Mitschrieb zur Vorlesung: Funktionentheorie II

Dr. Schmoeger

Vorlesung Wintersemester 2006/2007

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung Funktionentheorie II
von Herrn Dr. Schmoeger im Wintersemester 2006/2007
von Marco Schreck.

Inhaltsverzeichnis

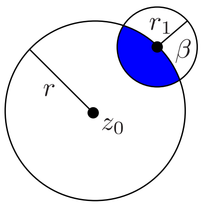
Kapitel 1

Singuläre und reguläre Punkte von Potenzreihen

Definition:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f \in H(U_r(z_0))$.

1.) $\beta \in \partial U_1(z_0)$ heißt **ein regulärer Punkt von f** genau dann, wenn ein $r_1 > 0$ und $g \in H(U_{r_1}(\beta))$ existiert, so dass $g = f$ auf $U_r(z_0) \cap U_{r_1}(\beta)$. (Das bedeutet, dass sich f in β hinein holomorph fortsetzen lässt.)



In diesem Fall ist jeder Punkt in $\partial U_r(z_0) \cap U_{r_1}(\beta)$ wieder ein regulärer Punkt von f.

2.) $\alpha \in \partial U_r(z_0)$ heißt **ein singulärer Punkt von f** genau dann, wenn α kein regulärer Punkt von f ist. (Dann lässt sich f in α hinein nicht holomorph fortsetzen.)

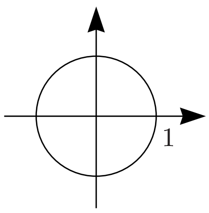
3.) Ist jeder Punkt von $\partial U_r(z_0)$ singulärer Punkt von f, so heißt $\partial U_r(z_0)$ die **natürliche Grenze von f**.

Beispiele:

1.) Wir betrachten die geometrische Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (z_0 = 0,\ r = 1)$$

Für $|z| < 1$ gilt $f(z) = 1/(1-z)$.



$\alpha = 1$ ist ein singulärer Punkt von f. Jedes $\beta \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$ ist ein regulärer Punkt von f.

2.) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1 ($z_0 = 0$, $r = 1$). Behauptung: $\partial\mathbb{D}$ ist die natürliche Grenze von f. Zum Beweis betrachten wir $\beta \in \partial\mathbb{D}$ und nehmen an, dass β ein regulärer Punkt von f ist.

Es existiert ein Bogen $\Gamma \subseteq \partial\mathbb{D}$ mit der Eigenschaft, dass jedes $z \in \Gamma$ regulärer Punkt ist von f. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$ und damit existiert ein Punkt $z^* \in \Gamma$ mit der Eigenschaft $z^* = \exp(2\pi\mathrm{i}p/q)$ mit p, $q \in \mathbb{N}$. Sei $0 < \varrho < 1$ und $z_1 := \varrho z^*$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} z^{n!} = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!} \cdot \underbrace{\exp\left(2\pi\mathrm{i}\frac{p}{q}n!\right)}_{=1} = \sum_{n=0}^{q-1} z^{n!} + \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!}$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt:

$$|f(z)| \geq \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} |z|^{n!} = \sum_{n=q}^{\infty} \varrho^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} \varrho^{n!}$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m > 2q$. Dann ist:

$$|f(z)| \geq \sum_{n=q}^{m} \varrho^{n!} - \sum_{n=0}^{q-1} \varrho^{n!}$$

Mit

$$\sum_{n=q}^{m} \varrho^{n!} \overset{\varrho<1}{\geq} \sum_{n=q}^{m} \varrho^{m!} = \varrho^{m!}(m-q+1) \text{ und } \sum_{n=0}^{q-1} \varrho^{n!} \leq q$$

ergibt sich weiter:

$$|f(z)| \geq \varrho^{m!}(m-q+1) - q \text{ also } |f(\varrho z^*)| \geq \varrho^{m!}(m-q+1) - q \,\forall\, \varrho \in (0,1)$$

Da z^* ein regulärer Punkt von f ist, existiert ein $L := \lim_{\varrho \mapsto 1} |f(\varrho z^*)|$ und ist $\in \mathbb{R}$. Somit ist $L \geq m - q + 1 - q = -2q + 1$. $m > 2q$ war beliebig. Also muss $L = \infty$ sein, was ein Widerspruch darstellt. □
In obigem Beispiel war $\partial\mathbb{D}$ die natürliche Grenze von f. Das ist **kein** Zufall! $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ hat „Lücken“:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} = z + z + z^2 + 0 \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + z^6 + 0 \cdot z^7 + \ldots + 0 \cdot z^{23} + z^{24} + \ldots$$

1.1 Lückensatz von Fabri

Sei (n_k) eine Teilfolge von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. (a_k) sei eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ habe den Konvergenzradius 1. Weiter gelte $n_k/k \mapsto \infty$ für $k \mapsto \infty$. Dann ist $\partial\mathbb{D}$ die natürliche Grenze von f.

Beispiel:

1.) Wir betrachten wir unsere Reihe aus dem vorherigen Beispiel:

$$\sum \infty_{k=0} z^{k!},\ n_k = k!,\ \frac{n_k}{k} = (k-1)! \mapsto \infty \text{ für } k \mapsto \infty$$

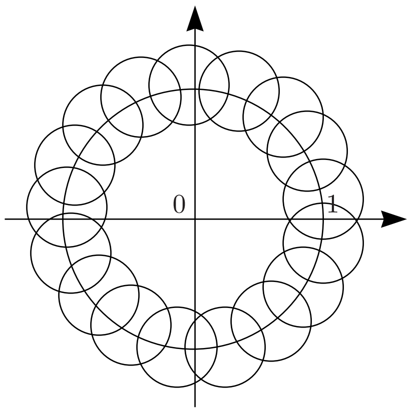
2.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$, $n_k = 2^k$, $n_k/k = z^k/k \mapsto \infty$ für $k \mapsto \infty$

Satz 3.2:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in H(U_r(z_0))$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe den Konvergenzradius r. Dann hat f auf $\partial U_r(z_0)$ mindestens einen singulären Punkt.

Beweis:

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$ und $r = 1$. Wir nehmen an, dass jeder Punkt auf $\partial\mathbb{D}$ ein regulärer Punkt von f ist. $\partial\mathbb{D}$ ist kompakt. Damit existieren offene Kreisscheiben $D_1, \ldots, D_n$ mit Mittelpunkten auf $\partial\mathbb{D}$ und $g_j \in H(D_j)$ mit $g_j = f$ auf $\mathbb{D} \cap D_j$ $(k = 1, \ldots, n)$ und $\partial\mathbb{D} \subseteq D_1 \cup \ldots \cup D_n$.



