Mitschrieb zur Vorlesung: Funktionentheorie I

Dr. Schmoeger

Vorlesung Sommersemester 2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung Funktionentheorie I
von Herrn Dr. Schmoeger im Sommersemester 2006
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Komplexe Zahlen

Wir gehen aus von der Menge $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Für $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir eine Addition durch $(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$ und eine Multiplikation $(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$. Wir setzen abkürzend $\mathrm{i} := (0,1)$ und bezeichnen i als **imaginäre Einheit**. Wenden wir nun die Regeln der Multiplikation an, so stellen wir fest, dass $\mathrm{i}^2 = (-1, 0)$ gilt.

<u>Definition und Satz 1.1:</u>

$\mathbb{R}^2$ ist mit obiger Addition und Multiplikation ein Körper. Dieser wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet und heißt **Körper der komplexen Zahlen**.

1.) $(0,0)$ ist das neutrale Element bezüglich der Addition und $(1,0)$ das neutrale Element der Multiplikation.

2.) Für $(a,b) \in \mathbb{C}$ ist $(-a,-b)$ das inverse Element bezüglich der Addition. Für $(a,b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ ist
$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$
das inverse Element der Multiplikation.

<u>Beweis:</u>

Dies ergibt sich durch direktes Nachrechnen! $\square$

Definiere eine Abbildung φ: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ durch $\varphi(a) := (a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ und auch $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, $\varphi(0) = (0,0)$ und ebenso $\varphi(1) = (1,0)$. φ ist also ein injektiver Körperhomomorphismus. Also ist $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ und wir schreiben a statt $(a,0)$ für $a \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dann in dieser Notation $\mathrm{i}^2 = -1$.

<u>Definition und Satz 1.2:</u>

Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine eindeutige Darstellung $z = a + \mathrm{i}b$ mit a, $b \in \mathbb{R}$. Wir definieren $\mathrm{Re}(z) := a$ (**Realteil** von z) und $\mathrm{Im}(z) := b$ (**Imaginärteil** von z).

<u>Beweis:</u>

Sei $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ mit a, $b \in \mathbb{R}$.

$z = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (0,1) \cdot (b,0) = a + \mathrm{i}b$

Da man das ganze auch rückwärts lesen kann, folgt daraus die Eindeutigkeit. $\square$

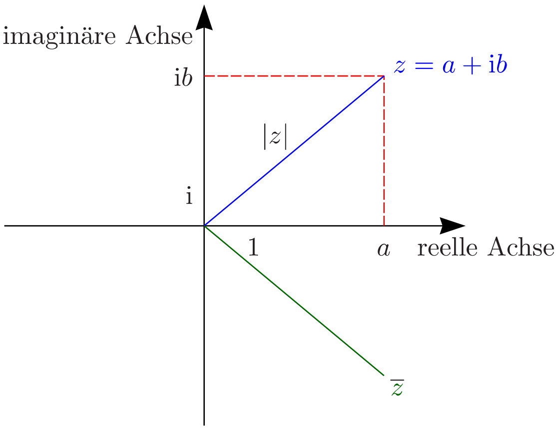
<u>Definition:</u>

Sei $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$ mit a, $b \in \mathbb{R}$.

1.) $\overline{z} := a - \mathrm{i}b$ heißt die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

2.) $|z| := (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ $(= \|(a,b)\| =$ euklidische Norm von $(a,b) \in \mathbb{R}^2)$ heißt **Betrag von z**. Es gilt immer $|z| \geq 0$.

1.1 Geometrische Veranschaulichung von $\mathbb{C}$: Komplexe Ebene



$|z|$ ist der Abstand von z und 0.

Satz 1.3:

Seien z, $w \in \mathbb{C}$.

1.) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$
z ist $\in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $z = \overline{z}$ gilt. Außerdem sind zwei komplexe Zahlen z und w genau dann gleich, wenn $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. Auch ist $|z| = 0$ äquivalent $z = 0$.

2.) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$, $\overline{(1/w)} = 1/\overline{w}$, falls $w \neq 0$

3.) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

4.) $|\overline{z}| = |z|$, $|z|^2 = z\overline{z} = \overline{z}z$
Für $z \neq 0$ gilt $1/z = \overline{z}/(z\overline{z}) = \overline{z}/|z|^2$.

5.) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|1/w| = 1/|w|$ für $w \neq 0$

6.) Dreiecksungleichung: $|z + w| \leq |z| + |w|$

7.) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Beweis:

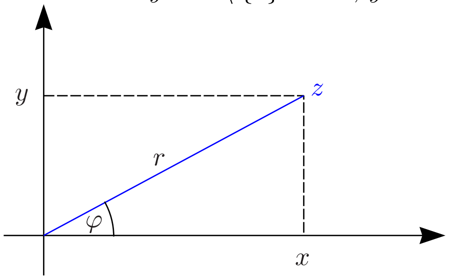
Die Punkte (1)-(5) ergeben sich durch direktes Nachrechnen. (7) folgt aus (6) wörtlich wie in $\mathbb{R}$, also werden wir nur (6) beweisen.

$$|z+w|^2 \overset{(3)}{=} (z+w)(\overline{z+w}) \overset{(2)}{=} (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \overset{(1),(3)}{=} |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \leq$$
$$\leq |z|^2 + 2|\mathrm{Re}(z\overline{w})| + |w|^2 \overset{(3)}{\leq} |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

□

1.2 Polarkoordinaten

Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit x, $y \in \mathbb{R}$ und $r := |z|$.



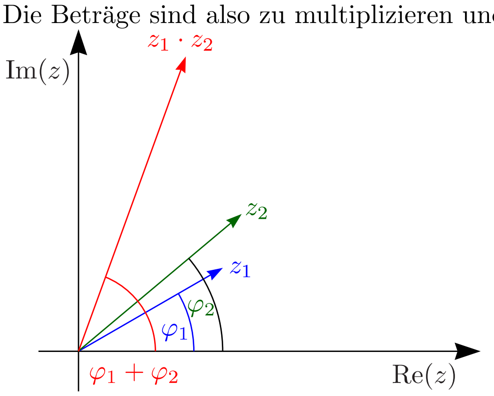
Bekannt ist, dass ein $\varphi \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ ist. Dann gilt:

$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$

Die Zahl φ heißt **ein Argument** von z und wird mit $\arg(z)$ bezeichnet. Mit φ ist auch $\varphi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ein Argument von z. Aber es gibt genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit der Eigenschaft $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Dieses φ heißt der **Hauptwert des Arguments** und wird als $\mathrm{Arg}(z)$ bezeichnet. Seien $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $(\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathbb{R})$. Die Additionstheoreme von Sinus und Kosinus liefern

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \tag{$*$}$$

Die Beträge sind also zu multiplizieren und die Argumente zu addieren.



Aus $(*)$ folgt induktiv die folgende Formel.

1.3 Wurzeln und Formel von de Moivre

Es gilt $[\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi]^n = \cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $\varphi \in \mathbb{R}$. Beachte $z^0 := 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Definition:

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = a$ heißt eine **n-te Wurzel aus** a.

Satz 1.5:

Sei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ und $a = |a|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ für $\varphi \in \mathbb{R}$. Für $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ setze

$$z_k := \sqrt[k]{|a|}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

Dann gilt:

1.) $z_j \neq z_k$ für $j \neq k$

2.) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^n = a$ genau dann, wenn $z \in \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$.

Betrachten wir gesondert den Spezialfall $a = 1$:

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \quad \text{für } k = 0,\ \ldots,\ n-1$$

Diese z_k sind die **n-ten Einheitswurzeln**.

Beweis:

1.) Übung!

2.) „$\Leftarrow$“: $z_k^n \overset{1.4}{=} |a|\left[\cos(\varphi + 2\pi k) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2\pi k)\right] = |a|\left[\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right] = a$

„$\Rightarrow$“: Sei $z^n = a$, woraus folgt $|z| = \sqrt[n]{|a|}$. Sei für $z \neq 0$ $z = |z|(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a = |a|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = z^n \overset{1.4}{=} |z|^n(\cos(n\alpha) + \mathrm{i}\sin(n\alpha))$$

Hieraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich $\cos\varphi = \cos(n\alpha)$ und $\sin\varphi = \sin(n\alpha)$. Also gibt es $j \in \mathbb{Z}$ mit $n\alpha = \varphi + 2\pi j$ und damit gilt $\alpha = \varphi/n + 2\pi j/n$. Es existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ mit $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $j = ln + k$.

$$\frac{j}{n} = l + \frac{k}{n} = \alpha = \frac{\varphi}{n} + 2\pi\left(l + \frac{k}{n}\right) = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} + 2\pi l$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \text{ und } \sin(\alpha) = \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) \Rightarrow z = z_k \qquad \square$$

Beispiel:

Die vier vierten Einheitswurzeln für $a = 1$ sind gegeben durch

$$z_k = \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \text{ für } k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -1$ und $z_3 = -\mathrm{i}$

Kapitel 2

Topologische Begriffe

Definition:

(a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$.

1.) (a_n) heißt **beschränkt** genau dann, wenn ein $c \geq 0$ existiert, so dass $|a_n| \leq c \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

2.) (a_n) heißt eine **Cauchy-Folge** genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle n, $m \geq n_0$.

3.) (a_n) heißt **konvergent** genau dann, wenn ein $a \in \mathbb{C}$ existiert, so dass $|a_n - a| \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$. (Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.) In diesem Fall ist a eindeutig bestimmt, was als Übung gezeigt werden kann. a heißt dann der **Grenzwert** oder **Limes** von (a_n). Man schreibt:

$$\lim_{n \mapsto \infty} a_n = a \text{ oder } a_n \mapsto a \text{ für } n \mapsto \infty \text{ oder } a_n \mapsto a$$

4.) (a_n) heißt **divergent** genau dann, wenn (a_n) nicht konvergent ist.

Beispiel:

Wir betrachten die Folge $a_n = 1/n + \mathrm{i}(1 - 1/n)$, welche gegen i konvergiert, wie man folgendermaßen zeigt:

$$|a_n - \mathrm{i}| = \left| \frac{1}{n} - \mathrm{i}\frac{1}{n} \right| = \frac{|1 - \mathrm{i}|}{n} \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty$$

Wie in $\mathbb{R}$ bzw. 1.3 zeigt man:

Satz 2.1:

(a_n) und (b_n) seien Folgen in $\mathbb{C}$ und a, $b \in \mathbb{C}$.

1.) Ist (a_n) konvergent, dann ist (a_n) beschränkt.

2.) (a_n) konvergiert genau dann, wenn $(\mathrm{Re}(a_n))$ und $(\mathrm{Im}(a_n))$ konvergent sind. In diesem Fall gilt $\lim a_n = \lim \mathrm{Re}(a_n) + \mathrm{i} \lim \mathrm{Im}(a_n)$.

3.) Es gelte $a_n \mapsto a$ und $b_n \mapsto b$. Dann gilt außerdem:

$$a_n + b_n \mapsto a + b,\ a_n \cdot b_n = a \cdot b,\ \overline{a_n} \mapsto \overline{a},\ |a_n| \mapsto |a|$$

Ist $a \neq 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$ und $1/a_n \mapsto 1/a$. Ist (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n), so gilt $a_{n_k} \mapsto a$ für $k \mapsto \infty$.

4.) Ist (a_n) beschränkt, so enthält (a_n) eine konvergente Teilfolge (Bolzano-Weierstraß).

5.) (a_n) ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn (a_n) konvergent ist (Cauchy-Kriterium).

Definition:

(a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$ und $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$. (s_n) heißt eine **unendliche Reihe** und wird mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bezeichnet. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt **konvergent** genau dann, wenn (s_n) konvergiert und **divergent** genau dann, wenn (s_n) divergiert. Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so schreibt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \mapsto \infty} s_n$.

Beispiel:

Wir betrachten die **geometrische Reihe**:

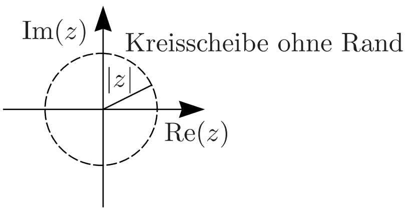
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \ldots \text{ mit } z \in \mathbb{C}$$

Wir in $\mathbb{R}$ zeigt man:

1.) Es gilt:

$$1 + z + \ldots + z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{falls} \quad z \neq 1 \\ n+1 & \text{falls} \quad z = 1 \end{cases}$$

2.) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$. In diesem Falle ist $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ für $|z| < 1$.



Definition:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt genau dann **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Wörtlich wie in $\mathbb{R}$ beweist bzw. formuliert man:

Satz 2.2:

(a_n) sei eine Folge in $\mathbb{C}$.

1.) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann strebt a_n gegen 0.

2.) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und

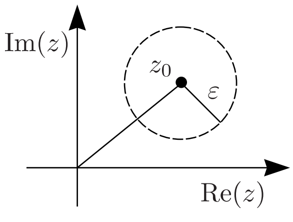
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

3.) Cauchykriterium, Majorantenkriterium, Wurzelkriterium, Minorantenkriterium, Quotientenkriterium, Satz über das Cauchy-Produkt

Definition:

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$.

1.) $U_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ heißt **ε-Umgebung von z_0** oder **offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius ε**.



$\overline{U_\varepsilon(z_0)} := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$ heißt **abgeschlossene Kreisscheibe** und $\dot{U}_\varepsilon(z_0) := U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ **punktierte Kreisscheibe**.

2.) $z_0 \in A$ heißt genau dann **innerer Punkt** von A, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $U_\varepsilon(z_0) \subseteq A$. Darüber hinaus heißt $A^\circ := \{z \in A : z \text{ ist innerer Punkt von } A\}$ das **Innere** von A. Es ist klar, dass $A^\circ \subseteq A$. A heißt **offen** genau dann, wenn $A = A^\circ$.

3.) A heißt **abgeschlossen** genau dann, wenn $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

4.) A heißt **beschränkt** genau dann, wenn es ein $c \geq 0$ gibt, so dass $|a| \leq c$ für alle $a \in A$.

5.) A heißt genau dann **kompakt**, wenn A sowohl beschränkt als auch abgeschlossen ist.

6.) z_0 heißt ein **Häufungspunkt** von A genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $\dot{U}_\varepsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$. $\overline{A} := \{z \in \mathbb{C} : z \text{ ist Häufungspunkt von } A\} \cup A$ heißt die **Abschließung** von A.

7.) z_0 heißt **Randpunkt** von A genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(z_0) \cap A \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$. Die Menge $\partial A := \{z \in \mathbb{C}\colon z \text{ ist Randpunkt von } A\}$ heißt **Rand** von A.

Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man:

Satz 2.3:

1.) A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = \overline{A}$. Dies ist äquivalent dazu, dass der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A zu A gehört.

2.) z_0 ist ein Häufungspunkt von A genau dann, wenn eine Folge (z_n) in $A \setminus \{z_0\}$ existiert mit $z_n \mapsto z_0$.

3.) A ist kompakt genau dann, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge enthält, deren Limes zu A gehört.

Dies ist äquivalent dazu, dass jede offene Überdeckung von A eine endliche Überdeckung von A enthält (Überdeckungssatz von Heine Borel).

Kapitel 3

Stetigkeit, Zusammenhang, Gebiete

In den Paragraphen seien D, $E \subseteq \mathbb{C}$, $C \neq \emptyset \neq E$ und $f\colon D \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion. Die Funktionen $\operatorname{Re}(f)$, $\operatorname{Im}(f)$, $|f|\colon D \mapsto \mathbb{R}$ sind definiert durch $(\operatorname{Re} f)(z) := \operatorname{Re}(f(z))$, $(\operatorname{Im} f)(z) := \operatorname{Im}(f(z))$ und $|f|(z) := |f(z)|$.

Definition:

Sei z_0 ein Häufungspunkt von D und $a \in \mathbb{C}$. Es gilt $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = a$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(z) - a| < \varepsilon$ für jedes $z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$. In diesem Fall schreibt man auch $f(z) \mapsto a$ für $z \mapsto z_0$. $\lim_{z \mapsto z_0} f(z)$ existiert genau dann, wenn ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = a$.

Übung:

Es gilt $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = a$ genau dann, wenn für jede Folge (z_n) in $D \setminus \{z_0\}$ mit $z_n \mapsto z_0$ gilt, dass $f(z_n) \mapsto a$.

Definition:

1.) Sei $z_0 \in D$. f heißt **stetig in z_0**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ $\forall$ $z \in U_\delta(z_0) \cap D$.

2.) f heißt **stetig auf D** genau dann, wenn f in jedem $z \in D$ stetig ist. In diesem Falle schreiben wir $f \in C(D)$.

Beispiele:

1.) Wir betrachten Polynome $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Es ist klar, dass $p \in C(\mathbb{C})$.

2.) $f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z} & \text{falls} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad z = 0 \end{cases}$

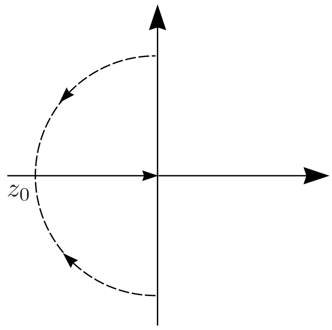
Es ist klar, dass $f \in C(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Für $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $f(z) = 1 \neq f(z) = 0$ für $z \mapsto 0$. Also ist f in z_0 **nicht** stetig.

3.) $f(z) = \begin{cases} \frac{(\operatorname{Re}(z))^2}{z} & \text{falls} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad z = 0 \end{cases}$ Für $z \neq 0$ gilt:

$$|f(z)| = \frac{|\operatorname{Re}(z)|^2}{|z|} \underset{1.3}{\leq} \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

Also ist f in $z_0 = 0$ stetig und insgesamt gilt $f \in C(\mathbb{C})$.

4.) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Für $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in D$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ sei $f(z) = \varphi = \operatorname{Arg}(z)$. Behauptung: Ist $z_0 \in \mathbb{R}$ und $z_0 < 0$, so ist f in z_0 **nicht** stetig.



$$z_n := |z_0| \left[\cos\left(\pi - \frac{1}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\pi - \frac{1}{n}\right)\right] \text{ und } w_n = |z_0| \left[\cos\left(-\pi + \frac{1}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\pi + \frac{1}{n}\right)\right]$$

Es gilt $z_n \mapsto -|z_0| = z_0$ und $w_n \mapsto -|z_0| = z_0$.

$$f(z_n) = \mathrm{Arg}(z_n) = \pi - \frac{1}{n} \mapsto \pi \text{ und } f(w_n) = \mathrm{Arg}(w_n) = -\pi + \frac{1}{n} = -\pi$$

Wie im $\mathbb{R}^n$ beweist man die folgenden Sätze 3.1, 3.2 und 3.3:

Satz 3.1:

Sei $z_0 \in D$.

1.) f ist stetig in z_0 genau dann, wenn $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ in z_0 stetig sind. Dies ist äquivalent dazu, dass für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \mapsto z_0$ gilt: $f(z_n) \mapsto f(z_0)$.

2.) Ist z_0 ein Häufungspunkt von D, so gilt: f ist in z_0 stetig genau dann, wenn $\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0)$.

3.) Sei g: $D \mapsto \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und f, g seien in z_0 stetig. Dann sind $f+g$, $f \cdot g$, und $|f|$ stetig in z_0. Ist des weiteren $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so ist $1/f$ stetig in z_0.

Satz 3.2:

Sei g: $E \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion, $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}$, $f(D) \subseteq E$. Ist f stetig in z_0 und g stetig in $f(z_0)$, so ist $g \circ f$: $D \mapsto \mathbb{C}$ stetig in z_0.

Satz 3.3:

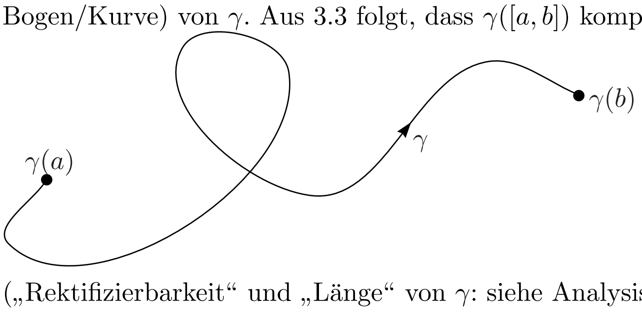
D sei **kompakt** und $f \in C(D)$.

1.) $f(D)$ ist kompakt.

2.) Es existieren $\max |f(D)|$ und $\min |f(D)|$.

Definition:

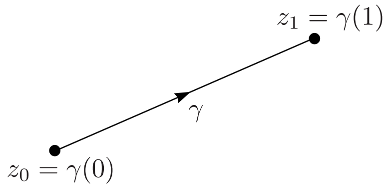
Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine **stetige** Funktion γ: $[a,b] \mapsto \mathbb{C}$ heißt ein **Weg** (in $\mathbb{C}$). $\gamma(a)$ heißt **Anfangspunkt** von γ und $\gamma(b)$ heißt **Endpunkt** von γ. Die Bildmenge $\gamma([a,b])$ heißt der **Träger** (der zu γ gehörende Bogen/Kurve) von γ. Aus 3.3 folgt, dass $\gamma([a,b])$ kompakt ist.



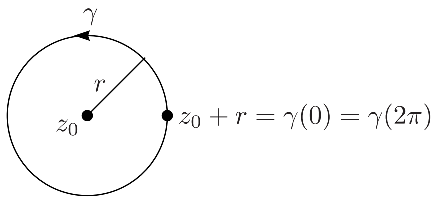
(„Rektifizierbarkeit“ und „Länge“ von γ: siehe Analysis II)

Beispiele:

1.) Seien z_0, $z_1 \in \mathbb{C}$, $\gamma(t) := z_0 + t(z_1 - z_0)$ mit $t \in [0, 1]$. $S[z_0, z_1] := \gamma([0, 1])$ ist die **Verbingungsstrecke** von z_0 und z_1.



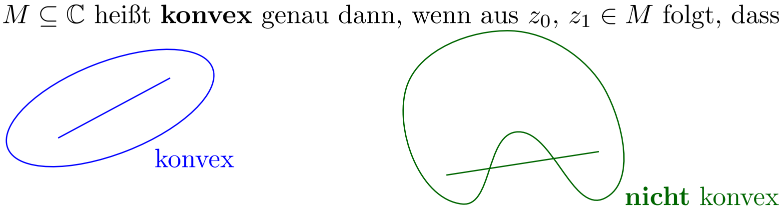
2.) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$: $\gamma(t) := z_0 + r(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))$ mit $t \in [0, 2\pi]$.



Es ist $\gamma([0, 2\pi]) = \partial\overline{U_r(z_0)}$.

Definition:

$M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **konvex** genau dann, wenn aus z_0, $z_1 \in M$ folgt, dass stets $S[z_0, z_1] \subseteq M$ ist.



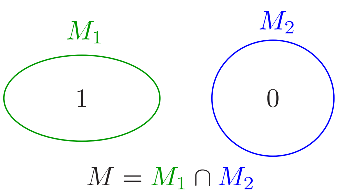
Für den Rest des Paragraphen sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$.

Definition:

1.) Eine Funktion $\varphi\colon M \mapsto \mathbb{C}$ heißt auf M **lokal konstant** genau dann, wenn für alle $a \in M$ $\delta = \delta(a) > 0$ existiert. φ ist auf $U_\delta(a) \cap M$ konstant. Beachte: In diesem Fall ist $\varphi \in C(M)$.

2.) M heißt **zusammenhängend** genau dann, wenn jede auf M lokal konstante Funktion auf M konstant ist.

(Man kann beispielsweise eine Funktion f definieren, die auf einer Menge M_1 gleich 1 und auf der anderen Menge M_2 gleich 0 ist.



Dann ist f zwar jeweils auf M_1 und M_2 lokal konstant, aber nicht auf $M = M_1 \cap M_2$ konstant, womit M kein Gebiet ist.)

3.) M heißt **wegzusammenhängend** genau dann, wenn zu je zwei Punkten z, $w \in M$ ein Weg $\gamma\colon [a, b] \mapsto \mathbb{C}$: $\gamma([a, b]) \subseteq M$, $\gamma(a) = z$ und $\gamma(b) = w$ existiert. (Beispielsweise sind konvexe Mengen auch wegzusammenhängend.)

4.) M heißt genau dann ein **Gebiet**, wenn M offen und wegzusammenhängend ist.

Bemerkungen:

1.) Offene und konvexe Mengen sind Gebiete.

2.) **Ohne** Beweis: Aus der Wegzusammenhängigkeit folgt Zusammenhängigkeit, aber die Umkehrung ist im allgemeinen falsch. (Bei offenen Mengen gilt die Umkehrung.)

Satz 3.4:

Die Menge M sei **offen**. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1.) M ist ein Gebiet.

2.) M ist wegzusammenhängend.

3.) M ist zusammenhängend.

4.) Aus $M = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ und A, B offen folgt stets $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Beweis:

Die Äquivalenz von (1) und (2) ist klar nach der Definition. Die Äquivalenz von (3) und (2) wollen wir ohne Beweis annehmen. Es bleibt zu zeigen, dass aus Aussage (3) Aussage (4) folgt: Sei $M = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ mit offenen Mengen A, B. Wir machen die Annahme $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$. Definiere φ: $M \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(z) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad z \in A \\ 0 & \text{für} \quad z \in B \end{cases}$$

Sei $z_0 \in M$.

- Fall 1: Sei $z_0 \in A$ und A offen. Dann existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq A$. Hieraus folgt, dass φ auf $U_\delta(z_0)$ konstant ist.
- Fall 2: Sei $z_0 \in B$ und B offen. Dann existiert $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq B$. Hieraus folgt, dass φ auf $U_\delta(z_0)$ konstant ist.

