pi l \nu$ („Kl3-Zerfall“)	**	***
b) $K^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu$ („K μ 2-Zerfall“)	*	***
c) $\tau^+ \rightarrow \nu_\tau X_s$ (inklusive mit $s = 1$)	**	*

Aus a) folgt $|V_{us}| = 0,2246 \pm 0,0012$.

3.) $|V_{cb}| \mapsto A$:

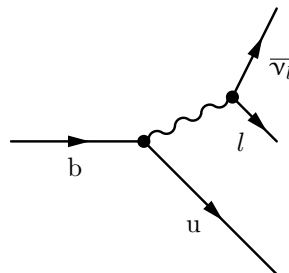
Geht aus vom semileptonischen Zerfall $b \rightarrow c l \nu$



	Präzision	
	Theorie	Experiment
exklusiv $B \rightarrow D^* l \nu_l$	***	*
inklusive $B \rightarrow X_c l \nu_l$	***	***

Man erhält $|V_{cb}| = (41,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$.

4.) $|V_{ub}| \mapsto \sqrt{\overline{\rho}^2 + \overline{\eta}^2} = R_u$



	Präzision	
	Theorie	Experiment
exklusiv $B \rightarrow \pi l \nu$	**	**
inklusiv $B \rightarrow X_\nu l \nu$	**	**

Hieraus folgt $|V_{ub}| = (3,76 \pm 0,10_{\text{stat}} \pm 0,47_{\text{syst}}) \cdot 10^{-3}$.

5.) $|V_{td}| \propto \sqrt{(1 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\eta}^2} = R_t$

Die B_d - \bar{B}_d -Oszillationsfrequenz Δn_d ist proportional zur R_t^2 . Weiterhin gilt $\Delta n_d / \Delta n_s \sim R_t$.

	Präzision	
	Theorie	Experiment
$ V_{td} $	*	***
$\Delta n_d / \Delta n_s$	**	***

6.) $|V_{ts}| \approx A^{\text{mix}} \lambda^2$ (Δn_s siehe 5)

7.) $\beta = \arg[-V_{cd}V_{cb}^*/(V_{td}V_{tb}^*)] = \arg(V_{td}^*)$ (nach Standard-Parametrisierung)

$$A_{\text{CP}}(B^0 \rightarrow J/\psi K_S, t) = \sin(2\beta) \sin(\Delta n \cdot t).$$

	Präzision	
	Theorie	Experiment
β	****	***

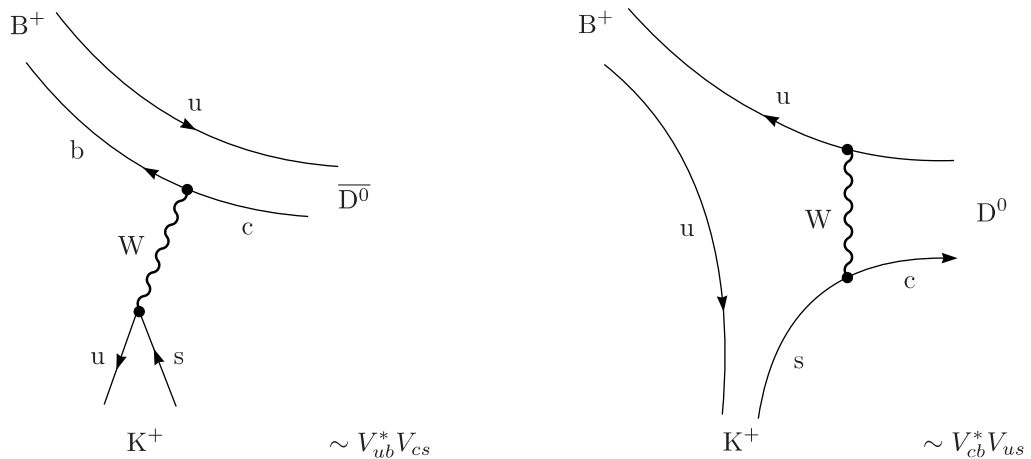
8.) $d = \pi - \gamma - \beta = \arg[-V_{td}V_{tb}^*/(V_{ud}V_{ub}^*)] \simeq \arg(-V_{td}V_{ub})$

$A_{\text{CP}}^{\text{mix}}(B^0 \rightarrow \pi\pi, \pi\rho, \rho\rho, t)$ liefert $\sin(2\alpha)$. Es sind alle drei Ladungskombinationen zu messen. Der Zerfall in zwei neutrale Pionen ist stark unterdrückt und das ist der limitierende Faktor im Experiment. Mittlerweile gibt es jedoch bessere Daten für den Zerfall in zwei ρ .

	Präzision	
	Theorie	Experiment
d	****	**

9.) $\gamma = \arg[-V_{ud}V_{ub}^*/(V_{cd}V_{cb}^*)] = \arg(V_{ub}^*)$

Wichtig ist hier der Zerfall $B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+$ ($\pi^+ \pi^-$, $K^+ K^-$, $K_S \pi^0$) Beide Amplituden können deswegen interferieren, weil der Zerfall in zwei Pionen sowohl auf D^0 als auch \bar{D}^0 zutrifft. Diese Interferenz ist sensitiv auf die relative Phase beider Produkte und diese hängt mit γ zusammen.

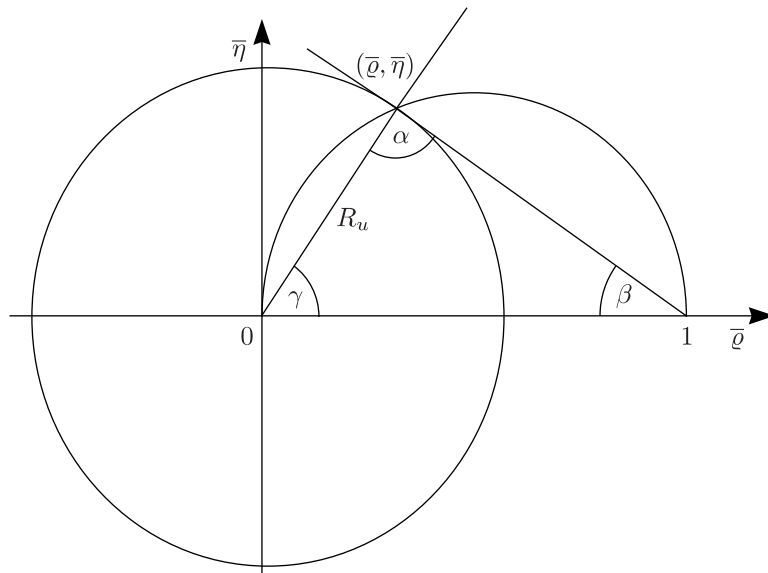


	Präzision	
	Theorie	Experiment
γ	****	*

10.) $\text{Im}[(V_{ts}V_{td}^*)^2] \propto \bar{\eta}(1 - \bar{\varrho})$

Messung aus CP-Verletzung in K^0 - \bar{K}^0 -Mischung

	Präzision	
	Theorie	Experiment
$\varepsilon_k \propto \bar{\eta}(1 - \bar{\varrho} + \text{const.})$	**	***



Die Zukunft liegt in der Untersuchung der Zerfälle $K_L \rightarrow \pi^0 \nu \bar{\nu}$ und $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$.

Kapitel 2

Flavour im Standardmodell

2.1 Elemente der Quantenfeldtheorie

Spin	Teilchen	Felder
0	Skalar (z.B. Higgs)	skalares Feld $\varphi(x)$, $x = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$
1	Vektorboson (z.B. Photon, Z)	Vektorfeld $A^\mu(x)$ mit Lorentzindex $\mu = 0, 1, 2, 3$
1/2	Dirac-Fermionen (z.B. Elektronen)	Spinorfeld $\psi_i(x)$ mit Dirac-Index $i = 1, 2, 3, 4$

Der Dirac-Index diskriminiert zwischen Teilchen/Antiteilchen und Spin Up/Down. Die Wechselwirkungen einer Theorie werden durch die **Lagrangedichte** \mathcal{L} beschrieben.

	Klassische Mechanik	Feldtheorie (z.B. reelles Skalarfeld)
Wirkung	$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i)$	$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ (40)
Freiheitsgrade	q_i mit $i = 1, \dots, N$	Auslenkungen der Felder $\varphi(x)$ für jedes x
Bewegungsgleichungen	$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$	$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0$ (41)

Für ein freies Teilchen ist \mathcal{L} quadratisch in $\varphi(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2, \quad (42)$$

wobei m die Masse des Feldes ist. Die Bewegungsgleichung folgt aus (40)

$$\partial_\mu(\partial^\mu \varphi) + m^2 \varphi = 0 \Leftrightarrow \square \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad (43)$$

und es handelt sich dabei um die Klein-Gordon-Gleichung. Da es sich um eine lineare Gleichung handelt, gilt das Superpositionsprinzip und Lösungen (ebene Wellen) können sich überlagern, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Damit kann über die Klein-Gordon-Gleichung keine Wechselwirkung beschrieben werden.

Das nächste, was man in einer Feldtheorie behandeln kann, ist das komplexe Skalarfeld. Dieses beschreibt zwei Freiheitsgrade.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2).$$

Die entsprechende Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \varphi \varphi^*, \quad (44)$$

wobei φ und φ^* als unabhängig voneinander betrachtet werden. Es ist also entweder nach φ oder nach φ^* zu variieren. Durch Variation nach φ^* kommt man erneut auf die Klein-Gordon-Gleichung:

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi^*)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^*} = \square \varphi + m^2 \varphi.$$

Durch Variation nach φ kommt man auf die komplex konjugierte Klein-Gordon-Gleichung. Für das Photonfeld lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta},$$

mit dem elektromagnetischen Feldstärketensor

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (45)$$

\mathcal{L} lässt sich mit der Definition des Feldstärketensors wie folgt umschreiben:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha A_\beta) (\partial^\alpha A^\beta) - \frac{1}{2} (\partial_\alpha A_\beta) \partial^\beta A^\alpha.$$

Hierbei wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet; über doppelte Indizes wird also summiert. Kommen wir zu der Bewegungsgleichung:

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu), \quad (47)$$

Hieraus folgt:

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (48)$$

wobei $\partial_\mu A^\mu = 0$ gilt in der Lorenz-Eichung. Mit (45) erkennt man in (47)

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (49)$$

was die Maxwell-Gleichungen im Vakuum sind.

Kommen wir nun zur Lagrangedichte des freien Dirac-Feldes:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_i i \partial_\mu \gamma_{ij}^\mu \psi_j - m \bar{\psi}_i \psi_i. \quad (50)$$

Hierbei ist die Summation über $i, j = 1, 2, 3, 4$ durchzuführen. Für die vier 4×4 -**Diracmatrizen** den Antikommutator-Regeln

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}, \quad (51)$$

mit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

erfüllen. Der adjungierte Spinor ist gegeben durch $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ (53). Auch hier sind ψ und $\bar{\psi}$ unabhängige Felder. Betrachten wir die Variation nach $\bar{\psi}$:

$$0 = \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \bar{\psi}_i)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}_i} = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \bar{\psi}_i} = -[i \not{\partial} \psi - m \psi]_i,$$

was die freie Dirac-Gleichung ist. Zu den Dirac-Matrizen:

$$\gamma_5 = \gamma^5 := i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3. \quad (54)$$

Es gibt für die Dirac-Matrizen verschiedene Darstellungen. Dirac-Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ^k die Pauli-Matrizen ($k = 1, 2, 3$) sind. γ^5 ist dann gegeben durch

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Zur Messung von relativistischen Effekten bei niedrigen Energien (Hyperfeinstrukturaufspaltung) ist die Dirac-Darstellung sehr geeignet. Um Hochenergiephysik betreiben zu können, ist jedoch die chirale Darstellung (Weyl-Darstellung) die geschicktere Wahl:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Die Majorana-Darstellung ist wichtig für Neutrino-Physik und wird hier nicht behandelt.

$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ (59) ist ein erhaltener Strom; es gilt also $\partial_\mu j^\mu = 0$. Beispielsweise ist $e j^\mu$ der elektromagnetische Strom.

Die Fourierdarstellung ist eine Zerlegung nach ebenen Wellen (Transformation im Impulsraum). Für ein **reelles Skalarfeld** gilt

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} [a_{\mathbf{p}} \exp(-ipx) + a_{\mathbf{p}}^* \exp(ipx)], \quad (60)$$

wobei die Koeffizienten $a_{\mathbf{p}}$ und $a_{\mathbf{p}}^*$ komplex sind und

$$p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \quad (61)$$

Lösung von (43) ist.

2.2 Feld-Quantisierung

2.2.1 Skalare Felder

In (60) wird $a_{\mathbf{p}}$ als Feldoperator interpretiert, wobei $a_{\mathbf{p}}^* \mapsto a_{\mathbf{p}}^\dagger$ und die Vertauschungsrelationen

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbb{1}, \quad [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0, \quad (61)$$

gefordert werden. Diese Relationen erinnern einen an N gekoppelte harmonische Oszillatoren (mit $i = 1, 2, \dots, N$) in der Quantenmechanik: $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$. Durch Vergleich erkennt man, dass $a_{\mathbf{p}}$ und $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sind. Der Hilbertraum der Quantenfeldtheorie (der sogenannte Fockraum) wird mit Hilfe der $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ aus dem Grundzustand konstruiert. Der Einteilchen-Zustand zum Impuls \mathbf{p} ist definiert über

$$|\mathbf{p}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (62)$$

Zweiteilchen-Zustände (beschreibt ein Teilchen mit Impuls \mathbf{p} und eines mit Impuls \mathbf{q}) sind dann gegeben durch

$$|\mathbf{p}, \mathbf{q}\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \sqrt{2E_{\mathbf{q}}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{q}, \mathbf{p}\rangle, \quad (63)$$

welcher aufgrund der obigen Vertauschungsrelationen für die Erzeugungsoperatoren die Bose-Statistik respektiert. Zustände mit unterschiedlicher Teilchenzahl sind zueinander orthogonal. Des Weiteren gilt

$$a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0, \quad a_{\mathbf{p}'} |\mathbf{p}\rangle \stackrel{(61)}{=} (2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') |0\rangle.$$

2.2.2 Dirac-Felder

Ebenso kann man das Dirac-Feld nach ebenen Wellen entwickeln, also eine Fourierdarstellung angeben:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1}^2 [a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) \exp(-ipx) + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(\mathbf{p}) \exp(ipx)], \quad (64)$$

mit

$$p_0 = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Im Gegensatz zu den skalaren Feldern fordert man für die Diracfelder **Antivertauschungsrelationen**:

$$\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{p}'}^s, \dagger\} = \{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^r, \dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{rs}, \quad (65)$$

was die Fermi-Statistik respektiert. Alle anderen Antikommutatoren verschwinden. u^s und $v^s \in \mathbb{C}^4$ heißen **Spinoren**. Sie erfüllen:

$$(\not{p} - m)u^s(\mathbf{p}) = 0, \quad (\not{p} + m)v^s(\mathbf{p}) = 0. \quad (66)$$

Im Ruhesystem (Dirac-Darstellung) gilt:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m}, & u^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m}, \\ v^{(1)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m}, & v^{(2)}(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{m}. \end{aligned} \quad (67)$$

In einem beliebigen System ($\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$) gilt:

$$u^s(\mathbf{p}) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2(m + E_{\mathbf{p}})}} u^s(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2}} \xi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2(E_{\mathbf{p}} + m)}} \xi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Jede Darstellung der Lorentzgruppe ist gekennzeichnet durch die Masse m und den Pauli-Lubanski-Vektor $W^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma}$. Im Ruhesystem hängt W^μ mit den Spinzuständen zusammen. Es gilt

$$\begin{aligned} W_\mu W^\mu &= -m^2 s(s+1), \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \\ v^s(\mathbf{p}) &= \frac{-\not{p} + m}{\sqrt{2(E_{\mathbf{p}} + m)}} v^s(0) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\sqrt{2(E_{\mathbf{p}} + m)}} \xi^{(s)} \\ \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2}} \xi^{(s)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\psi(x)$ erzeugt (mit $b_{\mathbf{p}}^\dagger$) ein Antiteilchen und vernichtet (mit $a_{\mathbf{p}}$) ein Teilchen. $\bar{\psi}(x)$ macht das Umgekehrte.

2.2.3 Vektorfelder

Kommen wir nun zu Vektorfeldern (mit $\partial_\mu U^\mu = 0$):

$$U_\mu = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1}^3 \left[\varepsilon_\mu^{(1)}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^{(r)} \exp(-ipx) + \varepsilon_\mu^{*(r)}(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger} \exp(ipx) \right], \quad p^0 = E_{\mathbf{p}}, \quad (70)$$

mit

$$a_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{(s)}] = [b_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger}, b_{\mathbf{p}'}^{(s)}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{rs}. \quad (71)$$

(70) gilt für komplexe Vektorfelder wie W_μ^\pm . Für reelle Vektorfelder (Photonfeld A_μ , Z-Boson-Feld Z_μ , Gluonfeld) muss man $b_{\mathbf{p}}^{(r)}$ durch $a_{\mathbf{p}}^{(r)}$ ersetzen. In den Polarisationsvektoren $\varepsilon_\mu^{(r)}$ stecken Informationen darüber, ob das Feld transversal bzw. longitudinal polarisiert ist. Im Allgemeinen gilt $\varepsilon_\mu^{(r)} p^\mu = 0$ unabhängig davon, ob das Vektorfeld reell oder komplex ist. Für

$$k^\mu = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ |\mathbf{k}| \end{pmatrix}$$

sind die transversalen Polarisationsvektoren gegeben durch

$$\varepsilon^{(1)\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(2)\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder man benutzt Linearkombinationen derselbigen:

$$\varepsilon^{(+)\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^{(-)\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (72)$$

wobei der erste Vektor die rechtshändige und der zweite die linkshändige Polarisation beschreibt. Zur longitudinalen Polarisation:

$$\varepsilon^{(3)\beta} = \varepsilon^{(L)\beta} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} |\mathbf{k}| \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix},$$

was für ein Vektorfeld mit Masse $M = \sqrt{k^\alpha k_\alpha}$ gilt. Für masselose Vektorbosonen (Photon, Gluon) gibt es nur transversale Polarisationen.

2.3 Zeitordnungsoperator und Greenfunktion

Der Zeitordnungsoperator ist definiert über

$$T\varphi_1(x)\varphi_2(y) = \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(x) & \text{für } y^0 < x^0 \\ \varphi_2(y)\varphi_1(x) & \text{für } x^0 < y^0 \end{cases} = T\varphi_2(y)\varphi_1(x), \quad (74)$$

was dazu führt, dass die kleinere Zeit immer rechts steht. Diese Gleichung gilt für Bosonen. Bei Fermionen muss man ein zusätzliches Minuszeichen einführen, wenn man zwei Felder vertauscht. N -Punkt-Greenfunktionen (beispielsweise für reelle Skalarfelder) sind definiert durch

$$G_N(x_1, \dots, x_n) := \langle 0|T\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)|0 \rangle. \quad (75)$$

Speziell die Zweipunkt-Greenfunktion ist gegeben durch:

$$G_2(x, y) := \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0 \rangle. \quad (76)$$

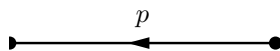
Aus Gleichung (60) sehen wir, dass von $\varphi(y)$ ein Einteilchenzustand bei \mathbf{y} erzeugt wird. Diese werden bei \mathbf{x} vernichtet (gilt für $y^0 < x^0$). Um diese physikalische Interpretation beibehalten zu können, benötigt man den Zeitordnungsoperator. Damit die Kausalität gewährleistet ist, muss ein Einteilchenzustand zuerst erzeugt werden, bevor er vernichtet wird. Wegen der Translationsinvarianz kommt es auf absolute Koordinaten nicht an, sondern nur auf relative, womit gilt:

$$G_2(x, y) = G_2(x - y, 0) = D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta} \exp(-ip(x - y)). \quad (77)$$

In der statistischen Physik nennt man diese Funktion Zweipunkt-Korrelationsfunktion. Zur Korrelation zwischen Punkt x und y tragen Teilchen mit allen Impulsen bei. Das Integral wird dominiert durch die Umgebung des Poles bei $p^2 = m^2$ (Massenschale). Bei makroskopischen Zeiten und Abstände tragen nur reelle Teilchen bei, für die $p^2 = m^2$ gilt. Für mikroskopische Zeiten und Abstände erhalten auch Teilchen einen Beitrag, welche nicht auf der Massenschale liegen, sogenannte virtuelle Teilchen. Man bezeichnet $D_F(x - y)$ als Feynman-Propagator. Im Impulsraum gilt:

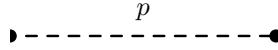
$$\tilde{G}_2(p) = \int d^4x \exp(ipx) D_F(x) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\delta}. \quad (78)$$

Das infinitesimale δ sagt uns, wie die Pole bei der Integration umlaufen werden. Graphisch werden Propagatoren als Linie (mit Impulsfluss) dargestellt:



Der Propagator für ein komplexes Skalarfeld ist gegeben durch:

$$G_2(x - y) = \langle 0|T\varphi(x)\varphi^*(y)|0 \rangle.$$



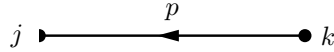
Der Propagator für ein Dirac-Feld ist eine 4×4 -Matrix (weil jedes Dirac-Feld vier Komponenten hat):

$$G_{2jk}(x-y) = \langle 0|T\psi_j(x)\bar{\psi}_k(y)|0\rangle.$$

Im Impulsraum ist der Propagator gegeben durch:

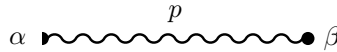
$$G_{2jk}(p) = \frac{i(\not{p} + m)_{jk}}{p^2 - m^2 + i\delta}, \tag{80}$$

Was propagiert mit dem Teilchen, ist auch die komplette Spininformation.



Schauen wir uns den Propagator für ein massives Vektorfeld (komplex) an:

$$G_2^{\alpha\beta}(p) = \frac{-i}{p^2 - M^2 + i\delta} \left(g^{\alpha\beta} - \frac{p^\alpha p^\beta}{M^2} \right). \tag{81}$$



Damit lassen sich beispielsweise massive ρ -Vektor-Mesonen beschreiben.

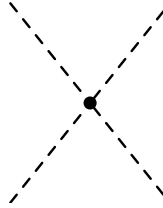
2.4 Einführung von Wechselwirkungen

Um **Wechselwirkungen** beschreiben zu können benötigen wir Terme in der Lagrangedichte, die höhere Potenzen der Felder beinhalten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{W}}. \tag{82}$$

Betrachten wir beispielsweise ein reelles Skalarfeld:

$$\mathcal{L}_{\text{W}} = -\frac{\lambda}{4!}\varphi(x)^4, \quad \mathcal{H}_{\text{W}} = -\mathcal{L}_{\text{W}}.$$



Betrachten wir die Streuung von Teilchen mit Impulsen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 in Teilchen mit Impulsen $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$. Die Übergangsamplitude ist gegeben durch das folgende Matrixelement:

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle.$$

S ist ein Operator, in dem die ganze Information über die Wechselwirkung steckt:

$$S = T \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{W}}(x) \right). \tag{83}$$

Man bezeichnet S als **S-Matrix**. Das Matrixelement (für $\mathbf{q}_i \neq \mathbf{p}_i$) ist gegeben durch:

$$\langle f | S | i \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - \dots - q_N) \cdot \mathcal{M}_{\text{fi}}, \tag{84}$$

wobei \mathcal{M}_{fi} oft als (Übergangs-)matrixelement bezeichnet wird. In der δ -Funktion steckt die Viererimpulserhaltung. Zum differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma \sim |\mathcal{M}_{\text{fi}}|^2 d^3q \dots d^3q_N.$$

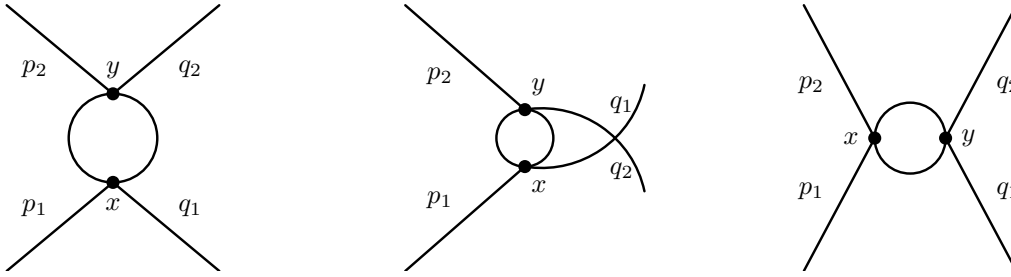
Für einen Zerfall $A \rightarrow B_1, \dots, B_N$ definiert man die **differentielle Zerfallsbreite** durch:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} \left(\prod_{f=1}^N \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}_{A \rightarrow B_1 \dots B_N}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_A - \sum_{i=1}^N p_f \right). \quad (85)$$

Man kann die S-Matrix störungstheoretisch behandeln:

$$\begin{aligned} S &= T \exp \left(-i \int d^4 x \mathcal{H}_{\text{WW}}(x) \right) = 1 - i \int d^4 x \mathcal{H}_{\text{W}}(x) - \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y T \mathcal{H}_{\text{W}}(x) \mathcal{H}_{\text{W}}(y) + \dots = \\ &= 1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \varphi^4(x) - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4 x \int d^4 y T \varphi^4(x) \varphi^4(y) + \dots \end{aligned} \quad (86)$$

Graphisch lässt sich (84) mittels sogenannter **Feynmangraphen** störungstheoretisch untersuchen:



Praktisch arbeitet man jedoch nicht im Orts- sondern im Impulsraum und führt anstelle Integrale über x, y auszurechnen, wird über **interne** Impulse (sogenannte Schleifenimpulse l^μ) integriert mit Vierer-Impulserhaltung an jedem Vertex.

2.5 Eichwechselwirkungen des Standardmodells

Die einfachste Wechselwirkung, die man diskutieren kann, ist die sogenannte U(1)-Wechselwirkung. Betrachten wir eine U(1)-Transformation:

$$\psi(x) \mapsto \exp(-ig_1 \alpha(x)) \psi(x).$$

Hängt die Phase nicht vom Ort ab, handelt es sich um eine globale Transformation. Sonst ist es eine sogenannte lokale Transformation oder Eichtransformation. Stellt man der Transformation des Dirac-Feldes eine entsprechende Transformation des Eichfeldes zur Seite, also

$$A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x), \quad (87)$$

so kann man eine **kovariante Ableitung** wie folgt definieren:

$$D_\mu := \partial_\mu + ig_1 A_\mu(x). \quad (88)$$

Damit lässt sich die Lagrangedichte wie folgt aufschreiben:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{D} \psi - m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (89)$$

Beispielsweise kann A^μ das Photonfeld sein (also in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{QED}}$) oder Feld der Hyperladung (also B^μ bezeichnet). Kommen wir nun zur SU(2)-Wechselwirkung. In der Natur transformieren rechts- und linkshändige Fermionen unterschiedlich. Linkshändige Fermionen transformieren als Dubletts und rechtshändige als Singulett bezüglich SU(2) (Gruppe des schwachen Isospins). Ein Fermionfeld ψ_L heißt **linkshändig**, wenn

$$P_L \psi_L = \psi_L,$$

gilt mit

$$P_L = \frac{\mathbb{1} - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

in der Weyl-Darstellung (chirale Darstellung). ψ_L heißt **rechtshändig**, wenn entsprechend

$$P_R \psi_R = \psi_R,$$

gilt mit

$$P_R = \frac{\mathbb{1} + \gamma_5}{2}.$$

$P_{L,R}$ sind zueinander orthogonale Projektoren. Es gilt somit:

$$P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0.$$

Im Folgenden ist $j = 1, 2, 3$ der Generationenindex. Linkshändige Leptonen und Quarks werden in SU(2)-Dubletts zusammengefasst:

$$L_j = \begin{pmatrix} \nu_{L,j} \\ l_{L,j} \end{pmatrix}, \quad Q_j = \begin{pmatrix} u_j \\ d_j \end{pmatrix}.$$

Eine SU(2)-Transformation, unter der sich L_j transformiert, lässt sich schreiben in der Form

$$L_j \mapsto \exp\left(i g_2 \alpha_a(x) \frac{\sigma^a}{2}\right) L_j,$$

wobei die Summe über $a = 1, 2, 3$ läuft. Analog transformiert sich Q_j . Man kann nun analog zur U(1) eine kovariante Ableitung definieren:

$$D_\mu := \partial_\mu - i g_2 W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}, \tag{94}$$

mit

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - i W_\mu^2), \quad W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + i W_\mu^2). \tag{95}$$

Mittels der Pauli-Matrizen lassen sich folgende Matrizen definieren:

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma^1 - i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

Dann gilt für die kovariante Ableitung:

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sigma^- + \frac{1}{2} W_\mu^3 \sigma^3 \right), \tag{97}$$

für linkshändige Felder und $D_\mu = \partial_\mu$ für rechtshändige Felder. Diese Ersetzungen macht man, weil W_μ^\pm Eigenzustände der elektrischen Ladung sind. Dies werden wir später sehen.