$G := \mathbb{D} \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n$ ist ein Gebiet mit $\overline{\mathbb{D}} \subseteq G$. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{1+\varepsilon}(0) \subseteq G$. Definiere h: $G \mapsto \mathbb{C}$ durch:

$$h(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für} \quad z \in \mathbb{D} \\ g_j(z) & \text{für} \quad z \in D_j \text{ für ein } j \end{cases}$$

h ist wohldefiniert: Sei $z \in D_j \cap D_k$ $(j \neq k)$ und $V_{jk} := D_j \cap D_k \cap \mathbb{D}$. Es ist $g_j = f = g_k$ auf V_{jk}. Der Identitätssatz liefert $g_j = g_k$ auf $D_j \cap D_k$, also $g_j(z) = g_k(z)$. Es ist klar, dass $g \in H(G)$ ist. Damit machen wir eine Potenzreihenentwicklung von h um 0:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

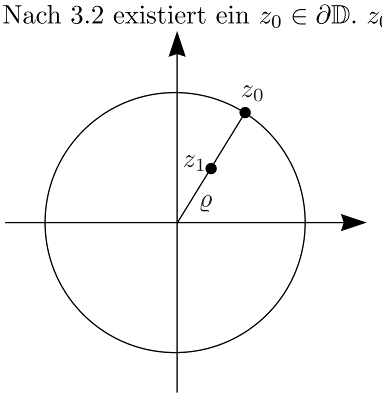
Diese Entwicklung hat einen Konvergenzradius $\geq 1 + \varepsilon > 1$. Es ist $h = f$ auf $\mathbb{D}$. Nach dem Identitätssatz folgt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Damit hat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ einen Konvergenzradius $> 1 = r$, was ein Widerspruch darstellt. □

1.2 Satz von Pringsheim

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$; die Potenzreihe habe den Konvergenzradius 1 und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist 1 ein singulärer Punkt von f.

<u>Beweis:</u>

Nach 3.2 existiert ein $z_0 \in \partial\mathbb{D}$. z_0 ist ein singulärer Punkt von f.



Sei $0 < \varrho < 1$ beliebig, aber zunächst fest und $z_1 := \varrho z_0$. Für $\nu \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|f^{(n)}(z_1)| = \left| \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-\nu+1) a_n z_1^{n-\nu} \right| \overset{a_n \geq 0}{\leq} \sum_{n=\nu}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-\nu+1) a_n \underbrace{|z_1|^{n-\nu}}_{=\varrho^{n-\nu}} = f^{(n)}(\varrho) = |f^{(n)}(\varrho)|$$

Hieraus folgt:

$$\underbrace{\limsup_{\nu \mapsto \infty} \left(\frac{|f^{(n)}(z_1)|}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\nu}}}_{=:\alpha} \leq \underbrace{\limsup_{\nu \mapsto \infty} \left(\frac{|f^{(n)}(\varrho)|}{\nu!} \right)^{\frac{1}{\nu}}}_{=:\beta}$$

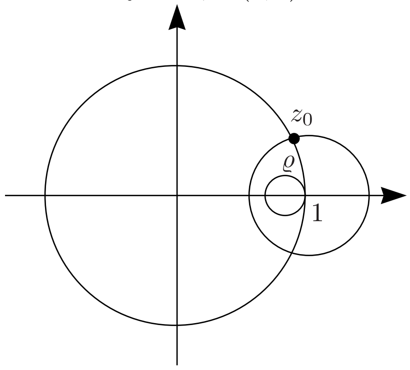
Also ist $\alpha \leq \beta$. Schauen wir uns nun die Potenzreihenentwicklung von f um z_1 an:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_1)}{\nu!}(z-z_1)^\nu$$

Diese Entwicklung hat den Konvergenzradius $1/\alpha$. z_0 ist singulärer Punkt von f und damit ist $1/\alpha = 1-\varrho$. Kommen wir nun zur Potenzreihenentwicklung von f um ϱ

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(\varrho)}{\nu!}(z-\varrho)^\nu \tag{$*$}$$

welche den Konvergenzradius $1/\beta$ hat. Aus $\alpha \leq \beta$ folgt $1/\beta \leq 1/\alpha$ und somit $1/\beta \leq 1-\varrho$. Nach Funktionentheorie I hat die Entwicklung in $(*)$ den Konvergenzradius $\geq 1-\varrho$. Somit ist $1/\beta \geq 1-\varrho$, also $1/\beta = 1-\varrho$. Fazit: Für jedes $\varrho \in (0,1)$ hat die Entwicklung um $(*)$ den Kovergenzradius $1-\varrho$.



Wir nehmen an, dass 1 ein regulärer Punkt von f ist. Damit existiert ein $r > 0$ und ein $g \in H(U_r(1))$ mit $g = f$ auf $\mathbb{D} \cap U_r(1)$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass $|z_0| = 1$ und $|z_0 - 1| = r$. Wähle $\varrho \in (0,1)$ so, dass $|z_0 - \varrho| > 1-\varrho$. Nach Funktionentheorie I hat die Entwicklung in $(*)$ mindestens den Konvergenzradius $\geq |z_0 - \varrho > 1-\varrho$. Das ist ein Widerspruch. $\square$

1.3 Schwarzsches Spiegelungsprinzip

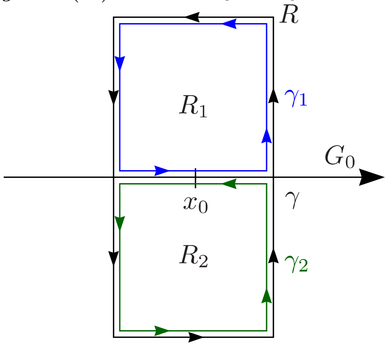
Sei $G = G^*$, G_+, G_- und G_0 wie oben. Es sei weiter $f \in C(G_+ \cup G_0)$, $f \in H(G_+)$ und $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G_0$. Definiert man g: $G \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für} \quad z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{f}(\overline{z}) & \text{für} \quad z \in G_- \end{cases}$$

so ist $g \in H(G)$.

Beweis:

Es ist klar, dass $g \in H(G_+)$. Aus Satz 5.1 folgt $g \in H(G_-)$ $(G_+* = G_-)$. Als Übung kann gezeigt werden, dass $g \in C(G)$ ist. Sei $x_0 \in G_0$. Nach Satz 5.2 existiert ein abgeschlossenes Rechteck R mit $x_0 \in R^0$ und $R \subseteq G$.



$R_1 := \{z \in R : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ und $R_2 := \{z \in R : \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$

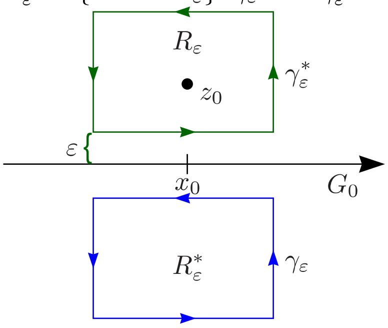
γ, γ_1 und γ_2 seien stückweise glatte Wege mit $\operatorname{Tr}(\gamma) = \partial R$ und $\operatorname{Tr}(\gamma_j) = \partial R_j$ für $j = 1, 2$. Definiert man h: $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Tr}(\gamma) \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g(\omega)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Nach Satz 9.5 oder Satz 2.6 aus Funktionentheorie I folgt $h \in H(\mathbb{C} \setminus \mathrm{Tr}(\gamma))$. Insbesondere ist $h \in H(G \setminus \mathrm{Tr}(\gamma))$. Es gilt:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w-z} \,\mathrm{d}w \text{ für } z \notin \mathrm{Tr}(\gamma_1) \cup \mathrm{Tr}(\gamma_2) \qquad (*)$$

Sei $z_0 \in R^0$ und $\mathrm{Im}(z_0) > 0$. Sei außerdem $\varepsilon > 0$ so klein, dass $z_0 \in R^0_\varepsilon$, wobei $R_\varepsilon := \{z \in R_1 : \mathrm{Im}(z) \geq \varepsilon\}$ und $R^*_\varepsilon := \{\overline{z} : z \in R_\varepsilon\}$. γ_ε und γ^*_ε seien stückweise glatte Wege mit $\mathrm{Tr}(\gamma_\varepsilon) = \partial R_\varepsilon$ und $\mathrm{Tr}(\gamma^*_\varepsilon) = \partial R^*_\varepsilon$.