φ ist also auf M lokal konstant. Nach der Voraussetzung ist φ auf M konstant.
Aus Behauptung (4) folgt Behauptung (3). Sei φ: $M \mapsto \mathbb{C}$ lokal konstant. Wir nehmen an, dass φ nicht konstant auf M ist. Es existieren zwei Punkte z_0, $w_0 \in M$ mit $\varphi(z_0) \neq \varphi(w_0)$. Sei $z_0 \in A$ und $w_0 \in B$ mit $A := \{z \in M : \varphi(z) = \varphi(z_0)\}$ (also $A \neq \emptyset$) und $B := M \setminus A$ (also $B \neq \emptyset$).
Es ist klar, dass $M = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Damit bleibt zu zeigen, dass A und B offen sind. Sei $z_1 \in A$. φ ist lokal konstant, womit ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(z_1) \subseteq M$ und φ auf $U_\delta(z_1)$ konstant ist. Sei $z \in U_\delta(z_1)$, also $\varphi(z) = \varphi(z_1) \overset{z_1 \in A}{=} \varphi(z_0)$. Infolgedessen ist $z \in A$, also $U_\delta(z_1) \subseteq A$. A ist also offen. [Sei $z_1 \in B$. φ ist lokal konstant, womit ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(z_1) \subseteq M$ und φ auf $U_\delta(z_1)$ konstant ist. Sei $z \in U_\delta(z_1)$, also $\varphi(z) = \varphi(z_1) \overset{z_1 \notin A}{\neq} \varphi(z_0)$. Infolgedessen ist $z \in B$, also $U_\delta(z_1) \subseteq B$. B ist also offen.]

Forderung 3.5:

Sei $A \subseteq \mathbb{C}$, A sei offen und abgeschlossen. Dann ist $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$.

Beweis:

$B := \mathbb{C} \setminus A$. Dann ist A, B offen, $A \cap B = \emptyset$ und $\mathbb{C} = A \cup B$. $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet und nach Satz 3.4 ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$, also $A = \emptyset$ oder $A = \mathbb{C}$.

Satz 3.6:

Sei M zusammenhängend und $g \in C(M)$. Dann ist auch $g(M)$ zusammenhängend.

Beweis:

Sei φ: $g(M) \mapsto \mathbb{C}$ auf $g(M)$ lokal konstant. Zu zeigen ist, dass φ auf M konstant ist. Sei weiterhin $\psi := \varphi \circ g$: $M \mapsto \mathbb{C}$ und $z_0 \in M$. Damit ist $g(z_0) \in g(M)$ und es existiert ein $\varepsilon > 0$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(w) = c$ $\forall$ $w \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M)$ $(*)$. g ist stetig in z_0, womit es ein $\delta > 0$ gibt mit $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$ $\forall$ $z \in U_\delta(z_0) \cap M$. Sei $z \subseteq U_\delta(z_0) \cap M$. Dann ist $g(z) \in U_\varepsilon(g(z_0)) \cap g(M)$ und mit $(*)$ resultiert $\varphi(g(z)) = c$ und hieraus $\psi(z) = c$. Also ist ψ auf M lokal konstant und M zusammenhängend, also $\psi(z) = c$ für alle $z \in M$. Sei $w \in g(M)$. Dann existiert ein $z \in M$ mit $w = g(z)$ und $\varphi(g(z)) = \psi(z) = c$. φ ist also auf $g(M)$ konstant. $\square$

Beispiel:

1.) $[a, b] \in \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

2.) Ist γ: $[a, b] \mapsto \mathbb{C}$ ein Weg, so ist $\gamma([a, b])$ zusammenhängend.

Beweis:

1.) Sei φ: $[a,b] \mapsto \mathbb{C}$ lokal konstant. Also existiert für alle $t \in [a,b]$ ein $\delta(t) > 0$, so dass φ auf $U_{\delta(t)}(t) \cap [a,b]$ konstant ist. Wegen $[a,b] \subseteq \bigcup_{t\in[a,b]} U_{\delta(t)}(t)$ gibt es nach Satz 2.3 $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$ mit $[a,b] \in \bigcup_{j=1}^{n} U_{\delta(t_j)}(t_j)$. Es existieren $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(t) = c_j$ für alle $t \in U_{\delta(t_j)}(t_j) \cap [a,b]$, also gilt $\varphi([a,b]) = \{c_1, \ldots, c_n\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $c_1 \neq c_2$ ist, etwa $c_1 < c_2$. Mit $\varphi \in C([a,b])$ und dem Zwischenwertsatz folgt $[c_1, c_2] \subseteq \varphi([a,b])$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, womit $c_1 = c_2$, $c_2 = c_3$, $\ldots$ gilt.

2.) Dies folgt aus (1) und Satz 3.6. □

Kapitel 4

Komplexe Differenzierbarkeit, Holomorphie

In diesem Paragraphen sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ mit D offen und $f\colon D \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion.

Definition:

1.) f heißt in $z_0 \in D$ **komplex differenzierbar** (komplex db) wenn den Limes

$$\lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \left(\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right)$$

existiert. In diesem Fall heißt obiger Grenzwert **die Ableitung** von f in z_0 und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet.

2.) f heißt auf D **holomorph** (**analytisch**) genau dann, wenn f in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist.

3.) $H(D) := \{g : D \mapsto \mathbb{C} : g \text{ ist auf } D \text{ holomorph}\}$

Beispiele:

1.) Sei $D = \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $f(z) := z^n$. Wie in $\mathbb{R}$ zeigt man, dass $f \in H(\mathbb{C})$ und $f'(z) = nz^{n-1}$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$ gilt.

2.) Sei $D = \mathbb{C}$ und $f(z) = \overline{z}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

$$Q(h) := \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z}_0 + \overline{h} - \overline{z}_0}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

Beispielsweise ist $Q(h) = 1$, falls $h \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $Q(h) = -1$, falls $h \in \mathrm{i}\mathbb{R} := \{it : t \in \mathbb{R}\}$ ist. Das bedeutet, dass $\lim_{h \mapsto 0} Q(h)$ **nicht** existiert. f ist also in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Sei $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. Fasst man D als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf und schreibt man $z = (x, y)$ statt $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$), so ist $f = (u, v)\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ eine vektorwertige Funktion,

$$f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$$

Erinnerung (Analysis II):

f heißt in $(x_0, y_0) \in D$ reell differenzierbar genau dann, wenn eine reelle 2×2-Matrix A existiert mit

$$\lim_{(h,k) \mapsto (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - A \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = 0$$

Wie hängen diese beiden Differenzierbarkeitsbegriffe zusammen?

Beispiel:

Sei $D = \mathbb{C}$ und $f(z) = \overline{z}$. In der reellen Auffassung ist $f(z)$ gegeben durch $f(x, y) = (x, -y)$. f ist **in jedem** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ reell differenzierbar, aber in **keinem** $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

Satz 4.1:

Sei $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. Sei außerdem $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$ mit $x_0,\ y_0 \in \mathbb{R}$. f ist in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn f in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist und die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** (CRD) gelten, nämlich $u_x(z_0) = v_y(z_0)$ und $u_y(z_0) = -v_x(z_0)$. **Ist** f in z_0 komplex differenzierbar, so ist $f'(z_0) = u_x(z_0) + \mathrm{i}v_x(z_0) = v_y(z_0) - \mathrm{i}u_y(z_0)$.

Beweis:

Sei $a = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ und $s = h + \mathrm{i}k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\alpha,\ \beta,\ h,\ k \in \mathbb{R}$. f ist in z_0 komplex differenzierbar und $f'(z_0) = a$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{s \mapsto 0} \frac{f(z_0 + s) - f(z_0) - as}{|s|} = 0$$

Zerlege in Real- und Imaginärteil mit $as = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(h + \mathrm{i}k) = \alpha h - \beta k + \mathrm{i}(\alpha k + \beta h)$:

$$\lim_{(h,k)\mapsto(0,0)} \left(\underbrace{\frac{u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (\alpha h - \beta k)}{\|(h,k)\|}}_{=:\varphi_1(h,k)} + \mathrm{i} \underbrace{\frac{v(x_0 + h, y_0 + h) - v(x_0, y_0) - (\beta h + \alpha k)}{\|(h,k)\|}}_{=:\varphi_2(h,k)} \right) = 0$$

Damit dies gegen null strebt, muss sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil gegen null streben, also $\varphi_1(h,k) \mapsto 0$ und $\varphi_2(h,k) \mapsto 0$ für $(h,k) \mapsto (0,0)$. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass u und v in (x_0, y_0) reell differenzierbar sind und $u'(x_0, y_0) = (\alpha, -\beta)$ und $v'(x_0, y_0) = (\beta, \alpha)$, was genau dann der Fall ist, wenn f in (x_0, y_0) reell differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Ist f in z_0 komplex differenzierbar, dann folgt $f'(z_0) = a = \alpha + \mathrm{i}\beta = u_x(z_0) + \mathrm{i}v_x(z_0)$. □

Komplexe Differenzierbarkeit ist ein stärkerer Begriff als reelle Differenzierbarkeit.

Folgerung 4.2:

Es sei $f \in H(D)$.

1.) f ist auf D genau dann lokal konstant, wenn $f' = 0$ auf D ist.

2.) Ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$, so ist f auf D lokal konstant.

3.) Ist $f(D) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$, so ist f auf D lokal konstant.

4.) Ist D ein **Gebiet**, so gilt:

   i.) f ist auf D konstant genau dann, wenn $f' = 0$ auf D ist.

   ii.) Ist $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ oder $\subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$, so ist f auf D konstant.

Beweis:

1.) „$\Rightarrow$“ ist klar. „$\Leftarrow$“: Aus Satz 4.1 folgt $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ auf D. Aus der Analysis II folgt, dass u und v auf D lokal konstant sind.

2.) Aus $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ folgt $v = 0$ auf D und damit $v_x = v_y = 0$ auf D. Weil f holomorph ist, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, aus denen $u_x = u_y = 0$ auf D folgt (weiter wie bei (1)).

3.) Sei $f(D) \subseteq \mathrm{i}\mathbb{R}$. Definiere $g := \mathrm{i}f$ mit $g \in H(D)$ und $g(D) \subseteq \mathbb{R}$. Mit (2) ergibt sich, dass f auf D lokal konstant ist. Damit ist f auf D lokal konstant.

4.) (4) folgt aus (1), (2) und (3) und Satz 3.4. Sei $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. □

Wörtlich wie in $\mathbb{R}$ zeigt man:

Satz 4.3:

Sei $z_0 \in D$ und f sei in z_0 komplex differenzierbar.

1.) f ist in z_0 stetig.

2.) Sei g: $D \mapsto \mathbb{C}$ eine weitere Funktion und g sei komplex differenzierbar in z_0.

   i.) Für α, $\beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ komplex differenzierbar in z_0 und $(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0)$.

   ii.) $f \cdot g$ ist in z_0 komplex differenzierbar und $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$.

   iii.) Ist $g(z_0) \neq 0$, so existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\delta(z_0)$. Dann ist f/g: $U_\delta(z_0) \mapsto \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

3.) **Kettenregel**: Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{C}$, E offen, $f(D) \subseteq E$ und h: $E \mapsto \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $f(z_0)$. Dann ist $h \circ f$: $D \mapsto \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in z_0 und $(h \circ f)'(z_0) = h'(f(z_0))f'(z_0)$.

Definition:

Es sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$. f heißt in z_0 **zweimal komplex differenzierbar** genau dann, wenn f' in z_0 komplex differenzierbar ist. In diesem Falle ist $f''(z_0) := (f')'(z_0)$ (2.Ableitung von f in z_0). Entsprechend definiert man höhere Ableitungen von f in z_0 bzw. auf D. Die übliche Bezeichungsweise ist f'', f''', $f^{(4)}$, ... und $f^{(0)} := f$ (nullte Ableitung).

Kapitel 5

Potenzreihen

Im folgenden sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{C}$, (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n\colon A \mapsto \mathbb{C}$ und $s_n := f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Definition:

1.) (f_n) heißt auf A **punktweise konvergent** genau dann, wenn für jedes $z \in A$ die Zahlenfolge $(f_n(z))$ konvergiert. In diesem Falle heißt $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$, die definiert ist durch $f(z) := \lim_{n \mapsto \infty} f_n(z)$, die **Grenzfunktion** von (f_n).

2.) (f_n) heißt auf A **gleichmäßig konvergent** genau dann, wenn eine Funktion $f\colon A \mapsto \mathbb{C}$ existiert mit der Eigenschaft, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \forall\ n \geq n_0$ und $\forall\ z \in A$. In diesem Falle sagt man: (f_n) konvergiert auf A gleichmäßig gegen f.

3.) (f_n) heißt auf A **lokal gleichmäßig konvergent** genau dann, wenn (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmäßig konvergiert. ($\overset{2.3}{\Leftrightarrow}$ Für alle $a \in A$ existiert ein $\delta > 0$, so dass (f_n) auf $U_\delta(a) \cap A$ gleichmäßig konvergiert.)

4.) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert auf A punktweise genau dann, wenn (s_n) auf A punktweise konvergiert. Sie konvergiert genau dann auf A [lokal] gleichmäßig, wenn (s_n) auf A [lokal] gleichmäßig konvergiert.

Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt lokal gleichmäßige Konvergenz und daraus wiederum punktweise Konvergenz. Die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen falsch.
Wie in der Analysis beweist man:

Satz 5.1:

1.) (f_n) konvergiere auf A gleichmäßig gegen f; alle f_n seien in $z_0 \in A$ stetig. Dann ist die Grenzfunktion f in z_0 stetig.

2.) **Cauchykriterium**: (f_n) konvergiert auf A gleichmäßig genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \ \forall\ n,\ m \geq n_0$ und $\forall\ z \in A$.

3.) **Kriterium von Weierstraß**: Sei (a_n) eine Folge in $[0, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $|f_n(z)| \leq a_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ und $\forall\ z \in A$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf A gleichmäßig.

Definition:

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt eine **Potenzreihe** (PR).
Wir setzen $\varrho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ($\varrho = \infty$, falls $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt) und

$$r := \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad \varrho = \infty \\ \infty & \text{falls} \quad \varrho = 0 \\ \frac{1}{\varrho} & \text{falls} \quad a < \varrho < \infty \end{cases}$$

r heißt der **Konvergenzradius** (KR) der Potenzreihe. Wie in der Analysis zeigt man (Wurzelkriterium):

Satz 5.2:

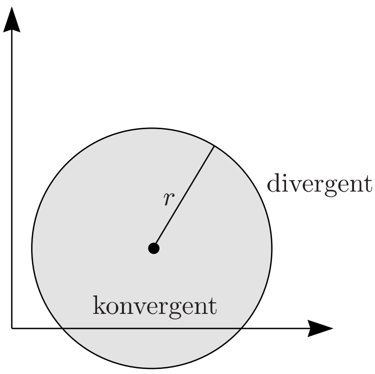
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r.

1.) Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe **nur** in $z = z_0$.

2.) Ist $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut. Die Potenzreihe konvergiert auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig.

3.) Ist $0 < r < \infty$, so gilt:

   i.) Die Potenzreihe konvergiert in jedem $z \in U_r(z_0)$ absolut.
   ii.) Die Potenzreihe konvergiert in jedem $z \notin \overline{U_r(z_0)}$.
   iii.) Für $z \in \partial U_r(z_0)$ ist keine allgemeine Aussage möglich.



Beispiele:

1.) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Für $|z| = 1$ ist (z^n) **keine** Nullfolge, also divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ in jedem $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.
2.) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ hat den Konvergenzradius $r = 0$; die konvergiert also zur im Entwicklungspunkt $z = 0$.
3.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Konvergenzradius $r = 1$. Sei $|z| = 1$. Dann gilt $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ und nach dem Majorantenkriterium ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ konvergent.
4.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$: Wie in der Analysis zeigt man, dass die Potenzreihe den Konvergenzradius $r = \infty$ hat.

Satz 5.3:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r. Dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$ ebenfalls den Konvergenzradius r.

Beweis:

Sei $\alpha_n := n a_n$.

$\sqrt[n]{|\alpha_n|} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{|a_n|}$

Weil $\sqrt[n]{n} \mapsto 1$ für $n \mapsto \infty$ gilt $\limsup \sqrt[n]{|\alpha_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Bezeichnung:

Für $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$.

Satz 5.4:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius $r > 0$. ($r = \infty$ ist zugelassen.) Die Funktion $f\colon U_r(z_0) \mapsto \mathbb{C}$ sei definiert durch $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

1.) Es ist $f \in H(U_r(z_0))$ und $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}\ \forall\, z \in U_r(z_0)$.

2.) f ist auf $U_r(z_0)$ beliebig oft komplex differenzierbar und $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}\ \forall\, z \in U_r(z_0)$ und $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

3.) Es gilt $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

(3) folgt aus (2) mit $z = z_0$ und (2) folgt aus (1) induktiv. Bleibt also noch (1) zu zeigen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $z_0 = 0$. Für $w \in U_r(0)$ definieren wir $g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1}$. Sei $w \in U_r(0)$ beliebig aber fest. Wähle $\varrho > 0$ so, dass $|w| < \varrho < r$. Sei weiterhin $b_n := n^2 |a_n| \varrho^{n-2}$ für $n \geq 2$. Es gilt $\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \varrho/r < 1$. Nach dem Wurzelkriterium ist $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ konvergent. Darüber hinaus sei $c := \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ und $z \in U_\varrho(0)$ und $z \neq w$. Wir betrachten:

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) = \frac{1}{z - w} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - w^n) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \underbrace{\left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n w^{n-1} \right)}_{:= \alpha_n}$$

Nachrechnen:

$$\alpha_n = (z - w) \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1}$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= |z - w| \Big| \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1} \Big| \leq |z - w| \sum_{k=1}^{n-1} k |w|^{k-1} |z|^{n-k-1} \overset{|w|<\varrho, |z|<\varrho}{\leq} \\ &\leq |z - w| \sum_{k=1}^{n-1} k \varrho^{n-2} = |z - w| \varrho^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \leq |z - w| \varrho^{n-2} n^2 \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| = \Big| \sum_{n=2}^{\infty} a_n \alpha_n \Big| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |\alpha_n| \leq \left(\sum_{k=2}^{\infty} |a_n| n^2 \varrho^{n-2} \right) |z - w| = c |z - w|$$

Für $z \mapsto w$ ergibt sich, dass f in w komplex differenzierbar ist und $f'(w) = g(w)$. $\square$

Bezeichnung:

Seien $r_1, r_2 \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$.

$$\min\{r_1, r_2\} := \begin{cases} \min\{r_1, r_2\} & \text{falls} \quad r_1, r_2 < \infty \\ r_2 & \text{falls} \quad r_1 = \infty \\ r_1 & \text{falls} \quad r_2 = \infty \end{cases}$$

Satz 5.5:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_1 bzw. r_2. Dann hat für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(z - z_0)^n$ einen Konvergenzradius $\geq \min\{r_1, r_2\}$.

Beweis:

Rechnen mit konvergenten Reihen!

Beispiel:

Sei $a_n = b_n$, $\alpha = 1$ und $\beta = -1$.

Kapitel 6

Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Bekannt aus Paragraph 5 ist, dass $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ in jedem $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

$$\mathrm{e}^z := \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

sei die komplexe Fortsetzung der reellen **Exponentialfunktion**. Aus diesem Grund ist klar, dass $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = \mathrm{e}$ ist.

<u>Satz 6.1:</u>

1.) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig.

2.) Es gilt $\exp \in H(\mathbb{C})$ und $\exp'(z) = \exp(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$.

3.) **Additionstheorem**: $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)\ \forall\ z,\, w \in \mathbb{C}$

4.) $\exp(z) \cdot \exp(-z) = 1$, insbesondere $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = 1/\exp(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$

5.) Für $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x,\, y \in \mathbb{R}$) gilt $\exp(z) = \exp(x)\exp(\mathrm{i}y)$ mit $|\exp(\mathrm{i}y)| = 1$ und $|\exp(z)| = \exp(x)$.

<u>Beweis:</u>

1.) Dies folgt aus 5.2.

2.) Aus 5.4 ergibt sich $\exp \in H(\mathbb{C})$ und

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

3.) Sei $c \in \mathbb{C}$ zunächst fest. Dann sei $f(z) := \exp(z)\exp(c - z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Weiterhin ist $f \in H(\mathbb{C})$ und

$$f'(z) = \exp(z)\exp(c - z) + \exp(z)\exp(c - z) \cdot (-1) = 0\,\forall\, z \in \mathbb{C}$$

Da $\mathbb{C}$ ein Gebiet ist, ist nach 4.2 f auf $\mathbb{C}$ konstant. Aus $f(0) = \exp(c)$ folgt also $\exp(z)\exp(c-z) = \exp(c)$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Setze also $c := z + w$.

4.) Dies folgt aus (3).

5.) Es ist nur zu zeigen, dass $|\exp(\mathrm{i}y)| = 1$ für $y \in \mathbb{R}$.

$$\exp(\overline{\mathrm{i}y}) = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\overline{\mathrm{i}y})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}y)^n}{n!} = \exp(-\mathrm{i}y)$$

Damit ergibt sich:

$$|\exp(\mathrm{i}y)|^2 = \exp(\mathrm{i}y)\overline{\exp(\mathrm{i}y)} = \exp(\mathrm{i}y)\exp(-\mathrm{i}y) \overset{(4)}{=} 1$$

□

Definition:

Für $z \in \mathbb{C}$ sei der Kosinus

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z))$$

und der Sinus

$$\sin(z) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z))$$

Satz 6.2:

1.) $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ und $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$

2.) $\cos(z)$ und $\sin(z)$ sind $\in H(\mathbb{C})$ und $\cos'(z) = -\sin(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

3.) $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$

Insbesondere gilt $\exp(\mathrm{i}\varphi) = \cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)$ $\forall\ \varphi \in \mathbb{R}$. Damit lautet für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Darstellung in Polarkoordinaten wie folgt: $z = |z| \exp(\mathrm{i}\arg(z))$.

4.) **Additionstheoreme**:

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \text{ und } \sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)\,\forall\, z,\, w \in \mathbb{C}$$

5.) Trigonometrischer Pythagoras: $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$

Beweis:

1.) Wir wollen dies nur für den Kosinus zeigen. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n + (-\mathrm{i})^n}{n!}z^n = \frac{1}{2}\sum^{\infty}\left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{falls} \quad n = 2k+1 \\ 2(-1)^k & \text{falls} \quad n = 2k \end{array}\right\} z^n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

2.) Aus den Definitionen folgt $\cos(z) \in H(\mathbb{C})$ und

$$\cos'(z) = \frac{1}{2}[\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}z) - \mathrm{i}\exp(-\mathrm{i}z)] = \frac{\mathrm{i}}{2}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)) = -\sin(z)$$

Analog gilt dies für den Sinus.

(3), (4) und (5) folgen aus der Definition. □

Folgerung 6.3:

1.) Es gilt $\exp(2k\pi\mathrm{i}) = 1$ $\forall\ k \in \mathbb{Z}$, also insbesondere $\exp(2\pi\mathrm{i}) = 1$.

2.) $\exp(\mathrm{i}\pi) + 1 = 0$

3.) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt genau dann $\exp(z) = 1$, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $z = 2k\pi\mathrm{i}$ ist.

4.) Periodizität der Exponentialfunktion: $\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z)$ $\forall\ z \in \mathbb{C}$

Die Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi\mathrm{i}$.

5.) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sin(z) = 0$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $z = k\pi$. Entsprechend gilt $\cos(z) = 0$ genau dann, wenn ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert, für welches $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ gilt.

Beweis:

1.) Aus 6.2 (3) ergibt sich:

$$\exp(2k\pi\mathrm{i}) = \cos(2k\pi) + \mathrm{i}\sin(2k\pi) = 1 \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

2.) Auch hier folgt aus 6.2 (3): $\exp(\mathrm{i}\pi) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi) = -1$.

3.) „$\Leftarrow$“: siehe (1)

„$\Rightarrow$“: Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ für x, $y \in \mathbb{R}$ und $\exp(z) = 1$. Hieraus folgt $\exp(x)\exp(\mathrm{i}y) = \exp(x)(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) = 1$.

$$\Rightarrow \exp(x)\cos(y) = 1 \text{ und } \exp(x)\sin(y) = 0 \Rightarrow \sin(y) = 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } y = k\pi$$

Aus $1 = |\exp(z)| = \exp(x)$ folgt $x = 0$ und damit $\cos(y) = 1$. Also gilt $k = 2j$ für $j \in \mathbb{C}$ und damit $z = 2j\pi\mathrm{i}$.

4.) $\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp(z)\exp(2\pi\mathrm{i}) = \exp(z)$

5.) Wir wollen nur den Sinus betrachten. Für den Kosinus funktioniert das ganze entsprechend.

$$\sin(z) = 0 \Leftrightarrow \exp(\mathrm{i}z) = \exp(-\mathrm{i}z) \Leftrightarrow \exp(2\mathrm{i}z) = 1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ mit } 2\mathrm{i}z = 2k\pi\mathrm{i}$$

Also gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = k\pi$. $\square$

Definition:

Wir definieren den komplexen Tangens und Kotangens:

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \text{ mit } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{2k+1}{2}\pi : \, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \text{ mit } z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : \, k \in \mathbb{Z}\}$$

$\tan(z)$ und $\cot(z)$ sind auf ihren Definitionsbereichen holomorph.

Kapitel 7

Der komplexe Logarithmus

Definition:

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\exp(z) = w$ heißt **ein Logarithmus von w**. Man schreibt in diesem Fall (ungenau) $z = \log(w)$.

Satz 7.1:

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $w = |w| \exp(\mathrm{i}\operatorname{Arg}(w))$ (mit $\operatorname{Arg}(w) \in (-\pi, \pi]$). Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) = w$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $z = \log|w| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi\mathrm{i}$. ($\log|w|$ ist der reelle Logarithmus.)