Die Hyperladung (U(1)_Y) ist definiert über die Eigenwertgleichung

$$Y\psi = y\psi,$$

wobei Y der Hyperladungsoperator ist und y eine Zahl, nämlich die Hyperladung des Feldes ψ . Schauen wir uns die Hyperladungsquantenzahlen der verschiedenen Felder des Standardmodells an:

ψ	L_j	l_R	Q_j	$u_{R,j}$	$d_{R,j}$
y	-1/2	-1	1/6	2/3	-1/3

Die kovariante Ableitung (97) wird dann durch einen weiteren Term erweitert, um die U(1)-Wechselwirkung zu berücksichtigen:

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_1 Y B_\mu - i g_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \sigma^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sigma^- + \frac{1}{2} W_\mu^3 \sigma^3 \right).$$

Das Higgs-Dublett,

$$\Phi = \begin{pmatrix} G^+ \\ v + \frac{1}{\sqrt{2}}h + \frac{i}{\sqrt{2}}G^0 \end{pmatrix}, \tag{100}$$

bricht die $SU(2) \times U(1)_Y$ zur $U(1)_{\text{em}}$. $v = 174 \text{ GeV} \neq 0$ (101) ist der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes. h ist das physikalische Higgsboson. G^\pm und G^0 nennt man Pseudo-Goldstone-Bosonen. (Bei einer globalen Symmetrie sind die Goldstone-Bosonen masselos und physikalische Teilchen.) In einer geichteten Theorie sind sie keine physikalischen Teilchen. Es handelt sich dabei um die longitudinalen Freiheitsgrade von W_μ^\pm und Z_μ^0 .

$$\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_w & \sin \vartheta_w \\ -\sin \vartheta_w & \cos \vartheta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}, \quad (102)$$

mit dem **Weinberg-Winkel** ϑ_w , wobei

$$\tan \vartheta_w = \frac{g_1}{g_2}, \quad e = g_2 \sin \vartheta_w = g_1 \cos \vartheta_w,$$

gilt. Hier ist e die elektromagnetische Ladung.

$$M_W^2 = \frac{g_1^2 v^2}{2}, \quad M_Z^2 = \frac{g_2^2 v^2}{2 \cos^2 \vartheta_w} \Rightarrow \frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (103)$$

Experimentell bestimmt man $\sin^2 \vartheta_w = 0,231$ (104). Die Fermi-Konstante

$$G_F = \frac{g_2^2}{4\sqrt{2}M_W^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}v^2} = 1,16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} = \frac{1}{(292,8 \text{ GeV})^2}. \quad (105)$$

lässt sich sehr genau aus der Myon-Lebensdauer durch den Zerfall $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$ bestimmen. Hieraus kann man wiederum den Vakuumerwartungswert v berechnen. Rechnet man die elektroschwache Symmetriebrechung durch den Higgs-Mechanismus durch, so findet man die Gell-Mann-Nishima-Relation:

$$Q = I_3 + Y, \quad (106)$$

wobei Q die elektromagnetische Ladung, I_3 die z -Komponente des Isospins ($\pm 1/2$ für Dubletts und 0 für Singulets) und Y die Hyperladung ist. Kommen wir zum Feldstärketensor der $U(1)_Y$:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig_1 B_{\mu\nu}, \quad (107)$$

mit

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (108)$$

Zum Feldstärketensor der $SU(2)_L$:

$$[D_\mu, D_\nu] =: -ig_2 W_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}, \quad (109)$$

mit

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \quad (110)$$

wobei ε^{abc} der Levi-Civita-Tensor ist, der definiert ist durch:

$$\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Permutation von } (1, 2, 3) \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ungerade} \\ 0 & \text{bei mindestens zwei gleichen Indizes} \end{cases}.$$

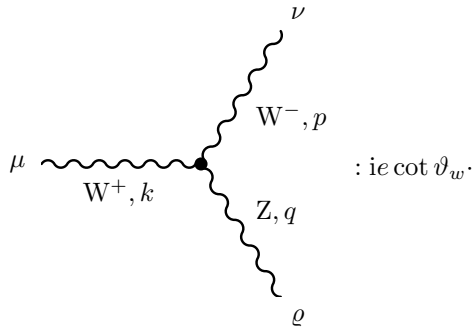
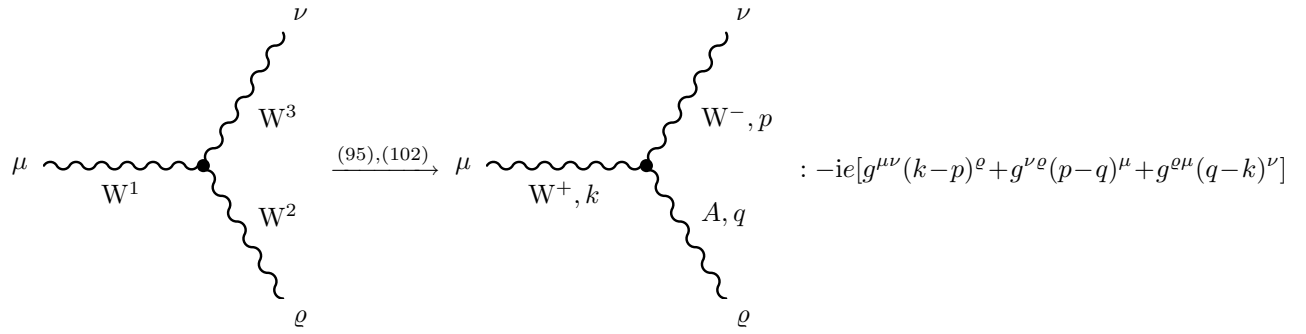
Der Zusatzterm $g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$ ist der nichtabelsche Term. Für die $SU(2)$ gilt

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2} \right] = i \varepsilon^{abc} \frac{\sigma^c}{2},$$

wobei ε^{abc} die Strukturkonstanten und die Paulimatrizen σ^a die Generatoren der $SU(2)$ sind. Schreiben wir uns die kinetischen Terme und Selbstwechselwirkungen der Eichbosonen auf:

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu,a}, \quad (112)$$

woraus Dreier- und Vierer-Kopplungen der W-Bosonen extrahiert werden können. Die einzige Dreier-Kopplung folgt aus (95) und (102), wobei alle Impulse einlaufend seien:



Kapitel 3

Die Quantenchromodynamik (QCD)

Die Eichgruppe der QCD ist die $SU(3)$. Quarks transformieren sich als Farb-Triplett:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix},$$

wobei „r“ für rot, „g“ für grün und „b“ für blau steht. Invarianz unter $SU(3)$ bedeutet die Invarianz, der Theorie unter Rotationen des Triplets im Farbraum:

$$\begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix} \mapsto \exp(-ig_3\alpha_a(x)T^a) \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}, \quad (114)$$

wobei die Summe von a über 1 bis 8 läuft. Die Generatoren T^a der $SU(3)$ sind

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad (115)$$

mit den **Gell-Mann-Matrizen**

$$\lambda^a = \begin{pmatrix} \sigma^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

für $a = 1, 2, 3$ und

$$\begin{aligned} \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (116)$$

Weiterhin gilt

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (117)$$

mit den Strukturkonstanten f^{abc} , welche komplett antisymmetrisch in den Indizes a, b und c sind. Für die Strukturkonstanten gilt $f^{123} = 1$, $f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = 1/2$, $f^{156} = f^{367} = -1/2$ und $f^{458} = f^{678} = 1/2\sqrt{3}$ (118). Weiterhin gilt $f^{38a} = 0$ für alle a , weil λ^3 und λ^8 Diagonalmatrizen sind. Die Lagrangedichte der QCD ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{q,d,u,s,c,b,t} \bar{q}[i\not{D} - m_q]q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a}, \quad (119)$$

wobei \not{D} die kovariante Ableitung (3×3 -Matrix) ist und $q = (q_r, q_g, q_b)^T$. $G_{\mu\nu}^a$ ist der Feldstärketensor der Gluonfelder

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_3 f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

und für die kovariante Ableitung gilt

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 A_\mu^a T^a, \quad (120)$$

für $a = 1, \dots, 8$. Das Problem von (119) sind die vorhandenen redundanten Freiheitsgrade. A_μ^a hat vier Polarisationsfreiheitsgrade; jedoch sind nur zwei physikalisch für masselose Eichbosonen. Einer davon verschwindet, wenn man die Lorenz-Bedingung

$$\partial_\mu A^{\mu,a} = 0, \quad (121)$$

fordert. Man führt den Lagrange-Multiplikator $1/(2\xi)$ ein und addiert zu (119) einen sogenannten Eichfixierungsterm:

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu,a})^2 = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{\mu,a})(\partial_\nu A^{\nu,a}). \quad (122)$$

ξ heißt Eichparameter. Den zweiten überflüssigen Freiheitsgrad könnte man dadurch loswerden, indem man bei Berechnungen die longitudinale Komponente einfach weglässt, was jedoch die Lorentzinvarianz verletzt. Deshalb geht man anders vor. Die Effekte der unphysikalischen longitudinalen Gluonen in $\mathcal{L}_{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{fix}}$ kann man aufheben, indem man ebenfalls unphysikalische **Faddeev-Popov-Geister** einführt.

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = (\partial_\mu \eta^{a*})(\partial^\mu \eta^a) + g_3 f^{abc}(\partial_\mu \eta^{a*})A^{\mu,b}\eta^c, \quad (123)$$

mit den skalaren (komplexen) **Geistfeldern** η^a . η^a **antivertauschen**, haben also Fermi-Statistik. Lagrange-dichte der **perturbativen QCD** (Störungstheorie):

$$\mathcal{L}_{\text{pQCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}. \quad (124)$$

Die Lorenzbedingung, die mit dem Lagrangemultiplikator ξ eingeführt wird, muss nicht explizit von Hand erfüllt werden. Physikalische Größen sind von ξ unabhängig. Für $\xi = 0$ (Landau-Eichung) propagieren alle vier Komponenten der Gluonen. Für $\xi \neq 0$ werden die beiden unphysikalischen Freiheitsgrade durch die Geistfelder entfernt. Für $\xi \mapsto \infty$ gibt es keine Eichfixierung und damit existiert auch der Propagator nicht. Man kann im Prinzip ohne Geistern rechnen und longitudinale und skalare Polarisation der Gluonen mitnehmen. Dies bricht jedoch die Lorentzinvarianz und ist auch komplizierter als mit Geistern zu rechnen.

3.1 Feynman-Regeln der QCD

Kommen wir zu den Propagatoren. Quarkpropagator:

$$j, \alpha \begin{array}{c} \bullet \\ \longleftarrow \\ \bullet \end{array} k, \beta : \frac{i(\not{p} + m)_{jk}}{p^2 - m_q^2 + i\delta} \delta_{\alpha\beta}, \quad (125)$$

Gluonpropagator:

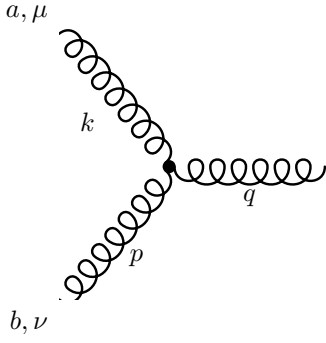
$$\mu, a \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \nu, b : -\frac{i}{p^2 + i\delta} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i\delta} \right) \delta_{ab}, \quad (126)$$

Geistpropagator:

$$j, \alpha \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} k, \beta : \frac{i}{p^2 + i\delta} \delta_{ab}. \quad (127)$$

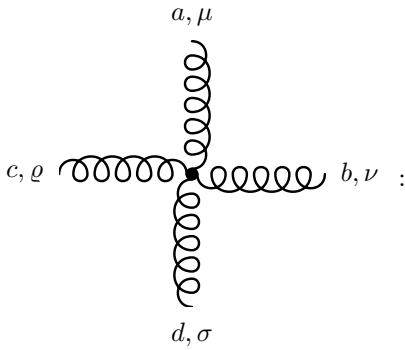
Vertizes:

$$\begin{array}{c} \alpha, j \\ \swarrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \beta, k \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \mu, a \end{array} : ig_3 \gamma_{jk}^\mu T_{\alpha\beta}^a, \quad (128)$$

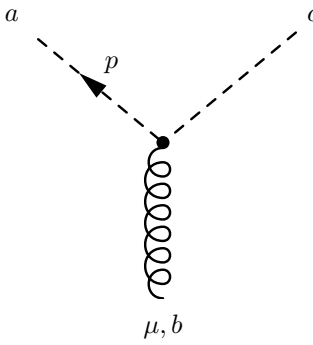


$$c, \rho : g_3 f^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu], \quad (129)$$

Alle Impulse sind als einlaufend gewählt; es gilt somit $p + k + q = 0$.

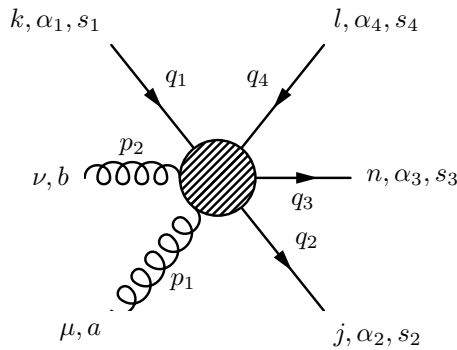


$$c, \rho : -ig_3^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})], \quad (130)$$



$$: g_3 f^{abc} p^\mu. \quad (131)$$

Externe Linien:



	Gluon	Quark	Antiquark
einlaufend	$\varepsilon^{\mu,a}(p_1)$	$u_k^{s_1,\alpha_1}(q_1)$	$\bar{v}^{s_3,\alpha_3}(q_3)$
auslaufend	$(\varepsilon^{\nu,b})^*(p_2)$	$\bar{u}_j^{s_2,\alpha_2}(q_2)$	$v_l^{s_4,\alpha_4}(q_4)$

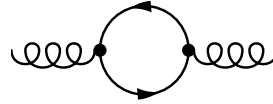
Weitere Feynman-Regeln (gelten nicht nur für QCD):

- An jedem Vertex gilt Viererimpulserhaltung.

- Über Schleifenimpulse l^μ wird mit $\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}$ integriert.

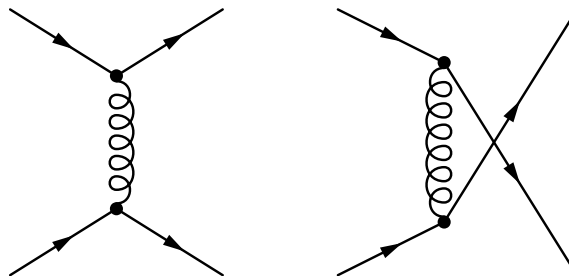
Es ist über alle möglichen Zwischenzustände (Impulskonfigurationen) zu summieren, in diesem Falle entspricht dies einer Integration über alle internen Impulse.

- Jede geschlossene Fermion- oder Geistschleife gibt einen Faktor -1. Dies gilt beispielsweise für



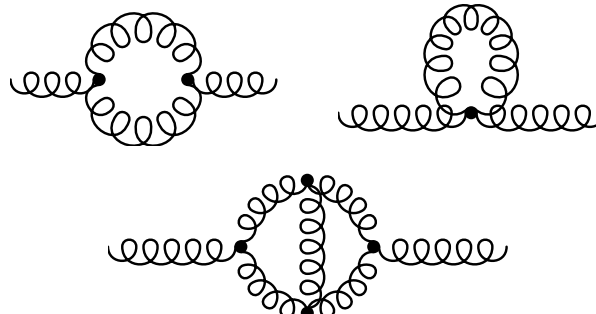
Dies ist das einzige Diagramm, das in der QED zum Laufen der Kopplungskonstanten beiträgt. In der QCD gibt es andere, die entgegengesetzte Beiträge liefern. Daher die asymptotische Freiheit.

- Diagramme mit relativ zueinander gekreuzten externen Fermionlinien haben einen relativen Faktor -1.
- Beispiel:

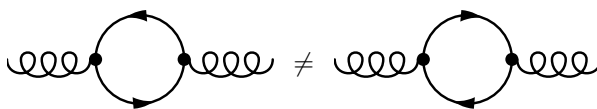


Bei der Summe der Diagramme ist also ein relatives Minuszeichen zu berücksichtigen.

- Diagramme mit Permutationssymmetrie von Linienenden (inklusive der anhängenden Vertizes) haben bei N Permutationen einen Symmetriefaktor von $1/N$. Betrachten wir als Beispiel mit $S = 1/2$:



Für alle Graphen gilt $S = 1/2$. Nicht gleich sind jedoch



Hier ist $S = 1$.

3.2 Die Yukawa-Wechselwirkung

Warum kann man in die Lagrangedichte keine Massenterme $m\bar{\psi}\psi$ in die Lagrangedichte schreiben? In der QCD wäre dies noch möglich, aber nicht in der schwachen Wechselwirkung. Terme wie $m_u\bar{u}_L u_R$ sind nicht erlaubt, weil sie nicht $SU(2)$ -invariant sind. (\bar{u}_L ist ein Dublett und u_R ein Singulett unter $SU(2)$.) Somit müssen Fermionmassen aus der Higgs-Wechselwirkung kommen. (Technicolor-Modelle: $SU(3)$ -Eichgruppe, aber stärkere Wechselwirkung als in der QCD) Schauen wir uns die Yukawa-Wechselwirkung an:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^e + \mathcal{L}_Y^d + \mathcal{L}_Y^u, \tag{133}$$

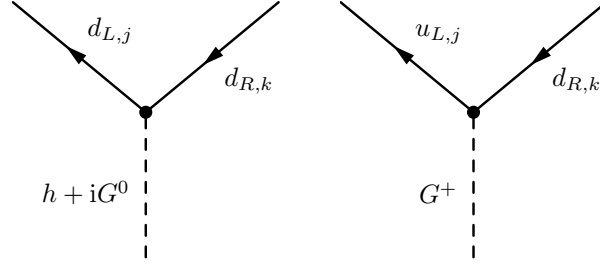
wobei in $\mathcal{L}_Y^{e,d,u}$ die Wechselwirkung der Leptonen (Kapitel 9), Down-Quarks bzw. Up-Quarks drinsteht.

$$\mathcal{L}_Y^d = -\overline{Q}_L \Phi Y^d d_R + \text{h.c.} = -\sum_{j,k=1}^3 Y_{j,k}^d \overline{Q}_{L,j} \Phi d_{R,k}, \quad Q_{L,j} = \begin{pmatrix} u_{L,j} \\ d_{L,j} \end{pmatrix}, \quad \overline{Q}_{L,j} = (\overline{u}_{L,j}, \overline{d}_{L,j}), \quad (134)$$

wobei $Y_{j,k}^d$ die Yukawa-Kopplungen und $\overline{Q}_{L,j}$ die Felder der j -ten, bzw. $d_{R,k}$ die Felder der k -ten Generation sind. Die Summe läuft über alle Generationen. Mit den einzelnen Hyperladungen $Y = -1/6$, $Y = 1/2$ bzw. $Y = -1/3$ erkennt man, dass $\overline{Q}_L \Phi Y^d d_R$ ein Hyperladungssingulett ist. Die Yukawa-Matrix Y^d ist eine beliebige 3×3 -Matrix.

$$\mathcal{L}_Y^d \stackrel{(100)}{=} -\sum_{j,k} Y_{j,k}^d \left\{ \overline{u}_{L,j} d_{R,k} G^+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{d}_{L,j} d_{R,k} (h + iG^0) + \overline{d}_{L,j} d_{R,k} v \right\} + \text{h.c.}, \quad (135)$$

wobei der dritte Term der Massenterm ist.



Die Supersymmetrie sagt die Topquarkmasse richtig vorher. Sie folgt aus dem Infrarotfixpunkt und man benötigt dazu $\tan \beta \gtrsim 3$. Mit $\tan \beta > 50$ sind Bottom- und Top-Kopplung gleich; man versteht dann die Bottom-Kopplung besser. Ein bisher noch ungelöstes Problem im Standardmodell ist die Erklärung der kleinen Yukawa-Kopplungen.

Kommen wir zum Massenterm:

$$\mathcal{L}_m^d = -\sum_{j,k} \overline{d}_{L,j} d_{R,k} Y_{j,k}^d v + \text{h.c.} = -\overline{d}_L Y^d d_R v + \text{h.c.}, \quad (136)$$

wobei man die **Down-Quark-Massenmatrix** definiert als

$$M^d = Y^d v. \quad (137)$$

Der Massenterm mischt die drei Generationen. Man benötigt das ladungskonjugierte Higgs-Dublett

$$\phi^c := \varepsilon \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G^- \\ v + 1/\sqrt{2}h - i/2G^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}h - i/2G^0 \\ -G^- \end{pmatrix}, \quad Y = -\frac{1}{2}. \quad (138)$$

Man benötigt hier ε , so dass ϕ^c ein $SU(2)$ -Dublett ist.

$$\mathcal{L}_Y^u = -\overline{Q}_L \Phi^c Y^u u_R + \text{h.c.}. \quad (139)$$

Hieraus ergibt sich der Massenterm

$$\mathcal{L}_m^u \stackrel{(138)}{=} -\overline{u}_L Y^u u_R v + \text{h.c.}, \quad (140)$$

und wir können die **Up-Quark-Massenmatrix** ablesen:

$$M^u = Y^u v. \quad (141)$$

Der eichkinetische Term der Quarkfelder ist definiert als

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^q = \overline{Q}_L i \not{D} Q_L + \overline{d}_R i \not{D} d_R + \overline{u}_R i \not{D} u_R, \quad (148)$$

hat eine globale $[U(3)]^3 = U(3) \times U(3) \times U(3)$ - (Flavour-)Symmetrie. Mit $U_{1,2,3} \in U(3)$ lassen die Transformationen

$$Q_L \mapsto U_1 Q_L, \quad d_R \mapsto U_2 d_R, \quad u_R \mapsto U_3 u_R, \quad (143)$$

$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^q$ invariant. (143) sind unitäre Drehungen im Flavourraum. Die Unterscheidung geschieht durch Yukawa-Wechselwirkung.

$$Q_L \mapsto U_1 Q_L, \quad d_R \mapsto U_2 d_R, \quad u_R \mapsto U_3 u_R, \quad (143)$$

lässt $\mathcal{L}_{\text{Eich}}^q$ invariant. Beispielsweise gilt

$$\overline{Q_L} i \not{D} Q_L \mapsto \overline{Q_1} U_1^\dagger i \not{D} U_1 Q_1 = \overline{Q_L} i \not{D} Q_L,$$

wegen $U_1^\dagger U_1 = \mathbb{1}$. Damit kann der Eichsektor die Generationen nicht unterscheiden. Jede Basis von Eichfeldern, in der $\mathcal{L}_{\text{Eich}}^\dagger$ die Form in (142) hat, heißt **(elektro-)schwache Basis**. (143) transformiert eine schwache Basis in eine andere schwache Basis. Die Felder Q_L, u_R, d_R heißen **Wechselwirkungseigenzustände**. Wie bestimmen $S^Q, S^u \in \text{U}(3)$ so, dass

$$\widehat{M}^u := (S^Q)^\dagger M^u S^u, \quad (144)$$

diagonal ist:

$$\widehat{M}^u = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix}. \quad (145)$$

Jede Matrix lässt sich mit einer bi-unitären Transformation wie in (144) diagonalisieren. Die Basistransformation

$$Q_L \mapsto S^Q Q_L, \quad u_R \mapsto S^u u_R, \quad (146)$$

bewirkt wie in \mathcal{L}_m^u :

$$\begin{aligned} -\overline{u_L} M^u u_R &\mapsto -\overline{u_L} (S^Q)^\dagger M^u S^u u_R = -\overline{u_L} \widehat{M}^u u_R = (147) \\ &= -m_u \overline{u_L} u_R - m_c \overline{c_L} c_R - m_t \overline{t_L} t_R + \text{h.c.} = \\ &= -m_u \overline{u} u - m_c \overline{c} c - m_t \overline{t} t, \quad (148) \end{aligned}$$

wobei $u = u_L + u_R$ usw. \widehat{M}^u ist diagonal und damit sind u, c, t in (148) **Masseneigenzustände**. Es handelt sich also um eine physikalische Basis. Letzte freie U(3)-Transformation:

$$d_R \mapsto S^d d_R. \quad (149)$$

Effekt von (146) und (149):

$$\mathcal{L}_m^d = -\overline{d_L} (S^Q)^\dagger M^d S^d d_R + \text{h.c.}, \quad (150)$$

wobei $(S^Q)^\dagger M^d S^d$ nicht diagonal ist, weil S^Q schon festgelegt ist. Diagonalisiert man M^d durch Wahl von S^d mit $V \in \text{U}(3)$:

$$\widehat{M}^d = V^\dagger (S^Q)^\dagger M^d S^d, \quad (151)$$

wobei $V^\dagger (S^Q)^\dagger$ unitär ist, so ist

$$\mathcal{L}_m^d \stackrel{(150)}{=} -\overline{d_L} V \widehat{M}^d d_R + \text{h.c.}. \quad (152)$$

Um von unserer schwachen Basis zu einer Basis mit Masseneigenzuständen zu gelangen, transformieren wir

$$d_L \mapsto V d_L. \quad (153)$$

Daraus folgt

$$\mathcal{L}_m^d = -m_d \overline{d} d - m_s \overline{s} s - m_b \overline{b} b. \quad (154)$$

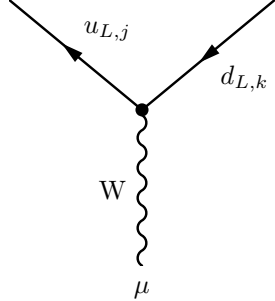
$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^q$ wird zu

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^q \stackrel{(142)}{=} (\overline{u_L}, \overline{d_L} V^\dagger) i \not{D} \begin{pmatrix} u_L \\ V d_L \end{pmatrix} + \overline{d_R} i \not{D} d_R + \overline{u_R} i \not{D} u_R. \quad (155)$$

V ist die CKM-Matrix aus (9). V muss also deshalb unitär sein, weil nur unitäre Transformationen den eichkinetischen Term invariant lassen. Mit (99) finden wir:

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}}^q \supset \mathcal{L}_W^q = \frac{g_2}{\sqrt{2}} \bar{u}_L V \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{d}_L V^\dagger \gamma^\mu u_L W_\mu^- . \quad (156)$$

Damit haben nur linkshändige Felder eine Flavour-Struktur; W-Bosonen koppeln damit nur an linkshändige Felder. Die ganze Flavourphysik steckt in den W-Boson-Kopplungen.



$$: i \frac{g_2}{\sqrt{2}} \gamma^\mu P_L V_{j,k} . \quad (\text{siehe (8)})$$

Jedoch finden wir für die Kopplungen von B^μ und W_3^μ : $\bar{u}_L \gamma^\mu u_L$ und $\bar{d}_L V^\dagger \gamma^\mu V d_L = \bar{d}_L \gamma^\mu d_L$. Dies gilt wegen der $V^\dagger V = 1$. Damit gibt es keine FCNC-Kopplungen von A^μ und Z^μ . Die Physik, welche die Unitarität der CKM-Matrix impliziert, bezeichnet man als „**Glashow-Iliopoulos-Maiani-Mechanismus** (GIM-Mechanismus) auf Baumgraphen-Niveau“. Der GIM-Mechanismus sorgt auch dafür, dass FCNC-Kopplungen in Schleifenkorrekturen stark unterdrückt sind und dient somit als Basis für neue Physik. In der physikalischen Basis ist \mathcal{L}_Y^d in (135) gegeben durch:

$$\mathcal{L}_Y^d = - \sum_{j=1}^3 \hat{Y}_j^d \left\{ G^+ \sum_{k=1}^3 V_{jk} \bar{u}_{Lj} d_{R,k} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{d}_{Lj} d_{R,j} (h^0 + iG^0) + \bar{d}_{Lj} d_{R,j} v \right\} + \text{h.c.} . \quad (157)$$

Es gibt somit keine FCNC-Kopplungen von h und G^0 (ebenso in \mathcal{L}_Y^d). Alle neutralen Felder inklusive des Higgsfeldes haben keine Flavourstrukturen. Dies ist der Grund, dass es im Standardmodell nur **ein** Higgs-Dublett gibt. Im Zwei-Higgs-Dublett-Modell koppeln die neutralen Higgsbosonen flavourändernd. Dieses Modell ist durch die experimentellen Resultate der Flavourphysik sehr stark eingeschränkt. Mit (137) und (139) findet man

$$\hat{Y}_j^q = \frac{(m_q)_j}{v} \stackrel{(103)}{=} \frac{g_2(m_q)_j}{\sqrt{2}M_W} . \quad (158)$$

Interessant ist, dass

$$\hat{Y}_3^u = \hat{Y}_t = \frac{m_t}{v} \approx 1 , \quad (159)$$

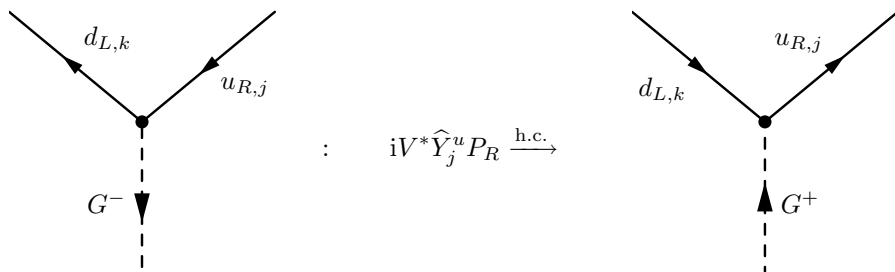
ist. Alle anderen Yukawa-Kopplungen sind klein (was man bis jetzt nicht versteht).

$$\hat{Y}_3^d = \hat{Y}_3 = 0,016 .$$

Alle Yukawa-Kopplungen sind abhängig von der Energieskala und werden kleiner mit steigender Energie. Aus (139) folgt:

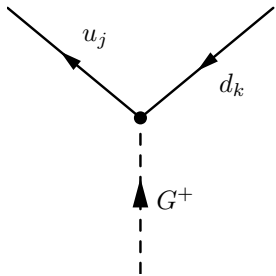
$$\mathcal{L}_Y^u = - \sum_{j=1}^3 \hat{Y}_j^u \left\{ -G^- \sum_{k=1}^3 V_{jk}^* \bar{d}_{Lk} u_{R,j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_{Lj} u_{R,j} (h^0 - iG^0) + \bar{u}_{Lj} u_{R,j} v \right\} + \text{h.c.} . \quad (160)$$

Die zu „h.c.“ gehörenden Feynman-Regeln erhält man durch Umkehr der Pfeilrichtungen. Beispielsweise gilt:

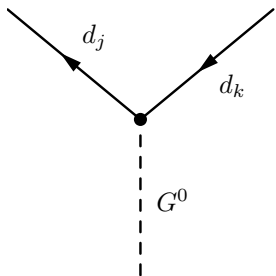


$$: iV_{jk}^* \hat{Y}_j^u P_R \xrightarrow{\text{h.c.}} : iV_{jk} \hat{Y}_j^u P_L . \quad (161)$$

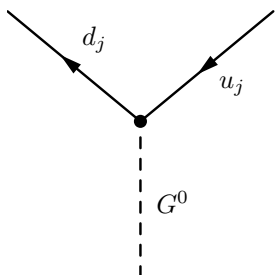
Feynman-Regeln aus $\mathcal{L}_Y^d, \mathcal{L}_Y^u$:



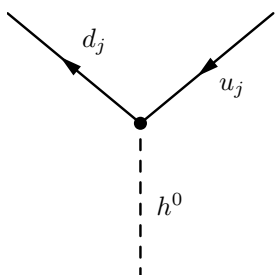
$$: iV_{jk} \left[-\widehat{Y}_j^d P_R + \widehat{Y}_j^u P_L \right], \quad (162)$$



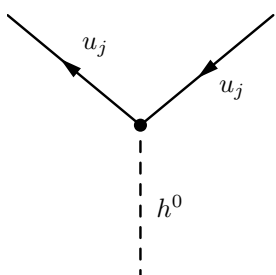
$$: \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{Y}_j^d \gamma_5, \quad \gamma_5 = P_R - P_L,$$



$$: -\frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{Y}_j^u \gamma_5, \quad (163)$$

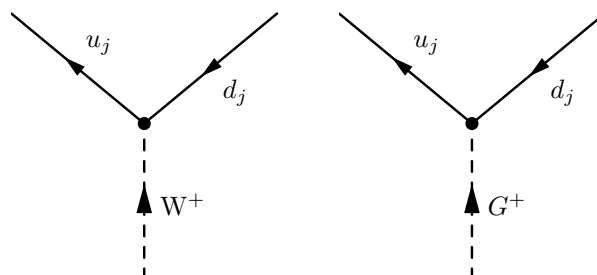


$$: -i \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{Y}_j^d,$$



$$: -i \frac{1}{\sqrt{2}} \widehat{Y}_j^u. \quad (164)$$

Die letzten beiden spielen keine Rolle in der Flavourphysik. Das Fazit ist, dass Flavour-Verletzung im Standardmodell nur in den Kopplungen



auftritt. Schauen wir uns nochmal die CKM-Matrix an:

$$V = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,22 & 4 \cdot 10^{-3} \exp(-i\gamma) \\ -0,22 & 0,98 & 4 \cdot 10^{-2} \\ 8 \cdot 10^{-3} \exp(-i\beta) & -4 \cdot 10^{-2} & 0,999 \end{pmatrix}, \quad \beta = 21^\circ, \quad \gamma = 70^\circ. \quad (165)$$

Weiterhin findet man

$$\begin{aligned} \hat{Y}^u &= \text{diag}(7 \cdot 10^{-6}, 4 \cdot 10^{-3}, 0,94), \\ \hat{Y}^d &= \text{diag}(1, 4 \cdot 10^{-5}, 3, 2 \cdot 10^{-4}, 0,016). \end{aligned} \quad (166)$$

In der schwachen Basis (welche die SU(2) respektiert) aus (152) gilt $Y^u = \hat{Y}^u$ und

$$Y^d = V \hat{Y}^d = \begin{pmatrix} 10^{-5} & 6 \cdot 10^{-5} & 6 \cdot 10^{-5} \exp(-i\gamma) \\ -3 \cdot 10^{-6} & 3 \cdot 10^{-4} & 6 \cdot 10^{-4} \\ 10^{-8} \exp(-i\beta) & -10^{-5} & 1,6 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}. \quad (167)$$

Idee: Setzt man alle Yukawa-Kopplungen außer $y_t = 0,94$ gleich Null, so ist von der $[U(3)]^3$ -Symmetrie in (143) immer noch eine $U(3) \times [U(2)]^2 \times U(1)$ -Flavoursymmetrie erhalten mit (in (143)): $U_1, U_3 \in U(2)$ für die ersten beiden Generationen und $U_2 \in U(3)$. Es bleibt eine U(1)-Symmetrie übrig: $t_{L,R} \mapsto \exp(i\varphi)t_{L,R}$ (Top-Quantenzahl). Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob es ein Symmetrieprinzip in Y^u und Y^d gibt. Die Flavoursymmetrie ist gebrochen durch Terme der Ordnung 10^{-2} und kleiner. Durch welchen Mechanismus könnte die Symmetrie gebrochen sein?

3.3 Diskrete Symmetrien \mathcal{C} , \mathcal{P} , \mathcal{T}

3.3.1 Raumspiegelung und Zeitumkehr

Die Lagrangedichte ist invariant unter L_+^\uparrow , der **eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe**. Die umfasst alle Kombinationen aus Boosts und Drehungen, aber keine Raumspiegelung \mathcal{P} und keine Zeitumkehr \mathcal{T} .