Nach der Cauchyschen Integralformel gilt:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(w)}{w-z_0} \,\mathrm{d}w$$

und nach dem Cauchyschen Integralsatz:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma^*_\varepsilon} \frac{g(w)}{w-z_0} \,\mathrm{d}w = 0$$

Übung: Für $\varepsilon \mapsto 0$ folgt:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w-z_0} \,\mathrm{d}w \text{ und } \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_2} \frac{g(w)}{w-z_0} \,\mathrm{d}w = 0$$

Aus $(*)$ folgt $g(z_0) = h(z_0)$. Also ist $g = h$ auf $R^0 \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und g, h stetig. Daraus folgt $g = h$ auf $R^0 \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Ist $z_0 \in R^0$ und $\mathrm{Im}(z_0) < 0$, so folgt analog $g = h$ auf $R^0 \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$. Fazit: Es gilt $g = h$ auf R^0, $h \in H(R^0)$. Daraus folgt $g \in H(R^0)$ und damit ist g in x_0 komplex differenzierbar.
$\square$

Kapitel 2

Der Satz von Bloch

Lemma 6.1:

Sei $f \in H(\mathbb{D})$ beschränkt, $M := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Dann ist $M \geq 1$ und $U_{1/(6M)}(0) \subseteq f(\mathbb{D})$.

Beweis:

Es sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit $z \in \mathbb{D}$. Aus $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ folgt $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Sei $r \in (0, 1)$. Die Cauchyschen Abschätzungen liefern $|a_n| \leq M/r^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $r \mapsto 1$ gilt $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ ist $M \geq 1$. Sei $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 1/(4M)$ $(\leq 1/4)$, also $z \in \mathbb{D}$.

$$|f(z)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\Big| \geq |z| - \Big|\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\Big| \geq |z| - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n||z|^n = \frac{1}{4M} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left(\frac{1}{4M}\right)^n \geq \frac{1}{4M} - \sum_{n=2}^{\infty} M \left(\frac{1}{4M}\right)^n = \frac{1}{4M} - \frac{1}{16M-4} \overset{M\geq}{\geq}$$

Also ist $|f(z)| \geq 1/(6M)$ für $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| = 1/(4M)$. Sei $w \in U_{1/(6M)}(0)$. Wir definieren eine Hilfsfunktion $g(z) := f(z) - w$. Für $z \in \mathbb{D}$ mit $|z| = 1/(4M)$ gilt:

$$|f(z) - g(z)| = |w| < \frac{1}{6M} \leq |f(z)|$$

Aus $f(0) = 0$ folgt mit dem Satz von Rouche, dass g in $U_{1/(4M)}(0)$ mindestens eine Nullstelle z_0 hat. Dann ist $z_0 \in \mathbb{D}$ und $w = f(z_0) \in f(\mathbb{D})$. $\square$

Folgerung 6.2:

Sei $R > 0$, $f \in H(U_R(0))$, f sei auf $U_R(0)$ beschränkt, $M := \sup_{|z|<R} |f(z)|$ und es sei $f(0) = 0$ und $\mu := |f'(0)| > 0$. Mit $r := R^2\mu^2/(6M)$ gilt $U_r(0) \subseteq f(U_R(0))$.

Beweis:

$$g(t) := \frac{1}{Rf'(0)} f(Rz) \text{ mit } z \in \mathbb{D}$$

Wende 6.1 auf g an. $\square$

Lemma 6.3:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein komplexes Gebiet, $a \in G$, $f \in H(G)$ und es gelte $|f'(z) - f'(a)| < |f'(a)| \;\forall\; z \in G$. Dann ist f auf G injektiv.

Beweis:

Seien z_1, $z_2 \in G$ mit $z_1 \neq z_2$ und $\gamma(t) := z_1 + t(z_2 - z_1)$ ($t \in [0,1]$) die Verbindungsstrecke dieser zwei Punkte. Daraus, dass G konvex ist, folgt $\mathrm{Tr}(\gamma) \subseteq G$. Dann betrachten wir:

$$f(z_2) - f(z_1) = \int\limits_{\gamma} f'(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} (f'(z) - f'(a))\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma} f'(a)\,\mathrm{d}z =: I_1 + I_2$$

$$|I_2| = \Bigg|\int\limits_0^1 f'(a)(z_2 - z_1)\,\mathrm{d}t\Bigg| = |f'(a)(z_2 - z_1)|$$

$$|I_1| \leq \left(\max_{z \in \mathrm{Tr}(\gamma)} |f'(z) - f'(a)|\right) L(\gamma) < |f'(a)||z_2 - z_1| = |I_2| \text{ nach Voraussetzung}$$

Also gilt $|I_1| < |I_2|$. Somit gilt

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |I_1 + I_2| \geq |I_2| - |I_1| > 0$$

und damit $f(z_1) \neq f(z_2)$, was die Injektivität von f liefert. □

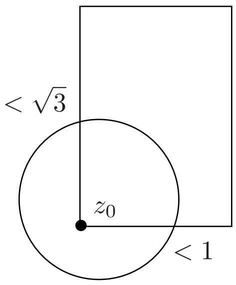
Kapitel 3

Der „kleine“ Satz von Picard

Hilfssatz:

1.) Für $x \geq 1$ sei $\varphi(x) := \log(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) - \log(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})$. Dann ist φ auf $[1,\infty)$ fallend. Insbesondere gilt $\varphi(1) = \log(1+\sqrt{2}) \geq \varphi(x)\ \forall\ x \geq 1$.

2.) Es sei R ein achsenparalleles Rechteck in $\mathbb{C}$ mit Breite < 1 und der Höhe $< \sqrt{3}$. Ist $z_0 \in R$, so existiert ein Eckpunkt a von R mit $a \in U_r(z_0)$.



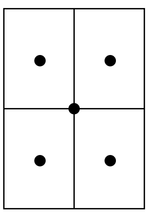
Beweis:

1.) Übung! ($\varphi' \leq 0$ auf $(1,\infty)$)

2.) Es existiert ein Eckpunkt a von R mit $|\mathrm{Re}(a-z_0)| < 1/2$ und $|\mathrm{Im}(a-z_0)| < \sqrt{3}/2$. Dann gilt:

$$|a-z_0| = \left[\mathrm{Re}^2(a-z_0)+\mathrm{Im}^2(a-z_0)\right]^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

Damit ist $a \in U_1(z_0)$. □



Lemma 7.1:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, f, $g \in H(G)$, $1 \notin f(G)$ und es gelte $f = -\exp(\mathrm{i}\pi\cosh(2g))$ auf G.

1.) $g(G)$ enthält **keine** offene Kreisscheibe mit Radius 1.

2.) Ist $G = \mathbb{C}$, so sind f und g konstant.