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Mittels des Additionstheorems der Exponentialfunktion folgt

$$\exp(z) = \exp(\log|w|)\exp(\mathrm{i}\operatorname{Arg}(w))\exp(2k\pi\mathrm{i}) = |w|\exp(\mathrm{i}\operatorname{Arg}(w)) = w$$

„$\Rightarrow$“: Sei $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) und $\exp(z) = w$. Dann gilt $|w| = |\exp(z)| = \exp(x)$ und es folgt $x = \log|w|$. Darüber hinaus gilt:

$$|w|\exp(\mathrm{i}\operatorname{Arg}(w)) = w = \exp(z) = \exp(x)\exp(\mathrm{i}y) = |w|\exp(\mathrm{i}y) \Rightarrow \exp(\mathrm{i}y) = \exp(\mathrm{i}\operatorname{Arg}(w)) \Rightarrow \exp(\mathrm{i}(y - \operatorname{Arg}(w))) = 1$$

Nach 6.3 gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{i}y - \mathrm{i}\operatorname{Arg}(w) = 2k\pi\mathrm{i}$ und damit $\mathrm{i}y = \mathrm{i}\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi\mathrm{i}$, also $z = \log|w| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(w) + 2k\pi\mathrm{i}$. $\square$

Definition:

Die Funktion $\operatorname{Log}\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{C}$ definiert durch die Vorschrift $\operatorname{Log}(w) := \log|w| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(w)$ heißt der **Hauptzweig des Logarithmus**.

Beispiele:

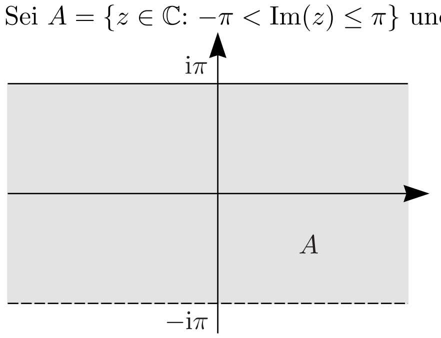
1.) Alle Logarithmen von $w = 1$ sind $2k\pi\mathrm{i}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$). Für den Hauptwert gilt $\operatorname{Log}(1) = 0$.

2.) $\operatorname{Log}(-1) = \mathrm{i}\pi$

3.) $\operatorname{Log}(1 + \mathrm{i}) = \log(\sqrt{2}) + \mathrm{i}\frac{\pi}{4}$ wegen $|w| = \sqrt{2}$ und $\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$

Satz 7.2:

Sei $A = \{z \in \mathbb{C}\colon -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ und $f := \exp|_A$.



1.) f ist auf A injektiv.

2.) $f(A) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

3.) $f^{-1}(w) = \mathrm{Log}(w)$ für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

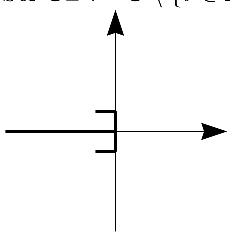
4.) Die Funktion Log ist unstetig in jedem $w \in \mathbb{R}$ mit $w < 0$.

Beweis:

(1), (2) und (3) folgen aus 6.3 und 7.1. (4) ergibt sich aus dem Beispiel in Paragraph (3), dass $w \mapsto \mathrm{Arg}(w)$ in $w < 0$ unstetig ist.

Definition:

Sei $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$ $(\subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\})$.



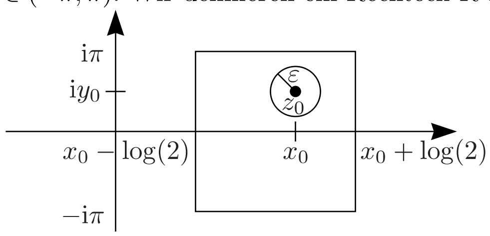
Für $w \in \mathbb{C}_-$ ist $\mathrm{Arg}(w) \in (-\pi, \pi)$.

Satz 7.3:

Es gilt $\mathrm{Log} \in C(\mathbb{C}_-)$.

Beweis:

Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$ und $z_0 := \mathrm{Log}(w_0)$, $x_0 := \mathrm{Re}(z_0)$ und $y_0 := \mathrm{Im}(z_0)$. Also gilt $x_0 = \log|w_0|$ und $y_0 = \mathrm{Arg}(w_0) \in (-\pi, \pi)$. Wir definieren ein Rechteck $R := \{z = x + \mathrm{i}y : x,y \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - x_0| \leq \log(2) \text{ und } |y| \leq \pi\}$.



Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $K := R \cap (\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon(z_0)) \neq \emptyset$. Es ist klar, dass K kompakt ist und $z_0 \notin K$. Definiere φ: $K \mapsto \mathbb{R}$ durch $\varphi(z) := |\exp(z) - w_0| = |\exp(z) - \exp(z_0)|$. Dann ist $\varphi \in C(K)$. Nach 3.3 gibt es ein $\varrho := \min \varphi(K)$. Wir nehmen an, dass $\varrho = 0$ ist. Also existiert ein $z \in K$ mit $\exp(z) = \exp(z_0)$. Hieraus folgt $\exp(z - z_0) = 1$ und nach Satz 6.3 gibt es ein $j \in \mathbb{Z}$ mit $z - z_0 = 2j\pi\mathrm{i}$.

$$2j\pi = \mathrm{Im}(z - z_0) = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0) \Rightarrow 2|j|\pi = |\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0)| \leq \underbrace{|\mathrm{Im}(z)|}_{\leq \pi} + \underbrace{|\mathrm{Im}(z_0)|}_{< \pi} < 2\pi$$

Damit ist $j = 0$ und $z_0 = z \in K$. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $z_0 \notin K$. Also ist $\varrho > 0$. Zu ϱ definieren wir $\delta := \min\{\varrho, \frac{1}{2}\exp(x_0)\}$. Sei $w \in \mathbb{C}_-$ und $|w - w_0| < \delta$, $z := \mathrm{Log}(w)$. Zu zeigen ist $|z - z_0| < \varepsilon$. Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit x, $y \in \mathbb{R}$ und $y = \mathrm{Arg}(w) \in (-\pi, \pi)$, also $|y| \leq \pi$. Mit der Annahme $x > x_0 + \log(2)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\exp(x_0) &\geq \delta > |w - w_0| = |\exp(z) - \exp(z_0)| \geq ||\exp(z)| - |\exp(z_0)|| = |\exp(x) - \exp(x_0)| \geq \\ &\geq \exp(x) - \exp(x_0) > \exp(x_0 + \log(2)) - \exp(x_0) = \exp(x_0) \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt $x \leq x_0 + \log(2)$. Ganz analog kann man zeigen, dass $x \geq x_0 - \log(2)$ gilt, also Fazit: $z \in R$. Darüber hinaus nehmen wir nun an, dass $|z - z_0| \geq \varepsilon$. Mit dieser Eigenschaft gilt $z \in K$ und damit

$$\delta \leq \varrho \leq \varphi(z) = |\exp(z) - \exp(z_0)| = |w - w_0| < \delta \qquad \square$$

Satz 7.4:

Es gilt $\mathrm{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$ und $\mathrm{Log}'(w) = \frac{1}{w}\ \forall\ w \in \mathbb{C}_-$.

Beweis:

Sei $w_0 \in \mathbb{C}_-$. Weiterhin sei (w_n) eine Folge in $\mathbb{C}_-$ mit $w_n \neq w_0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $w_n \mapsto w_0$ mit $z_0 := \mathrm{Log}(w_0)$, $z_n := \mathrm{Log}(w_n)$. Aus 7.3 folgt $z_n \mapsto z_0$ und dann:

$$\frac{\mathrm{Log}(w_n) - \mathrm{Log}(w_n)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - z_0}{\exp(z_n) - \exp(z_0)} = \left(\frac{\exp(z_n) - \exp(z_0)}{z_n - z_0}\right)^{-1} \mapsto \frac{1}{\exp(z_0)} = \frac{1}{w_0}$$

Damit ist Log in w_0 komplex differenzierbar und $\mathrm{Log}'(w_0) = \frac{1}{w_0}$. □

Bezeichnung:

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\} = U_1(0)$.
Beachte: Für $z \in \mathbb{D}$ ist $1 + z \in \mathbb{C}_-$.

Satz 7.5:

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n!} \text{ für alle } z \in D$$

Beweis:

Aus Satz 7.4 und 5.4 folgt, dass

$$f(z) := \mathrm{Log}(1+z) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

auf $\mathbb{D}$ holomorph ist.

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-(-z)} = 0\, \forall\, z \in \mathbb{D}$$

$\mathbb{D}$ ist ein Gebiet. Nach 4.2 ist f auf $\mathbb{D}$ konstant. Aus $f(0) = 0$ folgt die Behauptung. □

Definition:

Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$. Dann definieren wir den Hauptzweig der allgemeinen Potenz durch $w^a := \exp(a\mathrm{Log}(w))$.

Beispiele:

1.) Für $a = k \in \mathbb{Z}$ ist obige Definition die frühere Potenz von w, denn für $k \in \mathbb{N}$:

$$\exp(k\mathrm{Log}(w)) = \exp(\mathrm{Log}(w) + \mathrm{Log}(w) + \ldots + \mathrm{Log}(w)) = (\exp(\mathrm{Log}(w)))^k = w^k$$

$$\exp(-k\mathrm{Log}(w)) = \frac{1}{\exp(k\mathrm{Log}(w))} \overset{\text{s.o}}{=} \frac{1}{w^k} = w^{-k}$$

2.) Sei $w = a = \mathrm{i}$. Hier gilt nun $\log|w| = 0$, $\mathrm{Arg}(w) = \frac{\pi}{2}$ und damit $\mathrm{Log}(w) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$.

$$\mathrm{i}^\mathrm{i} = \exp\left(\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

Satz 7.6:

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f\colon \mathbb{C}_- \mapsto \mathbb{C}$ definiert durch $f(w) := w^a$. Dann ist $f \in H(\mathbb{C}_-)$ und $f'(w) = aw^{a-1}\ \forall\ w \in \mathbb{C}_-$.

Beweis:

Aus 7.4 und 4.4 folgt $f \in H(\mathbb{C}_-)$ und

$$f'(w) = \exp(a\mathrm{Log}(w))(a\mathrm{Log}(w))' = a\exp(a\mathrm{Log}(w))\frac{1}{w} \overset{\text{Bsp.(1)}}{=} a\exp(a\mathrm{Log}(w))\exp(-\mathrm{Log}(w)) =$$
$$= a\exp[(a-1)\mathrm{Log}(w)] = aw^{a-1}$$

Kapitel 8

Komplexe Wegintegrale

Im folgenden sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ $(a < b)$ und φ, ψ: $I \mapsto \mathbb{C}$ vorgegebene Funktionen.

Definition:

1.) Ist φ auf I stetig, so setze:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\int_b^a \varphi\,\mathrm{d}t := -\int_a^b \varphi\,\mathrm{d}t \text{ und ebenso } \int_a^a \varphi\,\mathrm{d}t := 0$$

2.) φ heißt auf I differenzierbar [stetig differenzierbar] genau dann, wenn $\mathrm{Re}(\varphi)$ und $\mathrm{Im}(\varphi)$ auf I differenzierbar [stetig differenzierbar] sind. In diesem Fall ist $\varphi' := (\mathrm{Re}(\varphi))' + \mathrm{i}(\mathrm{Im}(\varphi))'$.

Satz 8.1:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $\varphi(I) \subseteq D$ und φ auf I differenzierbar. Dann ist $f \circ \varphi$: $I \mapsto \mathbb{C}$ differenzierbar auf I und $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)\ \forall\ t \in I$.

Beweis:

Dieser kann als Übung durchgeführt werden.

Satz 8.2:

1.) Sei φ stetig auf I und ϕ: $I \mapsto \mathbb{C}$ definiert durch $\phi(x) := \int_a^s \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist ϕ stetig differenzierbar auf I und $\phi' = \varphi$ auf I.

2.) Sei φ auf I stetig differenzierbar.

$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Definition:

Sei γ: $[a, b] \mapsto \mathbb{C}$ ein Weg (also γ stetig).

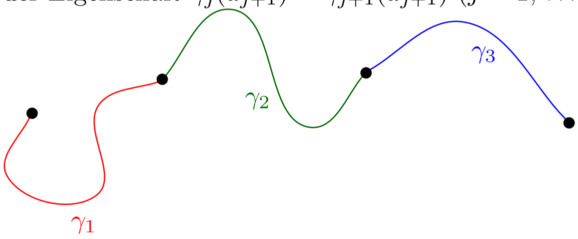
1.) $\mathrm{Tr}(\gamma) := \gamma([a, b])$ heißt **Träger** von γ.

2.) γ heißt **geschlossen** genau dann, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

3.) γ heißt **glatt** genau dann, wenn γ auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist.

Definition:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ und $\gamma_j\colon [a_j, a_{j+1}] \mapsto \mathbb{C}$ seien Wege $(j = 1, \ldots, n)$ mit der Eigenschaft $\gamma_j(a_{j+1}) = \gamma_{j+1}(a_{j+1})$ $(j = 1, \ldots, n-1)$.



Definition:

Wir definieren $\gamma\colon [a_n, a_{n+1}] \mapsto \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) := \gamma_j(t)$, falls $t \in [a_j, a_{j+1}]$. γ ist ein Weg und man schreibt: $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$ (Summenweg). γ heißt **stückweise glatt** genau dann, wenn $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ glatt sind.

Bemerkungen:

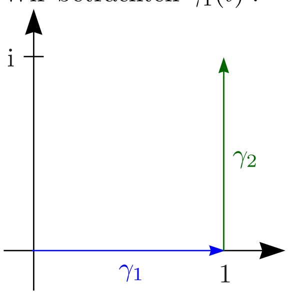
1.) Sei $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ ein Weg. γ ist stückweise glatt genau dann, wenn $a_1, \ldots, a_{n-1} \in [a,b]$ existieren mit $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1} = b$ und $\gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$ ist glatt $(j = 1, \ldots, n)$.

2.) Stückweise glatte Wege sind rektifizierbar.

3.) Ist ein weg glatt, so ist er auch stückweise glatt.

Beispiele:

Wir betrachten $\gamma_1(t) := t$ $(t \in [0,1])$ und $\gamma_2(t) := 1 + (t-1)\mathrm{i}$ $(t \in [1,2])$.

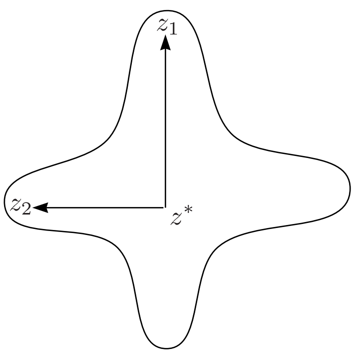


Es gilt $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$. γ_1 und γ_2 sind glatt. Es gilt $\gamma_1'(1) = 1 \neq \gamma_2'(1) = \mathrm{i}$.

Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$.

1.) G heißt sternförmig genau dann, wenn ein $z^* \in G$ existiert mit $S[z, z^*] \subseteq G \;\forall\; z \in G$. In diesem Falle heißt z^* ein **Sternmittelpunkt** von G.

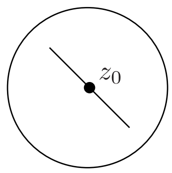


2.) Ist G offen und sternförmig, so heißt G ein **Sterngebiet**.

Beispiele:

1.) Konvexe Mengen sind sternförmig.

2.) $\mathbb{C}$, $U_\varepsilon(z_0)$ sind Sterngebiete. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\dot{U}_\varepsilon(z_0)$ sind Gebiete, aber keine Sterngebiete.



3.) $\mathbb{C}_-$ ist ein Sterngebiet. Jedes $z^* \in (0, \infty)$ ist ein Sternmittelpunkt von $\mathbb{C}_-$.

8.1 Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete

Satz 9.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $f \in H(G)$ und $\gamma\colon [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ ein stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann gilt:

1.) f besitzt auf G eine Stammfunktion F.

2.) $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

3.) Ist γ geschlossen, so ist $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Bemerkung:

Für beliebige Gebiete ist Satz 9.2 im allgemeinen falsch. Dies ist beispielsweise der Fall für $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = \frac{1}{z}$ (siehe 8.7).

Beweis:

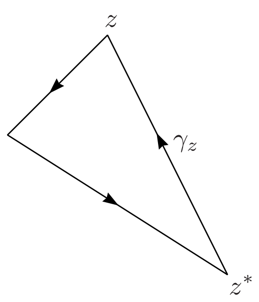
(2) und (3) folgen aus (1) in den Sätzen 8.5 und 8.6.

1.) Sei z^* ein Sternmittelpunkt von G. Wir definieren $F\colon G \mapsto \mathbb{C}$ wie folgt: Für $z \in G$ sei $\gamma_z(t) := z^* + t(z - z^*)$ mit $t \in [0, 1]$. Für den Träger gilt $\mathrm{Tr}(\gamma_z) = S[z, z^*] \subseteq G$.

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Wegen $f \in H(G)$ folgt nach Satz 9.1:

$$\int_{\partial\triangle} f(w)\,\mathrm{d}w = 0 \text{ für jedes Dreieck } \triangle \subseteq G$$



Fast wörtlich wie in HS1 zeigt man: $F \in H(G)$ und $F' = g$ auf G. □

Bezeichnung:

Seien G und f wie in 9.2 und z^* ein Sternmittelpunkt von G. Für $z \in G$ setze

$$F(z) := \int_{z^*}^{z} f(w)\,\mathrm{d}w := \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w$$

wobei γ **irgendein** stückweise glatter Weg mit den Eigenschaften

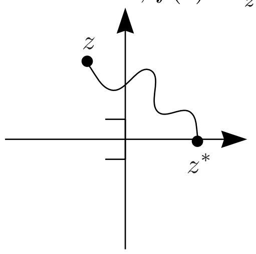
a.) $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$

b.) Anfangspunkt von γ: z^*, Endpunkt von γ: Z ist.

Wegen 9.2 (2) ist F wohldefiniert. Der Beweis von 9.2 (1) zeigt $F \in H(G)$ und $F' = g$ auf G.

Beispiel 9.3:

Sei $G = \mathbb{C}_-$, $f(z) = \frac{1}{z}$ und $z^* = 1$.



$$F(z) := \int_{1}^{z} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w$$

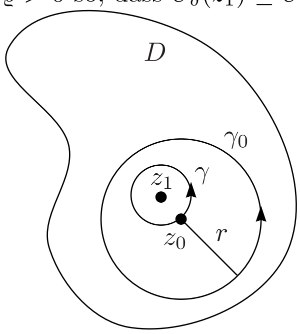
Dann gilt $F'(z) = \frac{1}{z} = \mathrm{Log}'(z)\ \forall\ z \in G$ und es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $F(z) = \mathrm{Log}(z) + c\ \forall\ z \in G$. Aus $F(1) = 0 = \mathrm{Log}(1)$ folgt $c = 0$ und damit können wir den Logarithmus folgendermaßen darstellen:

$$\mathrm{Log}(z) = \int_{1}^{z} \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w \text{ mit } z \in \mathbb{C}_-$$

In machen Büchern findet man diese Definition des Logarithmus.

Hilfssatz 2:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $\gamma(t) := z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Weiter sei $z_1 \in U_r(z_0)$, $\varrho > 0$ so, dass $\overline{U_\delta(z_1)} \subseteq U_r(z_0)$ und $\gamma_0(t) := z_1 + \varrho\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

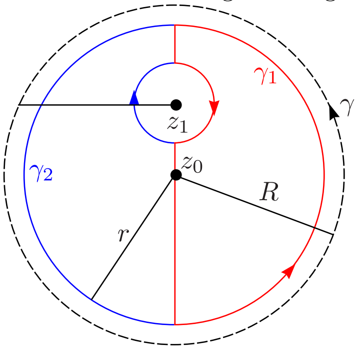


Ist $g \in H(D \setminus \{z_1\})$, so gilt:

$$\int_{\gamma} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_0} g(w)\,\mathrm{d}w$$

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathrm{Re}(z_0) = \mathrm{Re}(z_1)$ und γ_1, γ_2 stückweise glatte Wege wie im Bild:



Wähle $R > r$ so, dass $U_R(z_0) \subseteq D$.

$G_1 := U_R(z_0) \setminus \{z_1 + t : t \leq 0\}$

G_1 ist ein Sterngebiet und $\mathrm{Tr}(\gamma_1) \subseteq G_1$. γ_1 ist geschlossen und $g \in H(G_1)$. Aus Satz 9.2 resultiert

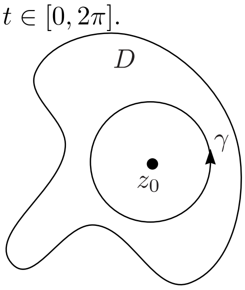
$\int\limits_{\gamma_1} g(w)\,\mathrm{d}w = 0$ und analog $\int\limits_{\gamma_2} g(w)\,\mathrm{d}w = 0$

Also gilt:

$$0 = \int\limits_{\gamma_1} g(w)\,\mathrm{d}w + \int\limits_{\gamma_2} g(w)\,\mathrm{d}w = \int\limits_{\gamma} g(w)\,\mathrm{d}w + \int\limits_{\gamma_0^-} g(w)\,\mathrm{d}w = \int\limits_{\gamma} g(w)\,\mathrm{d}w - \int\limits_{\gamma_0} g(w)\,\mathrm{d}w \qquad \square$$

8.2 Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$, $r > 0$ und $U_r(z_0) \subseteq D$. Weiter sei $f \in H(D)$ und $\gamma(t) := z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.



Dann gilt:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w \;\forall\, z \in U_r(z_0)}$$

Bemerkungen:

1.) Die Werte von f in $U_r(z_0)$ sind festgelegt durch die Werte von f auf $\partial U_r(z_0)$.

2.) Für $z = z_0$ gilt die **Mittelwertgleichung**:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t$$

Beweis:

Sei $z_1 \in U_r(z_0)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_1) \subseteq U_r(z_0)$ und $|f(w) - f(z_1)| \leq \varepsilon \;\forall\, w \in U_\delta(z_1)$. Sei $0 < \varrho < \delta$ und $\gamma_0(t) := z_1 + \varrho\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Für $w \in \mathrm{Tr}(\gamma_0)$ gilt $|w - z_1| = \varrho < \delta$, also $|f(w) - f(z_1)| \leq \varepsilon$. Damit gilt:

$$\left|\frac{f(w) - f(z_1)}{w - z_1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\varrho} \;\forall\, w \in \mathrm{Tr}(\gamma_0)$$

Aus 8.4 resultiert:

$$\Big|\int\limits_{\gamma_0} \frac{f(w)-f(z_1)}{w-z_1}\,\mathrm{d}w\Big| \le \frac{\varepsilon}{\varrho}L(\gamma_0) = \frac{\varepsilon}{\varrho}\cdot 2\pi\varrho = 2\pi\varepsilon$$

Definieren $g\colon D\setminus\{z_1\}\mapsto\mathbb{C}$ durch $g(w) := f(w)/(w-z_1)$. Dann ist $g\in H(D\setminus\{z_1\})$. Somit:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z_1}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{\gamma} g(w)\,\mathrm{d}w \underset{\text{HS } 2}{=} \int\limits_{\gamma_0} g(w)\,\mathrm{d}w = \int\limits_{\gamma_0} \frac{f(z_1)+f(w)-f(z_1)}{w-z_1}\,\mathrm{d}w =$$
$$= f(z_1)\underbrace{\int\limits_{\gamma_0}\frac{\mathrm{d}w}{w-z_1}}_{2\pi\mathrm{i}\text{ nach }8.7} + \underbrace{\int\limits_{\gamma_0}\frac{f(w)-f(z_1)}{w-z_1}\,\mathrm{d}w}_{=:A} = 2\pi\mathrm{i}f(z_1) + A$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\Big|\int\limits_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z_1}\,\mathrm{d}w - 2\pi\mathrm{i}f(z_1)\Big| = |A| \overset{\text{s.o.}}{\le} 2\pi\varepsilon$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z_1}\,\mathrm{d}w$$

□

Beispiel:

Berechne

$$I = \int\limits_{\gamma}\frac{\exp(\sin(w))+\cos(\exp(w))w^2}{w}\,\mathrm{d}w \text{ mit } \gamma(t)=\exp(\mathrm{i}t) \text{ und } t\in[0,2\pi]$$

Wir verwenden die Cauchysche Integralformel mit $f(w) := \exp(\sin(w))+\cos(\exp(w))w^2$. Nach Satz 9.4 ergibt sich dann:

$$I = 2\pi\mathrm{i}f(0) = 2\pi\mathrm{i}$$

Satz 9.5:

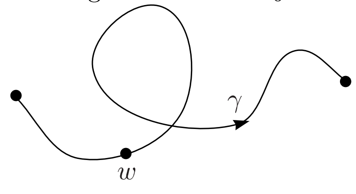
γ sei ein stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$. Es sei $D := \mathbb{C}\setminus\mathrm{Tr}(\gamma)$. ($D$ ist offen, da der Träger eines stückweise glatten Weges eine kompakte Menge ist). Für $m\in\mathbb{N}$ sei $F_n\colon D\mapsto\mathbb{C}$ definiert durch

$$F_n(z) := \int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^n}\,\mathrm{d}w$$

wobei $\varphi\in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$. Dann ist $F_n\in H(D)$ und $F_n' = nF_{n+1}$ auf D (mit $n\in\mathbb{N}$).

Beweis:

Sei $z_0\in D$. Wir zeigen, dass F_n in z_0 komplex differenzierbar ist und $F_n'(z_0) = nF_{n+1}(z_0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0=0$. Dann ist $0\in D$, also $0\notin\mathrm{Tr}(\gamma)$. Sei $w\in\mathrm{Tr}(\gamma)$ und $z\in D\setminus\{0\}$.