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : x^\mu &\mapsto x_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} = \tilde{x}^\mu, \\ \mathcal{T} : x^\mu &\mapsto -\tilde{x}^\mu = -x_\mu = \begin{pmatrix} -x^0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (168)$$

\mathcal{P} , \mathcal{T} und \mathcal{L}_+^\uparrow transformieren x^μ , sind also **äußere Symmetrien**. Die volle Lorentzgruppe ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \cup P\mathcal{L}_+^\uparrow \cup T\mathcal{L}_+^\uparrow \cup PT\mathcal{L}_+^\uparrow. \quad (169)$$

Die Natur respektiert \mathcal{L}_+^\uparrow . QCD und QED sind sogar invariant unter der vollen Lorentzgruppe.

$$\mathcal{L}_+^\uparrow = \{\Lambda \in \mathcal{L} : \det \Lambda = 1 \wedge \Lambda^0_0 \geq 1\},$$

während

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (170), (171)$$

Also gilt

$$\det(P) = \det(T) = -1, \quad \det(PT) = 1, \quad P^0_0 = 1, \quad T^0_0 = -1, \quad (PT)^0_0 = -1.$$

Außerdem ist $P^2 = T^2 = \mathbf{1}$.

	\mathcal{P}	\mathcal{T}
Impuls \mathbf{p}	$-\mathbf{p}$ (Polarvektor)	$-\mathbf{p}$
Bahn-Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	\mathbf{L} (axialer Vektor)	$-\mathcal{L}$

Der Spin \mathbf{S} transformiert sich wie \mathcal{L} . Unitäre Darstellung auf dem Fockraum:

$$\mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = 1.$$

Betrachten wir die Wirkung von \mathcal{P} auf einen Ein-Fermionzustand:

$$\mathcal{P}|\mathbf{p}, s\rangle = \eta_p |-\mathbf{p}, s\rangle, \quad |\eta_p| = 1. \quad (173)$$

Man bezeichnet η_p als Parität des Zustands. η_p kann für jede Fermionspezies verschieden sein. Das Vakuum ist invariant unter \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}|0\rangle = |0\rangle. \quad (174)$$

Es gilt weiterhin

$$\mathcal{P}^2 = 1, \quad \text{aber } \mathcal{P}^2|\mathbf{p}, s\rangle = \eta_p^2|\mathbf{p}, s\rangle. \quad (175)$$

Ein Zustand wird beschrieben durch die Menge aller Zustände, die sich durch einen Phasenfaktor unterscheiden (Strahldarstellung, $\{1, P\} = \mathbb{Z}_2$). Schauen wir uns nun an, wie sich die Erzeugungsoperatoren unter Paritätsoperation verhalten:

$$\mathcal{P}a_{\mathbf{p}}^s \mathcal{P}^\dagger = \eta_p^* a_{-\mathbf{p}}^s, \quad (176)$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}|\mathbf{p}_1, s_1; \mathbf{p}_2, s_2; \dots, \mathbf{p}_n, s_n\rangle &= \mathcal{P}(a_{\mathbf{p}_1}^{s_1})^\dagger \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P}(a_{\mathbf{p}_2}^{s_2})^\dagger \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} \dots (a_{\mathbf{p}_n}^{s_n})^\dagger |0\rangle = \eta_p^n (a_{-\mathbf{p}_1}^{s_1})^\dagger \dots (a_{-\mathbf{p}_n}^{s_n})^\dagger |0\rangle = \\ &= \eta_p^n |-\mathbf{p}_1, s_1, \dots, -\mathbf{p}_n, s_n\rangle. \end{aligned} \quad (177)$$

Erfüllt $\psi(x)$ die Dirac-Gleichung, so muss sich $\psi(\tilde{x})$ mit

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix},$$

unitär so transformieren lassen, dass $\mathcal{P}\psi(\tilde{x})\mathcal{P}^\dagger$ die raumgespiegelte Diracgleichung erfüllt:

$$[i\partial_0\gamma^0 - i\partial_k\gamma^k - m]\mathcal{P}\psi(\tilde{x})\mathcal{P}^\dagger = 0. \quad (178)$$

Dann ist weder das ursprüngliche noch das gespiegelte Koordinatensystem voneinander ausgezeichnet. Aus

$$[i\partial_0\gamma^0 + i\partial_k\gamma^k - m]\psi(x) = 0, \quad (179)$$

folgt mit $(\gamma^0)^0 = \mathbb{1}$:

$$[i\partial_0\gamma^0 + i\partial_k\gamma^k - m]\gamma^0\gamma^0\psi(x) = 0,$$

und dann unter Verwendung von $\gamma^0\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0$:

$$\gamma^0[i\partial_0\gamma^0 - i\partial_k\gamma^k - m]\gamma^0\psi(x) = 0. \quad (180)$$

Hieraus folgt, dass

$$\mathcal{P}\psi(\tilde{x})\mathcal{P}^\dagger = \eta_p\gamma^0\psi(x). \quad (181)$$

Lösungen von (179) sind. \mathcal{P} wirkt nicht auf γ -Matrizen, weil diese keine Freiheitsgrade der Theorie sind. An dieser Stelle sieht man noch nicht, dass η_p die zuvor definierte Parität ist und dass außerdem $|\eta_p| = 1$ gilt. Einsetzen in (64) liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\psi(\tilde{x})\mathcal{P}^\dagger &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} [\mathcal{P}a_{\mathbf{p}}^s \mathcal{P}^\dagger u^s(\mathbf{p}) \exp(-ip\tilde{x}) + \mathcal{P}(b_{\mathbf{p}}^s)^\dagger \mathcal{P} v^s(\mathbf{p}) \exp(ip\tilde{x})] = \\ &\stackrel{(181)}{=} \eta_p \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s [a_{\mathbf{p}}^s \gamma^0 u^s(\mathbf{p}) \exp(-ipx) + (b_{\mathbf{p}}^s)^\dagger \gamma^0 v^s(\mathbf{p}) \exp(ipx)] \end{aligned} \quad (188)$$

Setzen wir auf der rechten Seite $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$, dann können wir $p \cdot x = p \cdot \tilde{x}$ verwenden. Aus (68), (69) folgt wegen

$$\gamma^0 \not{p} = \gamma^0 [p^0 \gamma^0 + p_k \gamma^k] = [p_0 \gamma^0 - p_k \gamma^k] \gamma^0,$$

$$\gamma^0 u^s(-\mathbf{p}) = u^s(\mathbf{p}), \quad \gamma^0 v^s(-\mathbf{p}) = -v^s(\mathbf{p}). \quad (183)$$

Damit ist (182) erfüllt für

$$\mathcal{P} a_{\mathbf{p}}^s \mathcal{P}^\dagger = \eta_p a_{-\mathbf{p}}^s,$$

also mit η_p von (76). Des Weiteren gilt

$$\mathcal{P} (b_{\mathbf{p}}^s)^\dagger \mathcal{P}^\dagger = -\eta_p (b_{-\mathbf{p}}^s)^\dagger, \quad \mathcal{P} b_{\mathbf{p}}^s \mathcal{P}^\dagger = -\eta_p^* b_{-\mathbf{p}}^s. \quad (184)$$

was der Grund dafür ist, dass man die Phase von η_p immer beibehält bei allen Rechnungen. Betrachten wir nun einen Zustand aus einem Fermion und einem Antifermion (Antifermion und dann Fermion):

$$|\mathbf{p}, s_1, \mathbf{q}, s_2\rangle = (b_{\mathbf{p}}^{s_1})^\dagger (a_{\mathbf{q}}^{s_2})^\dagger |0\rangle.$$

$$\mathcal{P} |\mathbf{p}, s_1; \mathbf{q}, s_2\rangle \stackrel{(184)}{=} -\eta_p \eta_p^* |-\mathbf{p}, s_1; -\mathbf{q}, s_2\rangle = -|-\mathbf{p}, s_1, -\mathbf{q}, s_2\rangle. \quad (185)$$

Hat man einen Zustand mit Fermion/Antifermion (bei B-Meson-Zerfällen) ist die intrinsische Parität des Endzustands gleich -1. Führt man zusätzlich Eichkopplungen ein, so ist die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante Ableitung zu ersetzen, also

$$[i\mathcal{D} - m]\psi = 0,$$

was \mathcal{P} -invariant ist. Dies ist der Grund, warum die Eichfelder sich genauso transformieren müssen wie die partielle Ableitung, was bedeutet, dass sich der Index senkt:

$$A^\mu \mapsto A_\mu, \quad (W^\mu)^\pm \mapsto W_\mu^\pm, \quad Z^\mu \mapsto Z_\mu, \quad G^{\mu,a} \mapsto G_\mu^a. \quad (186)$$

Eichfelder sind damit polare Vektorfelder. Ein Spin-0-Feld φ heißt skalar (pseudoskalar), wenn es sich unter \mathcal{P} wie $\varphi(x) \mapsto \varphi(x)$ ($\varphi(x) \mapsto -\varphi(x)$) transformiert. Betrachten wir chirale Fermionfelder $\psi_L = P_L \psi$, so gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \psi_L &\mapsto \eta_p \gamma^0 \psi_L = \eta_p \gamma^0 P_L \psi = \eta_p P_R \gamma^0 \psi =: \eta_p \psi_R, \\ \mathcal{P} : \psi_R &\mapsto \eta_p \gamma^0 \psi_R = \eta_p \gamma^0 P_R \gamma^0 \psi = \eta_p P_L \psi = \eta_p \psi_L. \end{aligned} \quad (187)$$

Die **Zeitumkehrtransformation** vertauscht Anfangs- und Endzustand:

$$\text{out} \langle f|i \rangle_{\text{in}} \xrightarrow{\mathcal{T}} \text{out} \langle i|f \rangle_{\text{in}}.$$

Mit

$$\mathcal{T} : |\lambda\rangle \mapsto |\mathcal{T}\lambda\rangle,$$

ist also

$$\langle \mathcal{T}\sigma | \mathcal{T}\lambda \rangle = \langle \lambda | \sigma \rangle = \langle \sigma | \lambda \rangle^*. \quad (188)$$

Hieraus folgt, dass \mathcal{T} **antilinear** ist. Antilinear:

$$\mathcal{T} \alpha |\lambda\rangle = \alpha^* \mathcal{T} |\lambda\rangle^*. \quad (189)$$

Antiunitär bedeutet, dass die Norm erhalten bleibt.

Wir suchen $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ so, dass

$$\mathcal{T} \psi(-\tilde{x}) \mathcal{T}^\dagger = \eta_t A \psi(x), \quad (190)$$

die zeitumgekehrte Diracgleichung erfüllt. Weil \mathcal{T} Spin und Impuls umkehrt, ist

$$\mathcal{T} a_{\mathbf{p}}^s \mathcal{T}^\dagger = \eta_t a_{-\mathbf{p}}^{-s}, \quad (191a)$$

für $s = \uparrow, \downarrow$ und

$$\mathcal{T} b_{\mathbf{p}}^s \mathcal{T}^\dagger = \eta_t' b_{-\mathbf{p}}^{-s}, \quad (191b)$$

für $s = \uparrow, \downarrow$. Einsetzen in (64) liefert (analog zum Fall der Parität):

$$\eta_t' = -\eta_t,$$

und

$$[u^s(-\mathbf{p})]^* = Au^{-s}(\mathbf{p}), \quad [v^s(-\mathbf{p})]^* = -Av^{-s}(\mathbf{p}). \quad (192)$$

(Warum hier ein komplex Konjugiert steht, hängt mit der Antiunitarität von \mathcal{T} zusammen.) Dies ist mit $A = -\gamma^1\gamma^3$ (193) erfüllt. Diese Wahl von A ist reell.

Die **Ladungskonjugationsmatrix** ist $C := i\gamma^2\gamma^0$ (194). Sie ist reell und es gilt weiterhin

$$C^2 = -\mathbb{1}, \quad C^{-1} = C^\dagger = C^\top = -C. \quad (195)$$

(194) und (195) gelten in der Dirac- und Weyl-Darstellung. Praktische Beziehungen sind

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^\top, \quad \gamma^0\gamma_\mu\gamma^0 = (\gamma^\mu)^\dagger. \quad (196)$$

Außerdem ist $A = -\gamma_5 C$ (197) und $A\gamma_\mu A^{-1} = \gamma_\mu^\top$ (198), sowie $A^2 = \gamma^1\gamma^3\gamma^1\gamma^3 = -1$ und $A^\dagger = A^\top = -A$ (199). Schauen wir uns nochmal die freie Diracgleichung an, die wir mit $\eta_t^* A$ multiplizieren:

$$\eta_t^* A[i\not{\partial} - m]\psi(x) = 0 \xrightarrow{(198)} \eta_t[i\partial_\mu(\gamma^\mu)^\top - m]A\psi(x) = 0.$$

Nun ist $(\gamma^k)^\top = -\gamma^k$ und $(\gamma^0)^\top = \gamma^0$ in Dirac- und Weyl-Darstellung. Also folgt

$$[i\partial_0\gamma^0 - i\partial_k\gamma^k - m]\eta_t^* A\psi(x) = 0, \quad (200)$$

und durch komplexe Konjugation erhalten wir

$$[-i\partial_0\gamma^0 + i\partial_k\gamma^k - m]\eta_t A\psi^*(x) = 0. \quad (201)$$

und weiter

$$\eta_t A\psi^*(x) = \eta_t A^* \psi^*(x).$$

Damit erfüllt $\eta_t A\psi^*(x) = \eta_t A^* \psi^*(x)$ die zeitumgekehrte Diracgleichung. \mathcal{T} erhält die Chiralität. Wir betrachten dazu:

$$\mathcal{T} : \psi_L \mapsto \eta_t A\psi_L,$$

und es gilt:

$$P_L \eta_t A\psi_L = \eta_t A\psi_L,$$

was bedeutet, dass ein linkshändiges Feld auf ein linkshändiges Feld abgebildet wird.

Kommen wir nun zu den Eichfeldern:

$$\mathcal{L} \supset e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu + g_3\bar{\psi}_\alpha\gamma_\mu T_{\alpha\beta}^a\psi_\beta G^{\mu,a} + \dots$$

Beispielsweise gilt

$$\mathcal{T} : \bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi \mapsto \psi^\dagger A^\dagger \gamma^0 \gamma_\mu T^a A\psi_\beta = \psi^\dagger (\gamma^0)^\top \gamma_\mu^\top T^a \psi_\beta = \bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi. \quad (202)$$

Damit transformiert sich das Gluonfeld so, indem die Stellung des Diracindex geändert wird:

$$\mathcal{T} : G^{\mu,a} \mapsto G_\mu^a. \quad (203)$$

Ebenso gilt dies für A^μ , B^μ , $W^{\mu,\pm}$, Z^μ . Betrachten wir die \mathcal{T} -Transformation für Skalarfelder:

$$\mathcal{T} : \varphi \mapsto \pm\varphi. \quad (204)$$

Transformiert das Skalarfeld mit einem zusätzlichen Minuszeichen, bezeichnet man es als Pseudoskalarfeld.

3.3.2 Ladungskonjugation

Die Basis unserer Betrachtung bildet die Abbildung von Fermionen auf Antifermionen. Im Gegensatz zu \mathcal{P} und \mathcal{T} die äußere Symmetrien der Lorentzgruppe sind, ist \mathcal{C} eine **innere Symmetrie**. Wir legen das ladungskonjugierte Spinorfeld ψ^c fest durch

$$\mathcal{C} : \psi \mapsto \psi^c ,$$

wobei sich ψ^c gemäß zu ψ komplex konjugierter Darstellungen ($U(1)$, $SU(3)$, etc.) transformiert, denn alle Ladungen sollen ihr Vorzeichen wechseln (bzw. Farbe \mapsto Antifarbe). Zunächst für $U(1)_{\text{em}}$:

$$[i\cancel{\partial} + e\cancel{\mathcal{A}} - m]\psi = 0 , \quad (205)$$

$$[i\cancel{\partial} - e\cancel{\mathcal{A}} - m]\psi^c = 0 , \quad (206)$$

Aus (205) folgt die adjungierte Diracgleichung:

$$\bar{\psi}[-i\overleftarrow{\cancel{\partial}} + e\cancel{\mathcal{A}} - m] = 0 \Rightarrow [\gamma_\mu^\dagger(-i\partial_\mu + eA_\mu) - m]\bar{\psi}^\dagger = 0 .$$

Wir verwenden $(\gamma^\mu)^\dagger = C\gamma^\mu C$ und $C^2 = -\mathbf{1}$ und erhalten:

$$C[\gamma^\mu(-i\partial_\mu + eA_\mu)C + mC]\bar{\psi}^\dagger = 0 \Rightarrow [i\cancel{\partial} - e\cancel{\mathcal{A}} - m]C\bar{\psi}^\dagger = 0 . \quad (207)$$

Dies ist also die ladungskonjugierte Diracgleichung, an der wir ψ^c ablesen:

$$\psi^c = \eta_c C\bar{\psi}^\dagger = \eta_c i\gamma^2 \gamma^0 \bar{\psi}^\dagger = \eta_c i\gamma^2 \psi^* . \quad (208)$$

Ist ψ_L linkshändig, so ist

$$(\psi_L)^c = \psi_L^c = \eta_c i\gamma^2 \psi_L^* ,$$

wegen

$$P_R \gamma^2 \psi_L^* = \gamma^2 P_L \psi_L^* = \gamma^2 \psi_L^* ,$$

ein rechtshändiges Feld! Damit ist

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^\dagger = \eta_c C\bar{\psi}^\dagger(x) . \quad (209)$$

Man findet ($s = \uparrow, \downarrow, -s = \downarrow, \uparrow$):

$$C\bar{v}^\dagger(\mathbf{p}; s) = i\gamma^2 v^*(\mathbf{p}; s) = \pm u(\mathbf{p}; -s) . \quad (210)$$

Beispielsweise findet man in (67):

$$i\gamma^2 (v^\uparrow)^*(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sqrt{m} = -u^\downarrow(0) . \quad (211)$$

Aber es gilt $i\gamma^2 (v^\downarrow)^*(0) = u^\uparrow(0)$.

$$\mathcal{C}a_{\mathbf{p}}^s \mathcal{C}^\dagger = \eta_c^* b_{\mathbf{p}}^{-s} , \quad (212a)$$

$$\mathcal{C}b_{\mathbf{p}}^s \mathcal{C}^\dagger = \eta_c^* a_{\mathbf{p}}^{-s} . \quad (212b)$$

$$\mathcal{C} : \bar{\psi}'_\alpha \gamma^\mu T_{\alpha\beta}^a \psi_\beta \xrightarrow{(208)} \psi'^\dagger_\alpha \gamma^0 C^\dagger \gamma^0 \gamma^k T_{\alpha\beta}^a C \bar{\psi}'_\beta = \psi'^\dagger_\alpha (\gamma^\mu)^\dagger T_{\alpha\beta}^a \bar{\psi}'_\beta = -\bar{\psi}'_\beta \gamma^\mu T_{\alpha\beta}^a \psi'_\alpha , \quad (213)$$

mit einem zusätzlichen Minuszeichen weil ψ_α und $\bar{\psi}'_\beta$ antivertauschen. Gluonfeld:

$$\mathcal{C} : G^{\mu,a} T^a \mapsto -G^{\mu,a} (T^a)^* . \quad (214)$$

Ladungskonjugation dreht den Ladungsfluss um. Die QCD ist symmetrisch bezüglich \mathcal{C} . Es gilt

$$G^{\mu,a} \xrightarrow{\mathcal{C}} \begin{cases} -G^{\mu,a} & \text{für } a = 1, 3, 4, 6, 8 \\ +G^{\mu,a} & \text{für } a = 2, 5, 7 \end{cases} ,$$

damit $\bar{\psi}\gamma^\mu T^a \psi G_\mu^a$ invariant unter \mathcal{C} ist. Obwohl die QCD \mathcal{C} -erhaltend ist, können wir dem Gluon keine \mathcal{C} -Quantenzahl zuordnen: 3 der 8 Gluonen haben $\mathcal{C} = +1$ (entsprechen den drei rein imaginären Generatoren, welche die Generatoren der Untergruppe $SO(3)$ sind), die anderen 5 haben $\mathcal{C} = -1$. Wegen der ungebrochenen Eichsymmetrie kann man jedoch jedes Gluon der einen Konfiguration in die andere transformieren. Deshalb sind sie nicht unterscheidbar. (Diese Argumentation funktioniert bei gebrochenen Symmetrien nicht.) Jedoch findet man für die $SU(2)$:

$$\mathcal{C} : W^{\mu,a} \sigma^a \mapsto -W^{\mu,a} (\sigma^a)^*,$$

also

$$\begin{pmatrix} W^{\mu,1} \\ W^{\mu,2} \\ W^{\mu,3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -W^{\mu,1} \\ W^{\mu,2} \\ -W^{\mu,3} \end{pmatrix}.$$

$W^{\mu,2}$ transformiert sich also anders als die beiden anderen. ($W^{\mu,2}$ entspricht dem einen rein imaginären Generator der Untergruppe $SO(2)$.) Folglich gilt

$$\mathcal{C} : W^{\mu,\pm} \mapsto -W^{\mu,\mp}, \quad (217)$$

wegen der Definition der W^\pm wie es auch sein muss. (Die elektrische Ladung dreht sich um unter \mathcal{C} -Transformation.) Es gilt jedoch

$$A^\mu, B^\mu, Z^\mu \mapsto -A^\mu, -B^\mu, -Z^\mu, \quad (218)$$

also ist die \mathcal{C} -Quantenzahl hier gleich -1 . Betrachten wir ein komplexes Skalarfeld:

$$\mathcal{C} : \varphi(x) \mapsto \eta_c'' \varphi^*(x), \quad |\eta_c''| = 1. \quad (219)$$

Es muss φ nach φ^* transformieren, weil es als Skalarfeld eine komplexe $U(1)$ -Quantenzahl trägt. Durch Umdefinieren des Feldes kann man die Phase loswerden:

$$\varphi' = \sqrt{(\eta_c'')^*} \varphi \Rightarrow \varphi' \xrightarrow{\mathcal{C}} \varphi^*.$$

Ein reelles Skalarfeld hat keine Phase und es gilt

$$\varphi(x) \mapsto \pm \varphi(x),$$

was einer Quantenzahl $\mathcal{C} = \pm 1$ entspricht. Beispielsweise gilt für das physikalische Higgsfeld h^0 , dass $\mathcal{C} = 1$ ist. Das Higgsfeld muss sich nämlich wie das Vakuum transformieren und dieses ist natürlich invariant unter \mathcal{C} . Für das Pseudogoldstoneboson G^0 ist $\mathcal{C} = -1$ und für die beiden anderen G^\pm gilt:

$$G^\pm \xrightarrow{\mathcal{C}} G^\mp.$$

Das Ergebnis ist entgegen der Erwartung. Man würde nämlich denken, dass das Vorzeichen analog zu den W -Bosonen ist, weil die Pseudo-Goldstonebosonen deren longitudinale Polarisierungen sind. Achtung: Es gilt

$$\phi \xrightarrow{\mathcal{C}} \phi^* \neq \phi^c = \varepsilon \phi^*,$$

also ist ϕ^c das ladungskonjugierte Dublett multipliziert mit ε . Aus (186), (215) folgt

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_3 G_\mu^a T^a \begin{cases} \xrightarrow{\mathcal{P}} \partial_\mu - ig_3 G^{\mu,a} T^a = D^\mu \\ \xrightarrow{\mathcal{C}} \partial_\mu + ig_3 G_\mu^a (T^a)^* = D_\mu^* \end{cases}. \quad (221)$$

Schauen wir uns den Feldstärketensor $G_{\mu\nu}^a$ an:

$$[D_\mu, D_\nu] =: -ig_3 G_{\mu\nu}^a T^a. \quad (222)$$

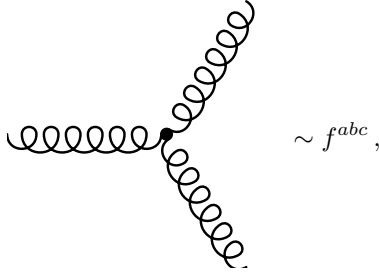
Mit (221) folgt:

$$G_{\mu\nu}^a \begin{cases} \xrightarrow{\mathcal{P}} G^{\mu\nu,a} \\ \xrightarrow{\mathcal{C}} -(G_{\mu\nu}^a)^* = -G_{\mu\nu}^a \end{cases},$$

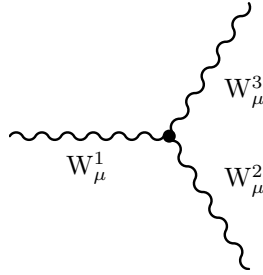
was gilt, weil $G_{\mu\nu}^a$ wegen (120) reell ist. Damit gilt

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} \xrightarrow{\mathcal{P},\mathcal{C}} \mathcal{L}_{\text{Eich}}.$$

Die \mathcal{T} -Invarianz ist am einfachsten anhand der Feynman-Regeln (129), (130) zu verifizieren. Diese Betrachtungen kann man verwenden, um Auswahlregeln für die Strukturkonstanten zu bestimmen. Betrachten wir dazu den Drei-Gluon-Vertex:



und damit kann f^{abc} nur dann ungleich null sein, wenn eine gerade Anzahl von Indizes zu Gluonen mit $C = -1$ gehört, weil die Selbstwechselwirkung der Gluonen wegen der obigen Gleichung \mathcal{C} -erhaltend ist. Aus (215) folgt, dass die Indizes 1, 3, 4, 6, 8 gar nicht oder doppelt vorkommen müssen (siehe (118)!). Die Kopplungen von W_μ^a an Fermionen verletzen \mathcal{P} und \mathcal{C} , weil W_μ^a nur an linkshändige Fermionen koppelt. Somit gilt die Herleitung von (186) und (216) nicht im Standardmodell. Bessere Überlegung: $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ respektiert \mathcal{P} , \mathcal{C} und \mathcal{T} , was $P: W_\mu^a \mapsto W^{\mu,a}$ impliziert. Durch Ladungskonjugation von



ergibt sich, dass null oder zwei Felder $C = -1$ haben. Wegen $\mathcal{C}: W_\mu^\pm \mapsto \pm W_\mu^\mp$ haben W^1 oder W^2 unterschiedliche C -Quantenzahlen und W^3 hat $C = -1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man die Wahl von (216) in dieser besseren Argumentation übernehmen. Ein Fermion-Antifermion-Paar besitzt die intrinsische C -Quantenzahl -1 wegen Antivertauschen in (213). Die \mathcal{CP} -Transformation bildet Fermionfelder auf Felder derselben Chiralität ab. Betrachten wir nun \mathcal{CP} -Transformationen:

$$\psi_L(x) \xrightarrow{\mathcal{CP}} \psi_L(\tilde{x})\eta_{\mathcal{CP}}, \quad \psi_R(x) \mapsto \psi_R(\tilde{x})\eta_{\mathcal{CP}}.$$

Eine reine Eichtheorie (ohne Yukawa-Kopplung) mit Fermionen, aber ohne Skalarfelder, ist \mathcal{CP} -erhaltend. (Dies ist ein Argument gegen Technicolor, welche alle Skalarfelder aus dem Standardmodell beseitigt und das Higgs als Bindungszustand zwischen Technifermion und Techniantifermion zu erklären versucht. Ein Kondensat von Technifermionen soll die Masse der Teilchen liefern.) In einer Theorie mit Skalarfeldern (Higgs) kann \mathcal{CP} explicit oder spontan gebrochen sein (wenn ein \mathcal{CP} -ungerades Higgsfeld einen Vakuumerwartungswert bekommt). Im Standardmodell ist der Vakuumerwartungswert \mathcal{CP} -erhaltend. Damit braucht man für spontane \mathcal{CP} -Verletzung ein zweites Higgsfeld (Idee von T.D. Lee, bevor die dritte Generation bekannt war).

3.4 Zusammenfassung (und Ergänzung) für chirale Quarkfelder

Wir betrachten die chiralen Quarkfelder b_R und d_L . Die Phasenfaktoren seien $\eta_c := \eta_c^d(\eta_c^b)^*$ usw. Weiterhin sei $\sigma^{\mu\nu} := i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Strom	$\bar{b}_R d_L(x)$	$\bar{b}_L \gamma_\mu d_L(x)$	$\bar{b}_R \sigma_{\mu\nu} d_L(x)$
\mathcal{C}	$\bar{d}_R b_L(x)\eta_c$	$-\bar{d}_R \gamma_\mu b_R(x)\eta_c$	$-\bar{d}_R \sigma_{\mu\nu} b_L(x)\eta_c$
\mathcal{P}	$\bar{b}_L d_R(\tilde{x})\eta_p$	$\bar{b}_R \gamma^\mu d_R(\tilde{x})\eta_p$	$\bar{b}_L \sigma^{\mu\nu} d_R(\tilde{x})\eta_p$
\mathcal{CP}	$\bar{d}_L b_R(\tilde{x})\eta_c\eta_p$	$-\bar{d}_L \gamma^\mu b_L(\tilde{x})\eta_c\eta_p$	$-\bar{d}_L \sigma^{\mu\nu} b_R(\tilde{x})\eta_c\eta_p$
\mathcal{T}	$\bar{b}_R d_L(-\tilde{x})\eta_t$	$\bar{b}_L \gamma^\mu d_L(-\tilde{x})\eta_t$	$\bar{b}_R \sigma^{\mu\nu} d_L(-\tilde{x})\eta_t$
\mathcal{CPT}	$\bar{d}_L b_R(-x)\eta_c\eta_p\eta_t$	$-\bar{d}_L \gamma_\mu b_L(-x)\eta_c\eta_p\eta_t$	$-\bar{d}_L \sigma_{\mu\nu} b_R(-x)\eta_c\eta_p\eta_t$

Schlussendlich noch zur Transformation der Felder:

Feld	$V^\mu = A^\mu(x), G^{\mu,1,3,4,6,8}(x), Z(x)$	$W^{\pm,\mu}(x)$	Higgs $h^0(x)$
\mathcal{C}	$-V^\mu(x)$	$-W^{\mp,\mu}(x)$	$h^0(x)$
\mathcal{P}	$V_\mu(\tilde{x})$	$W_\mu^\pm(\tilde{x})$	$h^0(\tilde{x})$
\mathcal{CP}	$-V_\mu(\tilde{x})$	$-W_\mu^\mp(\tilde{x})$	$h^0(\tilde{x})$
\mathcal{T}	$V_\mu(-\tilde{x})$	$W_\mu^\pm(-\tilde{x})$	$h^0(-\tilde{x})$
\mathcal{CPT}	$-V^\mu(-x)$	$-W^{\mp,\mu}(-x)$	$h^0(-x)$

Ein **Strom** ist ein Produkt von zwei Quantenfeldern mit gleichem Argument. Betrachten wir als Beispiel den elektromagnetischen Strom

$$j_e^\mu = e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad \mathcal{L}_{\text{QED}} = j_e^\mu A_\mu(x). \quad (3.1)$$

Diese Größen haben dieselben Eigenschaften wie die Ströme in der klassischen Mechanik. (Eigentlich handelt es sich um eine Stromdichte; der Strom ergibt sich durch Integration über den ganzen Raum und die nullte Komponente ist die erhaltene elektrische Ladung.)

Aus dem Transformationsverhalten der Vektorfelder, nämlich beispielsweise $\mathcal{P}W^{\mu,+}\mathcal{P}^\dagger = W_\mu^+$ und (70) kann man das Transformationsverhalten der Polarisationsvektoren ableiten:

$$\varepsilon^\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} \varepsilon_\mu, \quad \varepsilon^\mu \xrightarrow{\mathcal{C}} -(\varepsilon^\mu)^*, \quad \varepsilon^\mu \xrightarrow{\mathcal{T}} \varepsilon_\mu^*, \quad (226)$$

wobei beispielsweise $\mathcal{T}(\varepsilon^{(+)})^\mu\mathcal{T}^\dagger = ((\varepsilon^{(+)})^\mu)^* = (\varepsilon^{(-)})^\mu$ gilt. Dies bedeutet, dass die Zeitumkehr aus rechts-zirkular polarisierten Photonen links-zirkular polarisierte Photonen macht. \mathcal{P} lässt die Polarisation der Vektorbosonen (entspricht der m -Quantenzahl des Drehimpulses) gleich. (Dies ist klar, denn der Spin ist ein Axialvektor.)