Beweis:

1.) Sei $A := \{\pm\log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) + \mathrm{i}\pi/2m\colon n \in \mathbb{N} \text{ und } m \in \mathbb{Z}\}$. Wir nehmen an, dass $A \cap g(G) \neq \emptyset ist$. Also existiert ein $z_0 \in G$, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ mit:

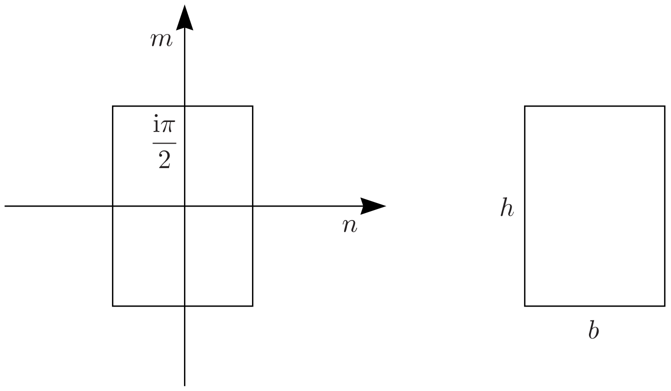
$$g(z_0) = \pm\log\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right) + \frac{\mathrm{i}\pi}{2}m$$

Nachrechnen:

$f(z_0) = -\exp[\mathrm{i}\pi\cosh(2g(z_0))] = 1$

Dies ist ein Widerspruch zu $1 \notin f(G)$. Also ist $A \cap g(G) = \varnothing$. Die Punkte in A bilden die Eckpunkte eines Rechteckgitters in $\mathbb{C}$.

- $n = 1$: $\frac{\mathrm{i}\pi}{2}m$ mit $m \in \mathbb{Z}$
- $n = 2$: $\pm\log(1+\sqrt{2}) + \frac{\mathrm{i}\pi}{2}m$ mit $m \in \mathbb{Z}$



Wir Betrachten ein solches Rechteck mit der Höhe $h = \pi/2 < \sqrt{3}$ und der Breite $b = \log(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) - \log(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) = \varphi(n)$. φ sei wie im obigen HS. Also ist $b = \varphi(n) \overset{\text{HS}}{\leq} \varphi(1) = \log(1+\sqrt{2}) < \log(\mathrm{e}) = 1$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Aus HS (2) folgt, dass ein $a \in A$ existiert mit $a \in U_1(z_0)$. Hieraus folgt $A \cap U_1(z_0) \neq \varnothing$. Aus $A \cap g(G) = \varnothing$ ergibt sich $U_1(z_0) \not\subseteq g(G)$. □

2.) Das folgt aus (1) und Satz 6.5 (2).

Erinnerung:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. G ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn für alle $f \in H(G)$ mit $Z(f) = \varnothing$ ein $g \in H(G)$ existiert mit $\exp(g) = f$ auf G. Dies ist äquivalent dazu, dass für alle $f \in H(G)$ und $Z(f) = \varnothing$ ein $g \in H(G)$ existiert mit $g^2 = f$ auf G.

Lemma 7.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f \in H(G)$ und es sei $0,\ 1 \notin f(G)$. Dann existiert ein $g \in H(G)$ mit der Eigenschaft $f = -\exp(\mathrm{i}\pi\cosh(2g))$ auf G.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $0 \notin f(G)$ und damit $Z(f) = \varnothing$. G ist einfach zusammenhängend, womit es eine Funktion $h \in H(G)$ gibt mit der Eigenschaft $f = \exp(h)$ auf G. Sei $F := 1/(2\pi\mathrm{i})h$. Ist $1 \notin f(G)$, so ist $Z(h) = \varnothing$ und damit $Z(F) = \varnothing$. Also existiert ein $W_1 \in H(G)$ mit $W_1^2 = F$ auf G. Es ist $Z(F-1) = \varnothing$. (Andernfalls existiert ein $z_0 \in G$ mit $F(z_0) = 1$. Damit wäre $h(z_0) = 2\pi\mathrm{i}$ und $f(z_0) = 1$, was ein Widerspruch darstellt.) Also existiert ein $W_2 \in H(G)$ mit $W_2^2 = F - 1$ auf G. Sei weiterhin $H := W_1 - W_2$. Es ist $Z(H) = \varnothing$. (Andernfalls existiert ein $z_0 \in G$ mit $W_1^2(z_0) = W_2^2(z_0)$. Also wäre $F(z_0) = F(z_0) - 1$ $(0 = -1)$, was auch ein Widerspruch ist.) Somit gibt es ein $g \in H(G)$ mit $\exp(g) = H$ auf G. Wir betrachten auf G die Funktion

$$
\begin{aligned}
\cosh(2g) + 1 &= \frac{1}{2}(\exp(2g) + \exp(-2g)) + 1 = \frac{1}{2}(\exp(g) + \exp(-g))^2 = \frac{1}{2}\left(H + \frac{1}{H}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}\left(W_1 - W_2 + \frac{1}{W_1 - W_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(W_1 - W_2 + \frac{W_1 + W_2}{W_1^2 - W_2^2}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}(W_1 - W_2 + W_1 + W_2)^2 = \frac{1}{2}(2W_1)^2 = 2F
\end{aligned}
$$

Also gilt $h = \mathrm{i}\pi \cdot 2F = \mathrm{i}\pi(\cosh(2g) + 1) = \mathrm{i}\pi\cosh(2g) + \mathrm{i}\pi$. Hieraus folgt $f = \exp(\mathrm{i}\pi\cosh(2g))\exp(\mathrm{i}\pi) = -\exp(\mathrm{i}\pi\cosh(2g))$. □

3.1 Der „kleine“ Satz von Picard

Es sei $f \in H(\mathbb{C})$. Es seien a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ und a, $b \notin f(\mathbb{C})$. Dann ist f konstant.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a = 0$, $b = 1$. (Andernfalls betrachte $(b-a)^{-1}(f-a)$.) Sei g wie in 7.2. Nach Satz 7.1 ist f konstant. $\square$
Ist also $f \in H(\mathbb{C})$, so gibt es drei Möglichkeiten:

1.) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$

2.) $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{c\}$ ($c \in \mathbb{C}$ geeignet)

3.) f ist konstant.

Beispiele:

1.) $f(z) = \exp(z)$ mit $f(\mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.) Ist p ein nichtkonstantes Polynom, $f \in H(\mathbb{C})$ und $g := p\exp(f)$. In Kapitel 8 werden wir sehen, dass $g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ ist.

Erinnerung:

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und f habe in z_0 einen Pol der Ordnung m. Dann hat $1/f$ in z_0 eine hebbare Singularität. Kurz: Es existiert ein $\delta > 0$ mit $1/f \in H(U_\delta(z_0))$. ($1/f$ hat in z_0 eine m-fache Nullstelle.) Es sei $f \in M()$. (Das heißt, es existiert eine diskrete Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$ mit $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$ und jedes $a \in A$ ist ein Pol von f.)

3.2 „Kleiner“ Satz von Picard für meromorphe Funktionen

Satz 7.4:

Sei $f \in M(\mathbb{C})$ und seien a, b, $c \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Außerdem nehme f die Werte a, b, c nicht an. Dann ist f konstant.