Nachrechnen:

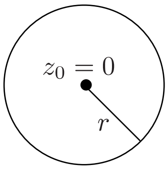
$$\frac{1}{(w-z)^n}-\frac{1}{w^n} = \frac{z}{(w-z)^n w^n}\sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1}(w-z)^k \qquad (*)$$

Sei weiterhin eine Hilfsfunktion $h(z,w)$ definiert durch:

$$h(z,w) := \frac{1}{(w-z)^n} \sum_{k=0}^{n-1} w^{n-k-1}(w-z)^k - \frac{n}{w}$$

Dann ergibt sich (nachrechnen):

$$\frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0) = \int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z,w)\,\mathrm{d}w$$



Es existiert ein $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subseteq D$. Sei $\varepsilon > 0$. $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \mathrm{Tr}(\gamma)$ ist kompakt. h ist auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \times \mathrm{Tr}(\gamma)$ **gleichmäßig** stetig. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{r}{2}$ und $|h(z_1,w) - h(z_2,w)| \leq \varepsilon \ \forall\ z_1,\ z_2 \in U_\delta(0)$ und $\forall\ w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$. Es ist $h(0,w) = 0 \ \forall\ w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$. Hieraus folgt $|h(z,w)| \leq \varepsilon \ \forall\ z \in U_\delta(0)$ und $\forall\ w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$. Sei $M := \max_{w\in\mathrm{Tr}(\gamma)} |\varphi(w)|$. Aus $w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$ folgt $|w| = |w - 0| \geq \frac{r}{2}$. Also gilt $|w|^n \geq \frac{r^n}{2^n}$ und damit $\frac{1}{|w|^n} \leq \frac{2^n}{r^n}$.

$$\Rightarrow \frac{|\varphi(w)|}{|w|^n} |h(z,w)| \leq M \frac{2^n}{r^n} \varepsilon \,\forall\, z \in U_\delta(0)$$

Nach Satz 8.4 folgt:

$$\Big|\int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z,w)\,\mathrm{d}w\Big| \leq \frac{M2^n}{r^n}\varepsilon \cdot L(\gamma) = \varepsilon\left(\frac{M2^n}{r^n} \cdot L(\gamma)\right) \forall\, z \in U_\delta(0)$$

$$\Big|\int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{w^n} h(z,w)\,\mathrm{d}w\Big| \overset{\text{s.o.}}{=} \Big|\frac{F_n(z) - F_n(0)}{z} - nF_{n+1}(0)\Big|$$

__Satz 9.6:__

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in H(D)$. Dann gilt:

1.) $f' \in H(D)$

2.) f ist auf D beliebig oft komplex differenzierbar.

3.) **Cauchysche Integralformeln für Ableitungen**: Ist $z_0 \in D$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $\gamma(t) := z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$, so gilt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \,\forall\, z \in U_r(z_0) \text{ und } \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

__Beweis:__

Sei z_0, r, γ wie in (3).

$$F_n(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^n}\,\mathrm{d}w \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma) \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Aus 9.4 folgt $f = F_1$ auf $U_r(z_0)$ und aus 9.5 ergibt sich $F_1 \in H(U_r(z_0))$ und $F_1' = F_2$ auf $U_r(z_0)$. Also ist $f' = F_2$ auf $U_r(z_0)$. Nach 9.5 ist außerdem $F_2 \in H(U_r(z_0))$, also $f' \in H(U_r(z_0))$. Da $z_0 \in D$ beliebig ist, folgt (1).

$$f' = F_2 \text{ auf } U_r(z_0) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \,\forall\, z \in U_r(z_0)$$

$$f'' = F_2' \overset{9.5}{=} 2F_3 \text{ auf } U_r(z_0) \Rightarrow f''(z) = \frac{2}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}\,\mathrm{d}w \,\forall\, z \in U_r(z_0)$$

Weiter geht es mit vollständiger Induktion! $\square$

8.3 Satz von Morera

Satz 9.7:

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und $f \in C(D)$. Dann ist $f \in H(D)$ genau dann, wenn

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

für jedes Dreieck $\triangle \subseteq D$.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Dies folgt nach 9.1.
„$\Leftarrow$": Sei $z_0 \in D$, $r > 0$ und $U_r(z_0) \subseteq D$. Nach Hilfssatz 1 und der Voraussetzung gibt es ein $F \in H(U_r(z_0))$ mit $F' = f$ auf $U_r(z_0)$. Nach 9.6 gilt $f \in H(U_r(z_0))$ mit $z_0 \in D$ beliebig. Damit ist $f \in H(D)$. $\square$

Hilfssatz 3:

Seien G_1 und G_2 Gebiete in $\mathbb{C}$ und es sei $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. Dann ist $G_1 \cup G_2$ ein Gebiet.

Beweis:

$G_1 \cup G_2$ ist offen. Sei φ: $G_1 \cup G_2 \mapsto \mathbb{C}$ lokal konstant. Es gilt $\varphi_j := \varphi|_{G_j}$ für $j = 1, 2$. Da G_j ein Gebiet ist, ist φ_j auf G_j konstant. Da $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$, ist φ auf $G_1 \cup G_2$ konstant. $\square$

Definition:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. G heißt ein **Elementargebiet** (EG) genau dann, wenn zu jedem $f \in H(G)$ ein $F \in H(G)$ existiert mit $F' = f$ auf G.

Beispiele:

1.) Aus 9.2 ergibt sich, dass Sterngebiete Elementargebiete sind.

2.) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist kein Elementargebiet, denn die Funktion $\frac{1}{z}$ hat auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ **keine** Stammfunktion (Satz 8.7).

Satz 9.8:

Seien G_1 und G_2 Elementargebiete und $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ und es sei $G_1 \cap G_2$ zusammenhängend. Dann ist $G_1 \cup G_2$ ein Elementargebiet.

Beweis:

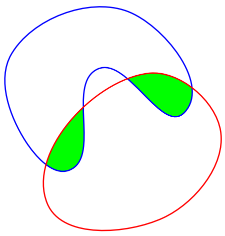
Nach HS3 ist $G_1 \cup G_2$ ein Gebiet und nach Voraussetzung ebenso $G_1 \cup G_2$. Sei $f \in H(G_1 \cup G_2)$ und $f_j := f|_{G_j}$ mit $j = 1, 2$. Es existiert $F_j \in H(G_j)$ mit $F_j' = f_j = f$ auf G_j mit $j = 1, 2$. Für $z \in G_1 \cap G_2$ gilt $(F_1 - F_2)'(z) = f(z) - f(z) = 0$. Nach 4.2 gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1(z) = F_2(z) + c \;\forall\; z \in G_1 \cap G_2$.

$$F(z) := \begin{cases} F_1(z) & \text{für} \quad z \in G_1 \\ F_2(z) + c & \text{für} \quad z \in G_2 \end{cases}$$

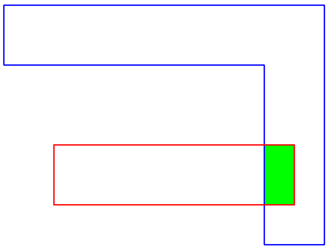
Dann ist F eine Stammfunktion von f auf $G_1 \cup G_2$. $\square$

Bemerkungen:

1.) Sind G_1, G_2 Gebiete, so muss $G_1 \cap G_2$ **nicht** zusammenhängend sein.



2.) Es gibt Elementargebiete, die keine Sterngebiete sind.



G_1 und G_2 sind Sterngebiete. Nach 9.8 ist $G := G_1 \cup G_2$ ein Elementargebiet, jedoch kein Sterngebiet.

Definition:

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und $g\colon D \mapsto \mathbb{C}$ eine Funktion. g ist **auf *D* beschränkt** genau dann, wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt mit $|g(z)| \leq c \ \forall \ z \in D$.

Definition:

Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt eine **ganze Funktion** (entire function).

Kapitel 9

Folgerungen aus den Integralformeln

9.1 Cauchysche Abschätzungen

Satz 10.1:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in H(U_r(z_0))$ und f sei auf $U_r(z_0)$ beschränkt mit $M := \sup_{z \in U_r(z_0)} |f(z)|$. Dann gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:

Sei $0 < \varrho < r$ und $\gamma(t) := z_0 + \varrho \exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Aus Satz 9.6 folgt:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w$$

Für $w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$ gilt $|w - z_0| = \varrho$, also

$$\frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} \leq \frac{M}{\varrho^{n+1}}$$

und somit nach Satz 8.4:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\varrho^{n+1}} 2\pi\varrho = \frac{Mn!}{\varrho^n}$$

Für $\varrho \mapsto r$ folgt die Behauptung. □

9.2 Satz von Liouville

Satz 10.2:

Ist $f \in H(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{C}$ beschränkt, so ist f konstant.

Beweis:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Nach Satz 10.1 gilt $|f'(z_0)| \leq M/r$ für $r > 0$ beliebig. Für $r \mapsto \infty$ folgt $f'(z_0) = 0$. Da $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig ist, folgt $f' = 0$ auf $\mathbb{C}$ und nach Satz 4.2 die Behauptung. □

Bemerkung:

Satz 10.2 ist in $\mathbb{R}$ falsch. Beispielsweise ist $x \mapsto \cos(x)$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und beschränkt, aber nicht konstant. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(\mathrm{i}t) = \frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}(\mathrm{i}t)) + \exp(-\mathrm{i}(\mathrm{i}t))] = \frac{1}{2}[\exp(t) + \exp(-t)] = \cosh(t) \mapsto \infty \text{ für } t \mapsto \pm\infty$$

Also ist der Kosinus im Komplexen unbeschränkt.

Hilfssatz:

Sei $n \in \mathbb{N}$ für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ und $p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Dann existiert ein $R > 0$ mit der Eigenschaft $|p(z)| \geq 1 \;\forall\; z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$.

Beweis:

Für $z \neq 0$ sei

$$\varphi(z) := \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + a_n \text{ also } p(z) = z^n \varphi(z) \text{ für } z \neq 0$$

und nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$||\varphi(z) - |a_n|| \leq |\varphi(z) - a_n| \leq \frac{a_0}{|z|^n} + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \ldots + \frac{|a_{n-1}|}{|z|} \Rightarrow |\varphi(z)| \mapsto |a_n| \neq 0 \text{ für } |z| \mapsto \infty$$

Mit $|p(z)| = |z|^n |\varphi(z)| \mapsto \infty$ für $|z| \mapsto \infty$ ergibt sich die Behauptung. □

9.3 Fundamentalsatz der Algebra

Satz 10.3:

Sei p wie im obigen Hilfssatz. Dann existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$.

Beweis:

Nach dem Hilfssatz existiert ein $R > 0$ mit $|p(z)| \geq 1 \;\forall\; z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Wir nehmen an, dass $p(z) \neq 0 \;\forall\; z \in \mathbb{C}$. Dann ist $q := 1/p \in H(\mathbb{C})$ und $|q(z)| \leq 1$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Da q stetig ist, ist q beschränkt auf $\overline{U_R(0)}$. Somit ist q beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$ und nach Satz 10.2 konstant. Also ist p konstant, was ein Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. □

9.4 Potenzreihenentwicklung

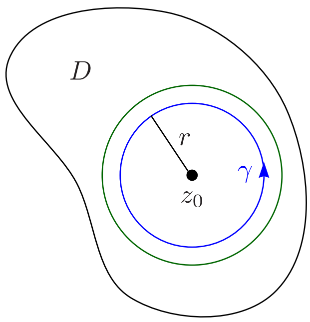
Satz 10.4:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \;\forall\, z \in U_r(z_0) \qquad (*)$$

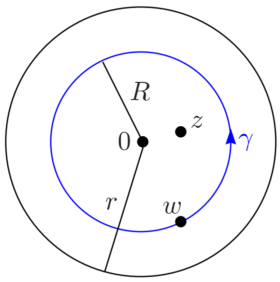
wobei

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \text{ mit } \gamma(t) = z_0 + \varrho \exp(\mathrm{i}t),\; t \in [0, 2\pi],\; 0 < \varrho < r \qquad (**)$$



Beweis:

$(**)$ folgt aus $(*)$, 5.4 und 9.6. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$. Sei weiterhin $z \in U_r(0)$ und $R > 0$ so, dass $|z| < R < r$, $\gamma_0(t) := z_0 + R \exp(\mathrm{i}t)$ für $t \in [0, 2\pi]$.



Sei $w \in \mathrm{Tr}(\gamma_0)$. Dann ist $|z|/|w| = |z|/R < 1$, also

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{w}} = \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n$$

Die letzte Reihe konvergiert gleichmäßig auf $\mathrm{Tr}(\gamma_0)$, denn f ist auf $\mathrm{Re}(\gamma_0)$ beschränkt.

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w^{n+1}} z^n \right) \mathrm{d}w \overset{8.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w \right) z^n$$

Nach 9.4 bzw. 9.6 gilt

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \text{ und } \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

und damit:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

□

Bemerkungen:

1.) 10.4 ist in $\mathbb{R}$ falsch. Bekannt aus der Analysis ist, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$ ist $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Also ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

2.) Die Entwicklung $(*)$ gilt in der größten offenen Kreisscheibe um z_0, die noch ganz in D liegt. Sei r_0 der Radius dieser Kreisscheibe. (Ist $D = \mathbb{C}$, so ist $r_0 = \infty$). Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe in $(*)$. Also ist $R \geq r_0$.

Beispiel:

Sei $D = \mathbb{C}_-$ und $f(z) = \mathrm{Log}(z)$. Es gilt $f^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!/z^n$ für alle $n \geq 1$ und für alle $z \in \mathbb{C}_-$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}_-$.

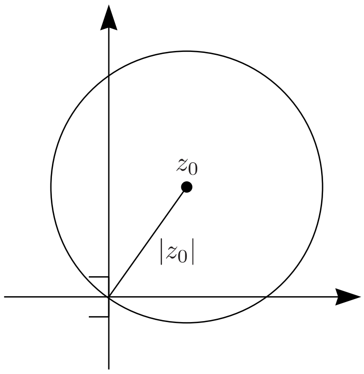
$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{z_0^n n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{|z_0|\sqrt[n]{n}} \mapsto \frac{1}{|z_0|}$$

Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung (2) ist $R = |z_0|$. Die Entwicklung (*) lautet hier also:

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z_0^n n}(z-z_0)^n =: h(z)$$

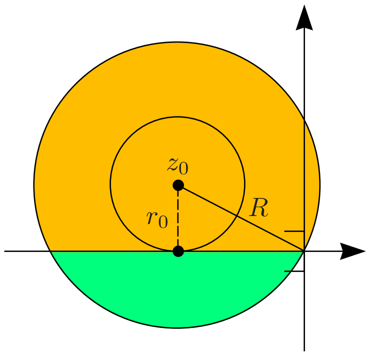
Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Log}(z) = h(z)$? Sei r_0 wie in Bemerkung (2). Dann gilt $\mathrm{Log}(z) = h(z)$ für alle $z \in U_{r_0}(z_0)$. Wir unterschieden nun zwei Fälle, was die Lage von z_0 betrifft:

– Fall 1: $\mathrm{Re}(z_0) \geq 0$:



Hier gilt $r_0 = |z_0| = R$.

– Fall 2: $\mathrm{Re}(z_0) < 0$ und $\mathrm{Im}(z_0) > 0$:



Hier ist $r_0 = \mathrm{Im}(z_0) < |z_0| = R$. Nach 5.4 ist klar, dass $h \in H(U_R(z_0))$ und (nachrechnen) $h'(z) = 1/z \;\forall\, z \in U_R(z_0)$. Sei $D_1 := U_R(z_0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $D_2 := U_R(z_0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$. Es ist $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}_-$ und $D_1, D_2 \subseteq U_R(z_0)$, $U_{r_0}(z_0) \subseteq D_1$. Zu D_1: Es gilt $h'(z) = 1/z = \mathrm{Log}'(z)$ $\forall\, z \in D_1$. Damit gibt es ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $h(z) = \mathrm{Log}(z) + c_1$ mit $z_0 \in D_1$. Es gilt $h(z_0) = \mathrm{Log}(z_0)$, womit $c_1 = 0$ ist. Fazit: $h(z) = \mathrm{Log}(z) \;\forall\, z \in D_1$. Zu D_2: Es gilt $h'(z) = 1/z = \mathrm{Log}'(z) \;\forall\, z \in D_2$. Es existiert also auch hier ein $c_2 \in \mathbb{C}$, so dass $h(z) = \mathrm{Log}(z) + c_2 \;\forall\, z \in D_2$. Sei $t_0 := \mathrm{Re}(z_0)$. Sei $z_n := |t_0| \exp(\mathrm{i}(\pi - 1/n))$ und $w_n := |t_0| \exp(\mathrm{i}(-\pi + 1/n))$. Dann gilt $z_n \mapsto t_0$ und $w_n \mapsto t_0$. Es existieren also $m \in \mathbb{N}$ mit $z_n \in D_1$ und $w_n \in D_2 \;\forall\, n \geq m$.

$$c_2 = h(w_n) - \mathrm{Log}(w_n) = h(w_n) - [\log|w_n| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(w_n)]$$

Da h stetig ist, gilt:

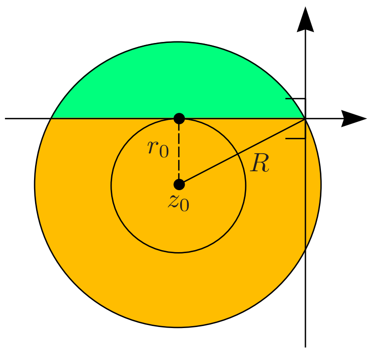
$$h(t_0) - [\log|t_0| - \mathrm{i}\pi] = h(t_0) - \log|t_0| + \mathrm{i}\pi$$

Also gilt $c_2 = h(t_0) - \log|t_0| + \mathrm{i}\pi$. Da h stetig ist, gilt:

$$h(t_0) = \lim h(z_n) \overset{\text{s.o.}}{=} \lim \mathrm{Log}(z_n) = \lim(\log|z_n| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(z_n)) = \log|t_0| + \mathrm{i}\pi$$

Hieraus resultiert wiederum $c_2 = 2\pi\mathrm{i}$. Fazit: $h(z) = \mathrm{Log}(z) + 2\pi\mathrm{i} \;\forall\, z \in D_2$.

– Fall 3: $\mathrm{Re}(z_0) < 0$ und $\mathrm{Im}(z_0) < 0$:



Hier folgt analog $h(z) = \mathrm{Log}(z) - 2\pi\mathrm{i}$.

9.5 Konvergenzsatz von Weierstraß

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge in $H(D)$. Die Folge (f_n) konvergiere auf D **lokal gleichmäßig** gegen eine Funktion $f\colon D \mapsto \mathbb{C}$. Dann gilt:

1.) $f \in H(D)$

2.) (f_n') konvergiert auf D lokal gleichmäßig gegen f'.

Beweis:

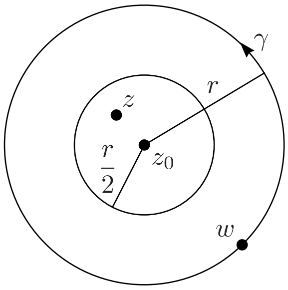
1.) Aus Satz 5.1 folgt $f \in C(D)$. Sei $\Delta \subseteq D$ ein Dreieck. (f_n) konvergiert nach Voraussetzung auf $\partial\Delta$ gleichmäßig.

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z \overset{8.4}{=} \lim_{n\mapsto\infty} \underbrace{\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ nach } 9.1} = 0$$

Nach 9.7 ist $f \in H(D)$.

2.) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ auf D. (Betrachte ansonsten $f_n - f$.) Sei $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U}_r(z_0) \subseteq D$. Es genügt folgendes zu zeigen: (f_n') konvergiert auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig gegen 0. Der Rand der Kreisscheibe wird durch $\gamma(t) := z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ beschrieben. Es sei $M_n := \max_{w\in\mathrm{Tr}(\gamma)} |f_n(w)|$. Nach Voraussetzung gilt $M_n \mapsto 0$. Sei $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$:

$$f_n'(z) \overset{9.6}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w$$



Es gilt außerdem $w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$ und $|w - z| \geq r/2$, also:

$$\frac{|f_n(w)|}{|w-z|^2} \leq \frac{4M_n}{r^2} \Rightarrow |f_n'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{4M_n}{r^2} \cdot 2\pi r = \frac{4M_n}{r}$$

Also gilt $|f_n'(z)| \leq 4M_n/r \;\forall\, z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)} \;\forall\, n \in \mathbb{N}$ und $M_n \mapsto 0$. $\square$

Kapitel 10

Weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein **Gebiet**. Fast wörtlich wie in Analysis I zeit man:

10.1 Identitätssatz für Potenzreihen

Satz:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sei eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Weiterhin sei $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ für $z \in U_r(z_0)$. Es sei (z_k) eine Folge in $\dot{U}_r(z_0)$ mit $z_k \mapsto z_0$ und es gelte $f(z_k) = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_n = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

10.2 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Satz:

Es sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und (z_k) eine Folge in $G \setminus \{z_0\}$ mit $f(z_k) = 0 \ \forall\ k \in \mathbb{N}$ und $z_k \mapsto z_0$. Dann ist $f = 0$ auf G.

Beweis:

Es existiert ein $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subseteq G$. Nach 10.4 gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \, \forall\, z \in U_r(z_0)$$

Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $z_k \in U_r(z_0) \ \forall\ k \geq k_0$. Nach Satz 11.1 ist $f^{(n)}(z_0) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$. Hieraus folgt $z_0 \in A := \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Sei $B := G \setminus A$. Dann ist $G = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Sei $a \in A$. Dann gibt es ein $\varrho > 0$ mit $U_\varrho(a) \subseteq G$. Nach 10.4 gilt:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \, \forall\, z \in U_\varrho(a)$$

Aus $a \in A$ folgt $f^{(n)}(a) = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und damit $f \equiv 0$ auf $U_\varrho(a)$. Somit sind alle $f^{(n)} \equiv 0$ auf $U_\varrho(a) \ \forall\ N \in \mathbb{N}_0$, womit $U_\varrho(a) \subseteq A$ und A offen ist. Sei $b \in B$. Es existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(k)}(b) \neq 0$. Daraus, dass $f^{(k)}$ stetig ist, folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(b) \subseteq G$ und $f^{(k)}(z) \neq 0 \ \forall\ z \in U_\varepsilon(b)$. Also ist $U_\varepsilon(b) \subseteq B$ und damit B offen. Da G ein Gebiet ist, ist $B = \emptyset$ und $G = A$, woraus die Behauptung folgt. □

Bezeichnung:

Für $f \in H(G)$ sei $Z(f) := \{z \in G : f(z) = 0\}$ die Nullstellenmenge.

10.3 Folgerungen

1.) Ist $f \in H(G)$, $f \not\equiv 0$ auf G und $z_0 \in Z(f)$. So existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ und $f(z) \neq 0 \;\forall\; z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$.

2.) Ist $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und gilt $f^{(n)}(z_0) = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}_0$, so ist $f = 0$ auf G.

Beweis:

1.) Dies folgt aus 11.2.

2.) Verfahre wie im Beweis von 11.2. □

Satz 11.4:

Sei G ein **Elementargebiet** und $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \emptyset$.

1.) Es existiert ein $h \in H(G)$ mit $\exp(h) = f$ auf G.

2.) Ist $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $g \in H(G)$ mit $g^n = f$ auf G.

Beweis:

1.) Es ist $f'/f \in H(G)$. G ist ein Elementargebiet und damit gibt es ein $F \in H(G)$ mit $F' = f'/f$ auf G. Setze $\varphi := \exp(F)/f$. Dann ist $\varphi \in H(G)$ und $\varphi' = 0$ auf G (nachrechnen!). So gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $\exp(F) = cf$ auf G. Es ist klar, dass $c \neq 0$ ist. Aus 7.1 folgt dann, dass ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit $c = \exp(a)$ und damit gilt $f = \exp(F - a)$ auf G. □

2.) Sei h wie in (1) und $g := \exp(1/nh)$. Dann gilt $g^n = \exp(h) = f$ auf G.

Satz 11.5:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

1.) Ist $F \in H(D)$, $0 \in D$, $F(0) = 0$ und $F'(0) \neq 0$, so gilt $0 \in F(D)^0$.

2.) Ist $f \in H(D)$ **nicht** lokal konstant, so ist $f(D)$ offen.

3.) **Satz von der Gebietstreue**: Ist $f \in H(G)$ **nicht konstant**, so ist $f(G)$ ein Gebiet.

Beweis:

1.) Wir definieren $u := \mathrm{Re}(F)$ und $v := \mathrm{Im}(F)$. Aus Satz 4.1 folgt $u_x(0) = u_y(0)$ und $u_y(0) = -v_x(0)$ [Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen] und $F'(0) = u_x(0) + \mathrm{i}v_x(0)$.

$$\det\begin{pmatrix} u_x(0) & u_y(0) \\ v_x(0) & v_y(0) \end{pmatrix} = u_x(0)^2 + v_x(0)^2 = |F'(0)|^2 \neq 0$$

Der Umkehrsatz (Analysis II) besagt, dass $U \subseteq D$ existiert mit $0 \in U$, U offen und $F(U)$ offen. $F(0) = 0$ liefert $0 \in F(u)$. Damit existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subseteq F(u) \subseteq F(D)$.