Mit (224) (wobei $d \rightarrow u$) und (225) finden wir, dass

$$\mathcal{L}_W^q \stackrel{(156)}{\supset} \mathcal{L}_W^{\text{bu}} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{\text{ub}} \bar{b}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^+ + \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{\text{ub}}^* \bar{u}_L \gamma^\mu b_L W_\mu^-, \quad (227)$$

nicht invariant unter \mathcal{C} oder \mathcal{P} ist, weil $\bar{b}_R \gamma^\mu u_R W_\mu^+ \notin \mathcal{L}_{\text{SM}}$. Unter \mathcal{CP} (mit $\eta_{c,p}^{\text{bu}} = \eta_c^b \eta_p^u$) gilt, dass

$$\mathcal{L}_W^{\text{bu}} \xrightarrow{\mathcal{CP}} (\mathcal{CP}) \mathcal{L}_W^{\text{bu}} (\mathcal{CP})^\dagger = \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{\text{ub}} \bar{u}_L \gamma^\mu b_L W_\mu^- \eta_{c,p}^{\text{bu}} + \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{\text{ub}}^* \bar{b}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^+ (\eta_{c,p}^{\text{bu}})^*, \quad (228)$$

\mathcal{CP} -invariant ist, sofern $V_{\text{ub}} \eta_{c,p}^{\text{bu}} = V_{\text{ub}}^* ((\eta_c)^{\text{ub}})^*$ (229) gilt, also reell ist. Dies ist immer möglich für ausgewählte W -Kopplungen, jedoch nicht für alle gleichzeitig!

$$\eta_{c,p}^{d_i u_j} = \exp(i(\varphi_j^u - \varphi_i^d)). \quad (230)$$

Es gibt sechs verschiedene Phasen und fünf mögliche Phasendifferenzen $\varphi_j^u - \varphi_i^d$. Somit bleiben mindestens vier der neun Kombinationen $V_{ij} \exp(i(\varphi_j^u - \varphi_i^d))$ (231) bleiben komplex. Alternative Diskussion: Wir wählen $\eta_c^{d_i u_j} = 1$ und erlauben in (228) Phasentransformationen

$$u_j \mapsto \exp(i\varphi_j^u) u_j, \quad d_i \mapsto \exp(i\varphi_i^d) d_i, \quad (232)$$

mit dem Effekt

$$V_{ij} \mapsto V_{ij} \exp(i(\varphi_j^u - \varphi_i^d)). \quad (233)$$

Die verbleibenden mindestens vier komplexen V_{ij} hängen von einer komplexen Phase ab, nämlich δ_{13} in (20). Somit ist \mathcal{CP} verletzt. \mathcal{CP} -Verletzung ist ein **Interferenzphänomen** verschiedener Amplituden mit verschiedenen CKM-Elementen müssen interferieren.

\mathcal{CPT} -Invarianz: Wir betrachten

$$\mathcal{L}_W^{\text{bu}} \xrightarrow{\mathcal{CPT}} (\mathcal{CPT}) \mathcal{L}_W^{\text{bu}} (\mathcal{CPT})^\dagger = \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{\text{ub}}^* \bar{u}_L \gamma^\mu b_L W_\mu^- \eta_{c,p} \eta_t + \frac{g_2}{\sqrt{2}} V_{\text{ub}} \bar{b}_L \gamma^\mu u_L W_\mu^- \eta_{c,p}^* \eta_t^*.$$

Transformiert man beispielsweise alle

$$d_i \mapsto \eta_{c,p} \eta_t d_i,$$

so ist \mathcal{L}_{SM} \mathcal{CPT} -invariant. Mit (224), (225) verifiziert man \mathcal{CPT} -Invarianz für Higgs-Kopplungen.

3.5 \mathcal{CPT} -Theorem (nach Lüders, Pauli, Zumino und Schwinger)

Jede lokale Quantenfeldtheorie, die Lorentz-invariant ist und eine hermitesche Lagrangedichte hat (unitäre Streuprozesse), ist \mathcal{CPT} -invariant. Konsequenzen: Teilchen und Antiteilchen haben gleiche Massen und Lebensdauern.

3.6 Einbau von Mesonen in die Theorie

Wir wollen nun Mesonen in die Theorie einbauchen, also die Brücke schlagen von Quarks nach Mesonen. $\pi^0 \sim (\bar{u}u - \bar{d}d)/\sqrt{2}$ ist ein reelles (Pseudo-)Skalarfeld, dass keine komplexen Phasen η_c, η_p und η_t enthalten kann.

$$\mathcal{P}|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle, \quad \mathcal{C}|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle. \quad (234)$$

Zwei Photonen haben $C = 1$ und damit auch das Pion. Die Physik der Mesonen lebt vom Axialvektorstrom:

$$j_A^\mu = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5q = \bar{q}_R\gamma_\mu q_R - \bar{q}_L\gamma_\mu q_L. \quad (235)$$

Dieser erfüllt nach Tabelle (224):

$$\mathcal{P}j_\mu^A\mathcal{P}^+ = -(j_A)_\mu, \quad \mathcal{C}j_A^\mu\mathcal{C}^+ = j_A^\mu. \quad (236)$$

Der Axialvektorstrom hat die richtigen Quantenzahlen, um Pionen aus dem Vakuum zu erzeugen. Also gilt mit

$$j_\pi^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma_5d), \quad (237)$$

dass

$$j_\pi^\mu(x)|0\rangle = -if_\pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(iqx)}{2E_q} q^\mu |\pi^0(\mathbf{q})\rangle,$$

plus andere flavourlose Mesonzustände mit $I = 1, P = -1$ und $C = 1$, wobei man aus Gründen der Lorentzinvarianz den Faktor q^μ benötigt. Mit einer geeigneten Phase aus dem Pionzustand kann man die Konstante f_π reell wählen. Diese Gleichung wird transparenter, wenn man von links $\langle\pi^0(\mathbf{p})|$ multipliziert:

$$\langle\pi^0(\mathbf{p})|j_\pi^\mu(x)|0\rangle = -if_\pi p^\mu \exp(ipx),$$

wegen

$$\langle\pi^0(\mathbf{p})|\pi^0(\mathbf{q})\rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

was durch Verwendung von (61) und (62) folgt. Weiterhin folgt durch komplexe Konjugation und wegen $(j_\pi^\mu)^\dagger = j_\pi^\mu$ das sogenannte **hadronische Matrixelement** des Stromoperators $j_\pi^\mu(x)$:

$$\langle 0|j_\pi^\mu(x)|\pi^0(\mathbf{p})\rangle = if_\pi p^\mu \exp(-ipx). \quad (238)$$

In diesem Matrixelement steckt nur die starke Wechselwirkung drin. f_π heißt **Pion-Zerfallskonstante** und die ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit reell. Analog gilt beispielsweise für B^+ -Mesonen:

$$\langle 0|\bar{b}\gamma^\mu\gamma_5u|B^+(\mathbf{p})\rangle = if_{B^+} p^\mu \exp(-iPx). \quad (239)$$

Aus der Gittereichtheorie ergibt sich

$$f_{B^+} \approx f_{\pi^0} = (200 \pm 30) \text{ MeV}.$$

Isospinsymmetrie behandelt Up- und Down-Quarks gleich. Unterschiede folgen lediglich durch Ladung und Masse.

Wir wählen die Phasenkonvention

$$\mathcal{CP}|\bar{B}^-(\mathbf{p})\rangle = -\eta_{c,p}^{\text{bu}}|B^+(-\mathbf{p})\rangle.$$

Für die Mesonen könnte man die Phasenkonvention beliebig wählen (weil sie dieselbe Physik beschreiben). (Von vorn herein darf man jedoch keine beliebige Phase wählen, wenn man \mathcal{CP} -Verletzung untersucht, weil man dann

eventuell eine ungünstige Phasenkonvention der CKM-Matrix festlegt, in der schon die Cabibbo-Matrix eine komplexe Phase hat.) Das Minuszeichen ist so gewählt, um das B-Meson mit der gleichen Vorzeichenkonvention wie das Pion zu behandeln. Nachdem man die Phasenfreiheit verstanden hat, wählt man eine bequeme Konvention, oft $\eta_{c,p}^{\text{bu}} = 1$. Warum ist das geschickter?

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 b(x) | B^-(\mathbf{p}) \rangle &\stackrel{(240)}{=} -\eta_{c,p}^{\text{bu}} \langle 0 | \mathcal{CP} \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 b(x) (\mathcal{CP})^\dagger | B^+(\mathbf{p}) \rangle = \langle 0 | \bar{b} \gamma_\mu \gamma_5 u(\tilde{x}) | B^\dagger(-\mathbf{p}) \rangle = \\ &= i f_{B^+} P^\mu \exp(-iP \cdot x), \end{aligned} \quad (241)$$

weil $(\eta_{c,p}^{\text{bu}})^* \eta_{c,p}^{\text{bu}} = 1$. Das gleiche Spielchen treiben wir für die neutralen B-Mesonen; es wird die Phase verwendet, die in den entsprechenden Strömen vorkommt:

$$\mathcal{CP} |\bar{B}_d(\mathbf{p})\rangle = -\eta_{c,p}^{\text{bd}} |B_d(-\mathbf{p})\rangle, \quad \mathcal{CP} |B_d(\mathbf{p})\rangle = -(\eta_{c,p}^{\text{bd}}) |\bar{B}_d(-\mathbf{p})\rangle, \quad (242)$$

und

$$\langle u | \bar{b} \gamma_\mu \gamma_5 d(x) | B_d(\mathbf{p}) \rangle = \langle 0 | \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 b(x) | \bar{B}_d(\mathbf{p}) \rangle = i f_{B_d} P_\mu \exp(-iP \cdot x). \quad (243)$$

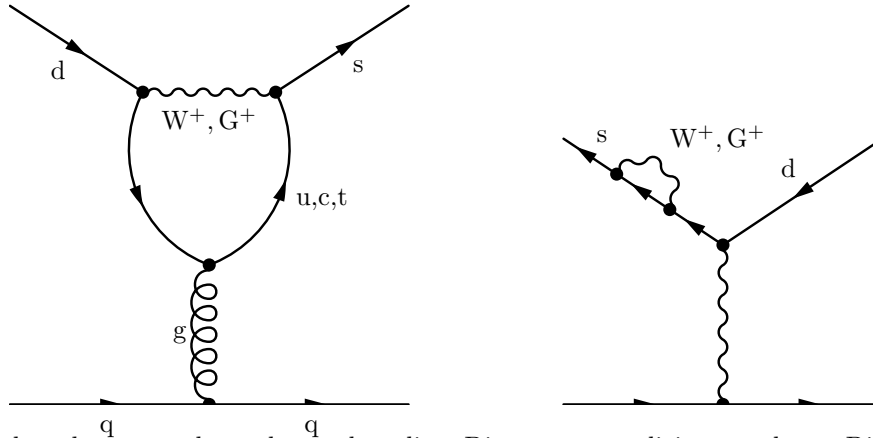
Unsere Standardkonvention ist, dass alle $\eta_{c,p}$ auf 1 gesetzt werden.

3.7 Flavour-ändernde neutrale Ströme

Wir betrachten die Mischungen schwacher Eigenzustände nach $d'_{i,L} = V_{ij} d_{j,L}$, wobei d_j Masseneigenzustände sind.

$$\bar{d}'_{i,L} d'_{i,L} \gamma^\mu \bar{d}'_{j'} V_{j',i}^\dagger V_{ij} d_{j,L} = \bar{d}_{j,L} \gamma^\mu d_{j,L}.$$

Dann fällt sie CKM-Matrix in allen Produkten heraus (Baumgraph-GIM-Mechanismus). Was man heute meint, wenn man von GIM-Mechanismus spricht, ist eine Unterdrückung von flavourändernden neutralen Strömen. Auf Baumgraphenniveau gibt es keine FCNC-Kopplungen von A^μ , Z^μ und $G^{\mu,a}$. Flavourändernde neutrale Ströme gibt es nur über Schleifendiagramme, wie beispielsweise die Penguin-Diagramme



Die Flavourstruktur kann man betrachten, ohne diese Diagramme explizit auszurechnen. Diese Flavourstruktur ist von folgender Form:

$$P = \lambda_u \tilde{P}(m_u) + \lambda_c \tilde{P}(m_c) + \lambda_t \tilde{P}(m_t), \quad (245)$$

mit $\lambda_i = V_{id} V_{is}^*$ (246). Wegen der Unitarität gilt $\lambda_u + \lambda_c + \lambda_t = 0$ (247). Um den GIM-Mechanismus auf Schleifenniveau zu erklären, nutzt man Gleichung (247) aus. Damit gilt also mit $\lambda_u = -\lambda_c - \lambda_t$:

$$P = \lambda_c (\tilde{P}(m_c) - \tilde{P}(m_u)) + \lambda_t (\tilde{P}(m_t) - \tilde{P}(m_u)). \quad (248)$$

GIM auf Schleifenniveau bedeutet also, dass FCNC-Prozesse für $m_u = m_c = m_t$ verschwinden. Die GIM-Unterdrückung ist für die Kaon-Physik wichtig. In (248):

$$\lambda_c = V_{cd} V_{cs}^* \approx -0,22, \quad |\lambda_t| = |V_{td} V_{ts}^*| \approx 3 \cdot 10^{-4}. \quad (249)$$

Jedoch gilt

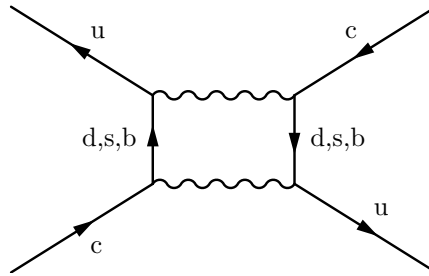
$$\tilde{P}(m_c) - \tilde{P}(m_u) \sim \frac{m_c^2 - m_u^2}{M_W^2} = 2 \cdot 10^{-4},$$

wobei man diesen Faktor auch als GIM-Unterdrückungsfaktor bezeichnet. Generisch für die Kaon-Physik ist die Konkurrenz zwischen den Termen in (248). Wegen $m_t > M_W$ gibt es keine GIM-Unterdrückung in Top-Schleifen. Wegen der Hierarchie zwischen den CKM-Elementen (249) konkurrieren Charm- mit Top-Schleifen in der Kaon-Physik. Die Kaon-Mischung konnte somit das Top-Quark noch nicht vorhersagen, sondern erst die B-Mischung. In der Regel sind Top-Beiträge dominant (Ausnahme $b \rightarrow s\gamma$), weil $|V_{tb}V_{td}| \sim V_{cb}V_{cd}$. Charm-Physik: Hier laufen nur d-, s- und b-Quarks in den Schleifen, womit das Massenverhältnis viel kleiner ist:

$$V_{cs}V_{us}\frac{m_s^2 - m_d^2}{M_W^2} \approx 0,2 \cdot 10^{-6},$$

$$V_{cb}V_{ub}^*\frac{m_b^2 - m_d^2}{M_W^2} \approx 2 \cdot 10^{-4} \cdot 4 \cdot 10^{-3}.$$

Dies ist der Grund, warum im Standardmodell FCNC-Prozesse der Charm-Physik extrem klein sind. Lediglich beobachtet wird die $D^0 - \bar{D}^0$ -Mischung:



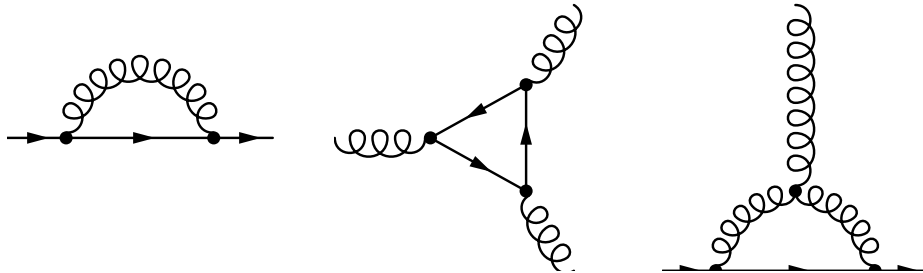
Kapitel 4

Die Quantenchromodynamik

Die starke Kopplungskonstante ist $g_s = g_3$ und außerdem setzt man $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ (250).

4.1 Renormierung

Renormierung ist die Antwort auf Ultraviolett-Divergenzen. Solche Divergenzen treten nicht auf Baumgraphenniveau auf, sondern erst auf Schleifenniveau. Betrachten wir dazu Einschleifendiagramme:



Als Beispiel betrachten wir die Quark-Selbstenergie; die Quarkmasse sei m :

$$\begin{array}{c}
 \text{diagram} \\
 \alpha, i \quad q \quad \beta, k
 \end{array}
 \quad =: \quad i\Sigma_{j,k}^{\alpha,\beta}(p) \bar{u}_j(p, s) u_k(p, s').$$

Σ besitzt Farbindex α, β und Dirac-Indizes j, k . Es ist also eine 4×4 -Matrix im Spinorraum. Wir lassen nun die Diracstruktur weg:

$$i\Sigma^{\alpha\beta} = g_s T_{\alpha\gamma}^a \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{\not{q} + m}{m^2 - q^2} \left(g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{(q-p)^\mu (q-p)^\nu}{(q-p)^2} \right) \frac{1}{(q-p)^2} \gamma_\nu g_s T_{\gamma\beta}^a. \quad (251)$$

$g_s, T_{\alpha\gamma}^a$ und γ_μ auf der linken Seite kommen alle aus der Quark-Gluon-Kopplung, ebenso wie γ_ν, g_s und $T_{\gamma\beta}^a$ auf der rechten Seite. In der Mitte steht zunächst der Quark-Propagator und dann der Gluon-Propagator. Über den Farbindex α und den Spinorindex γ ist zu summieren. Als erstes berechnet man die Farbalgebra (wegen der einfacheren Struktur). Eine nützliche Beziehung in der $SU(N)$ ist die folgende:

$$T_{\alpha\gamma}^a T_{\beta\delta}^a = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{2N} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}. \quad (252)$$

In der QCD macht man oft das sogenannte Colour-Counting, in dem man in $1/N$ entwickelt. Wie kommt man auf diese Formel (252)? Man macht dazu einen Ansatz der Form

$$T_{\alpha\gamma}^a T_{\beta\delta}^a = A \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} + B \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}, \quad (253)$$

und kontrahiert diesen mit (253):

$$0 = A \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\alpha} + B N \delta_{\beta\delta} = (A + B N) \delta_{\beta\delta},$$

woraus sich $A = -BN$ (254) ergibt. Nun kontrahiert man (253) mit $\delta_{\gamma\beta}\delta_{\delta\alpha}$:

$$\text{Sp}(T^a T^a) = AN^2 + BN. \quad (255)$$

Aus der Normierung der $SU(N)$ -Generatoren

$$\text{Sp}[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \quad (256)$$

(verifiziert man für $SU(3)$ mit (115), (116)) und mit der Summation von $a = 1, \dots, N^2 - 1$ folgt aus (255):

$$\frac{N^2 - 1}{2} = AN^2 + BN = BN(-N^2 + 1),$$

also $B = -1/(2N)$ und mit (254) $A = 1/2$. □

Damit finden wir den Farbfaktor

$$T_{\alpha\gamma}^a T_{\gamma\beta}^a = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\gamma} - \frac{1}{2N}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\beta} = C_F \delta_{\alpha\beta}, \quad (257)$$

mit

$$C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} \stackrel{N=3}{=} \frac{4}{3}. \quad (258)$$

C_F bezeichnet man als **Casimir-Invariante**. Wir führen nun die Schreibweise $\not{q} = \gamma_\rho q^\rho$ ein und erhalten:

$$i\Sigma^{\alpha\beta} \stackrel{(251)}{=} g_s^2 C_F \delta_{\alpha\beta} \{ \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma^\mu I_1^\rho + \gamma_\mu \gamma^\mu m I_2 + \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu I_3^{\rho\mu\nu} + \gamma_\mu \gamma_\nu m I_4^{\mu\nu} \},$$

mit den **Schleifenintegralen** (259) $I_1^\rho, I_2, \dots, I_4^{\mu\nu}$. Beispielsweise sind die Schleifenintegrale I_1^ρ und I_2 gegeben durch

$$I_1^\rho = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^\rho}{[m^2 - q^2](q-p)^2}, \quad I_2 = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[m^2 - q^2](q-p)^2}. \quad (260)$$

Diese Integrale divergieren für $|q| \mapsto \infty$; sie sind „UV-divergent“. Die Theorie muss also für große Impulse, also kleine Abstände, modifiziert werden.

4.2 1.Schritt: Regularisieren

Die beste Methode stellt die **dimensionale Regularisierung** dar. Die Idee dahinter ist die Zerlegung des Schleifenimpulses in zwei Komponenten: $q^\mu = q_\parallel^\mu + q_\perp^\mu$, wobei $q_\parallel \in [p_1, \dots, p_N]$ und $q_\parallel^\mu q_{\perp,\mu} = 0$. q_\parallel^μ soll also in dem Unterraum der äußeren Impulse p_1, \dots, p_N liegen und q_\perp^μ senkrecht zu diesem Unterraum. Setze in (254) $q^2 = q_\parallel^2 + q_\perp^2$. Ist der äußere Impuls beispielsweise $p = (m_q, 0, 0, 0)$, so wählt man

$$(q_\parallel^\mu) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (q_\perp^\mu) = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Hierbei gilt

$$(q-p)^2 = (q_\parallel - p)^2 + q_\perp^2.$$

Allgemein hängt der Integrand von q_\perp nur über q_\perp^2 ab, weil das Schleifenintegral kontrahiert mit den äußeren Impulsen verschwindet. Es ist also $d^4 q = d^N q_\parallel d^{4-N} q_\perp$ und benutzen für $d^{4-N} q_\perp$ Polarkoordinaten $|q_\perp|^{3-N} d|q_\perp| d\Omega_{4-N}$ mit dem Raumwinkel-Element $d\Omega_{4-N}$. Verringert man die Zahl der Raumzeit-Dimensionen von 4 auf $D < 4$, so verbessert sich das UV-Verhalten:

$$d^D = d^N q_\parallel |q_\perp|^{D-1-N} d|q_\perp| d\Omega_{D-N}. \quad (261)$$

Im Beispiel (260) finden wir UV-Konvergenz von I_2 für $D < 4$. Regularisiert:

$$I_2 := \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[m^2 - q^2 - i\delta](q-p)^2} \stackrel{(255)}{=} d\Omega_{D-1} \int dq_\parallel \int_0^\infty d|q_\perp| \frac{|q_\perp|^{D-2}}{[m^2 - q_\parallel^2 - |q_\perp|^2][(q_\parallel - p)^2 + |q_\perp|^2]}.$$

Die erste Integration über das Raumwinkelement $d\Omega_{D-1}$ läuft über die Oberfläche S_D der $(D-1)$ -dimensionale Einheitskugel. Dessen Ergebnis lautet:

$$S_D = \int d\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}, \quad (263)$$

mit der **Eulerschen Γ -Funktion**:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{x-1} dt. \quad (264)$$

Diese besitzt die Eigenschaft $\Gamma(n+1) = n!$ und es gilt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (265)$$

Außerdem ist $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, was wir im Folgenden benötigen werden. Die Γ -Funktion ist analytisch mit einfachen Polen für $-x \in \mathbb{N}_0$. Für die Entwicklung der Γ -Funktion gilt

$$\Gamma(1+\varepsilon) = 1 - \gamma_E \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (266)$$

mit der Euler-Mascheroni-Konstante

$$\gamma_E := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) \approx 0,57772. \quad (267)$$

Die UV-Divergenzen manifestieren sich als Pole der Γ -Funktion. Mit (259) folgt daraus

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (268)$$

In (263) findet man bekannte Ergebnisse:

$$S_2 = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi, \quad S_3 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = 4\pi.$$

Die entscheidende Idee der dimensional Regularisierung (262) und (263) können für beliebiges $D \in \mathbb{C}$ definiert werden. Entwickeln in ε mit $D =: 4 - 2\varepsilon$ (269) liefert Pole in ε in UV-divergenten Integralen. An dieser Stelle führen wir Feynman-Parameter ein:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (270)$$

Die mehr als zwei Propagatoren gibt es analoge Formeln, die man rekursiv definieren kann. In I_2 mit $A = (q-p)^2$ und $B = q^2 - m^2$ gilt somit:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[x(q-p)^2 + (1-x)(q^2 - m^2) + i\delta]^2} = \\ &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q^2 - 2xqp + xp^2 - (1-x)m^2 + i\delta]^2} = \\ &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(q-xp)^2 - x^2p^2 - (1-x)m^2 + i\delta]^2}. \end{aligned}$$

Verschieben wir den Integrationsimpuls $q' = q - xp$, so ergibt sich:

$$I_2 = - \int_0^1 dx \int \frac{d^D q'}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q'^2 + p^2x(1-x) - (1-x)m^2 + i\delta]^2}. \quad (271)$$

Ein nützliches Integral (mit $q_0 = iq_4$) für $A > 0$ ist das folgende:

$$A_0^\alpha := \frac{1}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D q \frac{1}{[A - q^2]^\alpha} \stackrel{x=|q|^2}{=} \frac{1}{\pi^{\frac{D}{2}}} S_D \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{(A-x)^\alpha} dx = \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} A^{\frac{D}{2}-\alpha}.$$

S_D folgt aus (263) und das Integral ist gegeben durch

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{(A-x)^\alpha} dx = \frac{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)}.$$

Anwenden von (269) liefert

$$A_0^\alpha = A^{2-\alpha-\varepsilon} \frac{\Gamma(-2 + \alpha + \varepsilon)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (272)$$

Mit $\alpha = 2$ und $A = (1-x)m^2 - p^2x(1-x) - i\delta$ ergibt sich also:

$$I_2 = -\frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx [-p^2x(1-x) + (1-x)m^2 - i\delta]^{-\varepsilon}. \quad (273)$$

Die UV-Divergenz ist nun isoliert und steckt in der Γ -Funktion, denn:

$$\frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} = \frac{i}{16\pi^2} (1 + \varepsilon \ln(4\pi)), \quad \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E,$$

$$[-p^2x(1-x) + (1-x)m^2 - i\delta]^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon \ln[-p^2x(1-x) + (1-x)m^2 - i\delta].$$

Einsetzen dieser ganzen Entwicklungen liefert

$$I_2 = -\frac{i}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \int_0^1 dx \ln[-p^2x(1-x) + (1-x)m^2 - i\delta] + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\}. \quad (274)$$

Durch den Pol $1/\varepsilon$ ist also die UV-Divergenz jetzt voll ersichtlich. Die gebrochene Massendimension führt zu einem dimensionsbehafteten Argument des Logarithmus! Etwas fehlt daher noch! Der Startpunkt dieser weiteren Untersuchung bildet die Wirkung S :

$$S = \int d^D x \mathcal{L},$$

wobei die Dimension der Lagrangedichte $D = 4 - 2\varepsilon$ ist.

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \supset \bar{q}i\not{D}q = \bar{q}i\not{D}q + g_s^{(0)} \bar{q}T^a \gamma^\mu q A_\mu^a,$$

wobei der Index „(0)“ bei der Eichkopplung für „unrenormiert“ steht.

$$[\partial] = 1 \Rightarrow [q] = \frac{D-1}{2} = \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Aus dem kinetischen Term der Gluonfelder folgt

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \supset -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 \Rightarrow [A_\mu^a] = \frac{D}{2} - 1 = 1 - \varepsilon.$$

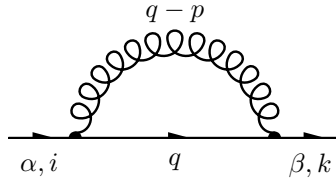
Es gilt $[m^2] = 1$, aber

$$g_s^{(0)} = 4 - 2\varepsilon - (3 - 2\varepsilon + 1 - \varepsilon) = \varepsilon.$$

In der Lagrangedichte der klassischen Feldtheorie gibt es kein Element, welches sensitiv auf Massen oder Längenskalen ist. Durch Schleifenkorrekturen wird in die Theorie eine Massenskala eingeführt („scaling without a scale“). Die neue Skala ist somit ein reiner Quanteneffekt.

4.3 Zusammenfassung oder auch „Was bisher geschah“

- Das Ziel war, Strahlungskorrekturen in der QCD zu berechnen. Als Beispiel haben wir dazu die Quark-Selbstenergie $\Sigma^{\alpha\beta}$ betrachtet.



Die physikalische Masse des Teilchens entspricht der Position des Poles in dessen Propagator. In der Quantenfeldtheorie wird der Austausch von physikalischen Größen (wie Energie und Impuls) über den Austausch von virtuellen Teilchen beschrieben. Große Beiträge von den Polen der Propagatoren dieser virtuellen Teilchen sorgen dafür, dass dieser Austausch über makroskopische Abstände erfolgen kann. Über die Berechnung des obigen Diagramms bestimmt man gleichzeitig die unrenormierte Masse und die komplette Energie, die in dem Feld steckt, welches an das Teilchen koppelt. (In der reinen Quantenmechanik entspräche dies beispielsweise der Bestimmung der Elektron-, Protonenmasse und der negativen Bindungsenergie zwischen beiden.)

- Bei der Berechnung von solchen Diagrammen wie dem obigen tritt ein „Problem“ auf: Das dabei auftretende Schleifenintegral ist UV-divergent.
- Dabei handelt es sich um einen neuen Effekt, den es nur in der Quantentheorie gibt. Im Ortsraum tritt das Problem dann auf, wenn man über kleine Abstände integriert. Dabei sind Anfangs- und Endzustand fest und Zwischenzustände sind alle Zustände der Theorie. Ein weiteres quantenmechanisches Analogon dazu ist die Störungstheorie ab der zweiten Ordnung.
- In der Quantenfeldtheorie kann man (im Unterschied zur Quantenmechanik) diese Divergenzen in Begriff bekommen, sofern die zugrundeliegende Niederenergie Theorie renormierbar ist. Dann gilt das sogenannte Entkopplungsprinzip, welches besagt, dass die Physik bei hohen Energien (kurzen Abständen) von der Physik bei niedrigen Energien (großen Abständen) nicht beeinflusst wird, gewissermaßen entkoppelt. Wäre dies nicht der Fall, könnte man beispielsweise keine B-Physik betreiben, ohne die Physik der Quantengravitation zu kennen; Ergebnisse würden dominiert von der Physik an der Cut-Off-Skala.
- In einer nichtrenormierbaren Theorie taucht die unbekannte Physik an der Cut-Off-Skala in Niederenergievorhersagen auf. Dies ist beispielsweise bei der Fermitheorie der Fall; der Cut-Off ist in diesem Falle die W-Boson-Masse.
- Man führt dann eine sogenannte UV-Regularisierung durch, in der man die Divergenz parametrisiert. In der dimensionalen Regularisierung setzt man $D = 4 - 2\epsilon$ und entwickelt in ϵ . UV-Divergenzen manifestieren sich dann als Pole $1/\epsilon$.
- Bemerkung: Die Kopplungskonstante in der regularisierten QCD hat Dimension ϵ : $[g_s^{(0)}] = \epsilon$.