Beispiel:

Wir betrachten $f(z) = 1/(1 + \exp(z))$. Hier gilt $A = \{(2k+1)\pi \mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}$. Jedes $a \in A$ ist ein einfacher Pol von f. Klar ist, dass 0, $1 \notin f(\mathbb{C} \setminus A)$. Sei $w \in \mathbb{C}$ mit $0 \neq w \neq 1$.

$$\left(f(z) = w \Leftrightarrow \frac{1}{1+\exp(z)} = w \Leftrightarrow \frac{1}{w} - 1 = \exp(z) \right)$$

Dann ist $f(\mathbb{C} \setminus A) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Beweis:

Aus $f \in M(\mathbb{C})$ folgt $f - a \in M(\mathbb{C})$. Aus $Z(f-a) = \varnothing$ folgt, dass $g := 1/(f-a) \in H(\mathbb{C})$ ist. Damit sind $1/(b-a)$ sowie $1/(c-a) \notin g(\mathbb{C})$. Nach Satz 7.3 folgt, dass g konstant ist. Also ist auch f konstant. $\square$

Satz von Casarotti-Weierstraß (FTH I):

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$, $f \in H(D \setminus \{z_0\})$ und f habe in z_0 eine wesentliche Singularität. Weiter sei $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(z_0) \subseteq D$ ist. Dann gilt $\overline{f(\dot{U}_\delta(z_0))} = \mathbb{C}$. (Das bedeutet, dass sich jede komplexe Zahl aus Punkten dieser Menge ansteuern lässt.)

3.3 „Großer“ Satz von Picard

Es gilt $f(\dot{U}_\delta(z_0)) = \mathbb{C}$ oder $f(\dot{U}_\delta(z_0)) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (mit geeignetem $c \in \mathbb{C}$).
Im folgenden sei $\varnothing \neq A \subseteq G$ und A sei **diskret** in G. (Dies bedeutet, dass A in G keine Häufungspunkte hat.)
Dann ist $G \setminus A$ ein Gebiet.

Definition:

Sei $\mathrm{Aut}_A(G) := \{f \in \mathrm{Aut}(G) : f(A) = A\}$.

Beispiele:

1.) Sei $G = \mathbb{C}$, $A := \{0\}$. Ist $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathbb{C})$, so folgt hieraus $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und $f(0) = 0$. Nach Satz 10.4 existiert ein $a \in \mathbb{C}^\times$, nämlich $f(z) = az$. Also ist $\mathrm{Aut}_A(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az : a \in \mathbb{C}^\times\}$.

2.) Sei $G = \mathbb{D}$, $A := \{0\}$.

$$f \in \mathrm{Aut}_A(\mathbb{D}) \Leftrightarrow f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \text{ und } f(0) = 0 \overset{10.1\,(2)}{\Leftrightarrow} \exists\, \lambda \in \partial\mathbb{D} \text{ mit } f(z) = \lambda z$$

3.) Sei $G = \mathbb{D}$, $A := \{0, 1/2\}$. Aus $f \in \mathrm{Aut}_A(\mathbb{D})$ folgt, dass $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ und $f(A) = A$. Wegen 10.1 (1) existiert ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ und $a \in \mathbb{D}$ mit

$$f(z) = \lambda \frac{z-1}{1-\overline{a}z}$$

a.) Fall 1: $f(0) = 0$, $f(1/2) = 1/2$
Dann ist $f = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$:

b.) Fall 2: $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 0$

$$\frac{1}{2} = \lambda(-a),\ 0 = \lambda \frac{\frac{1}{2} - a}{1 - \overline{a}\frac{1}{2}} \Rightarrow f(z) = \frac{2z-1}{z-2}$$

Also gilt:

$$\mathrm{Aut}_A(\mathbb{D}) = \left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{D}}, \frac{2z-1}{z-2} \right\}$$

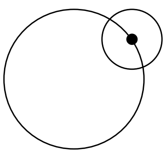
4.) Ist $f \in \mathrm{Aut}_A(G)$ und $f(A) = A$. Dann folgt $f(G \setminus A) = G \setminus A$ und $f_{|G\setminus A} \in \mathrm{Aut}(G \setminus A)$.

Definition:

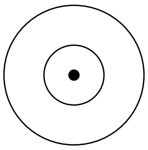
Sei $\mathrm{iso}\partial G := \{a \in \partial G : \exists \varepsilon > 0 : \dot{U}_\varepsilon(a) \cap \partial G = \varnothing\}$ (**isolierte Randpunkte** von G).

Beispiele:

1.) Für die offene Kreisscheibe gilt $\mathrm{iso}\partial\mathbb{D} = \varnothing$ $(\partial\mathbb{D} \neq \varnothing)$



2.) $\mathrm{iso}\partial\mathbb{D}^\times = \{0\}$
Der Nullpunkt ist nicht in $\mathbb{D}^\times$ enthalten, ist in diesem Falle ein isolierter Randpunkt.



3.) $\mathrm{iso}\partial\mathbb{C}^\times = \partial\mathbb{C}^\times = \{0\}$

Satz 10.6:

Sei $g \in H(G)$, $g(G \setminus A) \subseteq G$. Es sei weiterhin g injektiv auf $G \setminus A$, $a \in A$ und $g(A) \in \partial G$. Dann ist $g(a) \in \mathrm{iso}\partial G$.

Beweis:

Es existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(a) \subseteq G$ und $\dot{U}_\delta(a) \subseteq G \setminus A$. g ist injektiv auf $\dot{U}_\delta(a)$ und nach 10.3 ist g injektiv auf $U_\delta(a)$. $g(U_\delta(a))$ ist offen, $g(a) \in g(U_\delta(a))$. Damit gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(g(a)) \subseteq g(U_\varepsilon(a))$. Dann lässt sich folgendes aussagen:

$$\dot{U}_\varepsilon(g(a)) \subseteq g(U_\delta(a)) \setminus \{g(a)\} = g(\dot{U}_\delta(a)) \subseteq g(G \setminus A) \subseteq G \Rightarrow \dot{U}_\varepsilon(g(a)) \cap \partial G = \varnothing$$

Damit ist $g(a) \in \mathrm{iso}\partial G$. □

Satz 10.7:

Sei G **beschränkt** und $\mathrm{iso}\partial G = \varnothing$. Dann ist $\mathrm{Aut}(G \setminus A) = \{g|_{G\setminus A} : g \in \mathrm{Aut}_A(G)\}$.