2.) Sei $w_0 \in f(D)$. Es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(w_0) \subseteq f(D)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $w_0 = 0$. Es existiert ein $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = w_0 = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei auch $z_0 = 0$. Also gilt $f(0) = 0$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$. 10.4 liefert nun $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \;\forall\; z \in U_\varepsilon(0)$. Aus $f(0) = 0$ ergibt sich $a_0 = 0$. Damit existiert nach 11.3 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$. Sei $m := \min\{n \in \mathbb{N}\colon a_n \neq 0\}$ (≥ 1). Dann ist

$$f(z) = z^n \underbrace{(a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots)}_{=:g(z)} = z^m g(z) \,\forall\, z \in U_\varepsilon(0)$$

wobei $g \in H(U_\varepsilon(0))$ und $g(0) = a_m \neq 0$. Da g stetig ist, gibt es ein $r \in (0, \varepsilon)$ mit $g(z) \neq 0 \;\forall\; z \in U_r(0)$. $U_r(0)$ ist ein Elementargebiet. 11.4 liefert dann, dass ein $h \in H(U_r(0))$ existiert mit $h^m = g$ auf $U_r(0)$. Definiere $F \in H(U_r(0))$ durch $F(z) := zh(z)$. Dann ist $F(0) = 0$, $F'(z) = h(z) + zh'(z)$, also $F'(0)^m = h(0)^m = g(0) \neq 0$, also $F'(0) \neq 0$. Weiter ist $F^m = f$ auf $U_r(0)$. Aus (1) existiert ein $R > 0$ mit $U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$. Sei $\delta = R^m$ und $w \in U_\delta(0)$. Wegen Satz 1.5 existiert ein $v \in \mathbb{C}$ mit $v^m = w$. Dann ist $|v|^m = |w| < \delta = R^m$. Also ist $|v| < R$ und damit $v \in U_R(0) \subseteq F(U_r(0))$. Es gibt somit ein $z \in U_r(0) \subseteq D$ mit $F(z) = v$. Hieraus folgt $w = v^m = F(z)^m = f(z) \in f(D)$. Also ist $U_\delta(0) \subseteq f(D)$. □

3.) Nach Satz 3.6 ist $f(G)$ zusammenhängend und nach (2) damit ein Gebiet.

10.4 Maximum-, Minimumprinzip (I)

Satz 11.6:

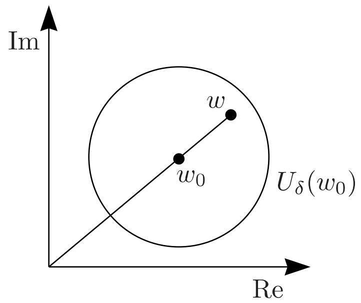
Sei $f \in H(G)$ nicht konstant.

1.) $|f|$ hat auf G **kein** lokales Maximum.

2.) Ist $Z(f) = \emptyset$, so hat $|f|$ auf G **kein** lokales Minimum.

Beweis:

1.) Sei $z_0 \in G$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ und sei $w_0 := f(z_0)$. Aus Satz 11.5 wissen wir, dass $f(U_\varepsilon(z_0))$ offen ist. Aus $w_0 \in F(U_\varepsilon(z_0))$ folgt, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $U_\delta(w_0) \subseteq f(U_\varepsilon(z_0))$. Es existieren $w \in U_\delta(w_0)$ mit $|w| > |w_0|$.



Somit gibt es $z \in U_\varepsilon(z_0)$, so dass $w = f(z)$. Dann ist $|f(z)| = |w| > |w_0| = |f(z_0)|$. □

2.) Wende (1) auf $1/f$ an.

10.5 Maximum-, Minimumprinzip (II)

Sei G **beschränkt**, $f \in C(\overline{G})$ und es sei $f \in H(G)$.

1.) $|f(z)| \leq \max_{w \in \partial G} |f(w)| \; \forall \; z \in \overline{G}$

2.) Ist $f(z) \neq 0 \; \forall \; z \in G$, so gilt $|f(z)| \geq \min_{w \in \partial G} |f(w)| \; \forall \; z \in \overline{G}$

Beweis:

1.) $\overline{G}$ ist kompakt. Dann folgt aus Satz 3.3, dass ein $w_0 \in \overline{G}$ existiert mit $|f(z)| \leq |f(w_0)| \; \forall \; z \in \overline{G}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

   a.) $w_0 \in \partial G$: fertig

   b.) $w_0 \in G$: Dann gilt $|f(z)| \leq |f(w_0)| \; \forall \; z \in G$. Nach 11.6 ist f somit konstant auf G. Da f stetig ist, folgt, dass f auf $\overline{G}$ konstant ist. Hieraus folgt die Behauptung.

2.) Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:

   a.) $f(z) \neq 0 \; \forall \; z \in \overline{G}$: Wende (1) auf $1/f$ an.

   b.) Es existiert ein $z_0 \in \overline{G}$ mit $f(z_0) = 0$. Laut Voraussetzung ist $z_0 \in \partial G$. Dann ist $\min_{w \in \partial G} |f(w)| = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Definition:

Sei $A \subseteq G$. A heißt **diskret in *G*** genau dann, wenn A **in *G*** keine Häufungspunkt hat. ($\Leftrightarrow$ Zu jedem $z_0 \in A$ existiert ein $r = r(a) > 0$ mit der Eigenschaft $A \cap \dot{U}_r(z_0) = \emptyset$.)

Aufgabe:

Ist A diskret in G, so ist A höchstens aufzählbar.

Satz und Definition 11.8:

Sei $f \in H(G)$ und $f \not\equiv 0$. Dann ist $Z(f)$ diskret in G.
Ist $z_0 \in Z(f)$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in H(G)$ mit der Eigenschaft $f(z) = (z - z_0)^m g(z) \; \forall \; z \in G$ **und** $g(z_0) \neq 0$. m und g sind eindeutig bestimmt. m heißt die **Ordnung** (oder Vielfachheit) der Nullstelle z_0 von f. („f hat in z_0 eine m-fache Nullstelle.“)

Beweis:

11.3 besagt, dass $Z(f)$ diskret in G ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$. Ex existiert dann ein $r > 0$ mit $U_r(0) \subseteq G$. Nach 11.4 lässt sich f wie folgt schreiben:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \; \forall \, z \in U_r(0)$$

Aus $f(0) = 0$ folgt $a_0 = 0$. Nach dem Identitätssatz 11.2 folgt, dass $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $a_n \neq 0$. Sei $m := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$. Dann lässt sich die Potenzreihe schreiben als:

$$f(z) = z^m \underbrace{(a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \ldots)}_{=:\varphi(z)} = z^m \varphi(z) \; \forall \, z \in U_r(0)$$

Es ist $\varphi \in H(U_r(0))$ und $\varphi(0) = a_m \neq 0$. Definiere $g\colon G \mapsto \mathbb{C}$ durch:

$$g(z) := \begin{cases} f(z)/z^m & \text{für} \quad z \neq 0 \\ a_m & \text{für} \quad z = 0 \end{cases}$$

Dann gilt $f(z) = z^m g(z) \; \forall \; z \in G$. Außerdem ist $g(0) = a_m \neq 0$. Dass g außerhalb des Nullpunkts holomorph ist ist klar. Da $g = \varphi$ auf $U_r(0)$ ist, gilt $g \in H(G)$. □

Aufgabe:

Sei f wie in 11.8, $z_0 \in G$ und $m \in \mathbb{N}$. f hat in z_0 eine m-fache Nullstelle genau dann, wenn $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Satz 11.9:

Sei $f \in H(G)$.

1.) Sei $g\colon G \times G \mapsto \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{für} \quad z \neq w \\ f'(z) & \text{für} \quad z = w \end{cases}$$

Dann ist g stetig.

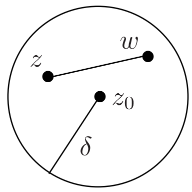
2.) Ist $z_0 \in G$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ und

$$|f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2} |f'(z_0)| |z - w| \; \forall \, z, \, w \in U_\varepsilon(z_0) \qquad (*)$$

Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist f auf $U_\varepsilon(z_0)$ injektiv und f^{-1} ist auf $f(U_\varepsilon(z_0))$ stetig.

Beweis:

1.) Es genügt zu zeigen: Ist $z_0 \in G$, so ist g stetig in $(z_0, z_0) \in G \times G$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $U_\delta(z_0) \in G$ und $|f'(w) - f'(z_0)| \leq \varepsilon \; \forall \; w \in U_\delta(z_0)$. Seien $z, \, w \in U_\delta(z_0)$ und $\gamma(t) := z + t(w - z)$ mit $t \in [0, 1]$. Dann ist $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq U_\delta(z_0)$.



$U_\delta(z_0)$ ist ein Sterngebiet und f' hat auf $U_\delta(z_0)$ die Stammfunktion f. Nach 9.2 gilt:

$$\int_\gamma f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(w) - f(z) \Rightarrow f(w) - f(z) = \int_0^1 f'(\gamma(t))(w-z)\,\mathrm{d}t$$

Ist $z \neq w$, so folgt:

$$g(z,w) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\,\mathrm{d}t$$

Ist andererseits $z = w$, so gilt:

$$\gamma(t) = z \,\forall\, t \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 f'(\gamma(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'(z)\,\mathrm{d}t = f'(z) = g(z,z)$$

Also ist $g(z,w) = \int_0^1 f'(\gamma(t))\,\mathrm{d}t$. Dann erhalten wir weiter:

$$|g(z,w) - f'(z_0)| = \left|\int_0^1 [f'(\gamma(t)) - f'(z_0)]\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \underbrace{|f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|}_{\leq \varepsilon \text{ (s.o.)}}\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \qquad \square$$

2.) Aus (1) folgt $|g(z,w)| \mapsto |f'(z_0)|$ für $(z,w) \mapsto (z_0,z_0)$. Somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq G$ und $|g(z,w)| \geq 1/2 f'(z_0)\ \forall\ z,\, w \in U_\varepsilon(z_0)$. Daraus folgt $(*)$. Sei $f'(z_0) \neq 0$. Aus $(*)$ ergibt sich nun, dass f injektiv ist auf $U_\varepsilon(z_0)$. Seien $\lambda,\, \mu \in f(U_\varepsilon(z_0))$, $z := f^{-1}(\lambda)$ und $w := f^{-1}(\mu)$.

$$|f^{-1}(\lambda) - f^{-1}(\mu)| = |z - w| \underset{(*)}{\leq} \frac{2}{|f'(z_0)|}|\lambda - \mu|$$

Satz 11.10:

Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subseteq G$.

i.) f ist auf $U_r(z_0)$ injektiv **und** $f'(z) \neq 0\ \forall\ z \in U_r(z_0)$.

ii.) $f(U_r(z_0))$ ist ein Gebiet.

iii.) $f^{-1} \in H(f(U_r(z_0)))$ und $(f^{-1})'(w) = 1/(f'(f^{-1}(w)))\ \forall\ w \in f(U_r(z_0))$.

Beweis:

i.) Sei $\varepsilon > 0$ wie in 11.9 (2). Da f' stetig ist, existiert ein $r \in (0,\varepsilon)$ mit $f'(z) \neq 0\ \forall\ z \in U_r(z_0)$.

ii.) Das folgt aus 11.5.

iii.) Sei $w_0 \in f(U_r(z_0))$ und (w_n) eine Folge in $f(U_r(z_0)) \setminus \{w_0\}$ mit $w_n \mapsto w_0$. Sei $\widetilde{z} := f^{-1}(w_0)$ und $z_n := f^{-1}(w_n)$. 11.9 liefert, dass f^{-1} stetig ist in w_0. Hieraus folgt $z_n \mapsto \widetilde{z}$ und damit:

$$\frac{f^{-1}(w_n) - f^{-1}(w_0)}{w_n - w_0} = \frac{z_n - \widetilde{z}}{f(z_n) - f(\widetilde{z})} \xrightarrow{x \mapsto \infty} \frac{1}{f'(\widetilde{z})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$$

Also ist f^{-1} in w_0 komplex differenzierbar und $(f^{-1})'(w_0) = 1/(f'(f^{-1}(w_0)))$. $\square$

Satz 11.11:

Sei $f \in H(G)$ auf G injektiv. Dann gilt:

1.) $Z(f') = \emptyset$

2.) $f^{-1} \in H(f(G))$ und $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}\ \forall\ w \in f(G)$

Beweis:

1.) Annahme: Es existiert ein $z_0 \in G$ mit $f'(z_0) = 0$ und $w_0 := f(z_0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $w_0 = 0 = z_0$, also $f(0) = f'(0) = 0$. Aus 11.8 folgt, dass ein $n \geq 2$ und $g \in H(G)$ existiert mit $f(z) = z^m g(z)\ \forall\ z \in G$ und $g(0) \neq 0$. Damit gibt es nach 11.3 ein $\varepsilon > 0$ mit $f(z) \neq 0\ \forall\ z \in \dot{U}_\varepsilon(0)$ und $U_\varepsilon(0) \subseteq G$. Also ist $g(z) \neq 0$ für jedes $z \in U_\varepsilon(0)$. Aus 11.4 folgt, dass eine Funktion $\psi \in H(U_\varepsilon(0))$ existiert mit $\psi^m = g$ auf $U_\varepsilon(0)$. Definiere $\varphi \in H(U_\varepsilon(0))$ durch $\varphi(z) := z\psi(z)$ mit $z \in U_\varepsilon(0)$. Dann gilt $\varphi^m = f$ auf $U_\varepsilon(0)$. Es ist ersichtlich, dass $\psi(0) = 0$ und $\psi'(z) = \psi(z) + z\psi'(z)$. Außerdem gilt $\varphi'(0)^m = \psi(0)^m = g(0) \neq 0$, also $\varphi'(0) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass $\varphi'(0) \neq 0$ für alle $z \in U_\varepsilon(0)$. φ auf $U_\varepsilon(0)$ injektiv,, denn sind $z_1,\ z_2 \in U_\varepsilon(0)$ und $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, so folgt daraus $\varphi(z_1)^m = \varphi(z_2)^m$, also $f(z_1) = f(z_2)$und damit $z_1 = z_2$. Des weiteren ist $0 = \varphi(0) \in \varphi(U_\varepsilon(0))$. Nach 11.5 existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subseteq \varphi(U_\varepsilon(0))$. Aus 11.10 ergibt sich wiederum $\varphi^{-1} \in H(\varphi(U_\varepsilon(0)))$. Aus 11.5 folgt, dass $U := \varphi^{-1}(U_\delta(0))$ offen ist. Klar ist, dass $0 \in U$, $U \subseteq U_\varepsilon(0)$ und $\varphi(U) = U_\delta(0)$ $(*)$. Sei $z_1 \in U \setminus \{0\}$, $a_1 := \varphi(z_1)$, $w_1 = f(z_1) \neq 0$ (siehe oben) Auf der anderen Seite ist $a_1^m = \varphi(z_1)^m = f(z_1) = w_1$. Aus 1.5 folgt, dass ein $a_2 \in \mathbb{C}$ existiert mit der Eigenschaft $a_2^m = w_1$ und $a_1 \neq a_2$. Aus $a_2^m = w_1 = \varphi(z_1)^m$ resultiert $|a_2| = |\varphi(z_1)| \overset{(*)}{<} \delta$ und mit $(*)$ folgt $a_2 \in \varphi(U)$. Damit gibt es ein $z_2 \in U$ mit $a_2 = \varphi(z_2)$ und damit $f(z_2) = \varphi(z_2)^m = a_2^m = w_1 = a_1^m = f(z_1)$. Da f injektiv ist, folgt $z_1 = z_2$. Dann gilt $a_1 = \varphi(z_1) = \varphi(z_2) = a_2$, was wegen der Wahl $a_1 \neq a_2$ ein Widerspruch darstellt. □

2.) Das folgt aus (1) und 11.10.

Definition:

Sei $z_0 \in G$, $a > 0$, γ_1, γ_2: $[0, a] \mapsto \mathbb{C}$ seien glatte Wege und $\gamma_j'(t) \neq 0\ \forall\ t \in [0, a]$ $(j = 1,\ 2)$. Weiterhin sei $\gamma_1(0) = z_0 = \gamma_2(0)$. Der orientierte Winkel von γ_1 nach γ_2 in z_0 sei definiert durch:

$$\text{Winkel}(\gamma_1, \gamma_2, z_0) := \arg\gamma_2'(0) - \arg\gamma_1'(0) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}\right)$$

10.6 Winkeltreue

Satz 11.12:

Sei $f \in H(G)$, $z_0 \in G$ und $f'(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\boxed{\text{Winkel}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, f(z_0)) = \text{Winkel}(\gamma_1, \gamma_2, z_0)}$$

Beweis:

Sei $\Gamma_j := f \circ \gamma_j$ $(j = 1,\ 2)$. Dann gilt $\Gamma_j'(t) = f'(\gamma(t))\gamma_j'(t))$ und $\Gamma_j'(0) = f'(z_0)\gamma_j'(0) \neq 0$. Es gibt ein $b \in (0, a)$ mit der Eigenschaft $\Gamma_j'(t) \neq 0\ \forall\ tz \in [0, b]$ $(j = 1,\ 2)$.

$$\text{Winkel}(\Gamma_1, \Gamma_2, f(z_0)) = \arg\left(\frac{\Gamma'_2(0)}{\Gamma_1'(0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma'_2(0)}{\gamma 1'(0)}\right) = \text{Winkel}(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$$ □

Definition:

1.) G_1 und G_2 seien Gebiete in $\mathbb{C}$. Ist $f \in H(G_1)$ injektiv auf G_1 und gilt $f(G_1) = G_2$, so heißt f eine **konforme Abbildung** von G_1 auf G_2.

2.) Ist f: $G \mapsto G$ eine konforme Abbildung von G auf G, so heißt f ein **Automorphismus** von G und man schreibt $f \in \text{Aut}(G)$.

Satz 11.13:

G_1, G_2 seien Gebiete, f: $G_1 \mapsto G_2$ sei eine konforme Abbildung von G_1 auf G_2 und G_1 sei ein **Elementargebiet**. Dann ist G_2 ebenfalls ein Elementargebiet. (Entweder haben also beide Gebiete Löcher oder beide Gebiete keine.)

Beweis:

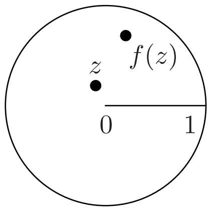
Sei $g \in H(G_2)$ und $h := (g \circ f)f'$. Dann ist $h \in H(G_1)$. Aus der Tatsache, dass G_1 ein Elementargebiet ist, folgt, dass ein $\phi \in H(G_1)$ existiert mit $\phi' = h$ auf G_1. Sei weiterhin $F := \phi \circ f^{-1}$. Nach 11.11 ist $F \in H(G_2)$. Nachzurechnen ist mittels der Kettenregel, dass $F' = g$ auf G_2 ist. □

Kapitel 11

Das Schwarzsche Lemma, Aut($\mathbb{D}$)

Sei $D := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$.

11.1 Schwarzsches Lemma

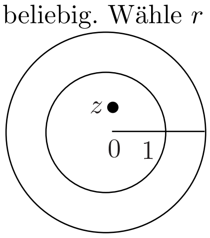


Satz 12.1:

Es sei $f \in H(\mathbb{D})$, $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ und $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|\ \forall\ z \in D$ und $|f'(0)| \leq 1$ $(*)$. Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Ist $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, so existiert ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ und es ist $f(z) = \lambda z$.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f \not\equiv 0$. Nach 11.8 existiert ein $g \in H(\mathbb{D})$ mit $f(z) = zg(z)$. Sei $z \in \mathbb{D}$ beliebig. Wähle $r > 0$ so, dass $r < 1$ und $|z| < r$.



Dann ist nach dem Maximumprinzip (11.7):

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{|w|} \leq \frac{1}{r}$$

Für $r \mapsto 1$ ergibt sich hieraus $|g(z)| \leq 1$. Also ist $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Aus $f'(z) = g(z) + zg'(z)$ folgt $f'(0) = g(0)$. Also gilt $(*)$. Es sei $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Hieraus ergibt sich $|g(0) = 1$ oder $|g(z_0)| = 1$. Es resultiert, dass $|g|$ ein Maximum in $\mathbb{D}$ hat. Nach 11.6 existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $g(z) = \lambda\ \forall\ z \in \mathbb{D}$. Dann ist $f(z) = \lambda z$. Es ist $|\lambda| = |g(0)| = 1$ oder $|\lambda| = |g(z_0)| = 1$, also $\lambda \in \partial\mathbb{D}$. $\square$

Definition:

Sei $a \in \mathbb{D}$ und $S_a \in H(\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\})$ definiert durch $S_a(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$. Beachte:

$$\left|\frac{1}{\overline{a}}\right| = \frac{1}{|a|} > 1 \text{ da } a \in \mathbb{D}$$

Also ist $1/\overline{a} \notin \overline{\mathbb{D}}$. Weitere Eigenschaften sind $S_a(a) = 0$ und $S_a(0) = -a$.

Satz 12.2:

Sei $a \in \mathbb{D}$.

1.) S_a ist auf $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ injektiv.

2.) $S_a^{-1} = S_{-a}$ auf $\overline{\mathbb{D}}$

3.) $S_a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$

4.) $S_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$

5.) Ist $\lambda \in \partial D$, so ist $\lambda S_a \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$.

Beweis:

1.) Sei z_1, $z_2 \in \mathbb{D}$. Dann nehmen wir an, dass $f(z_1) = f(z_2)$. Hieraus folgt $z_1 = z_2$. (Nachrechnen!)

2.) Wir betrachten:

$$w = S_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \Leftrightarrow z - a = w - \overline{a}zw \Leftrightarrow z(1+\overline{a}w) = w + a \Leftrightarrow z = \frac{w+a}{1+\overline{a}w} = S_{-a}(w)$$

3.) Sei $|z| = 1$, also $z = \exp(it)$ mit $t \in \mathbb{R}$.

$$|S_a(z)| = \left|\frac{\exp(it)-a}{1-\overline{a}\exp(it)}\right| = \left|\frac{\exp(it)-a}{\exp(it)(\exp(-it)-\overline{a})}\right| = \frac{|\exp(it)-a|}{|\exp(it)|\cdot|\overline{\exp(it)-a}|} = 1$$

Also ist $S_a(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$. Aus (2) folgt $\partial\mathbb{D} = S_a(S_{-a}(\partial\mathbb{D})) \subseteq S_a(\partial\mathbb{D})$ wegen $S_{-a}(\partial\mathbb{D}) \subseteq \partial\mathbb{D}$.

4.) Sei $z \in D$.

$$|S_a(z)| \underset{11.7}{\leq} \max_{|w|=1} |S_a(w)| \underset{(3)}{=} 1 \Rightarrow S_a(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$$

Sei $z \in \mathbb{D}$, $w := S_a(z)$. Wir nehmen an, dass $|w| = 1$ ist. Mit (3) wäre dann $|z| = |S_{-a}(w)| = 1$. Dies stellt ein Widerspruch zur Annahme dar. Also ist $S_a(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Genauso ist $S_{-a}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Dann ist wegen (2) $\mathbb{D} = S_a(S_{-a}(\mathbb{D})) \subseteq S_a(\mathbb{D})$.

5.) Das folgt aus (1) und (4). □

Satz 12.3:

Sei $f \in H(\mathbb{D})$. Es gilt $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ und $f(0) = 0$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ existiert, so dass $f(z) = \lambda z$.

Beweis:

- „$\Leftarrow$“: klar
- „$\Rightarrow$“: Dann ist $f^{-1} \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ und $f^{-1}(0) = 0$. Sei $z \in \mathbb{D}$ und $w := f(z)$. Dann ist $z = f^{-1}(w)$, $|z| = |f^{-1}(w)| \leq |w| = |f(z)| \leq |z|$ (nach 12.1). Also ist $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Nach 12.1 existiert ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$, so dass $f(z) = \lambda z$.

Satz 12.4:

Es gilt $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}) = \{\lambda S_a : \lambda \in \partial\mathbb{D}, a \in \mathbb{D}\}$.

Beweis:

- „$\supseteq$“: Dies folgt aus 12.2 (3).
- „$\subseteq$“: Sei $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ und $a := f^{-1}(0) \in \mathbb{D}$, $g := f \circ S_{-a}$. Es gilt $g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ und $g(0) = f(S_{-a}(0)) = f(S_a(0)) = f(a) = 0$. Nach Satz 12.3 existiert ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ mit $g(z) = \lambda z$. Es ist damit $f = g \circ S_a = \lambda S_a$. □

Kapitel 12

Isolierte Singularitäten

Vereinbarung: In diesem Paragraphen sei stets $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} = D \setminus \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$. z_0 heißt dann eine **isolierte Singularität von f**.

Definition:

z_0 heißt eine hebbare Singularität von f genau dann, wenn ein $h \in H(D)$ existiert mit der Eigenschaft $h = f$ auf $\dot{D}$. In diesem Falle ist h eindeutig bestimmt (Identitätssatz) und wir sagen kurz: „$f \in H(D)$“.

Beispiel:

Sei $f(z) = \sin(z)/z$ ($D = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$).

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \ldots =: h(z)$$

Dann ist $h \in H(\mathbb{C})$ und $h = f$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. f hat also in 0 eine hebbare Singularität.

12.1 Riemannscher Hebbarkeitssatz

Satz 13.1:

f hat in z_0 eine hebbare Singularität genau dann, wenn ein $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft $U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f auf $U_\delta(z_0)$ beschränkt ist.

Beweis:

- „$\Rightarrow$“: klar
- „$\Leftarrow$“: Sei $M := \sup_{z \in \dot{U}_\delta(z_0)} |f(z)|$. Definiere g: $D \mapsto \mathbb{C}$ durch

  $$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{für} \quad z \in \dot{D} \\ 0 & \text{für} \quad z = z_0 \end{cases}$$

  Dann ist $g \in H(\dot{D})$. Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ gilt:

  $$\left|\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\frac{g(z)}{z - z_0}\right| = |f(z)(z - z_0)| \leq M|z - z_0|$$

  Damit ist g in z_0 komplex differenzierbar, also $g \in H(D)$ und $g'(z_0) = 0$.

  - Fall 1: Sei $g \equiv 0$ auf D. Dann ist $f \equiv 0$ auf $\dot{D}$.
  - Fall 2: Sei $g \not\equiv 0$ auf D. Es ist $g(z_0) = g'(z_0) = 0$. Nach 11.8 existiert ein $h \in H(D)$ mit der Eigenschaft $g(z) = (z - z_0)^2 h(z)$ für alle $z \in D$. Dann ist $h = f$ auf $\dot{D}$. □

Definition und Satz 13.2:

z_0 ist ein **Pol von f** genau dann, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in H(D)$ existieren mit

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \; \forall \, z \in \dot{D} \; \textbf{und} \; g(z_0) \neq 0$$

In diesem Fall ist m eindeutig bestimmt und heißt die **Ordnung** des Pols z_0 von f.