Das Integral mit Dimension -2ϵ in (273) wird mit $(g_s^{(0)})^2$ mit Dimension 2ϵ multipliziert.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{pQCD}} = \sum_f \bar{q}[i\not{\partial} - m_q^{(0)}]q - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} + g_s^{(0)} \sum_q \bar{q}T^a \gamma_\mu q A^{\mu,a} \\ - \frac{1}{2\epsilon}(\partial_\mu A^{\mu,a})^2 + \partial_\mu(\eta^a)^* \partial^\mu \eta^a + g_s^{(0)} f^{abc} \partial_\mu(\eta^a)^* A^{\mu,b} \eta^c. \end{aligned} \tag{275}$$

4.4 Multiplikative Renormierung

Man hat die Freiheit, die freien Größen, die man in die Lagrangedichte eingebaut hat, umzudefinieren:

- Massenrenormierung: $m_q^{(0)} = Z_m m_q$
- Renormierung der Kopplungskonstanten: $g_s^{(0)} = Z_g g \bar{\mu}^\epsilon$ (276)

Hierbei sind m_q und g die renormierte Masse bzw. Kopplung, also $[g_s] = 0$, $[\bar{\mu}] = 1$ und $[Z_{g,m}] = 0$. Man kann die Aufspaltung $\bar{\mu} = s \cdot \mu$ (277) definieren mit der **Renormierungsskala** μ und dem **Schemenparameter** s . Sie wird dazu verwendet, um Renormierungsschemen zu definieren. Die Renormierungskonstanten sind gegeben durch:

$$Z_{m,g} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_{m,q}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 Z_{m,g}^{(2)} + \dots \quad (278)$$

Die UV-Divergenzen werden in $m^{(0)}$, $g^{(0)}$ bzw. Z_m , Z_g absorbiert. Drückt man Übergangsamplituden durch renormierte m_q und g aus, so sind alle Pole in ε verschwunden. Es gibt verschiedene Methoden, dies in der Rechnung umzusetzen. Die am meisten verwendete Methode ist die der **Gegenterme** (counter terms):

$$\mathcal{L}_m = - \sum_q \bar{q} q m_q^{(0)} = - \sum_q \bar{q} q Z_m m_q = - \sum_q [\bar{q} q m_q - \bar{q} q (Z_m - 1) m_q], \quad (279)$$

mit

$$Z_m - 1 = \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_m^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2),$$

$$\delta m_q = (Z_m - 1) m_q, \quad (280)$$

heißt **Massengegenterm**. Dieser wird so bestimmt, dass er entgegen der Divergenz wirkt. Der Gegenterm selbst wird störungstheoretisch durch eine Feynmanregel realisiert:

$$\begin{array}{c} q \\ \leftarrow \bigotimes \rightarrow \\ q \end{array} : -i\delta m_q. \quad (281)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{q}qA} &= g_s^{(0)} \sum_q \bar{q} T^a \gamma_\mu q A^{\mu,a} = Z_g g_s \bar{\mu}^\varepsilon \sum_q \bar{q} T^a \gamma_\mu q A^{\mu,a} = \\ &= (g_s \bar{\mu}^\varepsilon + \delta g_s \bar{\mu}^\varepsilon) \sum_q \bar{q} T^a \gamma_\mu q A^{\mu,a}, \end{aligned} \quad (282)$$

mit den Gegenterm zur Kopplungskonstante

$$\delta g_s = (Z_g - 1) g_s = \frac{\alpha_s}{4\pi} g_s Z_g^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (283)$$

Die Feynmanregel zum Gegenterm, sieht ähnlich aus wie die Feynmanregel zur Kopplung:

$$\begin{array}{c} q \\ \swarrow \bullet \searrow \\ q \\ | \\ \text{wavy line} \\ \mu, a \end{array} : i\delta g_s \bar{\mu}^\varepsilon \gamma_\mu T^a. \quad (284)$$

In den Feynman-Regeln (128) bis (130) muss $g_3 = g_s$ durch $g_s \bar{\mu}^\varepsilon$ ersetzt werden. Zu allen Regeln gibt es eine Entsprechung mit $\delta g_s \bar{\mu}^\varepsilon$ analog zu (284). Das heißt, unsere regularisierte Selbstenergie $i\Sigma^{\alpha\beta}$ in (251) enthält $\bar{\mu}^{2\varepsilon} I_2$, $\bar{\mu}^{2\varepsilon} I_1^0$ usw. Dann haben diese Integrale wieder die Dimension null und das Argument des Logarithmus wird dimensionslos. Mit (273), (274) und

$$\bar{\mu}^\varepsilon \stackrel{(274)}{=} s^\varepsilon \mu^\varepsilon = (1 + \varepsilon \ln(s) + \varepsilon \ln(\mu) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)), \quad (285)$$

ist

$$\begin{aligned} \bar{\mu}^{2\varepsilon} I_2 &= -\frac{i}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 2 \ln(s) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dx \left(\ln(1-x) + \ln \left[-\frac{p^2}{\mu^2} x + \frac{m^2}{\mu^2} - i\delta \right] \right) \right\}. \end{aligned} \quad (286)$$

Verschiedene Wahlen von s entsprechen verschiedenen Schemen. Zwischenergebnisse unterscheiden sich, doch Endergebnisse sind unabhängig von der Schemenwahl.

$$\bar{\mu}^{2\varepsilon} I_2 = -\frac{i}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 2\ln(s) + 2 \right. \\ \left. - \ln\left(\frac{m^2 - p^2 - i\delta}{p^2}\right) + \frac{\mu^2}{p^2} \ln\left(\frac{m^2 - p^2 - i\delta}{m^2}\right) \right\}. \quad (287)$$

Für $p^2 > m^2$ besitzt der Logarithmus einen Imaginärteil, weil dann Produktionsprozesse möglich werden (optisches Theorem). Im Ausdruck des ursprünglichen Diagramms, kommt die Minkowski-Metrik vor, die also in D Dimensionen definiert werden muss. Man fordert dann

$$g_\mu{}^\mu = D. \quad (288)$$

Wir behalten die Dirac-Algebra (51) bei:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

Hieraus folgt durch Kontraktion mit einem zusätzlichen $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2D, \quad (289)$$

also $\gamma^\mu\gamma_\mu = D$ (290). Damit findet man zum Beispiel mit (51)

$$\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma^\mu = -\gamma_\mu\gamma^\mu\gamma_\rho + \gamma_\mu 2g_\rho{}^\mu = (2 - D)\gamma_\rho = (-2 + 2\varepsilon)\gamma_\rho. \quad (291)$$

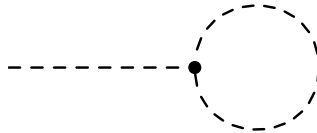
Die Eigenschaft (288) ist für endlich dimensionale Räume nicht erfüllbar. Man kann Integrale angeben, welche die Eigenschaft einer solchen Metrik aufweisen.

4.5 Systematik der Schleifenintegrale

Alle Einschleifenintegrale lassen sich durch algebraische Umformungen (Multiplikation, Division, etc.) auf vier skalare Integrale (sogenannte Materintegrale) A_0 , B_0 , C_0 und D_0 zurückführen. Wir beginnen mit

$$A_0(m) := \frac{\exp(\gamma_E\varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{1}{q^2 - m^2}. \quad (292)$$

Dieses Integral taucht in sogenannten Tadpolediagrammen (tadpole \equiv Kaulquappe) auf:



Tadpolediagramme besitzen keinen äußeren Impuls. Das entsprechende Vektorintegral ist gegeben durch

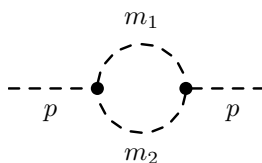
$$A^\mu(m) = \frac{\exp(\gamma_E\varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{q^\mu}{q^2 - m^2} = 0,$$

wegen der Substitution $q^\mu \mapsto -q^\mu$. Als nächstes gibt es das Tensorintegral

$$A^{\mu\nu}(m) = \frac{\exp(\gamma_E\varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \int d^D q \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - m^2} = A_{00}(m)g^{\mu\nu}, \quad (293)$$

wobei die letzte Gleichheit aus Lorentz-Kovarianz folgt. (Das Ergebnis muss ein zweistufiger Lorentztensor sein und davon gibt es nur $g^{\mu\nu}$.) Aus (272) folgt:

$$A_0(m) = -m^2 \left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \exp(\gamma_E\varepsilon)\Gamma(-1 + \varepsilon) = m^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon).$$



Im Falle zweier Propagatoren in der Schleifen benötigt man folgende Zweipunktfunktionen:

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = B_0(p^2, m_2, m_1) = \frac{\exp(\gamma_E \varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{1}{(q^2 - m_1^2)[(q+p)^2 - m_2^2 + i\delta]}. \quad (294)$$

Aus (262), (286) und (287) lässt sich $B_0(p^2, m, 0)$ extrahieren:

$$\begin{aligned} B_0(p^2, m, 0) &= \frac{1}{\varepsilon} - \int_0^1 dx \ln \left[-\frac{p^2}{\mu^2} x(1-x) + \frac{m^2}{\mu^2} - i\delta \right] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} + 2 - \ln \left(\frac{m^2 - p^2 - i\delta}{\mu^2} \right) + \frac{m^2}{p^2} \ln \left(\frac{m^2 - p^2 - i\delta}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (295)$$

$$\begin{aligned} B^\mu(p, m_1, m_2) &:= \frac{\exp(\gamma_E \varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{q^\mu}{[q^2 - m_1^2 + i\delta][(q+p)^2 - m_2^2 + i\delta]} = \\ &= B_1(p^2, m_1, m_2) p^\mu, \end{aligned} \quad (296)$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wieder aus der Lorentzkovarianz folgt. Für das entsprechende Tensorintegral gilt:

$$B^{\mu\nu}(p, m_1, m_2) = B_{00}(p^2, m_1, m_2) g^{\mu\nu} + B_{11}(p^2, m_1, m_2) p^\mu p^\nu. \quad (297)$$

Im Falle von drei Propagatoren gibt es die Integrale C_0 , $C^\mu = C_1 p_1^\mu + C_2 p_2^\mu$, usw. Man kann alle Tensorintegrale algebraisch auf die skalaren Integrale A_0 , B_0 usw. zurückführen (Brown, Feynman, Passarino, Veltman). Wir schauen uns diese Reduktion anhand eines Beispiels und zwar Gleichung (293) an. Dazu kontrahieren wir (293) mit $g_{\mu\nu}$ und erhalten:

$$DA_{00} = \frac{\exp(\gamma_E \varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \frac{q^2}{q^2 - m^2} = \frac{\exp(\gamma_E \varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \int d^D q \left\{ 1 + \frac{m^2}{q^2 - m^2} \right\}. \quad (298)$$

Es gilt für skalenlose Integrale

$$\int d^D q (q^2)^\alpha = 0.$$

Dies lässt sich beispielsweise in dimensionaler Regularisierung zeigen oder durch die Substitution $q \mapsto \lambda q!$ Daraus ergibt sich dann

$$DA_{00}(m) = m^2 A_0(m) \Rightarrow A_{00}(m) = \frac{m^2}{D} A_0(m). \quad (299)$$

Im Allgemeinen werden Tensorintegrale n -ter Stufe rekursiv durch Tensorintegrale $N-1$ -ter Stufe ausgedrückt. In $p_\mu B^\mu$ muss dazu

$$p \cdot q = \frac{1}{2} [(p+q)^2 - p^2 - q^2] = \frac{1}{2} [(p+q)^2 - m_2^2 - (q^2 - m_1^2) + m_2^2 - m_1^2 - p^2],$$

ausgenutzt werden. Damit wird jeweils einer der Propagatoren gekürzt. Nach (296) gilt dann

$$\begin{aligned} p^2 B_1 = p_\mu B^\mu &= \frac{\exp(\gamma_E \varepsilon)}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \mu^{2\varepsilon} \frac{1}{2} \int d^D q \left\{ \frac{1}{q^2 - m_1^2} - \frac{1}{(q+p)^2 - m_2^2} \right. \\ &\quad \left. + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) \frac{1}{(q^2 - m_1^2)[(q+p)^2 - m_2^2]} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \{ A_0(m_1) - A_0(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_0(p^2, m_1, m_2) \}. \end{aligned}$$

Somit gilt also:

$$B_1 = \frac{1}{2p^2} \{ A_0(m_1) - A_0(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p^2) B_0(p^2, m_1, m_2) \}. \quad (300)$$

B_1 ist nicht symmetrisch in m_1 und m_2 . Weiterhin soll der divergente Anteil getrennt vom endlichen Anteil diskutiert werden. Aus

$$B_0 = \frac{1}{\varepsilon} + \bar{B}_0, \quad A_0 = \frac{m^2}{\varepsilon} + \bar{A}_0,$$

folgt der divergente Anteil:

$$B_1 \stackrel{(300)}{=} -\frac{1}{2\varepsilon} + \bar{B}_1 \text{ usw.}$$

Die Integrale A_0 , B_0 , C_0 und D_0 sind für alle Kombinationen von Massen und Impulsen bekannt. Dies schließt den Teil über Schleifeintegrale ab und wir kommen zurück zur Quark-Selbstenergie $\Sigma^{\alpha\beta}$: Zunächst gehen wir in die 't Hooft-Feynman-Eichung was der Wahl $\xi = 1$ des Eichparameters in (251) entspricht. Also verschwinden die Integrale $I_3^{\mu\nu}$ und $I_4^{\mu\nu}$ in (251), weil diese proportional zu ξ sind. (259) wird mit (290) und (291) zu

$$\begin{aligned} i\Sigma_{\xi=1}^{\alpha\beta} = & i\frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \delta_{\alpha\beta} (-1) \left\{ \gamma_\ell(-2+2\varepsilon) \left(-\frac{1}{\varepsilon} \right) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 2\ln(s) - 2\bar{B}_1(p^2, 0, m) \right] (-p^\ell) \right. \\ & \left. + m(4-2\varepsilon) \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 2\ln(s) + \bar{B}_0(p^2, 0, m) \right] \right\} \end{aligned}$$

Schreiben wir

$$i\Sigma_{\xi=1}^{\alpha\beta} = i\delta_{\alpha\beta} [(\not{p} - m)\Sigma_{\psi, \xi=1} + m\Sigma_{m, \xi=1}],$$

wobei $\Sigma_{\psi, \xi=1}$ und $\Sigma_{m, \xi=1}$ Funktionen von p^2 und m sind:

$$\Sigma_{\psi, \xi=1} = \frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 2\ln(s) - 1 - 2\bar{B}_1(p^2, 0, m) \right]. \quad (303)$$

$$\Sigma_{m, \xi=1} = -\frac{g_s^2}{16\pi^2} C_F \left[3 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 2\ln(s) \right) - 1 + 4\bar{B}_0(p^2, 0, m) + 2\bar{B}_1(p^2, 0, m) \right]. \quad (304)$$

Kurzer Blick über eine Schleife hinaus: Ein-Teilchen-reduzible Schleifengraphen



enthalten einen Propagator

$$-i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2},$$

wobei sich das zugehörige Teilchen auf der Massenschale befindet. Dieser Term divergiert für $p^2 \mapsto m^2$, weshalb solche Graphen anders zu behandeln sind. $i\Sigma_{1\text{PI}}\delta^{\alpha\beta}$ sei die 1-Teilchen-irreduzible trunkierte Selbstenergie. Dann gilt mit $i\Sigma^{\alpha\beta} = i\Sigma\delta^{\alpha\beta}$ für die Greenfunktion:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2^{\alpha\beta}(p) = & \longrightarrow + \longrightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \longrightarrow + \longrightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \longrightarrow = \\ = & -i[m - \not{p}]^{-1} \delta_{\alpha\beta} + (-i)[m - \not{p}]^{-1} i\Sigma_{1\text{PI}} (-i)[m - \not{p}]^{-1} \delta_{\alpha\beta} + \dots = \\ = & (-i)[m - \not{p}]^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [\Sigma_{1\text{PI}}(m - \not{p})^{-1}]^n \delta_{\alpha\beta} = (-i)[m - \not{p}]^{-1} [1 - \Sigma_{1\text{PI}}(m - \not{p})^{-1}]^{-1} \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (305)$$

Man kann p so wählen, dass die Reihe konvergiert. Der Wert der Reihe gilt dann für alle p durch analytische Fortsetzung. Mit $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$ lässt sich dies dann schreiben als:

$$\tilde{G}_2^{\alpha\beta} = (-i)[m - \not{p} - \Sigma_{1\text{PI}}]^{-1} \delta_{\alpha\beta} = (-i) \frac{\delta_{\alpha\beta}}{m - \not{p} - \Sigma_{1\text{PI}}}. \quad (306)$$

Die Zerlegung in (302) liefert

$$\tilde{G}_2^{\alpha\beta} = -i \frac{\delta_{\alpha\beta}}{[m - \not{p}][1 + \Sigma_{\psi}] - m\Sigma_m} = -i\delta_{\alpha\beta} \frac{1 - \Sigma_{\psi}}{m - \not{p} - m\Sigma_m} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (307)$$

und es handelt sich somit zu einer Quantenkorrektur zur Quarkmasse. Gegenterm:

$$\begin{aligned} \delta_m m \Sigma_m^{\text{ren}} := & \longrightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \longrightarrow + \longrightarrow \text{---} \text{---} \text{---} \longrightarrow = \\ = & \delta_{\alpha\beta} m \Sigma_m - \delta m \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Σ_m ist unabhängig von ξ . Nun ist in (307):

$$\frac{1}{m - \not{p} - m\Sigma_m^{\text{ren}}} = \frac{m(1 - \Sigma_m) + \not{p}}{m^2(1 - \Sigma_m^{\text{ren}})^2 - p^2}. \quad (309)$$

Die Nullstelle bei $p^2 = m_{\text{pol}}^2$

$$m(1 - \Sigma_m^{\text{ren}}(p^2 = m_{\text{pol}}^2, m^2)) =: m_{\text{pol}}, \quad (310)$$

definiert die **Polmasse** m_{pol} . Aus $\Sigma = \mathcal{O}(\alpha_s)$ ergibt sich

$$m_{\text{pol}} = m(1 + \mathcal{O}(\alpha_s)). \quad (311)$$

(310) lässt sich störungstheoretisch rekursiv lösen. Zur Ordnung α_s^0 folgt dann gerade $m_{\text{pol}} = m$. Nutzen wir dies aus, so erhält man die Gleichung zur Ordnung α_s :

$$m_{\text{pol}} = m(1 - \Sigma_m^{\text{ren}}(p^2 = m^2, m)) + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (312)$$

Die Wahl von s und δm definiert das **Renormierungsschema**. m_{pol} ist **unabhängig vom Renormierungsschema und unabhängig von μ** .

Die Position des Pols entspricht der physikalischer Teilchenmasse von einem freien Teilchen. Die physikalische Teilchenmasse bestimmt die langreichweitige Wechselwirkung der Zweipunktfunktion und ist eine messbare Größe. Zwar sind Quarks nicht als freie Teilchen beobachtbar, jedoch hängt diese Nichtbeobachtbarkeit mit dem Confinement zusammen. Störungstheoretische Formeln enthalten keinerlei Information über Confinement und haben daher die Eigenschaften einer Theorie freier Quarks.

$$m_b^{\text{pol}} \approx (4,6 \pm 0,2) \text{ GeV}. \quad (313)$$

In der QCD ist es nicht sinnvoll, das Polschema zu benutzen. Statt dessen benutzt man Schemen, in der die Masse anders definiert ist:

1.) MS: „minimale Subtraktion“:

$$s = 1, \quad \delta m^{\text{MS}} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \frac{3}{\varepsilon}. \quad (314)$$

2.) $\overline{\text{MS}}$: „modifizierte minimale Subtraktion“:

$$s = 1, \quad \delta m^{\overline{\text{MS}}} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F 3 \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) \right],$$

oder wie im Collins, Muta

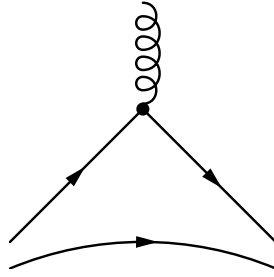
$$s^2 = \frac{\exp(\gamma_E)}{4\pi}, \quad \delta m^{\overline{\text{MS}}} = \delta m^{\text{MS}}. \quad (315)$$

$\overline{m} = m^{\overline{\text{MS}}}$ hängt von μ ab, weil $\Sigma_m^{\text{ren}, \overline{\text{MS}}}$ von μ abhängt, siehe (312). Wenn man von einem bestimmten Zahlenwert einer Quarkmasse redet, muss man das Schema dazusagen (außer man spricht von der Polmasse).

3.) Polschema: On-Shell-Schema:

$$\delta m = m\Sigma_{\text{ren}}(m^2, m).$$

Aus (307) folgt $\Sigma_m^{\text{ren}}(m^2, m) = 0$ (316) und $m = m_{\text{pol}}$ (nach (312)). Dies macht nur Sinn für m_t , m_b und eventuell m_c , nicht jedoch für m_u , m_d , m_s wegen des Confinements. Bei Hadronen, welche aus leichten Quarks bestehen, setzt sich der Großteil der Masse des Hadrons aus Bindungsenergie zusammen. Die eigentlich relevante Skala der QCD ist somit viel größer als die Massen der u-, d- und s-Quarks. Auf kurzen Abständen propagieren Quarks wie freie Teilchen; je länger sie propagieren, umso mehr werden ihre Eigenschaften vom Pol des Propagators bestimmt. Die Propagation auf kurzen Abständen ist dominiert von der Physik weit weg von der Massenschale. Im Falle von b-Quarks schlägt nach kurzen Abständen die Bindungsenergie zu und erzeugt aus dem Vakuum ein $q\bar{q}$ -Paar (hopping):



Das Bild freier Quarks macht dann keinen Sinn mehr. Die intrinsische Ungenauigkeit im Pol ist von der Größenordnung der Bindungsenergie. Im Falle des Top-Quarks kann man von einer Polmasse sprechen, da es zerfällt, bevor es hadronisiert.

Alle Schemen, in denen $\delta m/m = Z_m - 1$ und die anderen Renormierungskonstanten (wie Z_g) nicht von m abhängen, heißen **massenunabhängige Schemen**. Nur in denen ist es gelungen, die Renormierungsgruppen-gleichung zu lösen. Eine Unterklasse dieser Schemen sind **$\overline{\text{MS}}$ -artigen Schemen** mit $\delta m^{\overline{\text{MS}}}$ in (314) und beliebige Wahl von s . Σ_ψ in (307) ist divergent, weshalb die Wellenfunktionsrenormierung (besser: Feldrenormierung)

$$\psi = \psi^{(0)} = Z_\psi^{\frac{1}{2}} \psi^{\text{ren}}, \tag{317}$$

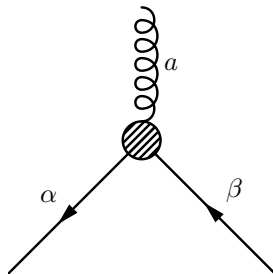
durchgeführt werden muss:

$$G_2^{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = Z_\psi \langle 0|T\psi_\alpha^{\text{ren}}(x)\bar{\psi}_\beta^{\text{ren}}(y)|0\rangle = Z_\psi G_2^{\text{ren}}(x-y),$$

wobei dann $G_2^{\text{ren}}(x-y)$ endlich wird. Man nimmt sich also die Freiheit, die Felder mit $Z_\psi^{\frac{1}{2}}$ zu multiplizieren, um die Greenfunktion $Z_\psi^{-1}G_2^{\alpha\beta}$ der renormierten Felder endlich zu machen. Aus (307) ergibt sich dann, dass $Z_\psi^{-1}(1 - \Sigma_\psi)$ endlich ist. Σ_ψ hängt von ξ ab und somit auch Z_ψ . Es gilt für alle ξ :

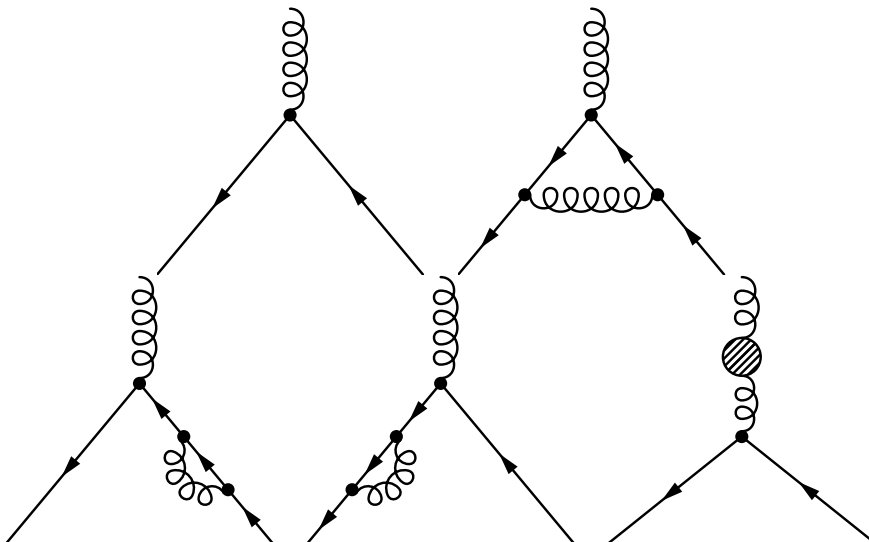
$$Z_\psi^{\overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \xi \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad s = \frac{\exp(\gamma_E)}{4\pi}. \tag{319}$$

Analog kann man dies für Gluonfelder definieren: $A^{\mu,a} = Z_A^{\frac{1}{2}}(A^{\mu,a})^{\text{ren}}$. Das ganze Spielchen kann man auch für Dreipunktfunctionen treiben:



$$(G_3^{\alpha\beta,a})^\mu(x-y, y-z) = \langle 0|T\psi_\alpha(x)\psi_\beta(y)A^{\mu,a}(z)|0\rangle.$$

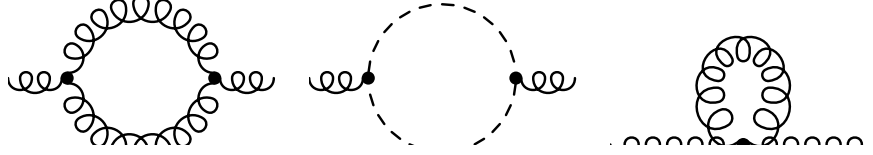
Mit



wobei das Subdiagramm



für die Selbstenergiekorrekturen



des Gluons steht, findet man Z_g in (276):

$$Z_g^{\overline{\text{MS}}} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{Z_g^{(1)}}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (320)$$

mit

$$Z_g^{(1)} = -\frac{1}{2} \left(11 - \frac{2}{3} f \right), \quad (321)$$

wobei f die Anzahl der Quarkflavours ist. Im Falle der B-Physik ist $f = 5$. Das Topquark ist schwerer und spielt keine Rolle in der niederenergetischen QCD. Die unrenormierten Größen $g^{(0)}$, $m^{(0)}$, ψ sind μ -unabhängig, was man durch

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_s^{(0)},$$

erfassen kann. (Somit ist auch die Lagrangedichte μ -unabhängig wie auch die S-Matrix.) Drückt man nun die unrenormierte durch die renormierte Kopplung aus, ergibt sich:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_s^{(0)} = \mu \frac{d}{d\mu} (\mu^\varepsilon Z_g g_s) = \varepsilon \mu^\varepsilon Z_g g_s + \mu \frac{dZ_g}{d\mu} \mu^\varepsilon g_s + \mu^\varepsilon Z_g \mu \frac{dg_s}{d\mu}. \quad (322)$$

Führen wir nun die β -Funktion über

$$\mu \frac{dg_s}{d\mu} =: \beta(g_s(\mu)), \quad (323)$$

ein, so folgt aus (320):

$$\beta(g_s) = -\varepsilon g_s - \frac{\mu}{Z_g} \frac{dZ_g}{d\mu} g_s. \quad (324)$$

Für die Koeffizienten macht man den folgenden Ansatz:

$$\beta(g_s) = -\varepsilon g_s - \beta_0 \frac{g_s^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g_s^5}{(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(g_s^7).$$

Durch Rekursion und Gleichung (320) ergibt sich:

$$\mu \frac{dZ_g}{d\mu} \stackrel{(320)}{=} \frac{Z_g^{(1)}}{\varepsilon} \frac{1}{16\pi^2} \cdot 2g_s \mu \frac{dg_s}{d\mu}, \quad \mu \frac{dg_s}{d\mu} = -\varepsilon g_s + \mathcal{O}(g_s^2),$$

aus (323), (324).

$$\mu \frac{dZ_g}{d\mu} = -2Z_g^{(1)} \frac{\alpha_s}{4\pi} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \Rightarrow \beta_0 = -2Z_g^{(1)} = 11 - \frac{2}{3} f. \quad (326)$$

Observablen wie Zerfallsraten, Wirkungsquerschnitt usw. hängen nur scheinbar von μ ab; die explizite μ -Abhängigkeit (über beispielsweise $\log(m/\mu)$) und implizite μ -Abhängigkeit durch $g_s(\mu)$, $m(\mu)$ kompensieren sich jedoch. Ist X zur Ordnung α_s^n berechnet, dann ist

$$\mu \frac{d}{d\mu} X = \mathcal{O}(\alpha_s^{n+1}), \quad (327)$$

womit Störungstheorie nur Sinn ergibt, wenn $\mu \approx \mathcal{O}(m, \sqrt{p^2})$ ist, damit $\log(m/\mu)$, $\log(p^2/\mu)$ klein bleiben. So bekommt μ eine physikalische Bedeutung.

Observable:

$$X = X_0 + \frac{\alpha_s}{4\pi} X_1 + \dots + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n X_n + \mathcal{O}(\alpha_s^{n+1}).$$

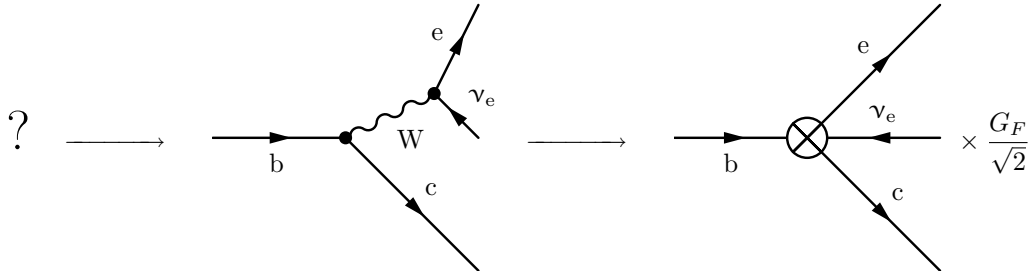
Die Renormierungsskala μ ist erst einmal unphysikalisch. Die physikalische Bedeutung äußert sich darin, dass eine Observable nicht von μ abhängt. Die Abhängigkeit ist immer von der vernachlässigten Ordnung. μ bekommt eine physikalische Bedeutung dadurch, dass man die Störungsreihe abbricht.

$$\mu \frac{d}{d\mu} X = \mathcal{O}(\alpha_s^{n+1}).$$

Die Korrekturen auf der rechten Seite enthalten $\ln^k(m_q/\mu)$, $\ln^k(p_1^2/\mu^2)$, wobei die Potenz höchstens so groß ist wie die Ordnung zu der man rechnet, also $k \leq n + 1$. (Bei kollinearen Divergenzen können die Potenzen noch höher sein.) Man muss also $\mu = \mathcal{O}(m, \sqrt{p_1^2})$ wählen, damit die Argumente der Logarithmen nicht zu groß werden. Diese Forderung stellt einen Zusammenhang zwischen der unphysikalischen Skala μ und physikalischen Skalen m , $\sqrt{p_1^2}$ usw. her.

Ein Problem tritt dann aus, wenn die physikalischen Skalen sehr unterschiedlichen sind, also beispielsweise für $m_1 \ll m_2$ oder $\sqrt{p_1^2} \gg m$ bzw. $\sqrt{p_1^2} \ll m$. Dann werden die Logarithmen groß. Der Fall $m_1 \ll m_2$ tritt beispielsweise in der B-Physik auf. Man muss also die Skalen trennen und dies macht man in einer sogenannten **effektiven Feldtheorie**. Beispielsweise gilt in der B-Physik $m_{d,u,s} \ll \sqrt{p_1^2} \approx m_c, m_b$ (leichte Teilchen) $\ll M_W, M_Z, m_t$ (schwere Teilchen). Die effektive Wechselwirkungslagrangedichte bzw. effektive Hamiltondichte wollen wir mit $\mathcal{L}_{\text{eff}} - \mathcal{H}_{\text{eff}}$ bezeichnen.