Beweis:

1.) „$\supseteq$“: siehe obiges Beispiel (4)

2.) „$\subseteq$“: Sei $f \in \mathrm{Aut}(G\setminus A)$. Dann ist die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls $\in \mathrm{Aut}(G\setminus A)$. Somit gilt $f(G\setminus A) = G \setminus A = f^{-1}(G \setminus A) \subseteq G$. Also sind f und f^{-1} auf $G \setminus A$ beschränkt. Sei $a \in A$: Dann ist a eine isolierte Singularität von f und f^{-1}. Der Riemannsche Hebbarkeitssatz liefert, dass a eine hebbare Singularität von f und f^{-1} ist. Wir können also sowohl f als auch f^{-1} holomorph in den Punkt a fortsetzen. Damit existieren $g, h \in H(G)$, so dass $f = g|_{G\setminus A}$ und $f^{-1} = h|_{G\setminus A}$. Es ist $g(G \setminus A) = f(G \setminus A) = G \setminus A \subseteq G$. Sei $a \in A$. Dann existiert eine Folge (z_n) in $G \setminus A$ mit $z_n \mapsto a$. Dann ist $g(a) = \lim g(z_n) \in \overline{G \setminus A} = \overline{G}$. Fazit: Es gilt auf jeden Fall $g(G) \subseteq \overline{G}$. Annahme: Es existiert ein $a \in A$ mit der Eigenschaft, dass $g(A) \notin G$ ist. Damit folgt $g(a) \in \partial G$. Nach 10.6 ist $g(a) \in \mathrm{iso}\partial G$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung darstellt. Also ist $g(G) \subseteq G$. Analog ist ersichtlich, dass $h(G) \subseteq G$ ist. Dann sind $g \circ h$ und $h \circ g$ wohldefiniert. Sei $z_0 \in G$. Dann existiert eine Folge (z_n) in $G \setminus A$ mit der Eigenschaft $z_n \mapsto z_0$. Unter dieser Bedingung ist

$$(g \circ h)(z_n) = g(h(z_n)) = g(f^{-1}(z_n)) = f(f^{-1}(z_n)) = z_n = \ldots = (h \circ g)(z_n)$$

$$\xrightarrow{n\mapsto\infty} (g \circ h)(z_0) = \mathrm{id}_G(z_0) = (h \circ g)(z_0) \Rightarrow g \circ h = \mathrm{id}_G = h \circ g$$

So ist $g \in \mathrm{Aut}(G)$ und $g^{-1} = h$. Aus $g(G \setminus A) = G \setminus A$ folgt $g(A) = A$, da g bijektiv ist. Also ist $g \in \mathrm{Aut}_A(G)$. □

Satz 10.8:

$$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^\times) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \partial\mathbb{D} \text{ mit } f(z) = \lambda z$$

Beweis:

1.) „$\Leftarrow$“: erledigt

2.) „$\Rightarrow$“: Sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^\times) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D} \setminus A)$ mit $A = \{0\}$. Nach 10.7 existiert ein $g \in \mathrm{Aut}_A(\mathbb{D})$ mit $g|_{\mathbb{D}^\times} = f$. Aus obigem Beispiel (2) folgt, dass ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ existiert mit $g(z) = \lambda z$. □

Bemerkungen:

1.) Satz 10.7 ist für unbeschränkte Gebiete falsch!

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel. Sei $G = \mathbb{C}$, $A = \{0\}$, $f(z) := 1/z$. Nach Satz 10.5 ist $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^\times) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C} \setminus A)$. Nach obigem Beispiel (1) gilt $\mathrm{Aut}_A(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az : a \neq 0\}$.

2.) Satz 10.7 ist für beschränkte Gebiete **mit** isolierten Randpunkten falsch.

Als Beispiel betrachten wir $G = \mathbb{D}^\times$, $A = \{1/2\}$ und $B := \{0, 1/2\}$. Dann ist $\mathbb{D}^\times \setminus A = \mathbb{D} \setminus B$. Sei $f(z) := (2z-1)/(z-2)$. Obiges Beispiel (3) liefert $g \in \mathrm{Aut}_B(\mathbb{D})$. Nach 10.7 wäre $\varphi := f|_{D\setminus B} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D} \setminus B) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^\times \setminus A)$. Sei $g \in \mathrm{Aut}_A(\mathbb{D}^\times)$. Hieraus folgt $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^\times)$ und $g(1/2) = 1/2$. Nach 10.8 existiert ein $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ mit $g(z) = \lambda z$, $g(1/2) = 1/2$ und damit resultiert $\lambda = 1$ und $g = \mathrm{id}_{\mathbb{D}^\times}$.

Definition:

G heißt **starr** genau dann, wenn $\mathrm{Aut}(G) = \{\mathrm{id}_G\}$.

Aufgabe:

Seien a, $b \in \mathbb{D}^\times$ und $a \neq b$. Wir setzen $G := \mathbb{D} \setminus \{0, a, b\}$. Dann ist das Gebiet G **nicht** starr genau dann, wenn $a = -b$ oder $2b = a + \bar{a}b$ oder $2a = b + \bar{b}a$ oder ($|a| = |b|$ und $a^2 + b^2 = ab(1 + |a|^2)$).

Beispiele:

a.) $\mathbb{D} \setminus \{0, 1/2, -1/2\}$ ist **nicht** starr.

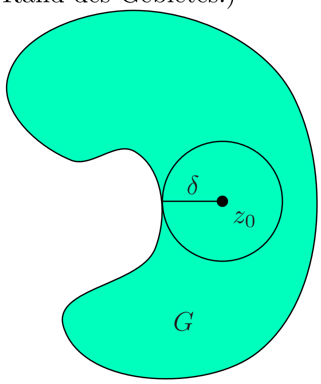
b.) $\mathbb{D} \setminus \{0, 1/2, 3/4\}$ ist starr.

Satz 10.9:

Sei G beschränkt, $z_0 \in G$, $f \in \mathrm{Aut}(G)$ und $f(z_0) = z_0$. Dann ist $|f'(z_0)| = 1$.

Beweis:

Wir definieren $\delta := \inf\{|z - z_0| : z \in \partial G\} > 0$. (Anschaulich handelt es sich dabei um den Abstand von z_0 zum Rand des Gebietes.)



Aufgrund der Beschränktheit des Gebiets gibt es ein $\gamma > 0$ mit $|z| < \gamma \; \forall \; z \in G$. Aus $f \in \mathrm{Aut}(G)$ folgt $f(G) = G$ und damit $|f(z)| \leq \gamma \; \forall \; z \in G$. Sei $r \in (0, \delta)$. Die Cauchyschen Abschätzungen liefern $|f'(z_0)| \leq \gamma/r$. Für $r \mapsto \delta$ gilt $|f'(z_0)| \leq \gamma/\delta$ $(*)$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $f_n := f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n mal). f_n ist wieder $\in \mathrm{Aut}(G)$ und $f_n(z_0) = z_0$. Induktiv zeigt man $f_n'(z_0) = f'(z_0)^n$. Aus $(*)$ folgt $|f_n'(z_0)| \leq \gamma/\delta$ und daraus folgt $|f'(z_0)|^n \leq \gamma/\delta$ bzw. $|f'(z_0)| \leq \sqrt[n]{\gamma/\delta} \; \forall \; n \in \mathbb{N}$. Für $n \mapsto \infty$ folgt $|f'(z_0)| \leq 1$. Da $f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$ und $f^{-1}(z_0) = z_0$ ist, folgt analog $|(f^{-1})'(z_0)| \leq 1$. Nutzen wir die Ableitung der Umkehrfunktion aus, so ergibt sich:

$$(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f'(f(z_0))} = \frac{1}{f'(z_0)} \Rightarrow \frac{1}{|f'(z_0)|} \leq 1 \Rightarrow |f'(z_0)| \geq 1 \qquad \square$$

3.4 Koebescher 1/4-Satz

Satz 11.7:

Es sei $f \in S$. Dann ist $U_{\frac{1}{4}}(0) \subseteq f(\mathbb{D})$.