Beweis:

Seien $m, l \in \mathbb{N}$ und $g, h \in H(D)$. Sei $g(z_0) \neq 0 \neq h(z_0)$ und

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^l} \; \forall \, z \in \dot{D}$$

Wir nehmen an, dass $m > l$, also $m - l \geq 1$. Da $h(z_0) \neq 0$, existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $h(z) \neq 0 \; \forall \, z \in U_\delta(z_0)$. Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ gilt:

$$\frac{g(z)}{h(z)} = (z-z_0)^{m-l} \xrightarrow{z \mapsto z_0} g(z_0) = 0$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt $m \leq l$. Analog führt man dies mit der Annahme $l \leq m$ durch, was auch auf einen Widerspruch führt. □
Aus 13.2 folgt:

Satz 13.3:

Hat f in z_0 einen Pol, so gilt: $|f(z)| \mapsto \infty$ für $z \mapsto z_0$.

Beispiele:

1.) $f(z) = 1/z$ besitzt in 0 einen einfachen Pol.

2.) $f(z) = \exp(z)/z^{17}$ hat in 0 einen Pol der Ordnung 17.

Definition:

z_0 heißt eine **wesentliche Singularität** von f genau dann, wenn z_0 nicht **hebbar** ist und **kein** Pol von f ist.

Beispiel:

Wir betrachten $f(z) = \exp(1/z)$ $(D = \mathbb{C}, \, z_0 = 0)$. Sei $z_n := 1/n$.

$f(z_n) = \exp(n) \mapsto \infty$ für $n \mapsto \infty$, $z_n > 0$

Nach 13.1 ist 0 nicht hebbar, weil f in der Nähe des Nullpunktes nicht beschränkt ist. Betrachten wir außerdem die Folge $w_n := \mathrm{i}/n$.

$|f(w_n)| = |\exp(-\mathrm{i}n)| = 1 \, \forall \, n \in \mathbb{N}$

Es gilt $w_n \mapsto 0$. Nach 13.3 ist damit $z_0 = 0$ kein Pol von f. f hat somit in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität.

12.2 Satz von Casorati-Weierstraß

Satz 13.4:

f habe in z_0 eine wesentliche Singularität und es sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(z_0) \subseteq D$. Dann gilt:

$$\boxed{\overline{f}(\dot{U}_\delta(z_0)) = \mathbb{C}}$$

Ist also $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$, so existiert ein $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ mit $|f(z) - b| < \varepsilon$.

Beweis:

Sei $b \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$. Wir nehmen an, dass $|f(z)-b| \geq \varepsilon \; \forall \; z \in \dot{U}_\delta(z_0)$. sei $g := 1/(f-b)$. Dann ist $g \in H(\dot{U}_\delta(z_0))$ und $|g| \leq 1/\varepsilon$ auf $\dot{U}_\delta(z_0)$. Mit 13.1 folgt, dass g in z_0 eine hebbare Singularität hat, kurz: $g \in H(U_\delta(z_0))$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.) $g(z_0) \neq 0$: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $g(z) \neq 0 \; \forall \; z \in U_\delta(z_0)$. Es gilt $f = 1/g + b$ auf $\dot{U}_\delta(z_0)$. Damit hat f in z_0 eine hebbare Singularität. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

2.) $g(z_0) = 0$: Satz 11.8 liefert, dass ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $\varphi \in H(U_\delta(z_0))$ existieren mit $g(z) = (z-z_0)^m \varphi(z) \; \forall \; z \in U_\delta(z_0)$ und $\varphi(z_0) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\varphi(z) \neq 0 \; \forall \; z \in U_\delta(z_0)$. Definiere ψ: $D \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$\psi(z) := \begin{cases} 1/\varphi(z) & \text{für} \quad z \in U_\delta(z_0) \\ (z-z_0)^m[f(z)-b] & \text{für} \quad z \in \dot{D} \end{cases}$$

ψ ist wohldefiniert für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$.

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \frac{(z-z_0)^m}{g(z)} = (z-z_0)^m[f(z)-b]$$

Dann ist $\psi \in H(D)$ und $\psi(z_0) = 1/\varphi(z_0) \neq 0$. Sei $g(z) := \psi(z) + b(z-z_0)^m$ für $z \in D$. Klar ist, dass $g \in H(D)$ und $g(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$. Weiter gilt:

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m} + b = f(z) - b + b = f(z) \, \forall \, z \in \dot{D}$$

Hieraus folgt nach 13.2, dass f in z_0 einen Pol hat, was ein Widerspruch darstellt. □

12.3 Klassifikation

Satz 13.5:

Die isolierte Singularität z_0 von f ist

1.) hebbar genau dann, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(z_0) \subseteq D$ und f auf $U_\delta(z_0)$ beschränkt ist.

2.) ist **ein Pol von *f*** genau dann, wenn $|f(z)| \mapsto \infty$ für $z \mapsto z_0$.

3.) **wesentlich** genau dann, wenn für alle $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ gilt: $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$.

Beweis:

1.) Das ist gerade Satz 13.1.

2.) „⇒“ folgt aus 13.3. „⇐“: Mit der Voraussetzung und 13.1 ist z_0 nicht hebbar. Aus der Voraussetzung und 13.4 folgt, dass z_0 nicht wesentlich ist.

3.) „⇒“ folgt aus 13.4. „⇐“: Mit der Voraussetzung und 13.1 ist z_0 nicht hebbar. Außerdem folgt aus der Voraussetzung und 13.3, dass z_0 **kein** Pol ist. □

Beispiel:

1.) Wir betrachten $f(z) = \exp(1/z)$. Als Übung kann man zeigen, dass $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\} \; \forall \; \delta > 0$.

2.) Sei $f(z) = \sin(1/z)$. Als Übung kann gezeigt werden, dass $f(\dot{U}_\delta(0)) = \mathbb{C} \; \forall \; \delta > 0$.

Kapitel 13

Laurententwicklung

13.1 Bezeichnungen

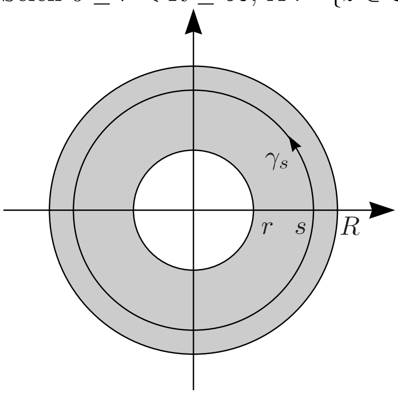
Für $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $U_\infty(z_0) := \mathbb{C}$ und $\dot{U}_\infty(z_0) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Wir setzen außerdem $1/0 := \infty$. Erinnerung (an 9.5): Sei γ ein stückweise glatter Weg in $\mathbb{C}$, $\varphi \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$ und

$$g(z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w \text{ mit } z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$$

Dann ist $g \in H(\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma))$.

Satz 14.1:

Seien $0 \leq r < R \leq \infty$, $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und $f \in H(A)$.



Für $s \in (r, R)$ sei $\gamma_s(t) := s\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $J(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\,\mathrm{d}z$. Dann ist J konstant auf (r, R).

Beweis:

Sei $g(z) := zf(z)$ mit $z \in A$. Dann gilt $f(z) = g(z)/z$ und $g \in H(A)$. Dann gilt:

$$J(s) = \int\limits_{\gamma_s} \frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{g(s\exp(\mathrm{i}t))}{s\exp(\mathrm{i}t)} s\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{i}g(s\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t$$

Aus Analysis II folgt, dass J auf (r, R) differenzierbar ist und $J'(s)$ ist gegeben durch:

$$J'(s) = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} g(s\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{i}g'(s\exp(\mathrm{i}t))\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} g'(s\exp(\mathrm{i}t))s\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int\limits_0^{2\pi} g'(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int\limits_{\gamma_s} g'(z)\,\mathrm{d}z \overset{8}{=}$$

Dies gilt, da g' holomorph ist und der Integrationsweg geschlossen. $\square$

13.2 Laurentzerlegung

Sei A wie in Satz 14.1 und $f \in H(A)$. Dann existieren eindeutig bestimmte Funktionen $g \in H(U_R(0))$ und $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ mit folgenden Eigenschaften:

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \; \forall\, z \in A \textbf{ und } h(0) = 0 \tag{$*$}$$

(Beachte: Ist $z \in A$, dann folgt $|z| > r$ und $1/z \in U_{\frac{1}{r}}(0)$.) $(*)$ heißt die **Laurentzerlegung** von f. g heißt **Nebenteil** von f und die Funktion $z \mapsto h(1/z)$ heißt **Hauptteil** von f.

Beispiel:

Wir betrachten $f(z) = \exp(1/z)$ und $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($r = 0$, $R = \infty$). Es gilt:

$$f(z) = 1 + \left[\exp\left(\frac{1}{z}\right) - 1\right] \Rightarrow \boxed{g(z) \equiv 1 \text{ und } h(z) = \exp(z) - 1}$$

Beweis von 14.2:

1.) Eindeutigkeit: Es seien g, $g_1 \in H(U_R(0))$, h, $h_1 \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$, $h(0) = 0 = h_1(0)$ und

$$g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = f(z) = g_1(z) + h_1\left(\frac{1}{z}\right) \; \forall\, z \in A$$

Wir setzen nun $G := g - g_1 \in H(U_R(0))$ und $H := h_1 - h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$. Also folgt $G(z) = H(1/z)$ $\forall$ $z \in A$. Dann ist F: $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, definiert durch die Vorschrift

$$F(z) := \begin{cases} G(z) & \text{für} \quad |z| < R \\ H\left(\frac{1}{z}\right) & \text{für} \quad |z| > r \end{cases}$$

auf $\mathbb{C}$ wohldefiniert. Klar ist, dass $F \in H(\mathbb{C})$ ist. Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $|z_n| \mapsto \infty$. Dann gilt $1/z_n \mapsto 0$ und $|z_n| > r$ $\forall$ $n \geq m$.

$$F(z_n) \overset{n \geqq m}{=} H\left(\frac{1}{z_n}\right) = h_1\left(\frac{1}{z_n}\right) - h\left(\frac{1}{z_n}\right) \mapsto h_1(0) - h(0) = 0$$

Also gilt $F(z) \mapsto 0$ für $|z| \mapsto \infty$. Somit existiert ein $\varrho > 0$, so dass $|F(z)| \leq 1$ $\forall$ $z \in \mathbb{C} \setminus U_\varrho(0)$. Klar ist, dass F auf $\overline{U_\varrho(0)}$ beschränkt ist. F ist also auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Aus Satz 10.2 folgt, dass F auf $\mathbb{C}$ konstant ist. Wegen $F(z) \mapsto 0$ für $|z| \mapsto \infty$ folgt $F \equiv 0$, also $G \equiv 0$ und $H \equiv 0$.

2.) Existenz: Wegen (1) genügt es, die Existenz der Laurentzerlegeung auf jedem kleineren Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : \varrho_1 < |z| < \varrho_2\}$ $(r < \varrho_1 < \varrho_2 < R)$ zu zeigen!

Definition:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $A \subseteq \mathbb{C}$. Eine Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

heißt eine **Laurentreihe**. Diese Reihe heißt in $z \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent genau dann, wenn die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

(absolut) konvergent sind. In diesem Fall ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

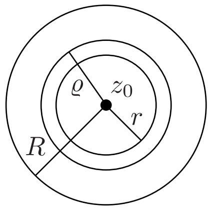
Die Laurentreihe heißt auf A (lokal) gleichmäßig konvergent genau dann, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

auf A (lokal) gleichmäßig konvergieren.

Satz 14.3:

Sei $0 \leq r < R \leq \infty$, $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ und $f \in H(A)$.



Dann hat f auf A die **Laurententwicklung**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit } z \in A$$

Die Laurentreihe konvergiert auf A absolut und lokal gleichmäßig. Die Koeffizienten a_n $(n \in \mathbb{N})$ sind eindeutig bestimmt. Ist $r < \varrho < R$ und $\gamma(t) := z_0 + \varrho \exp(it)$ mit $t \in [0, 2\pi]$, so gilt:

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \,\forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt **Nebenteil** von f,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

heißt der **Hauptteil** von f.

Beweis:

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$. Nach Satz 14.2 existiert eine Funktion $g \in H(U_R(0))$ und eine Funktion $h \in H(U_{\frac{1}{r}}(0))$ mit $f(z) = g(z) + h(1/z) \;\forall\; z \in A$ und $h(0) = 0$. 10.4 liefert die Darstellung $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\forall\; z \in U_R(0)$ und $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \;\forall\; z \in U_{\frac{1}{r}}(0)$. Setze $a_{-n} := b_n$ für $n \geq 1$. Dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \,\forall\, z \in A$$

Damit ist die Existenz der Laurententwicklung bewiesen. Nach Satz 5.4 konvergiert die Laurentreihe auf A absolut und lokal gleichmäßig. Aus Satz 14.2 ergibt sich, dass g und h eindeutig bestimmt sind und nach 5.4 sind die Koeffizienten a_n eindeutig bestimmt für $n \in \mathbb{Z}$. Es bleibt die Darstellung der Koeffizienten zu zeigen. Sei $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma(t) = \varrho \exp(it)$ $(t \in [0, 2\pi])$, $r < \varrho < R$. Sei $w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$.

$$\frac{f(w)}{w^{n+1}} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu w^{\nu-n-1}$$

Die letzte Reihe konvergiert auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig. 8.4 liefert:

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w^{n+1}} \,\mathrm{d}w = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu \int_\gamma w^{\nu-n-1} \,\mathrm{d}w \overset{8.7}{=} \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \nu \neq n \\ 2\pi\mathrm{i} & \text{für} \quad \nu = n \end{cases} = 2\pi\mathrm{i} a_n$$

□

Satz 14.4:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $\dot{D} := D \setminus \{z_0\}$ und $f \in H(\dot{D})$. (z_0 ist also eine isolierte Singularität von f.) Sei $R > 0$ so, dass $U_R(z_0) \subseteq D$. f hat also nach 14.3 auf $\dot{U}_R(z_0)$ die Laurententwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ für $z \in \dot{U}_R(z_0)$.

1.) f hat in z_0 eine hebbare Singularität genau dann, wenn $a_{-n} = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$.

2.) f hat in z_0 einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $a_{-m} \neq 0$ ist und $a_{-n} = 0 \;\forall\; n > m$.

3.) f hat in z_0 eine wesentliche Singularität genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ ist für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Definition:

Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in 14.4. Dann heißt $\operatorname{Res}(f, z_0) := a_{-1}$ das **Residuum** von f in z_0. Ist $0 < \varrho < R$ und $\gamma(t) = z_0 + \varrho \exp(\mathrm{i}t)$ $(t \in [0, 2\pi])$, so folgt aus 14.3:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Beweis:

1.) ist klar.

2.) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$. „$\Rightarrow$“: Nach 13.2 existiert eine Funktion $g \in H(D)$ mit $f(z) = g(z)/z^n\ \forall\ z \in \dot{D}$ und $g(0) \neq 0$. Nach 10.4 lässt sich $g(z)$ in der Form $g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ $\forall\ z \in U_R(0)$ schreiben, woraus folgt:

$$f(z) = \frac{c_0}{z^m} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{m-1}}{z} + \sum_{n=m}^{\infty} c_n z^{n-m}\ \forall\, z \in \dot{U}_R(0)$$

Die Eindeutigkeit der Laurententwicklung liefert $c_0 = a_{-m}$, also $a_{-m} = g(0) \neq 0$. Weiter gilt $a_{-n} = 0\ \forall$ $n > m$. „$\Leftarrow$“:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots + \frac{a_{-n}}{z^n}\ \forall\, z \in \dot{U}_R(0)$$

Daraus folgt:

$$z^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + \ldots + a_{-1} z^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+m}}_{=:g(z)}\ \forall\, z \in \dot{U}_R(0)$$

Es ist $g \in H(U_R(0))$, $g(0) = a_{-m} \neq 0$ und $f(z) = g(z)/z^m\ \forall\ z \in \dot{U}_R(0)$. Hieraus folgt nach 13.2, dass f in 0 einen Pol der Ordnung m hat.

3.) folgt aus (1) und (2). $\square$

Beispiele:

1.) $f(z) = 1/(z-1)$

   i.) Laurententwicklung in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$: $f(z) = 1/(z-1)$ und $\operatorname{Res}(f, 1) = 1$

   ii.) Laurententwicklung in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$: Für $|z| > 1$ folgt mittels der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots$$

   Hier besitzt die Laurententwicklung keinen Nebenteil.

2.) $f(z) = \cos(z)/z^3$

Wir berechnen die Laurententwicklung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \ldots\right) = \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{z}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} \pm \ldots}_{\text{Nebenteil}} \text{ und } \operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{2}$$

Kapitel 14

$\widehat{\mathbb{C}}$, meromorphe Funktionen, Moebiustransformationen

Definition:

Es sei ∞ irgendein Element $\notin \mathbb{C}$. $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt die **Vollebene**. ∞ heißt „der Punkt ∞". Rechenregeln:

$z + \infty := \infty + z := \infty - z := z - \infty := \infty \,\forall\, z \in \mathbb{C}$

$\infty \cdot z := z \cdot \infty := \infty \,\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\dfrac{z}{\infty} := 0$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\dfrac{z}{0} := \infty$ für $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$

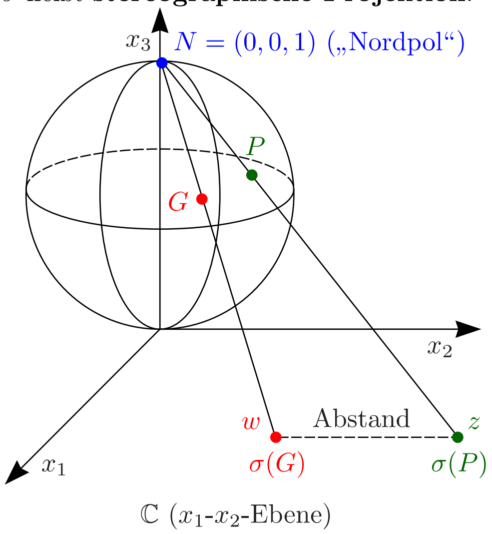
$S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1/2)^2 = 1/4\}$ heißt **Riemannsche Zahlenkugel**.

Definition:

Definiere $\sigma\colon S \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ durch $\sigma(N) := \infty$.

$$\boxed{\sigma(x_1, x_2, x_3) := \frac{x_1}{1 - x_3} + \mathrm{i}\frac{x_2}{1 - x_3} \text{ für } (x_1, x_2, x_3)}$$

σ heißt **stereographische Projektion**.



Anschaulich folgt (nachrechnen!): Ist $P \in S \setminus \{N\}$, so trifft die Gerade durch N und P die komplexe Ebene im Punkt $\sigma(P)$.

Satz 15.1:

σ ist injektiv auf S und $\sigma(S) = \widehat{\mathbb{C}}$. $\sigma^{-1}\colon \widehat{\mathbb{C}} \mapsto S$ ist gegeben durch $\sigma^{-1}(\infty)) = N$ und

$\sigma^{-1}(z) = \dfrac{1}{1 + |z|^2}(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), |z|^2)$ falls $z \in \mathbb{C}$

Satz und Definition 15.2:

Seien $z,\, w \in \widehat{\mathbb{C}}$. $d(z,w) = \|\sigma^{-1}(z) - \sigma^{-1}(w)\|$ heißt der **chardala** Abstand von z und w (insbesondere ist $\|\bullet\|$ die euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$.) Für $z,\, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt

1.) $d(z,w) \geq 0$ und $d(z,w) = 0$ genau dann, wenn $z = w$ ist,

2.) $d(z,w) = d(w,z)$ und

3.) $d(z,w) \leq d(z,u) + d(u,w)$ (Dreiecksungleichung).

$(\widehat{C}, d)$ ist also ein metrischer Raum. Für $z,\, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$d(z,\infty) = (1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}}$, $d(z,w) = |z-w|(1+|z|^2)^{-\frac{1}{2}}(1+|w|^2)^{-\frac{1}{2}}$

Beweis:

Dieser kann als Übung durchgeführt werden. □

Definition:

Sei (z_n) eine Folge in $\widehat{\mathbb{C}}$ und $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. (z_n) **konvergiert in** $\widehat{\mathbb{C}}$ gegen z_0 genau dann, wenn $d(z_n, z) \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$. Aus 15.2 folgt:

Satz 15.3:

Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$.

1.) Es gilt $d(z_n, z_0) \mapsto 0$ genau dann, wenn $|z_n - z_0| \mapsto 0$ geht.

2.) $d(z_n, \infty) \mapsto 0$ genau dann, wenn $|z_n| \mapsto \infty$ geht.

Ersetzt man $|z-w|$ $(z,\, w \in \mathbb{C})$ durch $d(z,w)$ $(z,\, w \in \widehat{\mathbb{C}})$, so lassen sich die topologischen Begriffe der Paragraphen 2 und 3 auch in $\widehat{\mathbb{C}}$ definieren.

Beispiele:

Sei $A \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$.

1.) Eine Funktion f: $A \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ heißt **stetig in z_0** $\in A$ genau dann, wenn für jede Folge (z_n) in A mit $d(z_n, z_0) \mapsto 0$ gilt: $d(f(z_n), f(z_0)) \mapsto 0$.

2.) A heißt **offen** genau dann, wenn für alle $a \in A$ ein $\delta = \delta(a) > 0$ existiert, so dass $\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : d(z,a) < \delta\} \subseteq A$.

Konventionen:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f \in H(D\backslash\{z_0\})$ und z_0 sei ein **Pol** von f. Wegen 13.5 und 15.3 setzt man $f(z_0) := \infty$. Dann ist f auf ganz D definiert, also f: $D \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ und in jedem $z \leq D$ stetig.

Definition:

Sei $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{C}$ und f: $D \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ und $P(f) := \{z \in D : f(z) = \infty\}$. f heißt auf D meromorph genau dann, wenn $P(f)$ folgende Eigenschaften besitzt:

i.) $P(f)$ ist in D diskret (das heißt, $P(f)$ hat in D **keinen** Häufungspunkt).

ii.) $f|_{D\backslash P(f)} \in H(D \setminus P(f))$

iii.) Jedes $z_0 \in P(f)$ ist ein Pol von f.

Die Klasse der meromorphen Funktionen wollen wir mit $M(D) := \{f : D \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$: f ist auf D meromorph$\}$.

Beispiele:

i.) $P(f) = \emptyset$ ist zugelassen, das heißt $H(D) \subseteq M(D)$.

2.) Seien f, $g \in H(D)$ und $g \not\equiv 0$ auf D. Dann ist $f/g \in M(D)$, $P(f/g) \subseteq Z(g)$.

$$f(z) = z - \mathrm{i},\ g(z) = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{z-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{z+\mathrm{i}},\ \frac{f}{g} \in M(\mathbb{C}),\ P\left(\frac{f}{g}\right) = \{-\mathrm{i}\}$$

Außerdem gilt $Z(g) = \{i, -i\}$.

3.) $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$

$$P(f) = \left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$$

0 ist kein Pol von f, nicht einmal eine isolierte Singularität. 0 ist ein Häufungspunkt der Pole $1/(k\pi)$. Also ist $f \notin M(\mathbb{C})$, $f \in M(\mathbb{C} \setminus \{0\})$.

14.1 Moebiustransformationen

Seien a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ und es gelte $ad - bc \neq 0$. Eine Abbildung der Form $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ $(z \in \widehat{\mathbb{C}})$ heißt eine **Moebiustransformation** (MB), also $T\colon \widehat{\mathbb{C}} \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =: \mathcal{A}_T$ heißt die zu T gehörende **Koeffizientenmatrix**.

Bemerkungen:

1.) Die Bedingung $ad - bc \neq 0$ sichert, dass T **nicht** konstant ist.

2.) Sei $c = 0$. Daraus folgt $d \neq 0$ und damit $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Die Rechenregeln am Anfang des Paragraphen liefern $T(\infty) = \infty$ und $T|_{\mathbb{C}} \in H(\mathbb{C})$.

3.) Für $c \neq 0$ liefern die Rechenregeln am Anfang des Paragraphen $T(\infty) = \frac{a}{c}$ und $T(-\frac{d}{c}) = \infty$. Also ist $-\frac{d}{c}$ ein Pol der Ordnung 1 von T. Insgesamt bedeutet dies $T \in M(\mathbb{C})$.

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der Möbiustransformationen.

Satz 15.4:

Sei T, $S \in \mathcal{M}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

1.) $T(\widehat{\mathbb{C}}) = \widehat{\mathbb{C}}$. Weiterhin ist T stetig und injektiv auf $\widehat{\mathbb{C}}$. Außerdem ist die Umkehrabbildung wieder eine Moebiustransformation, also $T^{-1} \in \mathcal{M}$ und

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

2.) $T \circ S \in \mathcal{M}$, $\mathcal{A}_{T \circ S} = \mathcal{A}_T \mathcal{A}_S$

$\mathcal{M}$ ist also eine Gruppe.

Beweis:

Der Beweis kann als Übung durchgeführt werden. □

14.1.1 Spezielle Moebiustransformationen

1.) Automorphismen der Einheitskreisscheibe: $S_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

2.) Drehstreckung: $T(z) := az$

3.) Translation: $T(z) := z + a$

4.) Inversion: $T(z) := \frac{1}{z}$

Satz 15.5:

$T \in \mathcal{M}$ lässt sich darstellen als Hintereinanderausführung von Drehstreckungen, Translationen und Inversionen.