- Es werden keine Felder für schwere Teilchen eingeführt („schwere Felder werden ausintegriert“).
- Alles, was mit dem Austausch schwerer Teilchen zu tun hat, wird in der effektiven Theorie durch eine punktförmige Wechselwirkung beschrieben. Beispiel:



4.6 Entkopplungstheorem (Appelquist-Carrazone-Theorem)

Vergleiche mit (83):

$$\left\langle f \left| T \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{WW}}(x) \right) \right| i \right\rangle = \left\langle f \left| \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{eff}}(x) \right) \right| i \right\rangle \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{m_{\text{leicht}}^2}{m_{\text{schwer}}^2}, \frac{p_i^2}{m_{\text{schwer}}^2} \right) \right\}. \quad (329)$$

Das einfachste Beispiel ist die effektive Feldtheorie $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(f)}$, also die QCD mit f leichten Quarkflavours. Die volle QCD ist die 6-Flavour-QCD: $\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(6)}$. $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(5)}$ enthält zum Beispiel kein Diagramm mit einer Top-Quark-Schleife wie

$$= \delta_{ab} (p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu}) A \left[1 + \mathcal{O} \left(\frac{p^2}{m_t^2} \right) \right],$$

mit

$$A = \frac{\alpha_s}{4\pi} f \left\{ \ln \left(\frac{m_t}{\mu} \right) \right\}.$$

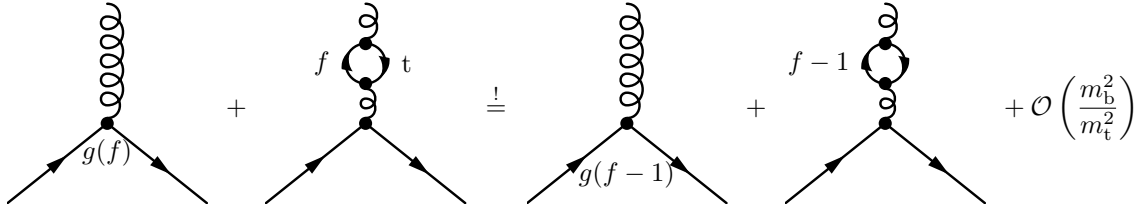
Es treten jedoch keine Terme der Form $\ln(m_t/p_i^2)$ auf, weil das Diagramm nicht infrarot-divergent ist. Der Effekt kann in die Parameter von \mathcal{L}_{eff} absorbiert werden:

$$g_{\text{eff}} = z_g g, \quad m_{\text{eff}} = z_m m, \quad \psi_{\text{eff}}^{\text{ren}} = z_\psi \psi^{\text{ren}}. \quad (330)$$

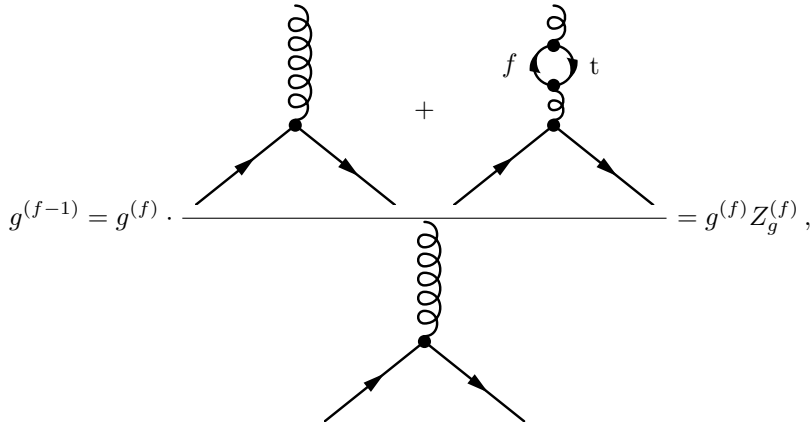
z_g, z_m und z_ψ sind endlich, wenn man renormierte Größen miteinander in Verbindung setzt. Man bezeichnet diese Koeffizienten als **Anschlusskoeffizienten** („**matching coefficients**“). Im Beispiel $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(5)}$ ist $g = g^{(f=6)}$, $g_{\text{eff}} = g^{(f=5)}$ usw. H_{eff} wird aus (329) bestimmt. Die Renormierungsskala, bei der (329) gilt, heißt **Matching-Skala**. Matching von $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(f)}$ auf $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(f-1)}$ bei $\mu_f = \mathcal{O}(m_f)$, wobei m_f die schwere Quarkmasse ist: Die Anschlusskoeffizienten für g, m werden auf Baumgraphenniveau (führende Ordnung) bestimmt:

$$g^{(f)}(\mu_f) = g^{(f-1)}(\mu_f), \quad m^{(f)}(\mu_f) = m^{(f-1)}(\mu_f).$$

Eine Schleife (NLO):



Es tragen auf beiden Seiten der Gleichung noch andere Einschleifendiagramme bei, die jedoch nicht von der Anzahl der Flavours abhängig sind und deshalb herausfallen.



mit

$$Z_g^{(f)} = 1 - \frac{\alpha_s(\mu_f)}{4\pi} \frac{2}{3} \ln\left(\frac{\mu_f}{m_f}\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \quad (331)$$

Dies gilt sowohl im MS- als auch im $\overline{\text{MS}}$ -Schema. Für $\mu_f \neq m_f$ ist die Kopplung unstetig. Masse:



Dieses Diagramm (NLO) besitzt keine Abhängigkeit von f , womit also gilt:

$$m^{(f)}(\mu_f) = m^{(f-1)}(\mu_f) + \mathcal{O}(\alpha_s^2).$$

Kommen wir zur Renormierungsgruppengleichung:

$$\mu \frac{dg}{d\mu} \stackrel{(323)}{=} \beta(g) \stackrel{(325)}{=} -\varepsilon g - \beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} - \beta_1 \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} + \mathcal{O}(g^7).$$

Aus

$$Z_g = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{Z_g^{(1)}}{\varepsilon} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{Z_g^{(22)}}{\varepsilon^2} + \frac{Z_g^{(21)}}{\varepsilon} \right], \quad (332)$$

findet man (siehe (326))

$$\beta_0^{(f)} = -2Z_g^{(1)} = 11 - \frac{2}{3}f. \quad (333a)$$

und analog

$$\beta_1^{(f)} = -4Z_g^{(21)} = 102 - \frac{38}{3}f. \quad (333b)$$

Die Näherung in führenden Logarithmen (**Leading-Log-Näherung**) wird so durchgeführt, dass man alle Anschlussbedingungen und Matrixelement auf führender Ordnung berechnet und eine Schleife in der Renormierungsgruppengleichung mitnimmt, also beispielsweise $\beta_0^{(f)}$. Bei der **Next-to-leading-Log-Näherung** berechnet man die Anschlusskorrekturen auf NLO und Einschleifen-Matrixelemente und nimmt zwei Schleifen in der Renormierungsgruppengleichung mit, also $\beta_0^{(f)}$ und $\beta_1^{(f)}$. Um die Renormierungsgruppengleichung zu lösen, ist es praktisch, die Größe $a(\mu)$ einzuführen:

$$a(\mu) := \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} = \frac{g_s^2}{16\pi^2}. \quad (334)$$

(323)/(325) wird dann auf führender Ordnung zu (für $\varepsilon = 0$):

$$\frac{da}{d \ln(\mu)} = \mu \frac{d}{d\mu} a = -2\beta_0 a^2 + \mathcal{O}(a^3).$$

Durch Trennung der Veränderlichen ergibt sich

$$\frac{d}{d \ln(\mu)} \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \frac{da}{d \ln(\mu)} = 2\beta_0,$$

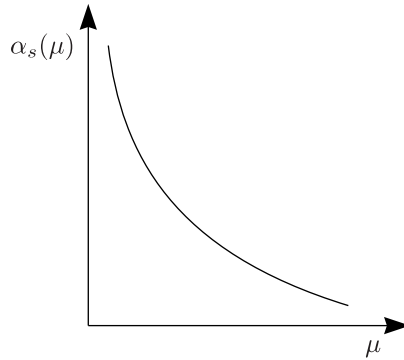
und weiterhin

$$\frac{1}{a} = 2\beta_0 \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right),$$

wobei Λ_{QCD} die Integrationskonstante ist. Das Endergebnis ist dann gegeben durch

$$\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} = a(\mu) = \frac{1}{2\beta_0 \ln \left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}} \right)}, \quad (335)$$

wobei Störungsrechnung nur für $\mu \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ funktioniert. In einem Schaubild stellt man das typische abfallende Verhalten der Kopplung für große μ fest:



Kommen wir nun zur Next-to-leading-Log-Näherung:

$$\frac{da}{d \ln(\mu)} = -2\beta_0 a^2 - 2\beta_1 a^3 + \mathcal{O}(a^4) = -2\beta_0 a^2 \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} a \right). \quad (336)$$

Trennung der Veränderlichen führt erneut auf

$$\frac{da}{a^2 \left[1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} a + \mathcal{O}(a^2) \right]} = -2\beta_0 \ln(\mu).$$

Eine Entwicklung der Klammer im Nenner bezüglich a führt auf

$$\left[\frac{1}{a^2} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \frac{1}{a} + \mathcal{O}(a^0) \right] da = -2\beta_0 \ln(\mu),$$

und daraus folgt:

$$-\frac{1}{a} - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln(\beta_0 a) + \mathcal{O}(a) = -2\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right),$$

bzw.

$$\frac{1}{a} = 2\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right) - \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln(\beta_0 a) + \mathcal{O}(a).$$

Diese Gleichung lösen wir iterativ, indem wir in den zweiten Term der rechten Seite (335) einsetzen:

$$\frac{1}{a} = 2\beta_0 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln\left[2 \ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)\right] + \mathcal{O}(a),$$

und somit:

$$a(\mu) = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln\left\{\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2}\right)\right\}} + \mathcal{O}\left\{\frac{1}{\beta_0^2} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right)\right\}.$$

Die klassische Theorie, welche hinter der QCD steckt, ist eine Theorie ohne Skalenparameter. Dies bedeutet, dass die Theorie nicht von der Längenskala abhängt, die man betrachtet. Dahinter steckt eine Symmetrie, nämlich die sogenannte Dilatationssymmetrie $x \mapsto \lambda x$ (Teilmenge der konformen Gruppe, welche zusätzliche Spiegelungen an der Kugel bzw. am Lichtkegel enthält). Die Skaleninvarianz ist gebrochen auf Schleifenniveau, was ein Beispiel für eine sogenannte **anomale Symmetrie** ist. Eine lokale Symmetrie darf nicht anomal werden. Wird beispielsweise die lokale SU(3)-Symmetrie anomal, führt dies dazu, dass das Gluon massiv wird, die Renormierbarkeit verletzt wird usw. Eine anomale globale Symmetrie ist ein süßes Gift für die Theorie, welches zu interessanten neuen Effekten führen kann. Entwickeln von $a(\mu)$ um $a(\mu_0)$ als Potenzreihe von a mit dem Ansatz

$$a(\mu) = a(\mu_0) + a^2(\mu_0)C_{11} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) + a^3(\mu_0) \left[C_{22} \ln^2\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) + C_{21} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) \right] + \mathcal{O}(a^4), \quad (338).$$

Die Koeffizienten bestimmt man mittels der Renormierungsgruppengleichung. Aus (336) ergibt sich

$$\frac{da}{d \ln(\mu^2)} = -\beta_0 a^2 - \beta_1 a^3,$$

also

$$-\beta_0 a^2(\mu) - \beta_1 a^3(\mu) C_{11} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) - \beta_1 a^3(\mu_0) = a^2(\mu_0)C_{11} + a^3(\mu_0) \left[2C_{22} \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right) + C_{21} \right],$$

woraus sich dann ergibt:

$$C_{11} = -\beta_0, \quad C_{22} = -\beta_0 C_{11} = \beta_0^2, \quad C_{21} = -\beta_1. \quad (339)$$

In (338) hängen die Koeffizienten der **führenden Logarithmen**

$$a^{n+1}(\mu_0) \ln^n\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

nur von β_0 ab. Sie werden mit der Leading-Log-Renormierungsgruppengleichung aufsummiert. Die Koeffizienten der *nächst*führenden Logarithmen

$$a^{n+2} \ln^n\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

hängen von β_0 und β_1 ab und werden in der Next-to-leading-Log-Renormierungsgruppengleichung in (337) aufsummiert. Als **dimensionale Transmutation** (scaling without a scale) bezeichnet man die Tatsache, dass die dimensionslose Kopplung g_s zu einem Massenparameter Λ_{QCD} wird. Die Massen M leichter Hadronen (Vektormesonen ρ , K^* , Baryonen (p, n)) sind proportional zu Λ_{QCD} ; leichte Quarkmassen sind unwichtig. Der Großteil der Masse im Universum wird von Λ_{QCD} bestimmt. Der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes trägt nur zu einem kleinen Bruchteil (ungefähr 1%) bei, indem die Quarks selbst massiv werden. Für pseudoskalare Mesonen (π , K , η) gilt

$$m_{\pi^+}^2 \sim (m_u + m_d)\Lambda_{\text{QCD}}, \quad m_{K^+} \sim (m_s + m_d)\Lambda_{\text{QCD}}.$$

Diese sind exakt masselos für $m_{u,d,s} \mapsto 0$. Dabei handelt es sich um die Goldstone-Bosonen einer spontan (dynamisch) gebrochenen chiralen Symmetrie.

4.7 Anomale Dimension der Quarkmasse (Laufende Quarkmasse)

Wir definieren eine β -Funktion der Quarkmasse, die man aus historischen Gründen jedoch mit γ bezeichnet:

$$\gamma_m(g(\mu)) := \frac{\mu}{Z_m} \frac{dZ_m}{d\mu}, \quad (340)$$

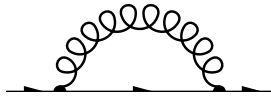
wobei Z_m in (276) gegeben ist. Aus (276) folgt

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} m_q^{(0)} = \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_m \right) m_q + Z_m \mu \frac{d}{d\mu} m_q \stackrel{(340)}{=} \gamma_m Z_m m_q + Z_m \mu \frac{d}{d\mu} m_q.$$

Damit erhält man die Renormierungsgruppengleichung für die renormierte Quarkmasse m_q :

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_q = -\gamma_m m_q. \quad (341)$$

γ_m folgt aus Selbstenergiebeiträgen wie



Diese Renormierungsgruppengleichung zu lösen, funktioniert am einfachsten in massenunabhängigen Schemen (solche, die nicht von $\ln(m^2/\mu^2)$ abhängen). In solchen Schemen ist die Abhängigkeit von μ nur implizit über $g(\mu)$, also

$$Z_m = Z_m(g(\mu)) \Rightarrow m_q = m_q(g(\mu)).$$

Hieraus ergibt sich dann mit der Kettenregel

$$\mu \frac{d}{d\mu} Z_m = \mu \frac{dg}{d\mu} \frac{dZ_m}{dg} = \beta(g) \frac{d}{dg} Z_m. \quad (342)$$

Aus (341) folgt weiter

$$\frac{d}{dg} m_q = -\frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} m_q,$$

und durch Integration:

$$\int_{m_q(g_0)}^{m_q(g_1)} \frac{dm_q}{m_q} = - \int_{g(\mu_0)}^{g(\mu_1)} \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} dg \Rightarrow \ln \left(\frac{m_q(g_1)}{m_q(g_0)} \right) = - \int_{g(\mu_0)}^{g(\mu_1)} \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} dg.$$

Exponentieren von beiden Seiten führt dann auf

$$m_q(g(\mu_1)) = m_q(g(\mu_0)) = \exp \left(- \int_{g(\mu_0)}^{g(\mu_1)} \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} dg \right). \quad (343)$$

Bis zu Zweischleifenniveau besitzt Z_m die Form

$$Z_m = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{Z_m^{(1)}}{\varepsilon} + \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \left[\frac{Z_m^{(22)}}{\varepsilon^2} + \frac{Z_m^{(21)}}{\varepsilon} \right] + \mathcal{O}(g^6), \quad (344)$$

und die γ -Funktion:

$$\gamma_m = \frac{g^2}{16\pi^2} \gamma_m^{(0)} + \left(\frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \gamma_m^{(1)} + \mathcal{O}(g^6).$$

Aus (340) und (342) folgt:

$$Z_m \gamma_m \stackrel{(325)}{=} \left(-\varepsilon g + \beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5) \right) \frac{dZ_m}{dg}.$$

$$\gamma_m^{(0)} + \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\gamma_m^{(0)} \frac{Z_m^{(1)}}{\varepsilon} + \gamma_m^{(1)} \right) \stackrel{(344),(325)}{=} -\varepsilon \cdot 2 \frac{Z_m^{(1)}}{\varepsilon} - \frac{g^2}{16\pi^2} \left[4\varepsilon \left(\frac{Z_m^{(22)}}{\varepsilon^2} + \frac{Z_m^{(21)}}{\varepsilon} \right) + 2\beta_0 \frac{Z_m^{(1)}}{\varepsilon} \right]. \quad (345)$$

In Leading-Log-Näherung gilt

$$\gamma_m^{(0)} = -2Z_m^{(1)}, \quad (346)$$

und in Next-to-leading-Log-Näherung:

$$\gamma_m^{(1)} = -4Z_m^{(21)}, \quad (347)$$

Die Pole müssen herausfallen, weil wir das Laufen einer physikalischen Größe betrachten. Dies wird durch

$$4Z_m^{(22)} + 2\beta_0 Z_m^{(1)} - 2(Z_m^{(1)})^2 = 0, \quad (348)$$

bewerkstelligt, was allgemein bewiesen werden kann. Einsetzen in (343) liefert

$$\begin{aligned} m_q(\mu) &= m_q(\mu_0) \exp \left\{ \int_{g(\mu_0)=g_0}^{g(\mu)=g} \left[\frac{\gamma_m^{(0)}}{\beta_0} \frac{1}{g'} + \left(\frac{\gamma_m^{(1)}}{\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_m^{(2)}}{\beta_0^2} \right) \frac{g'}{16\pi^2} \right] dg' \right\} = \\ &= m_q(\mu_0) \exp \left\{ \frac{\gamma_m^{(0)}}{\beta_0} \ln \left(\frac{g}{g_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_m^{(1)}}{\beta_0} - \frac{\beta_1 \gamma_m^{(2)}}{\beta_0^2} \right) (g^2 - g_0^2) \frac{1}{16\pi^2} \right\} = \\ &= m_q(\mu_0) \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(\mu_0)} \right)^{\frac{\gamma_m^{(1)}}{2\beta_0}} \left[1 + J_m \frac{\alpha_s(\mu_0) - \alpha_s(\mu)}{4\pi} \right], \end{aligned} \quad (349)$$

mit

$$J_m = \frac{-\gamma_m^{(1)} + \beta_1 \frac{\gamma_m^{(0)}}{\beta_0}}{2\beta_0}. \quad (350)$$

Es gilt

$$\gamma_m^{(0)} = 6C_F = 8, \quad (351)$$

in jedem massenunabhängigen Schema und

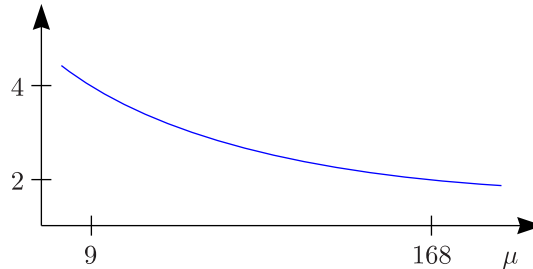
$$\gamma_m^{(1)} = C_F \left(3C_F + \frac{97}{3}N_c - \frac{10}{3}f \right) = \frac{404}{3} - \frac{40}{9}f, \quad (352)$$

im $\overline{\text{MS}}$ -Schema. Inzwischen ist die γ -Funktion bis auf Vierschleifenebene bekannt. Benutzt man die $\overline{\text{MS}}$ -Masse des Bottom-Quarks

$$m_b(m_b) = 4,2 \text{ GeV}, \quad (353)$$

so folgt aus (349):

$$m_b(\mu = m_t) = 2,75 \text{ GeV}. \quad (354)$$



Betrachten wir die Relation der $\overline{\text{MS}}$ -Masse zur Polmasse (311):

$$m_q^{\text{Pol}} = m_q(\mu) \left\{ 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\frac{16}{3} + \gamma_m^{(0)} \ln \left(\frac{\mu}{m_q} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right\}.$$

Die linke Seite hängt nicht von μ ab, da es sich bei der Polmasse m_q^{Pol} um eine physikalische Größe handelt. Damit kann auch die Rechte Seite nicht von μ abhängen (bis auf Terme höherer Ordnung). Damit gilt

$$\mu \frac{d}{d\mu} m_q^{\text{Pol}} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_m^{(0)} m_q (1 + \dots) + m_q \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_m^{(0)} = \mathcal{O}(\alpha_s^2).$$

Da Polmassen ein störungstheoretisches Konzept sind, sollte man sagen, in welcher Ordnung diese bestimmt wurde. Für das Bottom-Quark gilt

$$m_b^{\text{Pol}} = 4,6 \text{ GeV} + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \tag{356}$$

Der Unterschied zwischen Polmasse und $\overline{\text{MS}}$ -Masse beim Topquark ist

$$m_t^{\text{Pol}} - \overline{m}_t(\overline{m}_t) \approx 7 \text{ GeV}.$$

Auf nächst-zu-führender-Ordnung gilt

$$m_t^{\text{Pol}} = 172 \text{ GeV} \Rightarrow m_t(m_t) = 165 \text{ GeV}. \tag{357}$$

CDF misst weder die Pol- noch $\overline{\text{MS}}$ -Masse. Die Gruppe benutzt Monte-Carlo-Algorithmen wie **Herwig** und **Pythia**. Diese beinhalten Schaueralgorithmen, um die Entwicklung eines Quarks zu einem oder mehreren Jets zu simulieren. Die Gluonabstrahlung des Top-Quarks ist in diesen Programmen nicht integriert. Das Topquark wird kinematisch rekonstruiert. Wenn dieses stabil wäre (wie beispielsweise das Elektron) würde die Polmasse eingehen. Der Fehler durch die kinematische Rekonstruktion ist proportional zu α_s/π .

4.7.1 Anomale Dimension des Quarkfeldes

$$\gamma_\psi(g(\mu)) = \frac{\mu}{Z_\psi^{\frac{1}{2}}} \frac{dZ_\psi^{\frac{1}{2}}}{d\mu} = \gamma_\psi^{(0)} \frac{g^2}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^4), \tag{358}$$

mit

$$\gamma_\psi^{(0)} = C_F \xi = \frac{4}{3} \xi. \tag{359}$$

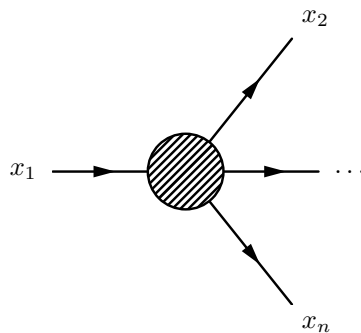
Das analoge kann man auch für das Gluonfeld machen:

$$\gamma_A^{(0)} = -\frac{13}{2} + \frac{3}{2} \xi.$$

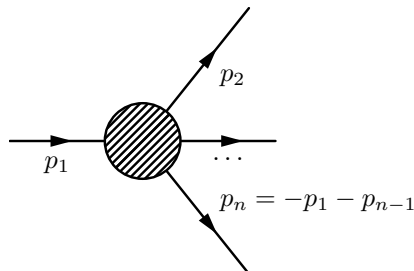
Dies wird benötigt, um das Skalenverhalten von Greenfunktion zu untersuchen. Betrachten wir dazu die N -Punkt-Greenfunktion:

$$G_{N;j_1, \dots, j_n}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \psi_{j_1}(x_1) \overline{\psi}_{j_2}(x_2) \dots \psi_{j_n}(x_n) | 0 \rangle. \tag{360}$$

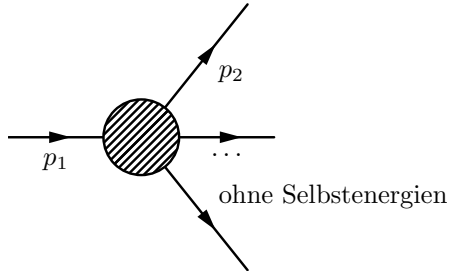
Die graphische Darstellung einer solchen Greenfunktion ist wie folgt:



Die entsprechend fouriertransformierte Greenfunktion im Impulsraum $G(N; j_1, \dots, j_n)(p_1, \dots, p_{n-1})$ ist:



Um zu Observablen zu kommen, benötigt man die trunkierte Greenfunktion. Diese folgt aus der vollen Greenfunktion durch

$$\tilde{G}_{N;j_1,\dots,j_n}^t(p_1,\dots,p_{n-1}) = \frac{\tilde{G}_{n;j_1,\dots,j_n}(p_1,\dots,p_{n-1})}{\tilde{G}_2(p_1)\dots\tilde{G}_2(p_{n-1})} \triangleq$$


Das Abdividieren führt dazu, dass Feynmandiagramme weggelassen werden, die Selbstenergiekorrekturen in den externen Linien aufweist. Nach (318) ist die renormierte Greenfunktion

$$G_n(p_1,\dots,p_{n-1}) = Z_\psi^{\frac{n}{2}} G_n^{\text{ren}}(p_1,\dots,p_{n-1}). \quad (362)$$

Die renormierte trunkierte Greenfunktion folgt aus (361):

$$\tilde{G}_{n;j_1,\dots,j_n}^t(p_1,\dots,p_{n-1}) = Z_\psi^{-\frac{n}{2}} G^{t,\text{ren}}(p_1,\dots,p_{n-1}). \quad (363)$$

Konstruktionsbedingung hängt die nichtrenormierte trunkierte Greenfunktion nicht von μ ab:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \tilde{G}^t = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m \sum_q m_q \frac{\partial}{\partial m_q} \right) \tilde{G}^t.$$

Mit (358) und (363) ergibt sich dann weiter:

$$0 = \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_m(q) \sum_q m_q \frac{\partial}{\partial m_q} - n\gamma_\psi \right) \tilde{G}^{t,\text{ren}}. \quad (364)$$

Ist $[G_n^t] = d$, so gilt aus dimensionaler Analyse:

$$\tilde{G}_n^t(\lambda \mathbf{p}_1, m_q, \mu) = \mu^d \tilde{G}_n^t \left(\frac{\lambda \mathbf{p}_1}{\mu}, \frac{m_q}{\mu}, 1 \right).$$

(Wir interessieren uns dafür, wie sich die Greenfunktion verhält, wenn man λ variiert.) Damit gilt

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_q m_q \frac{\partial}{\partial m_q} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - d \right) \tilde{G}_n^t = 0, \quad (365)$$

denn beispielsweise gilt

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \frac{\lambda \mathbf{p}_1}{\mu} = -\frac{\lambda \mathbf{p}_1}{\mu} + \frac{\lambda \mathbf{p}_1}{\mu} = 0.$$

Wir haben also einen Differentialoperator gefunden, welcher \tilde{G}_n^t zum Verschwinden bringt. Man bezeichnet solche Funktionen als homogen vom Grad d . Mit (365) können wir $\mu \partial / \partial \mu$ aus (364) eliminieren:

$$0 = \left[\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + (1 + \gamma_m) \sum_q m_q \frac{\partial}{\partial m_q} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + n\gamma_\psi - d \right] \tilde{G}_n^t(\lambda p_i, m_q, \mu). \quad (366)$$

Kennt man also die Greenfunktion \tilde{G}_n^t für Impulsconfigurationen $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1})$, so ergibt die Lösung von (366) \tilde{G}_n^t für Impulse $(\lambda \mathbf{p}_1, \dots, \lambda \mathbf{p}_{n-1})$. Dies ist die Mutter aller Skalengleichungen für Greenfunktionen. Die DGLAP-Gleichungen für Partonverteilungsfunktionen sind beispielsweise ein Spezialfall dieser Gleichung.

4.8 Flavoursymmetrien

Wir betrachten die QCD-Lagrangedichte mit f Flavours:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{(f)} = \sum_q \bar{q} i \not{D} q - m_q \bar{q} q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a}. \quad (119)$$

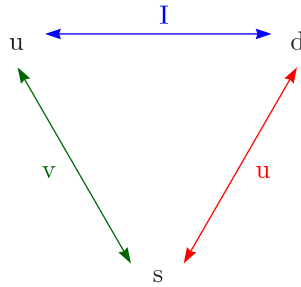
Sie hat eine approximative $SU(3)_F$ -Symmetrie („ $SU(3)$ -Flavour“), man kann also die Quarks u , d und s ineinander rotieren:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \text{ mit } U \in SU(3)_F. \quad (367)$$

Diese Symmetrie ist exakt für $m_u = m_d = m_s$. Die fundamentale Skala in der QCD ist Λ_{QCD} und nicht die Massen der leichten Quarks, weshalb diese Flavorsymmetrie durchaus eine Rolle spielt. Wären die Massen der drei leichten Quarks gleich, so wäre die QCD „flavour-blind“ und beispielsweise $m_K = m_\pi$ usw. Der erwartete Fehler ist $m_s m_d / \Lambda_{\text{QCD}} \approx \mathcal{O}(30\%)$. Die $SU(3)_F$ hat die $SU(2)_I$ -Untergruppe, welche zwischen u - und d -Quarks transformiert:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \mapsto U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad U \in SU(2). \quad (368)$$

(Für Heisenberg das (p, n) das fundamentale Dublett, das er als Nukleon bezeichnet hat.) Für die Rotation zwischen u und s hat man den sogenannten v -Spin und für die Rotation zwischen d und s den u -Spin eingeführt.



Da der Unterschied der Massen der schweren Quarks c , b und t in der Größenordnung von Λ_{QCD} ist, kann man solche Symmetrien für diese drei Quarks nicht benutzen. Die schwache Wechselwirkung bricht diese Symmetrien immer aufgrund der stark unterschiedlichen Kopplungen (beispielsweise V_{ud} und V_{us}). Der Isospin hat den Fehler

$$\mathcal{O}\left(\frac{m_d - m_u}{\Lambda_{\text{QCD}}}; \alpha_{\text{QED}}\right),$$

also 2%. Dann kommt es auf Strahlungskorrekturen der QED an und die QED unterscheidet zwischen u und d wegen ihrer unterschiedlichen Ladung. Isospin-Dubletts sind

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}. \quad (369)$$

Dies muss aufgrund der $SU(2)$ -Isospin-Invarianz so sein:

$$\bar{u}u + \bar{d}d = (\bar{d}, -\bar{u})\varepsilon \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow{U \in SU(2)} (\bar{d}, -\bar{u})U^\dagger \varepsilon U \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \bar{u}u + \bar{d}d,$$

wegen $U^\dagger \varepsilon U = \varepsilon$. Als Folge ist die Gluonkopplung $A_\mu^a [\bar{u}\gamma^\mu T^a u + \bar{d}\gamma^\mu T^a d]$ invariant. Bei Hadronen sind Dubletts zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} K^+ \sim \bar{s}u \\ K^0 \sim \bar{s}d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{D}^0 \sim \bar{c}u \\ \bar{D}^- \sim \bar{c}d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B^+ \sim \bar{b}u \\ B^0 \sim \bar{b}d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}.$$

Zur Isospin-Brechung vergleichen wir die Massen für verschiedene Mesonen:

$M = K$	$M = D$	$M = B$	$M = N$	
$\frac{m_{I_3=-1/2} - m_{I_3=1/2}}{m_{I_3=-1/2}}$	$8,0 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$(8 \pm 10) \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$
$\frac{m_{I_3=-1/2} - m_{I_3=1/2}}{m_{I_3=1/2}}$	$4,0 \text{ MeV}$	$4,8 \text{ MeV}$	$0,3 \pm 0,3 \text{ MeV}$	$1,3 \text{ MeV}$

Die Isospinbrechung von α_{QED} scheint nicht der wichtige Effekt zu sein, weil das Vorzeichen immer dasselbe ist. Man vermutet, dass $m_d > m_u$ er größere Effekt ist. Schauen wir uns nun das berühmteste Isospin-Triplett an und zwar das Pion:

$$\pi^+ \sim \bar{d}u, \quad \pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d - \bar{u}u), \quad \pi^- \sim \bar{u}d,$$

$$m_{\pi^0} - m_{\pi^+} = 4,6 \text{ MeV}, \quad \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2}{m_{\pi^0}^2} = 6,9 \cdot 10^{-2}.$$

Wegen der SU(3)-Flavour-Symmetrie gilt auch

$$\frac{m_K - m_\pi}{m_K} \approx 0,7.$$

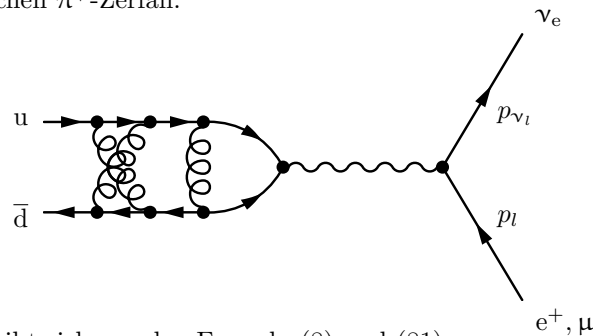
$$m_{B_s} - m_{B_d} = 80 \text{ MeV} = \mathcal{O}(m_s(?)).$$

Mehr zu Flavour-Symmetrien in Abschnitt (5.2).