Beweis:

Sei $w \notin f(\mathbb{D})$. Zu zeigen ist, dass $|w| \geq \frac{1}{4}$ ist. Betrachten wir die Funktion $g := wf/(w - f)$. Nach Satz 11.2 ist $g \in S$. Verschaffen wir uns die Potenzreihenentwicklungen für f und g:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ und } g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \text{ mit } z \in \mathbb{D}$$

Man sollte sich durch Nachrechnen von folgendem überzeugen:

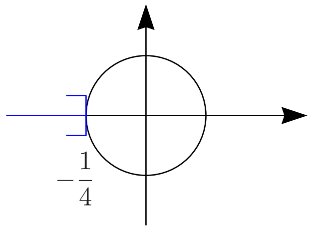
$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2} + \frac{1}{w} = a_2 + \frac{1}{w}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{|w|} - |a_2| \leq \left| a_2 + \frac{1}{w} \right| = |b_2| \overset{11.4}{\leq} 2 \Rightarrow \frac{1}{|w|} \leq 2 + |a_2| \overset{11.4}{\leq} 4 \Rightarrow |w| \geq \frac{1}{4} \qquad \square$$

Bemerkungen:

1.) Die Zahl $\frac{1}{4}$ kann nicht verbessert werden! Ist nämlich $r > 0$ und $U_r(0) \subseteq f(\mathbb{D})\ \forall\ f \in S$, dann folgt $U_r(0) \subseteq K(\mathbb{D})$. Nach 11.1 gilt dann $r \leq \frac{1}{4}$.



2.) Die Schlichtheit von f ist wesentlich! Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| > 2\pi$, $f(z) := 1/\alpha \exp(\alpha z) - 1/\alpha$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Für $w := -1/\alpha$ gilt:

$$|w| = \frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{4}$$

Es ist aber $w \notin f(\mathbb{D})$. Also ist $U_{\frac{1}{4}}(0) \not\subseteq f(\mathbb{D})$. Aus $z_0 := 2\pi\mathrm{i}/\alpha$ folgt $z_0 \in \mathbb{D}$ und $f(z_0) = 0 = f(0)$. Damit ist f nicht schlicht auf $\mathbb{D}$.

Folgerung 11.8:

Sei $f \in H(\mathbb{D})$ und $F \in H(\mathbb{D}^\times)$ sei definiert durch $F(z) := 1/z + f(z)$. Weiter sei F auf $\mathbb{D}^\times$ schlicht. Sind dann w_1 und $w_2 \notin F(\mathbb{D}^\times)$, so gilt $|w_1 - w_2| \leq 4$.

Beweis:

Sei $w_0 := w_2 - w_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $w_0 \neq 0$ annehmen. Wir definieren $\Psi(z) := F(z) - w_1$ mit $z \in \mathbb{D}^\times$. Da $w_1 \notin F(\mathbb{D}^\times)$ ist, gilt $\Psi(z) \neq 0\ \forall\ z \in \mathbb{D}^\times$ und Ψ ist auf $\mathbb{D}^\times$ schlicht. Betrachten wir darüber hinaus $h(z) := 1 + zf(z) - zw_1$ mit $z \in \mathbb{D}$. Dann ist $h(0) = 1$ und $h(z)/z = \Psi(z)\ \forall\ z \in \mathbb{D}^\times$. Aus der Nullstellenfreiheit von Ψ auf $\mathbb{D}^\times$ folgt $z(h) = \emptyset$. Nun setzen wir $g(z) := z/h(z)$. Dann ist $g \in H(\mathbb{D})$ und $g(0) = 0$.

$$g'(z) = \frac{h(z) - zh'(z)}{h(z)^2},\ g'(0) = \frac{h(0)}{h(0)^2} = 1$$

Seien $z,\ w \in \mathbb{D}$ und $z \neq w$. Zu zeigen ist $g(z) \neq g(w)$. Wir nehmen an, dass $g(z) = g(w)$ ist. Aus der Voraussetzung $z \neq w$ folgt $z \neq w \neq 0$. Hieraus folgt $\Psi(z) = \Psi(w)$ und aus der Injektivität von Ψ resultiert $z = w$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also ist $g \in S$. Es ist $w_2 \notin F(\mathbb{D}^\times)$ und hieraus folgt $w_0 \notin \Psi(\mathbb{D}^\times)$. Hieraus folgt wiederum:

$$\frac{1}{w_0} \notin g(\mathbb{D}) \xrightarrow{11.7} \frac{1}{|w_0|} \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |w_0| \leq 4 \qquad \square$$

Bemerkung:

Die Zahl 4 kann nicht verbessert werden. Betrachten wir als Beispiel $F(z) = 1/z + z$, welche injektiv auf $\mathbb{D}^\times$ ist. Als Übung kann man nachrechnen, dass $\mathbb{C} \setminus F(\mathbb{D}^\times) = [-2, 2]\ (\subseteq \mathbb{R})$.

Lemma 11.9:

Sei $f \in S$ und $0 \leq r < 1$. Dann gilt:

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r}{1 - r^2} \right| \leq \frac{4r}{1 - r^2} \text{ für } |z| = r$$

Beweis:

Sei $a \in \mathbb{D}$ und $\varphi(z) := (z + a)/(1 + \bar{a}z)$. Aus Satz 11.1 folgt $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Sei $h(z) := f(\varphi(z)) - f(a)$. Da sowohl f als auch φ auf $\mathbb{D}$ schlicht ist, ist auch h auf $\mathbb{D}$ schlicht. Weiterhin gilt $h(0) = f(\varphi(0)) - f(a) = f(a) - f(a) = 0$

und $h'(0) = (1 - |a|^2) f'(a) := c$ (Nachrechnen!). Es ist $c \neq 0$, denn $f'(a) \neq 0$ wegen der Injektivität von f und $1 - |a|^2 > 0$. Wir setzen $g(z) := 1/ch(z)$ mit $g \in S$. Schauen wir uns die Potenzreihenentwicklung an:

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n \text{ mit } z \in \mathbb{D}$$

Nachrechnen führt auf:

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}(1 - |a|^2)\frac{f''(a)}{f'(a)} - \overline{a}$$

Nach 11.4 ist $|b_2| \leq 2$ und somit:

$$\left| \frac{(1 - |a|^2) f''(a)}{f'(a)} - 2\overline{a} \right| \leq 4$$

Dividiere durch $1 - |a|^2$ und multipliziere mit $|a|$:

$$\left| \frac{a f''(a)}{f'(a)} - \frac{2|a|^2}{1 - |a|^2} \right| \leq \frac{4|a|}{1 - |a|^2}$$

Ist $z \in \mathbb{D}$ und $|z| = r$, so folgt mit $a := z$ die Behauptung. □

3.5 Koebescher Verzerrungssatz

<u>Satz 11.10:</u>

Sei $f \in S$ und $0 \leq r < 1$. Dann gilt:

$$\frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3} \text{ für } |z| \leq r$$

<u>Satz:</u>

1.) Wegen des Minimum-/Maximumprinzips genügt es, die Behauptung für $|z| = r$ zu zeigen $(Z(f') = \emptyset)$. Mit einer geeigneten Rotation sieht man: Es genügt, die Behauptung für $z = r$ zu zeigen. Die Behauptung ist klar für $r = 0$. Sei also $0 < r < 1$. Wir zeigen:

$$\frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq |f'(r)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3}$$