Beweis:

Sei $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

- Fall 1: $c = 0$

  Dann ist $d \neq 0$ und $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} =$ (Translation) $\circ$ (Drehstreckung)

- Fall 2: $c \neq 0$

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{cd}}{z + \frac{d}{c}} = \alpha + \frac{\beta}{z+\gamma} = \text{(Translation)} \circ \text{(Drehstreckung)} \circ \text{(Inversion)} \circ \text{(Translation)}$$

□

Satz 15.6:

Sei $T \in \mathcal{M}$. Dann hat T einen oder zwei Fixpunkte oder es ist $T(z) = z$.

Definition:

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Für $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ heißt

$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \begin{cases} \frac{z-z_1}{z-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} & \text{falls} \quad z_1,\, z_2,\, z_3 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & \text{falls} \quad z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & \text{falls} \quad z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & \text{falls} \quad z_3 = \infty \end{cases}$$

heißt das **Doppelverhältnis** von z, z_1, z_2 und z_3.

Satz 15.7:

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ wie oben.

1.) Sind $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$ und gilt $T_1(z_j) = T_2(z_j)$ $(j = 1, 2, 3)$, dann folgt $T_1 = T_2$.

2.) Es ist $T(z) := \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ $(z \in \widehat{C})$ eine Moebiustransformation. T ist die einzige Moebiustransformation mit $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$ und $T(z_3) = \infty$.

3.) Sind $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, so existiert genau ein $f \in \mathcal{M}$ mit $S(z_j) = w_j$ (für $j = 1, 2, 3$).

4.) Es gilt $\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3))$ $\forall\ z \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $\forall\ s \in \mathcal{M}$ (Invarianz des Doppelverhältnisses).

Beweis:

1.) Sei $T := T_2^{-1} \circ T_1$. Nach 15.4 gilt, dass $T \in \mathcal{M}$ ist.

$$T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(T_2(z_j)) = z_j \text{ für } j = 1, 2, 3$$

Nach Satz 15.6 ist $T(z) = z$ und damit $T_1 = T_2$.

2.) Es ist klar, dass $T \in \mathcal{M}$ ist. Durch Nachrechnen ergibt sich $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$. Die Eindeutigkeit folgt aus (1).

3.) Die Eindeutigkeit resultiert aus (1). Kommen wir deshalb zur Existenz: Sei $T_1(z) := \mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$, $T_2(z) := \mathrm{DV}(z, w_1, w_2, w_3)$ und $S := T_2^{-1} \circ T_1$.

$$S(z_1) = T_2^{-1}(T_1(z_1)) \overset{(2)}{=} T_2^{-1}(0) \overset{(2)}{=} w_1$$

Analog folgt $S(z_j) = w_j$ für $j = 2, 3$.

4.) Übung! □

14.1.2 Kreisgleichung

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.

$|z-z_0| = r \Leftrightarrow |z-z_0|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z}_0) = r^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 - \overline{z}_0 z - z_0\overline{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$

wobei

$\alpha = -\overline{z}_0 \in \mathbb{C}$, $\beta = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$ und $|\alpha|^2 - \beta = |z_0|^2 - |z_0|^2 + r^2 > 0$ also $\beta < |\alpha|^2$

14.1.3 Geradengleichung

In der reellen Form in kartesischen Koordinaten gilt $mx + ny + d = 0$ mit $m, n, d, x, y \in \mathbb{R}$. Wir setzen $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$, $\alpha := \frac{m}{2} + \mathrm{i}\frac{n}{2} \in \mathbb{C}$ und $\beta := d \in \mathbb{R}$.

$mx + ny + d = 0 \Leftrightarrow \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$

Fazit:

Sind $\alpha \in \mathbb{C}$ und $\beta \in \mathbb{R}$, so ist die Gleichung $\varepsilon|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$

- die Gleichung eines Kreises, falls $\varepsilon = 1$ und $\beta < |\alpha|^2$.
- die Gleichung einer Geraden, falls $\varepsilon = 0$ ist.

14.1.4 Kreistreue

Satz 15.8:

Sei $T \in \mathcal{M}$. T bildet eine Gerade auf eine Gerade oder einen Kreis ab. [T bildet einen Kreis auf eine Gerade oder einen Kreis ab.]
Bemerkung: Man spricht von „Kreistreue“, weil auf die Riemannsche Zahlenkugel sowohl Kreise als auch Geraden auf Kreise abgebildet werden.

Beweis:

Die Behauptung ist klar für Drehstreckungen und Translationen. Wegen Satz 15.5 genügt es, die Behauptung für $T(z) = 1/z$ zu zeigen. Sei $\varepsilon|z|^2 + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \beta = 0$ die Gleichung einer Geraden oder eines Kreises und $w = 1/z$. Dann gilt:

$$\varepsilon\frac{1}{|w|^2} + \overline{\alpha}\frac{q}{w} + \alpha\frac{1}{\overline{w}} + \beta = 0 \Rightarrow \varepsilon + \overline{w} + \alpha w + \beta|w|^2 = 0$$

1.) Fall 1: $\beta = 0$: Abbildung auf eine Gerade

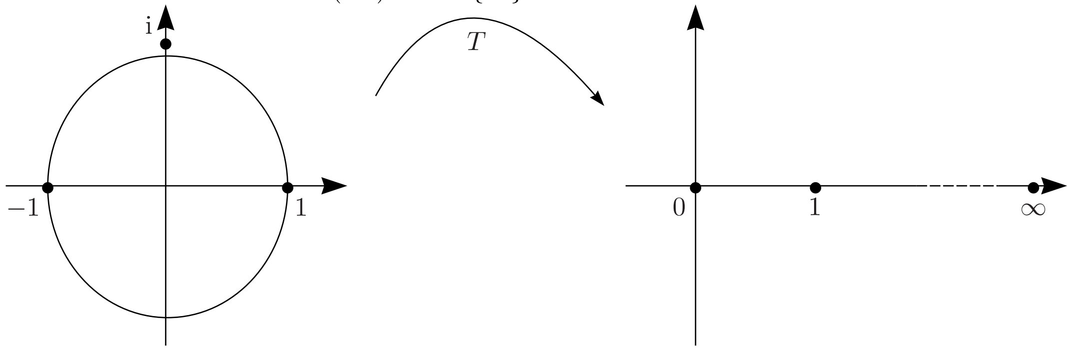
2.) Fall 2: $\beta \neq 0$:

$$\frac{\varepsilon}{\beta} + \left(\frac{\overline{\alpha}}{\beta}\right)\overline{w} + \frac{\alpha}{\beta}w + |w|^2 = 0$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises. □

Beispiel:

Bestimme ein $T \in \mathcal{M}$ mit $T(\partial\mathbb{D}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.



Sei $z_1 = 1$, $z_2 = \mathrm{i}$ und $z_3 = -1$.

$T(z) := \mathrm{DV}(z, 1, \mathrm{i}, -1) = -\mathrm{i}\dfrac{z-1}{z+1}$

Nach Satz 15.7 folgt $T(1) = 0$, $T(\mathrm{i}) = 1$, $T(-1) = \infty$ und nach Satz 15.8 folgt $T(\partial\mathbb{D}) = R \cup \{\infty\}$.

Kapitel 15

Die Umlaufzahl

Hilfssatz:

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$. Dann ist $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ zusammenhängend.

Beweis:

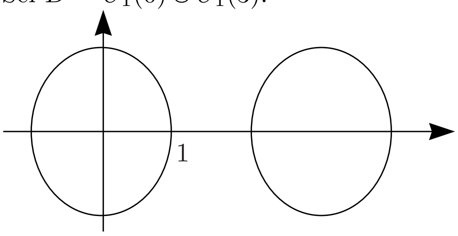
Dieser funktioniert fast wörtlich wie der zu Hilfssatz 3 in Kapitel 9. □

Definition:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. $C \subseteq D$ heißt eine **(Zusammenhangs-)komponente** von D genau dann, wenn C zusammenhängend ist und $C = C_1$ folgt, wenn $C \subseteq C_1 \subseteq D_1$ und C_1 zusammenhängend ist.

Beispiel:

Sei $D = U_1(0) \cup U_1(3)$.



Satz 16.1:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt.

1.) Ist $C \subseteq D$ eine Komponente von D, so ist C ein **Gebiet**.

2.) Sind C_1, C_2 Komponenten von D, so gilt $C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ oder $C_1 = C_2$.

3.) Ist $z_0 \in D$, so existiert genau eine Komponente C von D: $z_0 \in C$.

4.) $\mathbb{C} \setminus K$ hat genau eine unbeschränkte Komponente.

Beweis:

1.) Sei $z_0 \in C$. Dann existiert ein δ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$. Sei weiterhin $C_1 :; 0C \cup U_\delta(z_0) \subseteq D$. Klar ist, dass $C \subseteq C_1$ ist. Nach Hilfssatz ist C_1 zusammenhängend. C ist also eine Komponente von D und daraus folgt $C = C_1$ und damit $U_\delta(z_0) \subseteq C$.

2.) Sei $C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ und $C := C_1 \cup C_2$. Nach Hilfssatz ist C zusammenhängend. Klar ist $C_1 \subseteq C \subseteq D$ $[C_2 \subseteq C \subseteq D]$. Da C_1 $[C_2]$ eine Komponente von D ist, folgt $C = C_1$ $[C = C_2]$ und damit $C_2 \subseteq C_1$ $[C_2 \supseteq C_1]$.

3.) Sei $\mathcal{A} := \{A \subseteq D\colon A \text{ zusammenhängend}, z_0 \in A\}$ und $\{z_0\} \in \mathcal{A}$. Aus $z_0 \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}}$ folgt wegen dem Hilfssatz, dass $C := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ zusammenhängend ist. Sei $C \subseteq C_1 \subseteq D_1$ und C_1 zusammenhängend. Dann ist $C_1 \in \mathcal{A}$ und daraus folgt $C_1 \subseteq C$, also $C = C_1$.

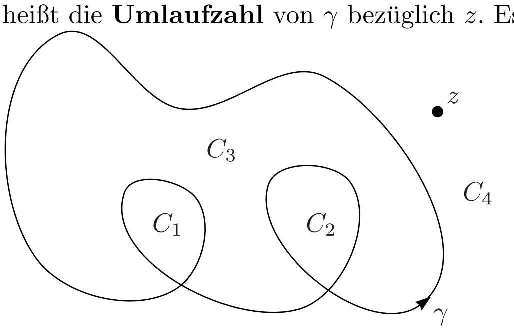
4.) Übung □

Definition:

Sei γ ein stückweise glatter und geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ und es sei $z \notin \mathrm{Tr}(\gamma)$.

$$n(\gamma, z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}w}{w - z}$$

heißt die **Umlaufzahl** von γ bezüglich z. Es gilt außerdem $n(\gamma^-, z) = -n(\gamma, z)$.



Satz 16.2:

Sei γ wie oben und $D := \mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$.

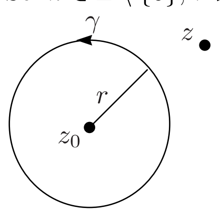
1.) $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z} \ \forall \ z \in D$

2.) Ist C eine Komponente von D, so ist $z \mapsto n(\gamma, z)$ auf C konstant.

3.) Ist C **die** unbeschränkte Komponente von D, so gilt $n(\gamma, z) = 0 \ \forall \ z \in C$.

Beispiele:

1.) Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{Z}$ und $\gamma(t)$: $z_0 + r\exp(\mathrm{i}kt)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.



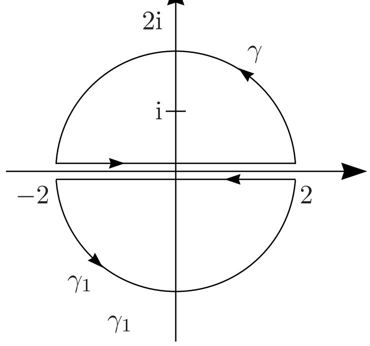
Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$ sind $C_1 = U_r(z_0)$ und $C_2 = \mathbb{C} \setminus (\overline{U_r(z_0)})$.
Sei $z \in C_2$. Aus 16.2 (3) folgt $n(\gamma, z) = 0$. Sei $z \in C_1$:

$$n(\gamma, z) \overset{16.2\ (3)}{=} n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}k \cdot r\exp(\mathrm{i}kt)}{r\exp(\mathrm{i}kt)} \,\mathrm{d}t = k$$

2.) Wir betrachten folgende Kurve:

$$\gamma(t) := \begin{cases} t & \text{für} \quad -2 \le t \le 2 \\ 2\exp(\mathrm{i}(t-z)) & \text{für} \quad 2 \le t \le 2t\pi \end{cases}$$

Berechne $n(\gamma_i)$.



Sei γ_1 wie im Bild und $\gamma_0(t) := 2\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}w}{w - \mathrm{i}}}_{n(\gamma_i)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}w}{w - \mathrm{i}}}_{=0} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_0} \frac{\mathrm{d}w}{w - \mathrm{i}}$$

Also gilt $n(\gamma, \mathrm{i}) = 1$.

<u>**Beweis:**</u>

1.) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit γ: $[a, b] \mapsto \mathbb{C}$ glatt. Sei außerdem $z \in D$ und definiere $h[a, b] \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$h(t) := \int\limits_a^t \frac{\dot{\gamma}(s)}{\gamma(s) - z} \,\mathrm{d}s$$

Nach Satz 8.2 ist h auf $[a, b]$ differenzierbar und $h'(t) = \dot{\gamma}(t)/(\gamma(t) - z)$. Weiterhin sei $H(t) := \exp(-h(t))[\gamma(t) - z]$. Man rechnet nach, dass $H' = 0$ gilt auf $[a, b]$. Also existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $H(t) = c \;\forall\, c \in [a, b]$. Hieraus folgt für $t = a$:

$$c = \exp(-h(a))(\gamma(a) - z) = \gamma(a) - z \Rightarrow \exp(h(t)) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z} \;\forall\, t \in [a, b]$$

Für $t = b$ gilt:

$$\exp(h(b)) = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1$$

Damit existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ (nach 6.3) mit $h(b) = 2k\pi$.

$$2k\pi \mathrm{i} = \int\limits_a^b \frac{\gamma(z)}{\gamma(z) - z} = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{w - z} \,\mathrm{d}z$$

Damit ist $n(\gamma, z) = k$.

2.) Für den Beweis von (2) definieren wir f: $C \mapsto \mathbb{C}$ durch $f(z) = n(\gamma, z) = 1/(2\pi\mathrm{i}) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z}$. Nach Satz 9.,5 ist $f \in H(C)$. Da C ein Gebiet ist, gilt nach 11.5, dass $f(C)$ ein Gebiet ist oder f auf C konstant ist. Aus (1) folgt $f(c) \subseteq \mathbb{Z}$. Also ist F auf C konstant.

3.) (3) Sei F wie im Beweis von (2). Wähle $R > 0$ so dass $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq U_R(0)$. Nach (2) existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = c \;\forall\, z \in C$. Sei $z \in C$ so, dass $|z| > 2R$. Für $w \in \mathrm{Tr}(\gamma)$ gilt dann $|w - z| \geq |z| - |w| > |z| - R > r > 0$. Dann gilt:

$$|c| = |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int\limits_{\gamma} \frac{\mathrm{d}w}{w - z} \Big| \overset{8.4}{\leq} \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \frac{1}{|z| - R}$$

Also gilt

$$|c| \leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \frac{1}{|z| - R} \;\forall\, z \in C \text{ mit } |z| > 2R$$

Da C unbeschränkt ist, folgt $c = 0$.

Kapitel 16

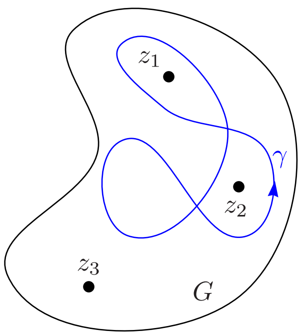
Der Residuensatz und Folgerungen

16.1 Der Residuensatz

Satz 17.1:

Sei G ein **Elementargebiet**. Weiterhin seien $z_1, \ldots, z_k \in G$ (mit $z_j \neq z_l$ für $j \neq l$) und es sei $f \in H(G \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$. Jedes z_j ist also eine isolierte Singularität. Weiter sei γ ein geschlossen stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, z_j)\mathrm{Res}(f, z_j)$$



Beweis:

Für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ existiert ein $R_j > 0$ mit $\overline{U_{R_j}(z_j)} \subseteq G$ und $\overline{U_{R_j}(z_j)} \cap \overline{U_{R_l}(z_l)} = \emptyset$ für $j \neq l$. Sei $j \in \{1, \ldots, k\}$. Nach Satz 14.4 besitzt F auf $U_{R_j}(z_j)$ eine Laurententwicklung, nämlich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)}(z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)}(z - z_0)^{-n}}_{=:\varphi_j(z)}$$

Definiere $g \in H(G \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$ durch

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(z)$$

Dann hat g in z_j eine hebbare Singularität (für $j = 1, \ldots, k$). Also ist $g \in H(G)$. Da G ein Elementargebiet ist, besitzt g eine Stammfunktion auf G. Nach 8.6 gilt $\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z = 0$, weil γ ein geschlossener Weg ist.

$$\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_\gamma \varphi_j(z)\,\mathrm{d}z$$

Da die Summe endlich ist, können wir Summation und Integration vertauschen. Es ist noch zu zeigen:

$$\int\limits_\gamma \varphi_j(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} n(\gamma, z_j) a_{-1}(j) \text{ für } j = 1, \ldots, k$$

Die Reihe für φ_j konvergiert lokal gleichmäßig (nach 14.3). Wegen 8.4 gilt dann:

$$\int_\gamma \varphi_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}^{(j)} \int_\gamma (z-z_j)^{-n}\,\mathrm{d}z$$

Sei also $n \in \{2,3,4,\ldots\}$. Die Funktion $1/(z-z_j)^n$ hat auf $G \setminus \{z_j\}$ die Stammfunktion

$$\frac{(z-z_j)^{-n+1}}{-n+1} \xrightarrow{\text{Satz 8.6}} \int_\gamma (z-z_j)^{-n}\,\mathrm{d}z = 0$$

Also verschwinden fast alle Terme in der Summe bis auf den ersten:

$$\int_\gamma \varphi_j(z)\,\mathrm{d}z = a_{-1}^{(j)} \int_\gamma \frac{1}{z-z_j}\,\mathrm{d}z = a_{-1}^{(j)} n(\gamma, z_j)\cdot 2\pi\mathrm{i}$$ □

16.2 Folgerungen

Satz 17.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und sei $f \in H(G)$ und γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann gilt:

1.) Es gilt der **Cauchysche Integralsatz für Elementargebiete**, nämlich

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

2.) Es gilt die **Cauchysche Integralformel**:

$$n(\gamma, z)\cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \;\forall\, z \in G \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$$

Beweis:

1.) Alle z_j in 17.2 sind hebbare Singularitäten. Nach 14.4 ist dann $\mathrm{Re}(f, z_j) = 0$ und nach 17.1 folgt die Behauptung.

2.) Sei $z_0 \in G \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$. Sei $g \in H(G \setminus \{z_0\})$ definiert durch $g(w) := f(w)/(w-z_0)$. Sei $r > 0$, so dass $\dot{U}_r(z_0) \subseteq G$. Nach 10.4 können wir um z_0 entwickeln:

$f(w) = a_0 + a_1(w-z_0) + a_2(w-z_0)^2 + \ldots \;\forall\, w \in U_r(z_0)$

Also gilt

$$g(w) = \frac{a_0}{w-z_0} + a_1 + a_2(w-z_0) + \ldots \;\forall\, w \in U_r(z_0)$$

und somit $\mathrm{Re}(g, z_0) = a_0 = f(z_0)$, also schlussendlich

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w \overset{17.1}{=} n(\gamma, z_0) f(z_0)$$ □

16.3 Berechnung von Residuen an Polstellen

Lemma 17.3:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. f habe in z_0 einen Pol der Ordnung $m \geq 1$. Es existiert also ein $g \in H(D)$ mit

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \;\forall\, D \setminus \{z_0\} \text{ und } g(z_0) \neq 0$$

Dann gilt:

1.) $\mathrm{Re}(f, z_0) = \dfrac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

2.) Ist $m = 1$, so ist $\mathrm{Re}(f, z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} (z-z_0) f(z)$.

Beweis:

1.) Sei $r > 0$ so, dass $U_r(z_0) \subseteq D$. Nach Satz 10.4 gilt:

$$g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \ldots + b_{m-1}(z - z_0)^{m-1} + b_m(z - z_0)^m + \ldots \; \forall\, z \in U_r(z_0)$$

$$f(z) = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \ldots \; \forall\, z \in \dot{U}_r(z_0)$$

Damit können wir das Residuum aus der Laurententwicklung ablesen:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = b_{m-1} \overset{10.4}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

2.) Aus (1) folgt:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = g(z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} g(z) = \lim_{z \mapsto z_0} (z - z_0) f(z)$$ □

Beispiele:

1.) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+1)}$ hat in $z = \mathrm{i}$ und $z = -1$ jeweils einen einfachen Pol. Also gilt:

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \lim_{z \mapsto \mathrm{i}} (z - \mathrm{i}) f(z) = \lim_{z \mapsto \mathrm{i}} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{\mathrm{i}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Res}(f, -1) = \lim_{z \mapsto -1} \frac{1}{z - \mathrm{i}} = \frac{1}{-1 - \mathrm{i}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

2.) $f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^3 z}$ besitzt in $z = \mathrm{i}$ einen Pol der Ordnung 3. Hier gilt $g(z) = 1/z$, $g'(z) = -1/z^2$ und $g''(z) = 2/z^3$ und somit:

$$\mathrm{Res}(f, \mathrm{i}) = \frac{g''(\mathrm{i})}{2!} = \frac{2}{\mathrm{i}^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\mathrm{i}^3} = \mathrm{i}$$

16.4 Das Argumentenprinzip

Satz 17.4:

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Elementargebiet. Weiterhin sei $f \in M(G)$ und habe in G genau die Pole $b_1, \ldots, b_m$. (Jeder Pol sei so oft aufgeführt, wie seine Ordnung es angibt.) f habe in G genau die Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$. (Jede Nullstelle sei so oft augeführt, wie ihre Ordnung es angibt.) γ sei ein stückweise glatter und geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G \setminus \{b_1, \ldots, b_m, a_1, \ldots, a_n\}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{m} n(\gamma, b_j)$$

Beweis:

Seien $\beta_1, \ldots; \beta_p$ die paarweise verschiedenen Pole von f $(p \leq m)$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ seien die paarweise verschiedenen Nullstellen $(q \leq n)$. Wir definieren $h := f'/f$. Dann ist $h \in H(G \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_p\})$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma h(z)\,\mathrm{d}z \overset{17.1}{=} \sum_{j=1}^{q} n(\gamma, \alpha_j)\mathrm{Res}(n, \alpha_j) + \sum_{j=1}^{p} n(\gamma, \beta_j)\mathrm{Res}(n, \beta_j)$$

Sei $\alpha_j \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$, $\beta \in \{\beta_1, \ldots, \beta_p\}$ und ν die Ordnung der Nullstelle α von f und μ die Ordnung der Polstelle β von f. Zu zeigen ist $\mathrm{Res}(h, \alpha) = \nu$ und $\mathrm{Res}(h, \beta) = -\mu$. Nach Satz 11.9 gibt es ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(\alpha) \subseteq G$ und es existiert ein $\varphi \in H(U_\delta(\alpha))$ und es gilt $f(z) = (z - \alpha)^\nu \cdot \varphi(z) \; \forall\, z \in U_\delta(\alpha)$ und $\varphi(z) \neq 0$ für jedes $z \in U_\delta(\alpha)$. Dann gilt:

$$f'(z) = \nu \cdot (z - \alpha)^{\nu-1} \varphi(z) + (z - \alpha)^\nu \cdot \varphi'(z) \,\forall\, z \in U_\delta(\alpha)$$

Daraus folgt:

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z-\alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \,\forall\, z \in \dot{U}_\delta(\alpha)$$

Der Quotient $\varphi'(z)/\varphi(z)$ ist holomorph auf $U_\delta(\alpha)$. Also folgt $\operatorname{Res}(h,\alpha) = \nu$. Kommen wir nun zu den Polstellen. Nach Satz 13.2 existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(\beta) \subseteq G$ und ein $\varphi \in H(U_\delta(\beta))$, so dass $f(z) = (z-\beta)^{-\mu}\varphi(z)$ $\forall$ $z \in U_\delta(\beta)$ und $\varphi(z) \neq 0$ für jedes $z \in U_\delta(\beta)$. Dann gilt:

$$f'(z) = -\mu(z-\beta)^{-\mu-1}\varphi(z) + (z-\beta)^{-\mu}\varphi'(z) \,\forall\, z \in U_\delta(\beta)$$

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\mu}{2\beta} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \,\forall\, z \in \dot{U}_\delta(\beta)$$

Da auch hier $\varphi'(z)/\varphi(z)$ holomorph auf $U_\delta(\beta)$ ist, folgt $\operatorname{Res}(h,\beta) = -\mu$. □

Bemerkungen:

1.) In 17.4 ist $\{b_1,\dots,b_m\} = \emptyset$ oder $\{a_1,\dots,a_n\} = \emptyset$ zugelassen. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} n(\gamma, b_j) = 0 \text{ oder } \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) = 0$$

2.) Sei $n(\gamma, a_j) = 1 = n(\gamma, b_k)$ $\forall$ $j = 1, \dots, n$ und $n = 1, \dots, m$. Dann gilt:

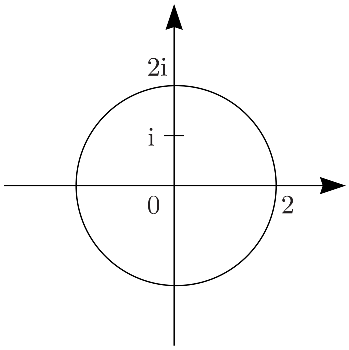
$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \text{Anzahl der Nullstellen von } f - \text{Anzahl der Polstellen von } f$$

(jeweils gezählt mit Vielfachheiten!)