Kapitel 5

Exklusive (semi-)leptonische Zerfälle

Betrachten wir den leptonischen π^+ -Zerfall:



Die Übergangsamplitude ergibt sich aus den Formeln (8) und (81):

$$\mathcal{M}(\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l) = V_{ud}^* \frac{g_2^2}{2} \frac{-1}{M_W^2} \langle l^+ \nu_l | (j_l)_\mu (j_q)^{\dagger\mu} | \pi \rangle,$$

mit $j_{l,\mu} = \bar{\nu}_l \gamma_\mu P_L l$ und $j_q^\mu = \bar{u} \gamma^\mu P_L d$. In niedrigster Ordnung in den Kopplungen $g_{1,2}$, aber zu allen Ordnungen in g_3 (also nichtperturbativ) kann man das Produkt der Ströme faktorisieren:

$$\langle l^+ \nu_l | (j_l)_\mu (j_q)^{\dagger\mu} | \pi \rangle = \langle l^+ \nu_l | (j_l)_\mu | 0 \rangle \langle 0 | (j_q)^{\dagger\mu} | \pi \rangle. \quad (371)$$

Man schiebt den hadronischen Grundzustand ein. Der Grund ist, dass keine hadronische Wechselwirkung zwischen dem π^+ und den Leptonen stattfindet. Die **Pion-Zerfallskonstante** f_π aus

$$\langle 0 | \bar{d} \gamma^\mu \gamma_5 u(x) | \pi^+(p) \rangle = i f_\pi p^\mu \exp(-iPx), \quad (372)$$

wird verwendet, um die Unwissenheit bezüglich $\langle 0 | (j_q)^{\dagger\mu} | \pi \rangle$ zu parametrisieren. f_π ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine positive Zahl. Wir betrachten das Verhalten unter Parität der beiden Ströme:

$$\mathcal{P} d \gamma^\mu \begin{Bmatrix} \gamma_5 \\ 1 \end{Bmatrix} u = \begin{Bmatrix} - \\ + \end{Bmatrix} \bar{d} \gamma_\mu \gamma_5 u.$$

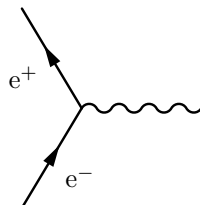
Aus $\mathcal{P} |\pi^+\rangle = -|\pi^+\rangle$ ergibt sich dann $\langle 0 | \bar{d} \gamma_\mu u | \pi^+\rangle = 0$. Völlig analog sind die Zerfallskonstanten definiert für Kaonen, B-Mesonen usw.:

$$\langle 0 | \bar{s} \gamma^\mu \gamma_5 u(x) | K^+(p) \rangle = i f_K p^\mu \exp(-iPx), \quad \langle 0 | \bar{b} \gamma^\mu \gamma_5 u(x) | B^+(p) \rangle = i f_B p^\mu \exp(-iPx),$$

usw. f_π parametrisiert die QCD-Bindungseffekte. In (371):

$$\langle e^+ \nu_e | j_{l,\mu} | 0 \rangle = \bar{u}_\nu(p_\nu) \gamma_\mu P_L u_l(p_l),$$

mit den Spinoren $\bar{u}_\nu(p_\nu)$ und $u_l(p_l)$.



Die Impulse sollen in Richtung der Fermionzahl laufen. Wegen Impulserhaltung gilt dann $p^\mu = p_\nu^\mu - p_l^\mu$ und weiter:

$$p^\mu \cdot \langle l^+ \nu_l | j_{l,\mu} | 0 \rangle = \bar{u}_\nu(p_\nu) [\not{p}_\nu - \not{p}_l] P_L u_l(p_l) - \bar{u}_\nu P_R u_l(p_l) m_L. \quad (374)$$

Man bekommt einen Helizitätsflip, der proportional zur Leptonmasse m_l ist. Die leptonischen Zerfälle sind daher unterdrückt, außer wenn die Leptonmasse in der Größenordnung der Masse des Mesons liegt. Mit (370) ergibt sich

$$\mathcal{M}(\pi^+ \rightarrow l^+ \nu_l) = -V_{ud}^* \frac{g_2^2}{2} \frac{-1}{M_W^2} i f_\pi m_l \bar{u}_\nu(p_\nu) P_R u_l(p_l). \quad (375)$$

Wir berechnen die Zerfallsbreite nach (85) im Ruhesystem:

$$\Gamma = \frac{1}{2M_\pi} \int \frac{d^3 p_\nu d^3 p_l}{(2\pi)^4 4 |E_l E_\nu|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_\pi + p_l - p_\nu) |\mathcal{M}(\pi^+ \rightarrow l \nu)|^2.$$

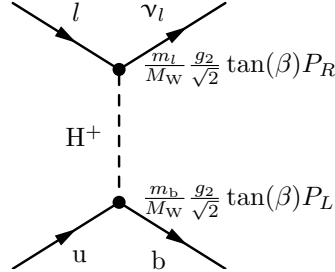
Mit $g^2/(4M_W^2) = \sqrt{2}G_F$ und der Phasenraumintegration folgt dann:

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow l^+ \nu) = \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{ud}|^2 m_{\pi^+} m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{m_{\pi^+}^2}\right) f_\pi^2. \quad (376)$$

Im Experiment misst man das Verzweigungsverhältnis:

$$B_r = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{tot}}} = \tau \Gamma, \quad (377)$$

wobei τ die Lebensdauer ist. Andere leptonische Zerfälle pseudoskalarer Mesonen gewinnt man durch Ersetzen von V_{ud} , m_{π^+} und f_π in (376). Wir greifen uns den Zerfall $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau$ heraus, der zur Zeit ein heißes Thema bei BELLE ist. In B-Fabriken sind τ -Leptonen schwer zu messen, weil sie sehr langsam sind und deshalb unmittelbar hinter dem B-Meson zerfallen. Ein solches Ereignis lässt sich nicht auflösen. Das τ zerfällt in mindestens ein Neutrino und andere Zerfallsprodukte. Den Impuls des Neutrinos kann man nicht rekonstruieren. $B^+ \rightarrow \tau^+ \nu_\tau$ ist sensitiv auf Effekte eines möglichen geladenen Higgs-Bosons aus Zwei-Higgs-Dublett-Modellen, des sogenannten Typ-II-Modells:



Der Quotient der beiden Vakuumerwartungswerte $\tan(\beta) = v_2/v_1$ kann groß sein, bis zu 60. Wie verallgemeinert sich nun Formel (376)? Man bekommt einen Zusatzbeitrag, der mit dem geladenen Higgseffekt zusammenhängt:

$$\Gamma(B^+ \rightarrow \tau \nu_\tau) = \frac{G_F^2}{8\pi} |V_{ub}|^2 m_{B^+} m_\tau^2 \left(1 - \frac{m_\tau^2}{m_{B^+}^2}\right)^2 f_{B^+}^2 |1 - g_p|^2, \quad (378)$$

wobei $g_p = 0$ ist im Standardmodell und

$$g_p = \frac{m_{B^+}^2 \tan^2(\beta)}{m_{H^+}^2},$$

im 2HDM vom Typ II. Die Daten von BELLE schließen den Wert 1 aus mit etwa $2, 2\sigma$. In der Gittereichtheorie lässt sich $f_B = (200 \pm 35) \text{ MeV}$ bestimmen. Eine Anwendung ist die Bestimmung von

$$\left| \frac{V_{us}}{V_{ud}} \right| \simeq \frac{|V_{us}|}{\sqrt{1 - |V_{us}|^2}} + \mathcal{O}(10^{-5}).$$

aus den sogenannten „K12-Zerfällen“. (Dies bedeutet, dass ein Kaon in zwei Teilchen zerfällt, von denen eines ein Lepton ist. Es kann $l = e$ oder $l = \mu$ sein.)

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu(\gamma))}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu(\gamma))} = \left| \frac{V_{us}}{V_{ud}} \right|^2 \frac{f_K^2 m_K^2 - m_\mu^2}{f_\pi^2 m_\pi^2 - m_\mu^2} \left[1 - \frac{\alpha_{\text{QED}}}{\pi} (C_\pi - C_K) \right],$$

mit $C_\pi - C_K = 3,0 \pm 1,5$. Das γ in Klammern bedeutet, dass man die virtuellen QED-Korrekturen und Photon-Bremsstrahlungsprozesse berücksichtigt. Gitter-QCD (Gruppe MILC) liefert den Wert

$$\frac{f_K}{f_\pi} = 1,210 \pm 0,014,$$

und draus lässt sich $|V_{us}| = 0,2223 \pm 0,0026$ (379) bestimmen. Besser (um V_{us} zu bestimmen), sind die sogenannten „Kl3-Zerfälle“ $K \rightarrow \pi l \nu_l$.

5.1 Semileptonische Zerfälle

Wir betrachten den Zerfall $M_1 \rightarrow M_2 l \bar{\nu}_l$ mit pseudoskalaren Mesonen M_1 und M_2 und fangen mit dem Kl3-Zerfall an:

$$K \rightarrow \pi l \nu_l, \quad l = e, \mu,$$

$$K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l, \quad K^+ \rightarrow \pi^0 l^+ \nu_l.$$

Wir benötigen ein Matrixelement, in das wir unser Unwissen von einem Übergang von einem Kaon zu einem Pion stecken:

$$\langle \pi(p_\pi) | \bar{s} \gamma^\mu u | K(p_K) \rangle = A p_\pi^\mu + B p_K^\mu,$$

was wegen Lorentz-Kovarianz gilt. A und B sind Lorentz-Skalare und Funktionen von $p_\pi^2 = m_\pi^2$, $p_K^2 = m_K^2$ und q^2 , wobei $q^\mu = p_K^\mu - p_\pi^\mu$. Besser ist jedoch

$$\langle \pi(p_\pi) | \bar{s} \gamma^\mu u(0) | K(p_\mu) \rangle = F_V(q^2) \left[p_K^\mu + p_\pi^\mu - \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu \right] + F_S(q^2) \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu, \quad (380)$$

mit dem Vektorformfaktor $F_V(q^2)$ und dem skalaren Formfaktor $F_S(q^2)$. In $F_V(q^2)$ steckt der transversale Anteil:

$$q_\mu \left[p_K^\mu + p_\pi^\mu - \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{q^2} q^\mu \right] = 0.$$

Wegen $q = p_\nu - p_l$ ist $q^\mu \bar{\nu} \gamma_\mu P_L l = -m_l \bar{\nu} P_R l$ und damit ist der Beitrag mit F_S vernachlässigbar für $l = e$. Berechnung des Phasenraums führt auf

$$\Gamma(K \rightarrow \pi l \nu) = \frac{G_F^2}{192\pi^3} M_K^2 |V_{us}|^2 [F_V(0)]^2 \cdot I \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } K = K^0 \\ 1/2 & \text{für } K = K^+ \end{cases}, \quad (381)$$

mit dem Phasenraumintegral I . Der Formfaktor ist im Wesentlichen konstant für diesen Zerfall. Um I zu berechnen, muss man die q^2 -Abhängigkeit von $F_V(q^2)$ kennen, beispielsweise aus Messung von $d\Gamma/dq^2$. Aus dem Experiment und (381) ergibt sich

$$|V_{us}| F_V(0) = 0,218 \pm 0,001. \quad (382)$$

Im Symmetrielimes $m_s = m_u$ ist der Vektorstrom $j^\mu = \bar{s} \gamma^\mu u(x)$ ein erhaltener Strom:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = \bar{s} [\overleftarrow{\mathcal{D}} + \overrightarrow{\mathcal{D}}] u(x) = -i(m_u - m_s) \bar{s} u = 0,$$

unter Benutzung der Bewegungsgleichungen. Der zur $SU(2)$ -V-Spin-Symmetrie gehörende Noether-Strom ist

$$J_i^\mu = (\bar{u}, \bar{s}) \gamma^\mu \sigma^i \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix},$$

mit den Paulimatrizen σ^i . Der Schiebeoperator

$$\sigma_- = \frac{\sigma^1 - i\sigma^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

senkt V_3 von $1/2$ auf $-1/2$. Diesen können wir also wie folgt verwenden:

$$|K^0\rangle = |V_3 = 1/2\rangle, \quad |\pi^+\rangle = |V_3 = -1/2\rangle = Q_- |K^0\rangle.$$

Das Noether-Theorem reicht aus, um eine nichtperturbative Größe hier zu berechnen. Es sagt die erhaltene Ladung

$$Q_i = \int d^3x J_i^0(x), \quad (383)$$

voraus. Das bedeutet, dass man das interessierende Matrixelement aus der Normierungsbedingung zweier Zustände berechnen kann:

$$\begin{aligned} 2E_\pi(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\pi - \mathbf{p}_K) &= \langle \pi^+(p_K) | \pi^+(p_K) \rangle = \langle \pi^+(p_\pi) | Q_- | K^0(p_K) \rangle = \\ &= \int d^3x \langle \pi^+(p_\pi) | J_-^0(x) | K^0(p_K) \rangle. \end{aligned}$$

Wegen Translationsinvarianz gilt

$$\begin{aligned} \langle \pi^+(p_\pi) | J_-^0(x) | K^0(p_K) \rangle &= \exp(i(p_\pi - p_K)x) \langle \pi^+(p_\pi) | J_-^0(0) | K^0(p_K) \rangle = \\ &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}_\pi - \mathbf{p}_K)(p_K^0 + p_\pi^0)F_V^{(0)}(0), \end{aligned}$$

wobei $(p_K^0 + p_\pi^0)F_V^{(0)}(0)$ aus (380) folgt mit $\mathbf{p}_\pi = \mathbf{p}_K$ und $q^\mu = 0$. Daraus ergibt sich $F_V(0) = 1$ im Symmetrielimes (in dem $p_K^0 = E_K = E_\pi$). Somit sind Matrixelemente erhaltener Ströme bei Impulsübertrag $q^\mu = 0$ berechenbar (und im Allgemeinen auf 1 normiert). Der Symmetriebrechungsparameter ist $(m_s - m_u)/\Lambda_{\text{QCD}}$. Das Ademollo-Gatto-Theorem besagt:

$$F_V(0) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_s - m_u}{\Lambda_{\text{QCD}}}\right)^2,$$

wobei die Korrekturen in chiraler Störungstheorie berechnet werden können.

$$F_V(0) = 0,97 \pm 0,01, \quad (384)$$

und mit (382):

$$|V_{\text{us}}| = 0,225 \pm 0,002. \quad (385)$$

Im Falle schwerer Quarks nutzt man die Symmetrie $m_b, m_c \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ aus. Die beiden wichtigen Zerfälle zur Bestimmung von V_{cb} sind $B \rightarrow D l \nu$ und $B \rightarrow D^* l \nu$. Wir betrachten die **Heavy-Quark-Symmetrie**: Für $m_{b,c} \mapsto \infty$ ist die weiche QCD-Wechselwirkung identisch für b- und c-Quark. Man kann erwarten, dass man die gleichen Werte für Matrixelemente und andere Größen findet unabhängig von der Masse von Charm- und Bottom-Quark (HQ-Flavoursymmetrie). Dann ist die Wechselwirkung auch identisch für das D und D^* (bzw. das B und B^*) (HQ-Spinsymmetrie). Betrachte $Q = b, c$ und zerlege den Quark-Impuls in einen Anteil, der die Information über die schwere Quarkmasse enthält und einen Rest (Residualimpuls) k^μ

$$p^\mu = m_Q v^\mu + k^\mu, \quad (368)$$

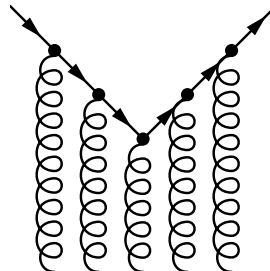
mit $v^2 = 1$ und $|k^\mu| \sim \Lambda_{\text{QCD}}$. Schauen wir uns dazu den Quark-Propagator an, so gilt

$$\begin{array}{c} \bullet \longleftarrow \bullet \\ \bullet \longleftarrow \bullet \end{array} = \frac{i(\not{p} + m_Q)}{p^2 - m_Q^2} = i \frac{m_Q \not{v} + \not{k} + m_Q}{2m_Q v \cdot k + k^2} = \frac{i}{v \cdot k} P_{v+} + \mathcal{O}\left(\frac{|k^\mu|}{m_Q}\right), \quad P_{v+} = \frac{1 + \not{v}}{2}. \quad (387)$$

P_{v+} ist ein Projektor: $P_{v+}^2 = P_{v+}$. Entsprechend definiert man

$$P_{v-} = \frac{1 - \not{v}}{2}, \quad P_{v-}^2 = P_{v-}, \quad P_{v+} P_{v-} = 0. \quad (389)$$

P_{v+} und P_{v-} sind also orthogonale Projektoren. Man stellt fest, dass sich im führenden Term der Entwicklung des Propagators die Quarkmasse m_Q heraushebt. Dies funktioniert, wenn die Quarks in der Nähe der Massenschale sind.



Die Quarks sollen in gleiche Richtung fliegen mit derselben Vierergeschwindigkeit v^μ . Dies ist dann der Fall, wenn der Impulsübertrag klein, also von der Ordnung Λ_{QCD} ist.

$$\dots \frac{i(\not{p} + m_Q)}{p^2 - m_Q^2} i\gamma^k T^a i \frac{\not{p}' + m_Q}{p'^2 - m_Q^2} \dots \stackrel{(387)}{=} \frac{i}{v \cdot k} P_{v+} \gamma^\mu P_{v+} T^a \frac{i}{v \cdot k'}.$$

Aber es gilt

$$P_{v+} \gamma^\mu P_{v+} = P_{v+} \frac{1}{2} [\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{v}] = P_{v+} \frac{1}{2} (\gamma^\mu - \not{v} \gamma^\mu + \{\gamma^\mu, \not{v}\}) = P_{v+} (P_{v-} \gamma^\mu + v^\mu) = v^\mu P_{v+}, \quad (390)$$

wobei $\{\gamma^\mu, \not{v}\} = 2v^\mu$ verwendet wurde. Für die Wechselwirkung von schweren Quarks mit weichen Gluonen darf man damit die Feynmanregel $i\gamma^\mu T^a g_s$ durch $iv^\mu T^a g_s$ (391) ersetzen, sofern beide die Vierergeschwindigkeit v^μ haben. Um das Ganze in Form einer effektiven Theorie zu formulieren, führt man neue Felder ein, sogenannte **HQET-Felder** oder **statische Felder**, wobei HQET für **Heavy-Quark Effective Theory** steht:

$$h_v(x) = \exp(im_Q v \cdot x) P_{v+} Q(x), \quad (342)$$

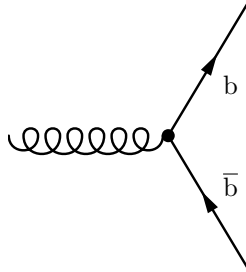
wobei $P_{v+} Q(x)$ die Teilchenkomponenten sind, weil P_{v+} auf die Teilchenkomponenten projiziert. Im Ruhesystem mit $v = (1, 0, 0, 0)$ ist dieser Projektor gegeben durch

$$P_{v+} = \frac{1 + \gamma^0}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}_{\text{Dirac}}.$$

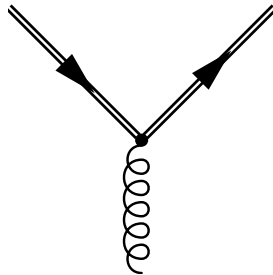
Die Parameter v^μ im Exponentialfaktor bezeichnet man als Label-fields. P_{v-} projiziert auf Antiteilchenkomponenten. $h_v(x)$ sind die Felder, aus denen man die Lagrangedichte konstruieren möchte:

$$\mathcal{L}_{\text{HQET}} = \sum_{h=c,b} \bar{b}_v i v \cdot D h_v + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_Q}\right).$$

Daraus lässt sich direkt der Propagator ablesen: $i/(v \cdot k) P_{v+}$, wobei man wegen $h_v = P_{v+} h_v$ einen zusätzlichen Projektor P_{v+} dazuschreiben kann. Diese Lagrangedichte reproduziert S-Matrixelemente für Prozesse, in denen nur schwere Quarks, aber keine schweren Antiquarks vorkommen. Vergleiche (387):



Für den Vertex



hat man keine Spin-Abhängigkeit mehr (HQ-Spin-Symmetrie). Durch die doppelte Linie unterstreicht man, dass es sich um eine Feynmanregel in der HQET handelt. Die Meson-Zustände ($M = B, B^*, D, D^*$) hatten wir zu Beginn der Vorlesung in der standardmäßigen relativistischen Normierung eingeführt:

$$\langle M(p') | M(p) \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}').$$

E_p hängt von $m_M \sim m_Q$ ab. Die Normierung passt jedoch nicht gut mit HQET zusammen. Es ist besser, jeden Zustand mit der Wurzel auf der Mesonmasse zu normieren.

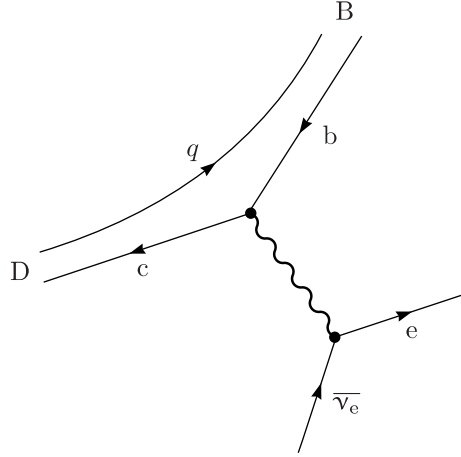
$${}^{\text{HQET}} \langle M(v', k') | M(v, k) \rangle = 2v^0 \delta_{vv^0} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (394)$$

$$\Rightarrow |M(p)\rangle = \sqrt{m_M} (|M(v)\rangle + Q(1/m_Q)) .$$

Das Heavy-Quark-Spin-Flavour-Symmetriemultiplett fasst (B, B^*, D, D^*) zusammen. Betrachte zum Beispiel die Relation zwischen den Zerfallskonstanten f_B und f_D :

$$\frac{f_D}{f_B} = \sqrt{\frac{m_B}{m_D}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}\right) \right] \approx 1,6 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_b}\right) \right] . \quad (395)$$

Der Wurzelvorfaktor kommt aus der unterschiedlichen Normierung der Zustände (394). Aus Gitter-QCD ergibt sich $f_D^{\text{exp}}/f_B^{\text{theo}} \approx 1,2$. Die Domäne der HQET sind eigentlich Formfaktoren für semileptonische Zerfälle $\bar{B} \rightarrow D l \nu$ (und nicht Zerfallskonstanten):



$$\langle D(p') | \bar{c} \gamma^\mu b | \bar{B}(p) \rangle = f_+(q^2)(p^\mu + p'^\mu) + f_-(q^2)(p^\mu - p'^\mu) . \quad (396)$$

Das heißt (siehe (380)):

$$f_+(q^2) = F_V(q^2), \quad f_-(q^2) = (F_S(q^2) - F_V(q^2)) \frac{m_B^2 - m_D^2}{q^2} . \quad (397)$$

Für die interessanten Fälle $l = e, \mu$ kann man die Leptonmass auf Null setzen und es gibt keinen Beitrag von f_- :

$$\mathcal{M}(\bar{B} \rightarrow D l \nu) = \sqrt{2} G_F^2 V_{cb} f_+(q^2) (p^\mu + p'^\mu) \bar{u}(p_l) \gamma_\mu P_L u(-p_{\nu_l}) ,$$

wobei die Impulse in Richtung der Fermionlinie laufen sollen. Damit ergibt sich die differentielle Zerfallsrate in Bezug auf den Impulsübertrag q^2 auf das Leptonpaar:

$$\frac{d\Gamma}{dq^2}(\bar{B} \rightarrow D l \nu) = \frac{G_F^2 |V_{cb}|^2 |f_+|^2}{192 \pi^3 m_B^3} [\lambda(q^2, m_B^2, m_D^2)]^{\frac{3}{2}} , \quad (398)$$

mit der Källén-Funktion

$$\lambda(a, b, c) = (a - b - c)^2 - 4bc = \lambda(b, c, a) - \lambda(b, a, c) . \quad (399)$$

Wo man gerne HQET benutzt, sind Fälle, in denen es sich lohnt, verschiedene Vierervektoren einzuführen. Seien v und v' die Vierergeschwindigkeiten der Mesonen B und D.

$$w = v \cdot v' = \frac{m_B^2 + m_D^2 - q^2}{2m_B m_D} . \quad (400)$$

Der erlaubte kinematische Bereich ist

$$0 \leq w - 1 \leq \frac{(m_B - m_D)^2}{2m_B m_D} . \quad (401)$$

Das Matrixelement in der korrekten Normierung lautet, indem wir die QCD-Felder durch entsprechende HQET-Felder ersetzen:

$$\frac{\langle D(p') | \bar{c} \gamma^\mu b | B(p) \rangle}{\sqrt{m_D m_B}} = \langle D(v') | \bar{c}_{v'} \gamma^\mu b_v | B(v) \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_c}\right) = h_+(w)(v^\mu + v'^\mu) + h_-(w)(v^\mu - v'^\mu) , \quad (402)$$

wobei h_+ und h_- unabhängig von m_Q sind. Wegen

$$p + p' = m_B v + m_D v' = \frac{m_B + m_D}{2}(v + v') + \frac{m_B - m_D}{2}(v - v'),$$

ist (vergleiche (396)):

$$f_{\pm} = \frac{m_D \pm m_B}{2\sqrt{m_D m_B}} h_+ + \frac{m_D \mp m_B}{2\sqrt{m_D m_B}} h_-. \quad (403)$$

Mit $r = m_D/m_B$ (404) folgt dann

$$\frac{d\Gamma}{dw}(\bar{B} \rightarrow D l \nu) = \frac{G_F^2}{48\pi^3} |V_{cb}|^2 m_B^5 (w^2 - 1)^{\frac{3}{2}} r^3 (1 + r)^2 [\mathcal{F}_D(w)]^2, \quad (405)$$

mit

$$\mathcal{F}_D(w) = h_+(w) + \frac{1-r}{1+r} h_-(w).$$

Im Falle $w = 1$ (also $v = v'$) verschwindet die differentielle Zerfallsbreite, weil HQ-Spin-Symmetrie:

$$H_-(w) = \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_c}\right).$$

Isgur-Wise-Funktion:

$$\xi(w) = \lim_{m_Q \rightarrow \infty} h_+(w). \quad (406)$$

Man kann dies nachlesen im Buch von Manolaw, Wise: Heavy Quark Physics. Aus (402) ergibt sich

$$\langle D(v') | \bar{c}_v \gamma^\mu b_v | B(v) \rangle = \xi(v) [v^\mu + v'^\mu] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_c}\right).$$

HQ-Flavour-Symmetrie: Für $v = v'$ (also $w = 1$) gilt

$$2\xi(1) = \langle D(v) | \bar{c}_v \gamma^\mu b_v | B(v) \rangle = \langle B(v) | \bar{b}_v \gamma^\mu b_v | B(v) \rangle,$$

mit dem erhaltenen Strom $\bar{b}_v \gamma^\mu b_v$, der in der vollen QCD zur Bottom-Quantenzahl gehört. Analog zu (383) bis (384) erhält man $\xi(1) = 1$ (407). Hieraus lässt sich V_{cb} bestimmen. Wir hatten gesehen, dass es bei $B \rightarrow D^* l \nu$ nur ein einzelner Formfaktor auftritt. Es lassen sich alle auftretenden Formfaktoren auf $\xi(w)$ zurückführen. Es gibt eine Besonderheit: In $B^* \rightarrow D^* l \nu$ treten keine $1/m_Q$ -Korrekturen auf. Deshalb fangen wir zur Diskussion der Symmetrie mit diesem Zerfall an. Die Kombination aus Formfaktoren im kinematischen Endpunkt sei $F_{D^*}(1)$. Der Weltmittelwert (siehe „Heavy Flavor Averaging Group“) ist gegeben durch

$$|V_{cb}| F_{D^*}(1) = 35,41 \pm 0,52. \quad (408)$$

Die Größe selbst kann man nicht messen, weil es im Endpunkt keine Daten gibt. Daher ist zu extrapolieren, was eine Fehlerquelle ist. Aus QCD-Gitterrechnungen (Lacho) kommt

$$F_{D^*}(1) = 0,924 \pm 0,023 = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{m_c^2}\right). \quad (409)$$

Hieraus ergibt sich dann

$$|V_{cb}| = (38,8 \pm 0,6_{\text{exp}} \pm 1,0_{\text{theo}}) \cdot 10^{-3}. \quad (410)$$

Der experimentelle Fehler ist so klein wegen $d\Gamma/dw \sim (w^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$. Entfernt man sich von $w = 1$, gibt es bereits statistisch signifikante Daten. Aus dem anderen Zerfall $B \rightarrow D l \nu$ folgt der Weltmittelwert

$$|V_{cb}| = (39,4 \pm 4,7_{\text{exp}} \pm 0,8_{\text{theo}}) \cdot 10^{-3}, \quad (411)$$

wobei der Fehler wegen $d\Gamma/dw \sim (w^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$ größer ist als bei $B \rightarrow D^* l \nu$. Als besser hat sich der inklusive Zerfall $B \rightarrow X_c l \nu$, wobei X_c die Summe über alle Zustände ist, in denen man ein Meson mit Charm-Quantenzahl 1 findet. Dies wiederum liefert

$$|V_{cb}| = (41,48 \pm 0,47_{\text{stat}} \pm 0,08_{\tau_B} \pm 0,58_{\text{theo}}) \cdot 10^{-3}. \quad (412)$$

$|V_{ub}|$ kann aus $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ l \nu$ (mit $\bar{B}^0 \sim b\bar{d}$ und $\pi^+ \sim u\bar{d}$) bestimmt werden. Keine HQET-Normierung erfordert mehr Gitter-Input.

5.2 Effektive Feldtheorien: Schwacher Hamilton-Operator

Auch hier geht es wieder erneut darum, Skalen zu trennen: $M_W \gg m_b, m_c \gg \Lambda_{\text{QCD}}$. Die Trennung der ersten beiden Skalen wird durch den effektiven Hamiltonoperator \mathcal{H} bewerkstelligt. Betrachten wir einen $|\Delta B| = 1$ -Prozess, also zum Beispiel den Zerfall eines B-Mesons

$$= -4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{ud} \times \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_b^2}{M_W^2}\right) \right].$$

Das Teil des Feynmandiagramms, der dem Austausch eines schweren W-Bosons entspricht, ersetzt man durch eine punktförmige Wechselwirkung. Dies folgt aus der Entwicklung des Propagators

$$\frac{g^{\mu\nu}}{p^2 - M_W^2} = -\frac{g^{\mu\nu}}{M_W^2} \left(1 + \frac{p^2}{M_W^2} + \dots \right).$$

Das Ganze lässt sich durch Angabe eines $|\Delta B| = |\Delta c| = |\Delta u| = |\Delta d| = 1$ -Hamiltonoperator formalisieren:

$$\mathcal{H} = 4 \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{ud}^* C_2 Q_2, \quad (414)$$

mit dem **Wilsonkoeffizienten** $C_2 = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s)$ (415). Dabei handelt es sich um eine effektive Kopplung. Q_2 bezeichnet die effektive Vier-Quark-Wechselwirkung und ist ein Produkt von vier Feldern, die alle am gleichen Ort definiert sind:

$$Q_2 = \bar{c}_L^i \gamma_\mu b_L^i \bar{d}_L^j \gamma^\mu u_L^j. \quad (416)$$

Man bezeichnet Q_2 als **Vierquark-Operator**. i und j sind Farbindizes. Für den $|\Delta B| = \dots = 1$ -Prozess gilt:

$$\langle f | S_{\text{SM}} | B \rangle = \langle f | S_{\text{eff}} | B \rangle \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_b^2}{M_W^2}\right) \right],$$

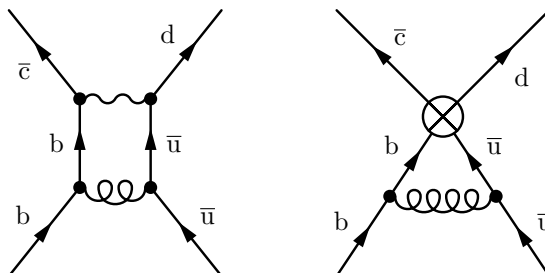
mit

$$S_{\text{eff}} = T \exp \left(-i \int d^4x \mathcal{H}(x) \right) = \mathbf{1} - i \int d^4x \mathcal{H}(x) + \mathcal{O}(G_F^2), \quad \mathcal{O}(G_F^2) \triangleq \mathcal{O}\left(\frac{m_b^2}{M_W^2}\right).$$

Um einen komplizierten Prozess auszurechnen, kann man den einfacheren Hamiltonoperator der effektiven Theorie verwenden:

$$\langle f | S_{\text{SM}} | B \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_B - p_f) (-i) \langle f | \mathcal{H}(0) | B \rangle \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{m_b^2}{m_W^2}\right) \right], \quad (418)$$

was sich aus Translationsinvarianz ergibt. Kommen wir nun zu QCD-Korrekturen: $C_2 Q_2$ wird renormiert. In Analogie zur unrenormierten Kopplung $g_s^{(0)} = g_s^{\text{bare}}$ und $g_s = g_s^{\text{ren}}$ würde man C_2^{bare} und $C_2^{\text{ren}} = C_2$ definieren. Aus historischen Gründen renormiert man im Produkt $C_2 Q_2$ nicht die effektive Kopplung C_2 , sondern Q_2^{bare} : $Q_2 = Q_2^{\text{ren}}$ und man spricht dabei von „Operatorrenormierung“. Warum werden diese Größen renormiert? Betrachtet man dazu bestimmte QCD-Diagramme. Das Diagramm



ist UV-divergent. Die Divergenzstruktur ist also verschieden in beiden Theorien. Mit dem gleichen Satz an Countertermen kann man die effektive Theorie nicht renormieren. Abgesehen davon, dass das zweite Diagramm divergent ist, besitzt es auch noch eine neue Farbstruktur und zwar

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{2N_c} \delta_{ij} \delta_{kl},$$

mit $Q_1 = \bar{c}_L^i \gamma_\mu b_L^j \bar{d}_L^k \gamma^\mu u_L^l$ (419). i, j, k und l sind die Farbindices der äußeren Linien. Die zweite Farbstruktur Q_2 entspricht der gewöhnlichen, bei der die Farbe erhalten bleibt. Es sind nun zwei Gegenterme notwendig: $Z_{22}Q_2$ und $Z_{21}Q_1$. Der Umstand, dass für die Renormierung einer Kopplung zwei neue Operatoren nötig sind, bezeichnet man als „**Operatormischung**“.

$$\mathcal{H} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 C_i Q_i^{\text{bare}} = \frac{4G_F}{2} \sum_{i,j=1}^2 C_i Z_{ij} Q_j^{\text{ren}}. \quad (420)$$

Die Analogie zur unrenormierten QCD-Kopplung $g_s^{\text{bare}} = \bar{\mu}^\varepsilon Z_g g_s$ ist gegeben durch $C_i Z_{ij} = C_j^{\text{bare}}$. Uns interessieren Matrixelemente von Quarkzuständen und wir bezeichnen $\langle \bar{c}u d | Q_i | b \rangle$ als $\langle Q_i \rangle$ (421).

$$\langle Q_i \rangle = \langle Q_i^{\text{ren}} \rangle^{\text{ren}} = Z_\psi^2 \langle Q_i^{\text{ren}} \rangle^{\text{bare}} = Z_\psi^2 \sum_{j=1}^2 Z_{ij} \langle Q_j^{\text{bare}} \rangle^{\text{bare}}. \quad (422)$$

$\langle Q_i \rangle$ muss endlich sein und definiert die Z_{ij} . Für eine Schleife, also in $\mathcal{O}(\alpha_s)$ gilt

$$Z_\psi = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_\psi^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2),$$

wobei $Z_\psi^{(1)}$ in (319) angegeben ist. Analog schreiben wir

$$Z_{ij} =: \delta_{ij} + \frac{\alpha_s}{4\pi} Z_{ij}^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (423)$$

Bis zu $\mathcal{O}(\alpha_s)$ gilt weiterhin

$$Z_\psi^2 Z_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(2Z_\psi^{(1)} \delta_{ij} + Z_{ij}^{(1)} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (424)$$

und (422) bedeutet:

$$\begin{aligned} \langle Q_i \rangle &= \langle Q_i \rangle^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \langle Q_i \rangle^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \stackrel{(422),(424)}{=} \\ &= \langle Q_i \rangle^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\sum_j \left(2Z_\psi^{(1)} \delta_{ij} + Z_{ij}^{(1)} \right) \langle Q_j \rangle^{(0)} + \langle (Q_i^{\text{bare}})^{(1)} \rangle^{\text{bare}} \right]. \end{aligned} \quad (425)$$

Diagrammatisch sieht diese Gleichung wie folgt aus:

$$\langle Q_i \rangle = \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \nwarrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} \otimes \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \left(2Z_\psi^{(1)} \delta_{ij} + Z_{ij}^{(1)} \right) \times \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \nwarrow \\ \text{---} \nearrow \end{array} \right) + \begin{array}{c} \text{---} \nearrow \\ \text{---} \searrow \\ \text{---} \nwarrow \\ \text{---} \nearrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} + \dots$$

Man findet

$$Z^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad (426)$$

was nicht vom Eichparameter ξ abhängt. Hinter den gleichen Einträgen steckt eine Symmetrie.

$$\mathcal{H} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^2 C_i Q_i^{\text{ren}} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^2 C_i Z_{ij} Q_j^{\text{ren}}. \quad (420)$$

Bestimmung von C_1, C_2 zu $\mathcal{O}(\alpha_s)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{SM}} = & \quad \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots = \\ & = \mathcal{M}_{\text{SM}}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \mathcal{M}_{\text{SM}}^{(1)} \stackrel{!}{=} -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{ud}^* \sum_{i=1}^2 C_i \langle Q_i^{\text{ren}} \rangle^{\text{ren}}. \end{aligned} \quad (427)$$

Mit

$$C_i = C_i^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_i^{(1)}, \quad C_1^{(0)} = 0, \quad C_2^{(0)} = 1, \quad \text{siehe (414),}$$

und (427), also

$$-\mathcal{M}_{\text{SM}}^{(1)} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ub} V_{ud}^* \sum_{i=1}^2 \left[C_i^{(0)} \langle Q_i \rangle^{(1)} + C_i^{(1)} \langle Q_i \rangle^{(0)} \right], \quad (428)$$

findet man:

$$C_1 = \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left[6 \ln \left(\frac{\mu}{M_W} \right) + \frac{11}{2} \right], \quad C_2 = 1 + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} \left[-2 \ln \left(\frac{\mu}{M_W} \right) - \frac{11}{6} \right]. \quad (429)$$

Es tritt keine Abhängigkeit von Impulsen p_i und Quarkmassen $m_{b,c,u,d}$ („**infrarotsicher**“). Die Infrarotstruktur von beiden Diagrammen auf (428) ist identisch und sämtliche Abhängigkeit von den kleinen Skalen kürzt sich heraus. (Für kleine Loopimpulse machen die Diagramme keinen Sinn; dann sind aber beide identisch. C_i enthält nur Information aus harten Impulsen, wo die Störungsrechnung funktioniert. Die UV- und IR-Physik faktorisiert somit; IR-Beiträge können mit gittereichtheoretischen Methoden, Ausnutzung von Symmetrien, QCD-Summenregeln usw. berechnet werden.) Das ist der erste Nutzen der effektiven Feldtheorie. Man kann jedoch noch mehr machen. Selbst wenn alles störungstheoretisch berechenbar wäre, gäbe es ein Problem, nämlich das großer Logarithmen:

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{m_b^2}{M_W^2} \right) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left[\ln \left(\frac{\mu^2}{M_W^2} \right) + \ln \left(\frac{m_b^2}{\mu^2} \right) \right].$$

Die linke Seite der Gleichung ist ein großer Logarithmus im Matrixelement. Auf der rechten Seite wird dieser aufgespalten in einen Teil, der in den Wilsonkoeffizienten C_1, C_2 sitzt und einen Teil, der in $\langle Q_{1,2} \rangle^{(1)}$ vorkommt. Die Physik der Skalen $\geq \mu$ steckt in den Wilsonkoeffizienten und die der Skalen $< \mu$ im Matrixelement. Der Logarithmus

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \ln \left(\frac{m_b^2}{M_W^2} \right),$$

ist erstens zu groß für Störungstheorie und zweitens ist unklar, bei welcher Skala man α_s berechnet ($\alpha_s(m_b) \approx 0,2$, $\alpha_s(M_W) \approx 0,1$). Kommen wir zur Strategie:

- 1.) Wähle in (429): $\mu =: \mu_W = \mathcal{O}(M_W)$
- 2.) Da in der effektiven Theorie die Renormierungsskala μ auftritt, kann man die Renormierungsgruppen-gleichung verwenden. Man evolviert dann $C_{1,2}(\mu_W)$ nach $C_{1,2}(\mu_b)$ mit $\mu_b = \mathcal{O}(m_b)$. $C_{1,2}(\mu_b)$ enthält $(\alpha_s/4\pi \ln(\mu_b/M_W))^n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Die Lösung der Renormierungsgruppengleichung summiert die großen Logarithmen auf.

Der Effekt (bei der Wahl von $\mu_W = M_W$ und $\mu_b = m_b$ ist, dass eine Summation von

$$\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n \ln^n\left(\frac{m_b}{M_W}\right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

in \mathcal{M}_{SM} durchgeführt wird. Startpunkt:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{H} = 0, \quad (432)$$

$$\mu \frac{d}{d\mu} Q_i^{\text{bare}} = 0. \quad (432)$$

Daraus folgt die Ableitung des renormierten Matrixelements:

$$\mu \frac{d}{d\mu} Q_i^{\text{ren}} = \sum_{j=1}^2 \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_{ij} \right) Q_j^{\text{bare}} = - \sum_{i,j=1}^2 \gamma_{ik} Z_{kj} Q_j^{\text{bare}} = - \sum_{k,j=1}^2 \gamma_{ik} Q_k^{\text{ren}}, \quad (433)$$

mit der **anomalen Dimensionsmatrix** γ :

$$\gamma_{ik} =: - \sum_{l=1}^2 \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_{il} \right) Z_{lk}^{-1} = - \left[\left(\mu \frac{d}{d\mu} Z \right) Z^{-1} \right]_{ik}. \quad (434)$$

$$\gamma_{ik} = \frac{\alpha_s}{4\pi} \gamma_{ik}^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \gamma_{ik}^{(1)}. \quad (435)$$

Analog zu (346), (347) spalten wir die Pole in Z_{ij} ab:

$$Z_{ij} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{Z_{ij}^{(11)}}{\varepsilon} + Z_{ij}^{(10)} \right) + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{Z_{ij}^{(22)}}{\varepsilon^2} + \frac{Z_{ij}^{(21)}}{\varepsilon} + Z_{ij}^{(20)} \right). \quad (436)$$

Darüberhinaus gilt

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{(0)} &= 2Z_{ij}^{(11)} + 2\varepsilon Z_{ij}^{(10)}, \\ \gamma_{ij}^{(1)} &= 4Z_{ij}^{(21)} + 2\beta_0 Z_{ij}^{(10)} - 2\{Z_{ij}^{(10)}, Z_{ij}^{(11)}\} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (438)$$

In Leading-Log-Näherung – siehe (426) – gilt

$$\gamma_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}. \quad (439)$$

Aus (431) ergibt sich:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \mathcal{H} = \sum_{i=1}^2 \mu \frac{d}{d\mu} [C_i(\mu) Q_i^{\text{ren}}(\mu)] = \sum_{i,j=1}^2 \left[\mu \frac{d}{d\mu} (C_i Z_{ij}) \right] Q_i^{\text{bare}},$$

und somit

$$\sum_{i=1}^2 \mu \frac{d}{d\mu} (C_i Z_{ij}) = 0,$$

da Q_1, Q_2 linear unabhängig. Mittels der Produktregel folgt

$$\sum_{i=1}^2 \left[\left(\mu \frac{d}{d\mu} \right) Z_{ij} + C_i \mu \frac{d}{d\mu} Z_{ij} \right] = 0,$$

und Multiplikation mit Z_{jk}^{-1} liefert:

$$\mu \frac{d}{d\mu} C_l = - \sum_{i,j=1}^2 C_i \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_{ij} \right) Z_{jl}^{-1} \stackrel{(434)}{=} \sum_{i=1}^2 C_i \gamma_{il}. \quad (440)$$

Das Laufen der Wilsonkoeffizienten wird also durch die anomale Dimension γ bestimmt. In Matrixschreibweise mit $\mathbf{C} = (C_1, C_2)$ lässt sich (440) kompakter schreiben in der Form

$$\mu \frac{d}{d\mu} \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}^\top \gamma \Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \mathbf{C} = \gamma^\top \mathbf{C}. \quad (441)$$

In den massenunabhängigen Schemen lässt sich die μ -Abhängigkeit immer in eine Abhängigkeit nach der Kopplung umschreiben. Vergleiche (342):

$$\mu \frac{d}{d\mu} = \beta(g) \frac{d}{dg} \Rightarrow \frac{d}{dg} \mathbf{C} = \frac{\gamma^\top}{\beta(g)} \mathbf{C}. \quad (442)$$

In Leading-Log-Näherung gilt

$$\frac{\gamma^\top}{\beta(g)} = -\frac{(\gamma^{(0)})^\top}{\beta_0 g} + \mathcal{O}(g) \Rightarrow 2g \frac{d}{dg^2} \mathbf{C} = -\frac{(\gamma^{(0)})^\top}{\beta_0 g} \mathbf{C}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich umschreiben in die Form

$$\frac{d}{dg^2} \left[\exp \left\{ \int \frac{(\gamma^{(0)})^\top}{2\beta_0 g^2} dg^2 \right\} \mathbf{C} \right] = 0. \Rightarrow \exp \left\{ \int \frac{(\gamma^{(0)})^\top}{2\beta_0 g^2} dg^2 \right\} \mathbf{C} = \text{const.}$$

Weiterhin gilt dann

$$\exp \left(\frac{(\gamma^{(0)})^\top}{2\beta_0} \ln g^2(\mu) \right) \mathbf{C}(\mu) = \text{const.} \Rightarrow \mathbf{C}(\mu) = \exp \left\{ \frac{(\gamma^{(0)})^{-1}}{2\beta_0} \ln \left(\frac{g^2(\mu_0^2)}{g^2(\mu^2)} \right) \right\} \mathbf{C}(\mu_0), \quad (443)$$

und somit

$$\mathbf{C}(\mu) = U^{(0)}(\mu, \mu_0) \cdot \mathbf{C}(\mu_0),$$

mit der **Leading-Log-Evolutionsmatrix**

$$U^{(0)}(\mu, \mu_0) = \exp \left\{ \frac{(\gamma^{(0)})^\top}{2\beta_0} \ln \left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)} \right) \right\}. \quad (444)$$

Zur Berechnung der Exponentialfunktion müssen wir die Matrix diagonalisieren. Man führt durch einen Basiswechsel die neuen Operatoren

$$Q_\pm = \frac{1}{2}(Q_2 \pm Q_1), \quad (445)$$

ein bzw.

$$Q_2 = Q_+ + Q_-, \quad Q_1 = Q_+ - Q_-, \quad (446)$$

und erhält:

$$\gamma^{(0)} \mapsto \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \gamma^{(0)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_+^{(0)} & 0 \\ 0 & \gamma_-^{(0)} \end{pmatrix},$$

mit $\gamma_+^{(0)} = 4$ und $\gamma_-^{(0)} = -8$. (444) in der (Q_+, Q_-) -Basis liefert eine diagonale Evolutionsmatrix

$$U^{(0)}(\mu, \mu_0) = \begin{pmatrix} U_+^{(0)}(\mu, \mu_0) & 0 \\ 0 & U_-^{(0)}(\mu, \mu_0) \end{pmatrix}, \quad U_\pm^{(0)}(\mu, \mu_0) = \left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)} \right)^{\gamma_\pm^{(0)}} 2\beta_0. \quad (448)$$

Nach Aufgabe 3 gilt in Leading-Log-Näherung

$$\left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu)} \right)^{\gamma_\pm^{(0)}} 2\beta_0 = 1 - \frac{\alpha_s(\mu_0)}{2\pi} \beta_0 \ln \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right),$$

und somit

$$U_\pm^{(0)}(\mu, \mu_0) = 1 - \frac{\alpha_s(\mu_0)}{2\pi} \beta_0 \ln \left(\frac{\mu_0}{\mu} \right).$$

Alle Logarithmen werden also aufsummiert. Für B-Physik, also $f = 5$, gilt $\beta_0^{(5)} = 23/3$. Mit $\mu_0 = M_W$, $\mu = m_b$ ergibt sich

$$\frac{\alpha_s(\mu_0)}{2\pi} \beta_0 \ln\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right) = 0,45.$$

Die Renormierungsgruppen-Evolution führt wegen $\gamma_+^{(0)} > 0$, $\gamma_-^{(0)} < 0$ zu

$$C_+(m_b) < C_+(M_W) \stackrel{\text{L.Log}}{=} 1, \quad C_-(m_b) > C_-(M_W) \stackrel{\text{L.Log}}{=} 1.$$

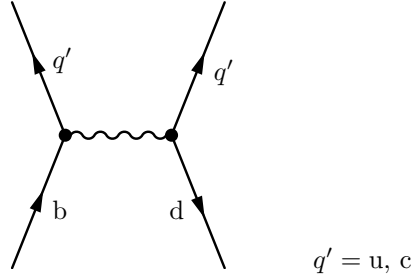
Setzt man $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 226 \text{ MeV}$ folgt hieraus $\alpha_s(M_Z) = 0,118$. Leading-Log-Näherung mit $\mu_b = 4,8 \text{ GeV}$ führt auf die Zahlenwerte

$$C_1(\mu_b) = -0,25, \quad C_2(\mu_b) = 1,11 \Rightarrow C_+(\mu_b) = 0,86, \quad C_-(\mu_b) = 1,36.$$

Mit $\mu_b = 2,4 \text{ GeV}$ ergibt sich

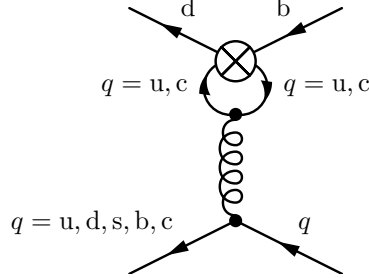
$$C_+(\mu_b) = 0,81, \quad C_-(\mu_b) = 1,53.$$

(Bemerkung zum Begriff der „anomalen Dimension“: $x \sim \mu^d$ erfüllt die Differentialgleichung $\mu d/d\mu x = dx$. In der klassischen Mechanik ist $d \in \mathbb{N}$; in der Quantenfeldtheorie kann d jedoch reell oder sogar komplex sein. Die Skala geht nicht nur naiv in die Physik ein (durch Dimensionsanalyse), sondern auch über Logarithmen (durch Quantenkorrekturen.) Häufig hat man, dass Quark und Antiquark in einem Zerfall denselben Flavour haben. Flavourstruktur: $|\Delta B| = |\Delta D| = 1$, $\Delta S = \Delta C = 0$.



$$Q_1^{q'} = \bar{q}'^\alpha \gamma_\mu b_L^\beta \bar{d}_L^\beta \gamma^\mu q_L^\alpha, \quad Q_2^{q'} = \bar{q}'^\alpha \gamma_\mu b_L^\alpha \bar{d}_L^\beta \gamma^\mu q_L^\beta. \quad (449)$$

Es tritt hier ein völlig neues Phänomen auf, nämlich die Mischung in Pinguin-Operatoren.

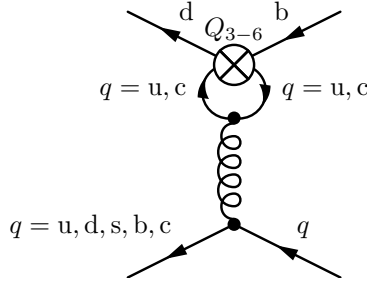


$$\bar{q} \gamma_\mu q = \bar{q}_L \gamma_\mu q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu q_R.$$

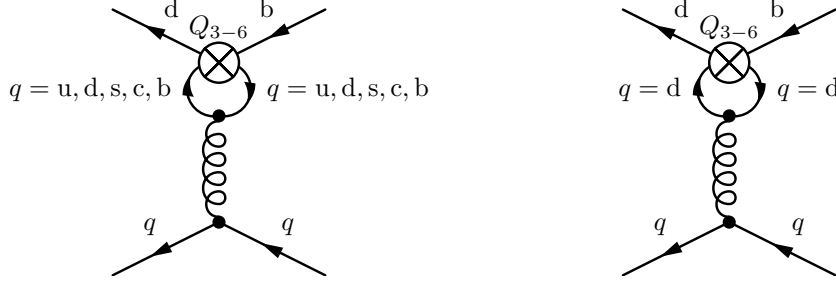
Hier treten die CKM-Faktoren $\xi_u = V_{ub}V_{ud}^*$ und $\xi_c = V_{cb}V_{cd}^*$ auf. Die Gegenterme sind proportional zu $\xi_u + \xi_c = -\xi_t = -V_{tb}V_{td}^*$. Man benötigt die **Pinguinoperatoren**

$$\begin{aligned} Q_3 &= \bar{d}_L^\alpha \gamma_\mu b_L^\alpha \sum_{q=u,d,s,c,b} \bar{q}_L^\beta \gamma^\mu q_L^\beta, \\ Q_4 &= \bar{d}_L^\alpha \gamma_\mu b_L^\beta \sum_q \bar{q}_L^\beta \gamma^\mu q_L^\alpha, \\ Q_5 &= \bar{d}_L^\alpha \gamma_\mu b_L^\alpha \sum_q \bar{q}_R^\beta \gamma^\mu q_R^\beta, \\ Q_6 &= \bar{d}_L^\alpha \gamma_\mu b_L^\beta \sum_q \bar{q}_R^\beta \gamma^\mu q_R^\alpha. \end{aligned} \quad (450)$$

Hier sind die Linien gleicher Ladung kontrahiert:



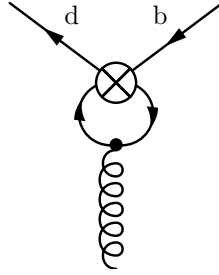
$Q_{1,2}$ mischen in Q_{3-6} , Q_{3-6} mischen in Q_{3-6} , aber nicht in $Q_{1,2}$.



Leading-Log-Näherung bei $\mu = 4, 8 \text{ GeV}$ liefert die Zahlenwerte

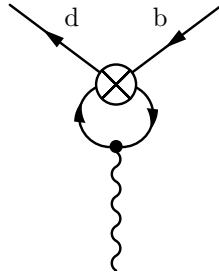
$$C_3 = 0,11, \quad C_4 = -0,026, \quad C_5 = 0,008, \quad C_6 = -0,031. \quad (451)$$

Chromomagnetischer (Pinguin-)Operator:



$$Q_8 = -\frac{g_s}{16\pi^2} m_b \bar{d}_L \sigma^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a T^a b_R, \quad (452)$$

und mit $G_{\mu\nu}^a$ aus (120) und $\sigma^{\mu\nu} = i/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Q_8 mischt nur in Q_8 , Q_{1-6} mischen in Q_8 . Zur Berechnung höherer Ordnungen in e , g_s benötigt man mehr Operatoren, beispielsweise der **magnetische Pinguinoperator**:



$$Q_7 = -\frac{e}{16\pi^2} m_b \bar{d}_L^\alpha \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} b_R^\alpha, \quad (453)$$

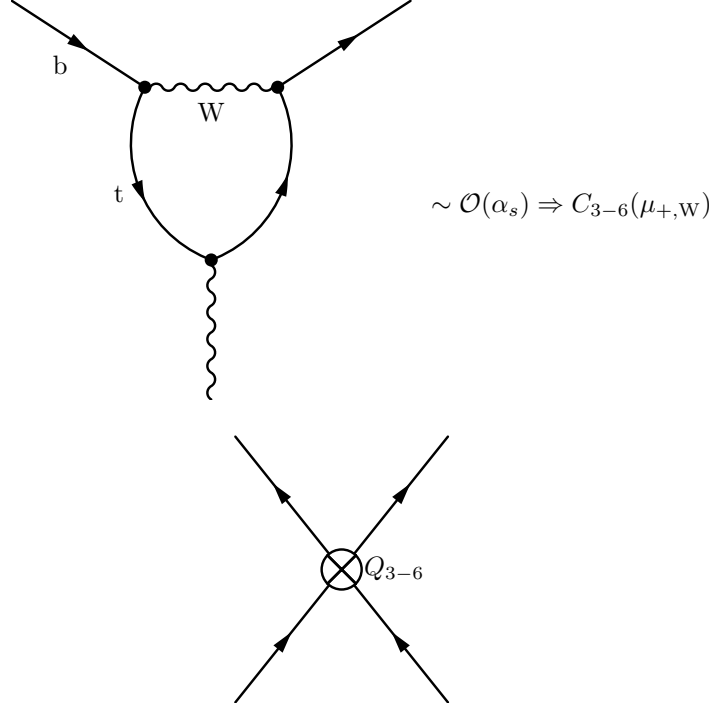
mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu$. Wichtig ist dieser Operator für $b \rightarrow d\gamma$ (bzw. $b \rightarrow s\gamma$). Dies war der erste Pinguin-Prozess, der experimentell beobachtet wurde und zwar bei CLEO in den 90er Jahren. Diese Prozesse sind so wichtig, weil sie Hinweise liefern über die dritte Generation (also das Top-Quark). Gäbe es keine dritte Generation, würden sich die Pinguinbeiträge gegenseitig wegheben. Der neue effektive Hamiltonoperator für die Flavourstruktur $|\Delta B| = |\Delta D| = 1$ und $\Delta s = \Delta c = \Delta u = 0$ liest sich wie folgt:

$$H^{|\Delta B|=1} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{j=1}^2 C_j (\xi_c Q_j^c + \xi_u Q_j^u) - \xi_t \sum_{j=3}^6 C_j Q_j - \xi_t C_8 Q_8 \right. \\ \left. + \text{elektromgn. Operatoren} + \text{elektroschw. Operatoren} \right\} + \text{h.c.} \quad (454)$$

Q_1 und Q_2 nennt man auch Stromoperatoren. Zieht man nämlich das W-Boson auf einem Punkt zusammen, koppeln die beiden Quarkströme aneinander. Auf Leading-Log-Näherung gilt

$$C_8(\mu_b = 4,8 \text{ GeV}) = -0,15. \quad (455)$$

Die Abhängigkeit von m_t in Next-to-Leading-Log-Näherung ist über die Anfangsbedingung bei $\mu = \mu_W = \mathcal{O}(M_W, m_t)$.



5.3 Meson-Zerfälle, direkte CP-Asymmetrien

Das erste Beispiel $B^- \rightarrow D^0 K^-$ ist ein Klassiker in der Erforschung der CP-Verletzung.

$$\mathcal{H}_c = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \lambda_c \sum_{j=1}^2 C_j Q_j^{cu} + \text{h.c.}, \quad \Delta c = -\Delta s, \quad (456)$$

mit

$$\lambda_c = V_{cb} V_{us}^*, \quad Q_2^{cu} = \bar{b}_L^\alpha \gamma_\mu c_L^\alpha \bar{s}_L^\beta \gamma^\mu u_L^\beta.$$

$$\mathcal{H}_u = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \lambda_u \sum_{j=1}^2 C_j Q_j^{uc} + \text{h.c.}, \quad \Delta c = \Delta s, \quad (457)$$

mit $\lambda_u = V_{ub} V_{us}^*$ und $Q_j^{uc} = Q_j^{cu}$ ($c \leftrightarrow u$). Das Matrixelement ist gegeben durch

$$-\mathcal{M}(B^- \rightarrow D^0 K^-) = \langle D^0 K^- | \mathcal{H}_c | B^- \rangle = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \lambda_c \sum_{j=1}^2 C_j \langle D^0 K^- | Q_j^{cu} | B^- \rangle =: \lambda_c A_c, \quad (458)$$

wobei $C_j \langle D^0 K^- | Q_j^{cu} | B^- \rangle$ zur Zeit unmöglich auszurechnen ist. Da in λ_c die CP-Information steckt, wird dieser Faktor isoliert. A_c lässt sich nicht berechnen. Jedoch kann man den CP-konjugierten Prozess betrachten:

$$-\mathcal{M}(B^+ \rightarrow \overline{D^0} K^+) = \langle \overline{D^0} K^+ | \mathcal{H}_c | B^+ \rangle = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \lambda_c^* \sum_{j=1}^2 \langle \overline{D^0} K^+ | (Q_j^{cu})^\dagger | B^+ \rangle. \quad (459)$$

Was wir nun ausnutzen werden, ist die CP-Erhaltung der **starken** Wechselwirkung. Mit $|\overline{D^0} K^+\rangle = -\mathcal{CP} |D^0 K^-\rangle$ und $|B^+\rangle = -\mathcal{CP} |B^-\rangle$ erhalten wir:

$$\langle \overline{D^0} K^+ | (\mathcal{CP})^\dagger \mathcal{CP} (Q_j^{cu})^\dagger \mathcal{CP} | B^+ \rangle = \langle D^0 K^- | \mathcal{CP} (Q_j^{cu})^\dagger (\mathcal{CP})^\dagger | B^- \rangle.$$

Wie man das CP-konjugierte des Operators $(Q_j^{\text{cu}})^\dagger$ berechnet, haben wir im Kapitel über diskrete Symmetrien kennengelernt. Damit gilt:

$$\mathcal{CP}(Q_j^{\text{cu}})^\dagger(\mathcal{CP})^\dagger = \mathcal{CP}\bar{c}_L\gamma_\mu b_L(\mathcal{CP})^\dagger\mathcal{CP}\bar{u}_L\gamma^\mu s_L(\mathcal{CP})^\dagger \stackrel{(224)}{=} Q_j^{\text{cu}}.$$

Damit haben wir es geschafft, das Matrixelement des zweiten Zerfalls auf das des ersten Zerfalls zurückzuführen:

$$\langle \bar{D}^0 K^+ | (Q_j^{\text{cu}})^\dagger | B^+ \rangle = \langle D^0 K^- | Q_j^{\text{cu}} | B^- \rangle.$$

Also gilt:

$$-\mathcal{M}(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+) \stackrel{(458)-(460)}{=} \lambda_c^* A_c. \quad (461)$$

Definiere die direkte CP-Asymmetrie (mit $|\bar{f}\rangle = \mathcal{CP}|f\rangle$):

$$A_{\mathcal{CP}}^{\text{dir}}(B \rightarrow f) = \frac{\Gamma(B \rightarrow f) - \Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(B \rightarrow f) + \Gamma(\bar{B} \rightarrow \bar{f})}. \quad (462)$$

Das heißt, mit (461) ist

$$A_{\mathcal{CP}}^{\text{dir}}(B^- \rightarrow D^0 K^-) = \frac{|\mathcal{M}(B^- \rightarrow D^0 K^-)|^2 - |\mathcal{M}(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+)|^2}{|\mathcal{M}(B^- \rightarrow D^0 K^-)|^2 + |\mathcal{M}(B^+ \rightarrow \bar{D}^0 K^+)|^2} = \frac{|\lambda_c|^2 |A_c|^2 - |\lambda_c^*|^2 |A_c|^2}{|\lambda_c|^2 |A_c|^2 + |\lambda_c^*|^2 |A_c|^2},$$

wobei sich der Phasenraumfaktor, der für alle Zerfälle gleich ist, herauskürzt. Analog:

$$\begin{aligned} -\mathcal{M}(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-) &= \langle \bar{D}^0 K^- | \mathcal{H}_u | B^- \rangle = \lambda_u A_u, \\ -\mathcal{M}(B^+ \rightarrow D^0 K^+) &= \lambda_u^* A_u. \end{aligned} \quad (463)$$

Mit unterschiedlichem A_u wird $A_{\mathcal{CP}}^{\text{dir}} = 0$. Der Trick um weiterzukommen geht auf Gronan, London und Wyler zurück: Beobachtet man das D-Meson für einen flavour-spezifischen Zerfall, beispielsweise $D^0 \rightarrow K^- 1^+ \nu_l$ bzw. $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ l^- \bar{\nu}_l$ so findet man aus $\Gamma(B^- \rightarrow D^0 K^-)$ gerade $|\lambda_c| |A_c|$ und aus $\Gamma(B^- \rightarrow \bar{D}^0 K^-)$ gerade $|\lambda_u| |A_u|$.

Kapitel 6

Literatur

- 1.) Kapitel in Büchern über Elementarteilchenphysik, zum Beispiel
 - a.) T.P. Cheng, L.F. Li: Gauge Theory of Elementary Particles
 - b.) O. Nachtmann: Elementarteilchenphysik: Phänomene und Konzepte
- 2.) Fachbücher:
 - a.) I. Bigi, A. Sanda: CP violation (1999)
 - b.) G. Branco, L. Lavoura, J. Silva: CP violation (1999)
 - c.) A. Manohar, M. Wise: Heavy Quark Physics
- 3.) Übersichtsartikel (gibt es im arXiv):
 - a.) M. Battaglia et al. (eds): The CKM matrix and the Unitary triangle (Oktober 2003), hep-ph/0304132
 - b.) K. Anikeev et al.: B physics at the Tevatron: Run II and Beyond (Februar 2002), hep-ph/0201071
 - * Für theoretisch Interessierte: Kapitel 1, 6.1, 7.1, 7.4, 8.1 bis 8.4
 - * Experiment: Kapitel 2 (Tevatron)
 - c.) P. Harrison, H. Quinn (ed): The BaBar Physics Book (1998)
 - d.) P. Ball et al. (ed): B decays at the LHC, hep-ph/0003238
 - e.) A. Buras: Les Houches lectures, hep-ph/9806471
 - f.) G. Buchalla, A. Buras, M. Lautenbacher, Rev. Mod. Phys. 68 (1996) 1125.
- 4.) Bücher zu klassischen Experimenten:
 - R.N. Cahn, G.E. Goldhaber: The experimental foundations of particle physics