Beispiel:

$$f(z) = \frac{z}{(z-\mathrm{i})^2}$$

Wir haben eine einfache Nullstelle und eine doppelte Polstelle. Also gilt $n = 1$, $a_n = 0$ und $m = 2$, $b_1 = b_2 = \mathrm{i}$.



Sei $\gamma(t) = 2\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = 1 - 2 = \boxed{-1}$$

Folgerungen 17.5:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subseteq G$ und $\gamma(t) := z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und f, $g \in H(G)$. Sei N_f die Anzahl der Nullstellen von f in $U_r(z_0)$ (gezählt mit Vielfachheiten!).

1.) Ist $f(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \operatorname{Tr}(\gamma)$, so folgt

$$N_F = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

2.) Satz von Rouche:

Gilt $|g(z) - f(z)| < |f(z)|$ (*) $\forall$ $z \in \operatorname{Tr}(\gamma)$, so ist $N_f = n_g$.

Beweis:

1.) Es existiert ein $R > r$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subseteq \overline{U_R(z_0)} \subseteq G$. Also ist $\overline{U_r(z_0)} \subseteq U_R(z_0)$ und $U_R(z_0)$ ist ein Elementargebiet. Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von f in $U_R(z_0)$ (gezählt mit Vielfachheiten). Wegen 17.4 gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) \text{ mit } n(\gamma, a_j) \overset{16.3}{=} \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad a_j \in U_r(z_0) \\ 0 & \text{falls} \quad a_j \notin U_r(z_0) \end{cases}$$

2.) Für $s \in [0,1]$ definieren wir $h_s := f + s(g - f) \in H(G)$ und $N(s) = N_{\gamma_s}$. Aus $(*)$ folgt $h_s(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \mathrm{Tr}(\gamma)$ und $\forall$ $s \in [0,1]$. Aus (1) folgt:

$$N(s) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{h_s'(z)}{h_s(z)} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z) + s[g'(z) - f'(z)]}{f(z) + s[g(z) - f(z)]} \,\mathrm{d}z$$

Also ist die Funktion $s \mapsto N(s)$ stetig. Wegen $N(s) \subseteq \mathbb{N}_0$ $\forall$ $s \in [0,1]$ folgt, dass $N(s)$ konstant ist. Also gilt $N_f = N(0) = N(1) = N_g$. $\square$

16.4.1 Satz von Hurwitz

Satz 17.6:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge in $H(G)$ und (f_n) konvergiere auf G lokal gleichmäßig gegen $f\colon G \mapsto \mathbb{C}$. Nach Satz 10.5 ist auch $f \in H(G)$.

1.) Ist $Z(f_n) = \emptyset$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, so folgt $Z(f) = \emptyset$ oder $f \equiv 0$.

2.) Sind alle f_n auf G injektiv, so ist f auf G injektiv oder f ist auf G konstant.

Beweis:

1.) Sei $f \not\equiv 0$ auf G, $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $\overline{U_r(G)} \subseteq G$ und $f(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Sei $\gamma(t) := z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$. (f_n) konvergiert auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f, weil $\mathrm{Tr}(\gamma)$ kompakt ist. Nach Satz 10.5 konvergiert auch (f_n') auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f'. Dann konvergiert auch $(1/f_n)$ auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $1/f$ (Übung!). Das Fazit ist also, dass (f_n'/f_n) auf $\mathrm{Tr}(\gamma)$ gleichmäßig gegen (f'/f) konvergiert. Nach 8.4 können wir bei gleichmäßiger Konvergenz Grenzwertbildung und Integration vertauschen:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \,\mathrm{d}z \mapsto \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z$$

Nach Satz 17.5 gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \,\mathrm{d}z = N_{f_n} = 0 \text{ und } \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z = N_f$$

Also gilt $N_f = 0$ und somit $f(z_0) \neq 0$.

2.) Sei $z_0 \in G$, $g_n = f_n - f_n(z_0)$, $g := f - f(z_0)$ und $\widetilde{G} := G \setminus \{z_0\}$. Dann konvergiert (g_n) auf $\widetilde{G}$ lokal gleichmäßig gegen g. Außerdem ist $g_n(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \widetilde{G}$. Aus (1) folgt $g \equiv 0$ oder $g(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \widetilde{G}$. Also ist f auf G konstant oder $f(z) \neq f(z_0)$ für jedes $z \in G \setminus \{z_0\}$.

Lemma 19.5:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft (w), es sei $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ und $\mathscr{F} := \{\varphi \in H(G) : \varphi(0) = 0, \varphi \text{ ist injektiv auf } G \text{ und } \varphi(G) \subseteq \mathbb{D}\}$. Weiter sei $\psi \in \mathscr{F}$ und es gelte $(*)$ $|\varphi'(0)| \leq |\psi'(0)|$ $\forall$ $\varphi \in \mathscr{F}$. Dann ist $\psi(G) = \mathbb{D}$. Insbesondere ist $G \sim \mathbb{D}$.

Beweis:

Wir setzen $\widetilde{G} := \psi(G)$. Nach 19.2 hat $\widetilde{G}$ die Eigenschaft (w). Weiter ist $0 = \psi(0) \in \widetilde{G} \subseteq \mathbb{D}$. Wir nehmen an, dass $\widetilde{G} \neq \mathbb{D}$ ist. Wende 19.4 auf $\widetilde{G}$ an: Es existiert ein injektives $\widetilde{\varphi} \in H(\widetilde{G})$ mit $\widetilde{\varphi}(0) = 0$, $\widetilde{\varphi}(\widetilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$ und $|\widetilde{\varphi}'(0)| > 1$. Sei $\varphi := \widetilde{\varphi} \circ \psi$. Dann ist $\varphi \in H(G)$, $\varphi(0) = \widetilde{\varphi}(\psi(0)9 = \widetilde{\varphi}(0) = 0$. φ ist auf G injektiv, $\varphi(G) = \widetilde{\varphi}(\psi(G)) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{G}) \subseteq \mathbb{D}$. Also ist $\varphi \in \mathscr{F}$. Aber es gilt:

$|\varphi'(0)| = \widetilde{\varphi}'(\psi(0))\psi'(9)| = |\widetilde{\varphi}'(0)||\psi'(0)| > |\psi'(0)|$ weil $|\widetilde{\varphi}'(0)| > 1 und |\psi'(0)| \neq 0$ nach 11.11

Dies ist ein Widerspri¡ch zur Voraussetzung. ☐

Beweis von 19.1:

1.) „$\Leftarrow$“: Sei G ein Elementargebiet und $G \neq \mathbb{C}$. Nach 11.4 hat G die Eigenschaft (w). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $0 \in G \subseteq \mathbb{D}$ (wegen 19.3). Sei $\mathscr{F}$ wie in 19.5. Sei \$$\varphi_0(z) := z$. Dann ist $\varphi_0 \in \mathscr{F}$. Wegen 19.5 genügt es, folgendes zu zeigen: Es existiert ein $\psi \in \mathscr{F}$ mit $|\varphi'(0)| \leq |\psi'(0)|\ \forall\ \varphi \in \mathscr{F}$. Sei $S := \sup_{\varphi \in \mathscr{F}} |\varphi'(0)|$. Es existiert eine Folge (φ_n) in $\mathscr{F}$ mit $|\varphi_n'(0)| \mapsto S$. Es ist $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $|\varphi_n(z)| \leq 1\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\forall\, z \in G$. Der Satz von Montel (Kapitel 18) besagt, dass (φ_n) eine auf G lokal gleichmmäßig konvergente Teilfolge enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konvergiert (φ_n) auf G lokal gleichmäßig. Sei $\psi(z) := \lim_{n \mapsto \infty} \varphi_n(z)$ mit $z \in G$. Nach 10.5 ist $\psi \in H(G)$und $\varpi_n'(0) \mapsto \psi'(0)$. Also gilt $|\psi'(0)| = S$. Es gilt $\psi(0) = \lim f_n(0) = 0$. Es ist $|\varphi_0(0)| = 1 \leq |\psi'(0)|$. Insbesondere ist ψ auf G nicht konstant. Wir wissen, dass φ_n injektiv ist $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Nach 17.6 ist ψ also auch injektiv. Es gilt $\varphi_n(G) \subseteq \mathbb{D}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt $|\psi(z)| \leq 1\ \forall\ z \in G$. Annahme: Es existiert ein $z_0 \in G$ mit $|\psi(z_0)| = 1$. Nach 11.6 ist ψ konstant, was ein Widerspruch darstellt. Also ist $\psi(G) \subseteq \mathbb{D}$. Fazit: Es ist $\psi \in \mathscr{F}$ und es gilt $|\varphi'(0)| \leq |\psi'(0)|\ \forall\ \varphi \in \mathscr{F}$. ☐

16.5 Charakterisierung von Elementargebieten

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. G ist ein Elementargebiet genau dann, wenn G die Eigenschaft (w) aufweist.

BEweis:

1.) „$\Rightarrow$“: Dies folgt nach 11.4.

2.) „$\Leftarrow$“:

- Fall 1: $G = \mathbb{C}$
- Fall 2: $G \neq \mathbb{C}$

  Im Beweisteil „$\Leftarrow$“ von 19.1 wurde nur die Eigenschaft (w) benutzt. Also ist $G \sim \mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ ist ein Elementargebiet. Nach 11.13 ist G ein Elementargebiet.

☐

Kapitel 17

Homotopie und einfacher Zusammenhang

Lemma 20.1:

Sei $\emptyset \neq K \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$, D offen und k kompakt. Dann existiert ein $r > 0$ mit $U_r(a) \subseteq D \ \forall \ a \in K$.

Beweis:

Für alle $a \in K$ existiert ein $r_a > 0$ mit $U_{z_{r_a}}(a) \subseteq \mathbb{D}$. Dann ist $K \subseteq \bigcup_{a \in K} U_{r_a}(a)$. Nach 2.3 existierten $a_1, \ldots,$ $a_n \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{r_{a_j}}(a_j)$. Weiterhin sei $r := \min\{r_{n_1}, \ldots, r_{a_n}\}$. Sei $a \in K$ und $z \in U_r(a)$. Zu zeigen ist, dass $z \in D$ ist. Es existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$. Dann gilt:

$$|z - a_j| = |z - a + a - a_j| \leq |z - a| + |a - a_j| < r + r_{a_j} \leq 2r_{a_j}$$

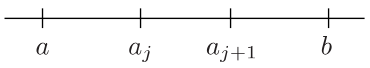
Hieraus folgt $z \in U_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D$. □

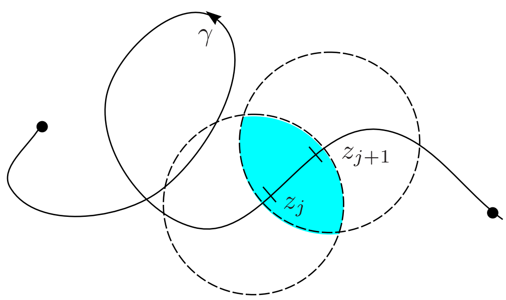
Lemma 20.2:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. und γ: $[a, b]\mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{Re}(\gamma) \subseteq D$. ($\gamma$ ist also „nur“ stetig.) Dann existiert ein $r > 0$ und eine Zerlegung $z = \{a_0, \ldots, a_n\}$ von $[a, b][$ mit

1.) Für $z_j := \gamma(a_j)$ gilt $U_r(z_j) \subseteq D$ $(j = 0, \ldots, n)$

2.) $\gamma([a_j, a_{j+1}]) \subseteq U_r(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$ $(j = 0, \ldots, n-1)$





Beweis:

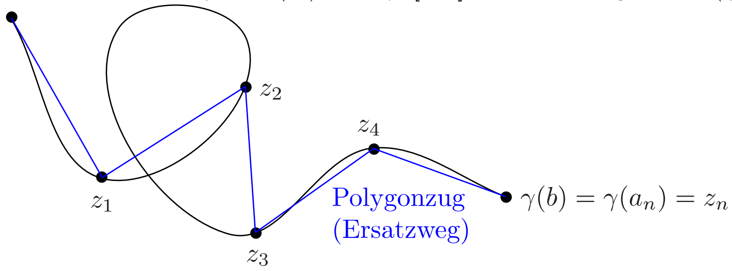
1.) Nach 20.1 existiert ein $r > 0$ mit $U_r(z) \subseteq D \ \forall \ z \in K := \mathrm{Tr}(\gamma)$. Hieraus folgt (1).

2.) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $[a, b] = [0, 1]$. γ ist auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetig. Hieraus folgt, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $|\gamma(t) - \gamma(s)| < r \ \forall \ t, \ s \in [0, 1]$ mit $|t - s| < \delta$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $1/n < \delta$ und $q_j := j/n$ $(j = 0, \ldots, n)$ und $z := \{a_0, \ldots, a_n\}$. Sei $t \in [a_j, a_{j+1}]$. Dann ist $|t - a_j| < \delta$ und $|t - a_{j+1}| < \delta$. Also folgt $|\gamma(t) - \gamma(a_j)| = |\gamma(t) - z_j| < r$ und $|\gamma(t) - \gamma(a_{j-1})| = |\gamma(t) - z_{j+1}| < r$, also $\gamma(t) \in U_1(z_j) \cap U_r(z_{j+1})$. □

In Kapitel 8 haben wir $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ definiert für stückweise glattes γ und $f \in C(\mathrm{Tr}(\gamma))$. Jetzt definieren wir $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für γ „nur“ stetig und f **holomorph**.

Definition:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in H(D)$ und $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ ein Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq D$. Seien r, z_j und Z wie in 20.2.



$\gamma_j(t) := z_j + t(z_{j+1} - z_j)$ mit $t \in [0,1]$ und $j = 0, \ldots, n-1$

$\Gamma := \gamma_0 \oplus \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_{n-1}$ ist **stückweise glatt**. Nach 20.2 folgt $\mathrm{Tr}(\Gamma) \subseteq D$. Setze

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (+)$$

Lemma 20.3:

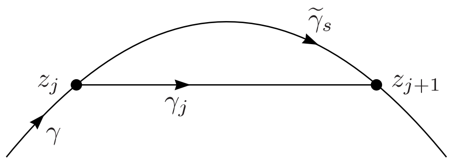
Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie in obiger Definition.

1.) Ist γ stückweise glatt, so stimmt obige Definition (+() mit der Definition aus Kapitel 8 überein.

2.) Die Definition (+) ist unabhängig von der Zerlegung Z, solange Z die Eigenschaft aus 20.2 hat.

3.) $\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left(\max_{z \in \mathrm{Tr}(\Gamma)} |f(z)|\right) L(\Gamma)$

Beweis:



1.) Sei $\widetilde{\gamma}_s := \gamma|_{[a_j, a_{j+1}]}$. Dann gilt $\gamma = \widetilde{\gamma}_0 \oplus \widetilde{\gamma}_1 \oplus \ldots \oplus \widetilde{\gamma}_{n-1}$. Sei $j \in \{0, \ldots, n-1\}$. $\widetilde{\gamma}_j \oplus \gamma_j^-$ ist ein geschlossener, stückweise glatter Weg im Sterngebiet $U_r(z_j)$ (siehe 20.2). Nach 9.2 gilt:

$$\int_{\widetilde{\gamma}_j} \oplus \gamma_j^- f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{\widetilde{\gamma}_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z \xrightarrow{\text{Summation}} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

2.) Übung:

Ist $\widetilde{Z}$ eine weitere Zerlegung von $[a,b]$ mit den Eigenschaften aus 20.2, so betrachte die gemeinsame Verfeinerung zu $\widetilde{Z}$. Verfahre ähnlich wie in (1).

3.) Das folgt aus 8.4. $\square$

Kapitel 18

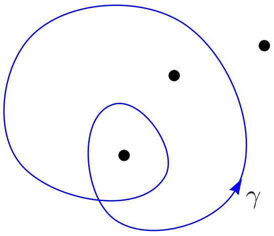
Cauchyscher Integralsatz (Homologieversion)

In diesem Paragraphen sei $G \subseteq \mathbb{C}$ stets ein **Gebiet**.

Definition:

Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$.

1.) $\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)\colon n(\gamma, z) \neq 0\}$ („Inneres“ von γ) und $\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)\colon n(\gamma, z) = 0\}$ („Äußeres“ von γ)



2.) Sei $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. γ heißt **in *G* nullhomolog** genau dann, wenn $n(\gamma, z) = 0\ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus G$ ($\Leftrightarrow \mathrm{Int}(\gamma) \subseteq G$)

Beispiele:

1.) Jeder geschlossene Weg in $\mathbb{C}$ ist in $\mathbb{C}$ nullhomolog.

2.) $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = \exp(it)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und $n(\gamma, 0) = 1 \neq 0$

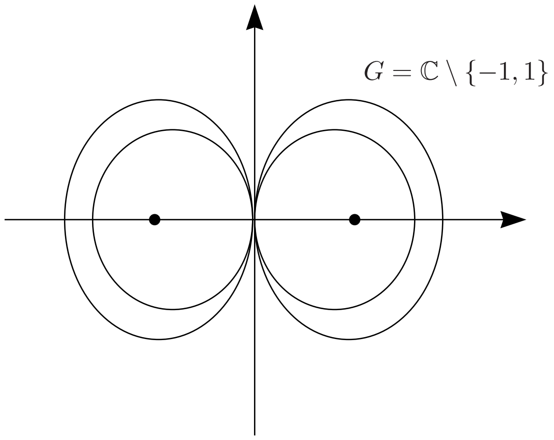
γ ist in G nicht nullhomolog.

Satz 22.1:

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$.

1.) Ist γ nullhomotop in G, so ist γ nullhomoloh in G.

2.) Ist G einfach zusammenhängend, so ist γ in G nullhomolog.



Beweis:

1.) Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist $f(z) := 1/(z - z_0)$ holomorph auf G. Nach 21.2 ist

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} n(\gamma, z_0) = 0 \Rightarrow n(\gamma, z_0) = 0$$ □

2.) Dies folgt aus (1).

Lemma 22.2:

Sei $f \in H(G)$ und γ sei ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. φ: $G \times G \mapsto \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$\varphi(w, z) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für} \quad w \neq z \\ f(z) & \text{für} \quad w = z \end{cases}$$

1.) φ ist stetig.

2.) Für $z \in G$ (fest) hat $w \mapsto \varphi(w, z)$ in z eine hebbare Singularität. $w \mapsto \varphi(w, z)$ ist also holomorph auf G. Für $w \in G$ (fest) hat $z \mapsto \varphi(w, z)$ in w eine hebbare Singularität; $z \mapsto \varphi(w, z)$ ist also holomorph auf G.

3.) $h(z) := \displaystyle\int_\gamma \varphi(w, z)\,\mathrm{d}w$ für $z \in G$

Ist γ nullhomolog in G, so ist $h \equiv 0$ auf G.

Beweis:

1.) Dies folgt nach 11.9.

2.) folgt nach 13.1 (Riemannscher Hebbarkeitssatz).

3.) Wir unterscheiden drei Fälle:

1.) Es ist $h \in C(G)$. Sei $z_0 \in G$ und (z_n) eine Folge in G mit $z_n \mapsto z_0$. Sei $g_n(w) := \varphi(w, z_0)$ und $g(w) := \varphi(w, z_0)$ mit $w \in G$. Sei Γ die stückweise glatte „Ersetzung“ für γ (wie in Kapitel 20). Übung: (g_n) konvergiert auf Γ gleichmäßig gegen g. Nach 8.4 gilt:

$$\underbrace{\int_\Gamma g_n(w)\,\mathrm{d}w \mapsto \int_\Gamma g(w)\,\mathrm{d}w}_{=h(z_n)} = \int_\Gamma \varphi(w, z_0)\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \varphi(w, z_0)\,\mathrm{d}w = h(z_0)$$

Also gilt $h(z_n) \mapsto h(z_0)$.

2.) Es ist $h \in H(G)$. Sei $\triangle \subseteq G$ ein Dreieck. Wegen 9.7 genügt es, zu zeigen:

$$\int_{\partial\triangle} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Nach 9.1 und 9.2 gilt

$$\int_{\partial\triangle} \varphi(w,z)\,\mathrm{d}z = 0\,\forall\, w \in G$$

und hieraus folgt:

$$\int_{\partial\triangle} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\partial\triangle}\left[\int_{\gamma} \varphi(w,z)\,\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}z \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\gamma}\underbrace{\left[\int_{\partial\triangle} \varphi(w,z)\,\mathrm{d}z\right]}_{=0}\mathrm{d}w = 0$$

3.) Es gilt $\mathbb{C} = \mathrm{Int}(\gamma) \cup \mathrm{Ext}(\gamma) \cup \mathrm{Int}(\gamma) = G \cup \mathrm{Ext}(\gamma)$ wegen $\mathrm{Int}(\gamma) \subseteq G$. Sei $z_0 \in \mathrm{Ext}(\gamma)$ und C die Komponente von $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$: $z_0 \in C$. Aus 16.2 folgt $n(\gamma,z) = n(\gamma,z_0) = 0\ \forall\ z \in C$. Hieraus folgt $C \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma)$. Nach 16.2 sind Zusammenhangskomponenten von offenen Mengen offen. Also ist C offen und es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq C \subseteq \mathrm{Ext}(\gamma)$. Also ist $\mathrm{Ext}(\gamma)$ offen.

$$g(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \text{ für } z \notin \mathrm{Tr}(\gamma)$$

Nach 9.5 ist $g \in H(\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma))$, insbesondere $g \in H(\mathrm{Ext}(\gamma))$. Sei $z \in G \cap \mathrm{Ext}(\gamma)$.

$$h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w-z} = g(z) - f(z)\cdot 2\pi\mathrm{i}\underbrace{n(\gamma,z)}_{=0} = g(z)$$

Also ist $h = g$ auf $G \cap \mathrm{Ext}(\gamma)$. Dann ist

$$F(z) := \begin{cases} h(z) & \text{für} \quad z \in G \\ g(z) & \text{für} \quad z \in \mathrm{Ext}(\gamma) \end{cases}$$

eine ganze Funktion. Es gilt $F(z) \mapsto 0$ für $|z| \mapsto \infty$ (Übung!). Satz 10.2 liefert $F \equiv 0$ und hieraus folgt $h \equiv 0$. □

18.1 Allgemeine Cauchysche Integralformel

Satz 22.3:

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und γ sei nullhomolog in G. Dann gilt:

$$n(\gamma,z)f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,\forall\, f \in H(G) \text{ und } \forall\, z \in G \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$$

Beweis:

Sei $f \in H(G)$ und $z \in G \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$. Nach 22.2/3 gilt:

$$0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z)\underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w-z}}_{=n(\gamma,z)}$$ □

18.2 Cauchysche Integralformel, Homologieversion I

Satz 22.4:

Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}w = 0\,\forall\, f \in H(G) \Leftrightarrow \gamma \text{ ist in } G \text{ nullhomolog}$$

Beweis:

1.) „⇒“: Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$.

$$f(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{1}{z - z_0}$$

Hieraus folgt $f \in H(G)$ und nach der Voraussetzung gilt:

$$0 = \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = n(\gamma, z_0)$$

Damit ist γ in G nullhomolog.

2.) „⇐“: Sei $f \in H(G)$ und $z_0 \in G \setminus \mathrm{Tr}(\gamma)$. Wir definieren $g(z) := (z - z_0)f(z)$ mit $g \in H(G)$. Wende 22.3 auf g an:

$$n(\gamma, z_0)\underbrace{g(z_0)}_{=0} = \int\limits_\gamma \underbrace{\frac{g(w)}{w - z_0}}_{=f(w)} \Rightarrow \int\limits_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

□

Satz 22.5:

G ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn jeder geschlossene Weg γ mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ in G nullhomolog ist.

Beweis:

1.) „⇒“: Dies folgt nach 22.1/2.

2.) „⇐“: Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ und $f \in H(G)$. Voraussetzung: γ ist in G nullhomolog. Nach 22.4 ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Damit ist nach 21.5 G einfach zusammenhängend.

Definition:

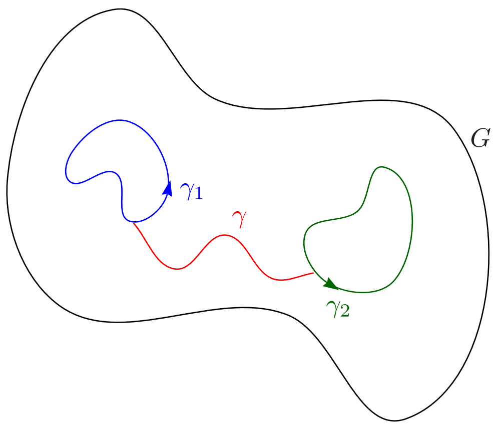
Seien γ_1 und γ_2 geschlossene Wege mit $\mathrm{Tr}(\gamma_1)$, $\mathrm{Tr}(\gamma_2) \subseteq G$. γ_1 und γ_2 heißen **in *G* homolog** genau dann, wenn $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)\ \forall\ z \in \mathbb{C} \setminus G$.

18.3 Cauchysche Integralformel: Homologieversion II

Satz 22.6:

γ_1, γ_2 seien wie in obiger Definition und in G homolog. Dann gilt:

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \,\forall\, f \in H(G)$$



<u>**Beweis:**</u>

Sei $f \in H(G)$ und z_j Anfangspunkt von γ_j ($j = 1, 2$). Nach 3.4 existiert ein Weg γ: $[0, 1] \mapsto \mathbb{C}$: $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$ mit $\gamma(0) = z_1$ und $\gamma(1) = z_2$. $\Gamma := \gamma_1 \oplus \gamma \oplus \gamma_2^- \oplus \gamma^-$ ist ein geschlossener Weg mit $\mathrm{Tr}(\Gamma) \subseteq G$. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$:

$n(\Gamma, z_0) = n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma, z_0) - n(\gamma_2, z_0) - n(\gamma, z_0) = 0$

Somit ist Γ in G nullhomolog. Nach 22.4 gilt:

$$0 = \int\limits_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \square$$