2.) $Z(f') = \emptyset$ und $\mathbb{D}$ einfach zusammenhängend. Damit existiert $h \in H(\mathbb{D})$, so dass $\exp(h) = f'$ auf $\mathbb{D}$. Sei $h(0) = x + \mathrm{i}y$ mit $x,\ y \in \mathbb{R}$. Dann folgt $1 = f'(0) = \exp(h(0)) = \exp(x)\exp(\mathrm{i}y)$ und hieraus wiederum $\exp(\mathrm{i}y) > 0$. Damit ist $\exp(\mathrm{i}y) = 1$, also $x = 0$ und $y = 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $g(z) := h(z) - 2k\pi\mathrm{i}$ und wählen k so, dass $g(0) = 0$ und $\exp(g) = f'$ auf $\mathbb{D}$. Sei darüber hinaus $u := \mathrm{Re}(g)$ und $v := \mathrm{Im}(g)$.

$$f' = \exp(g) = \exp(u)\exp(\mathrm{i}v) \Rightarrow |f'| = \exp(u) \Rightarrow \mathrm{Re}(g) = u = \log|f'| \text{ auf } \mathbb{D}$$

3.) Wir definieren für $x \in [0, r]$:

$$F(x) := \frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{2x}{1 - x^2}$$

Nach dem Lemma 11.9 gilt:

$$|xF(x)| \leq \frac{4x}{1 - x^2} \Rightarrow |F(x)| \leq \frac{4}{1 - x^2}\ \forall\, x \in (0, r] \qquad (*)$$

Aus $f' = \exp(g)$ folgt $f'' = g'\exp(g) = g'f'$ und somit $g' = f''/f'$.

$$F(x) = g'(x) - \frac{2x}{1 - x^2} \Rightarrow \int_0^r F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^r g'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^r \frac{2x}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = g(r) - \underbrace{g(0)}_{=0} + \underbrace{\log(1 - r^2)}_{\in\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\int_0^r F(x)\,\mathrm{d}x\right) = \operatorname{Re}(g(r)) + \log(1-r^2) = \log|f'(r)| + \log(1-r^2) =: \alpha(r)$$

$$\Rightarrow |\alpha(r)| = \left|\operatorname{Re}\left(\int_0^r F(x)\,\mathrm{d}x\right)\right| \le \left|\int_0^r F(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^r |F(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(*)}{\le} \int_0^r \frac{4}{1-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\log(1+r) - 2\log(1-r) =: \beta(r)$$

Also folgt $-\beta(r) \le \alpha(r) \le \beta(r)$. Aus der zweiten Ungleichung resultiert:

$$\alpha(r) = \log|f'(r)| + \log(1-r) + \log(1+r) \le 2\log(1+r) - 2\log(1-r)$$

$$\Rightarrow \log|f'(x)| \le \log(1+r) - 3\log(1-r) = \log\left(\frac{1+r}{(1-r)^3}\right) \Rightarrow |f'(r)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

Analog funktioniert das mit der ersten Ungleichung und man erhält:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(r)|$$ □

3.6 Verzerrungssatz

Satz 11.11:

Sei $f \in S$ und $0 \le r < 1$. Dann gilt $|f(z)| \le r/(1-r)^2$ für $|z| \le r$.

Beweis:

Wieder genügt es, die Behauptung für $z = r \in (0,1)$ zu zeigen. Zu diesem Zweck definieren wir $\gamma(t) := t$ mit $t \in [0, r]$.

$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(r) - f(0) = f(r) \Rightarrow |f(r)| = \left|\int_0^r f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^r |f'(t)|\,\mathrm{d}t \overset{11.10}{\le} \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{r}{(1-r)^2}$$ □

3.7 Maximum- und Minimumprinzip (I)

Satz 12.7:

1.) Sei u: $G \mapsto R$ stetig und habe auf G die Mittelwerteigenschaft. Weiter sei $z_0 \in G$ und $u(z) \le u(z_0)$ $\forall$ $z \in G$ (oder $u(z) \ge u(z_0)$ $\forall$ $z \in G$). Dann ist u auf G konstant.

2.) Sei G beschränkt, $u \in C(\overline{G})$ und u habe auf G die Mittelwerteigenschaft und sei auf G **nicht** konstant. Dann gilt:

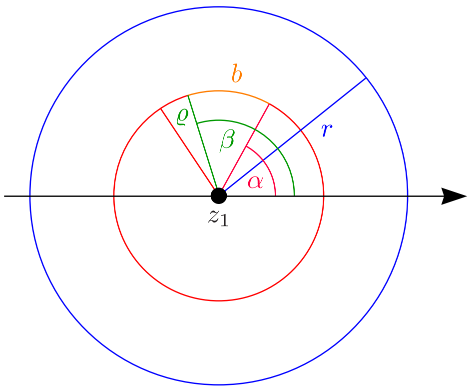
$$\min_{w \in \overline{G}} u(w) < u(z) < \max_{w \in \overline{G}} u(w) \,\forall\, z \in G$$

3.) Punkt (1) gilt für jedes $u \in \operatorname{Har}(G)$ und (2) für jedes nichtkonstante $u \in C(\overline{G}) \cap \operatorname{Har}(G)$.

Beweis:

1.) Wir gehen davon aus, dass bei z_0 ein absolutes Maximum liegt. Sei $A := \{z \in G : u(z) = u(z_0)\}$. Es gilt $A \neq \emptyset$, denn es ist $z_0 \in A$. Sei w ein Häufungspunkt von A mit $w \in G$. Dann existiert eine Folge (w_n) in A mit der Eigenschaft $w_n \mapsto w$. Da $w_n \in A$ ist, gilt $u(w_n) = u(z_0)$. Aus der Stetigkeit von u folgt hiermit $u(w_n) \mapsto u(w)$. Also ist $u(w) = u(z_0)$ und somit $w \in A$.

   Sei $z_1 \in A$. Dann existiert ein $r > 0$ mit $U_r(z_1) \subseteq G$. Sei $z \in U_r(z_1)$. So gilt $z = z_1 + \varrho\exp(\mathrm{i}t_0)$ mit $\varrho \in [0, r)$ und $t_0 \in [0, 2\pi]$. Wir nehmen an, dass $z \notin A$. Also ist $u(z) < u(z_0) = u(z_1)$.



Dann existiert ein Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 2\pi]$ mit $t_0 \in [\alpha, \beta]$ und $u(z_1 + \varrho\exp(it)) < u(z_1)\ \forall\, t \in [\alpha, \beta]$. Nach der Mittelwerteigenschaft gilt

$$2\pi u(z_1) = \int_0^{2\pi} u(z_1 + \varrho\exp(it))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} (\dots) + \int_{\alpha}^{\beta} (\dots) + \int_{\beta}^{2\pi} (\dots) \leq \int_0^{\alpha} u(z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{\beta} u(z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{\beta}^{2\pi} u(z_0)\,\mathrm{d}t$$
$$< \int_0^{2\pi} u(z_0)\,\mathrm{d}t = 2\pi u(z_0) = 2\pi u(z_1)$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. Folglich ist $z \in A$, d.h. $U_r(z_1) \subseteq A$ und A somit offen. Nach dem Hilfssatz ist $A = G$ und daraus ergibt sich die Behauptung. □

2.) folgt aus (1).

3.) folgt aus (1) bzw. (2) und Satz 12.5.

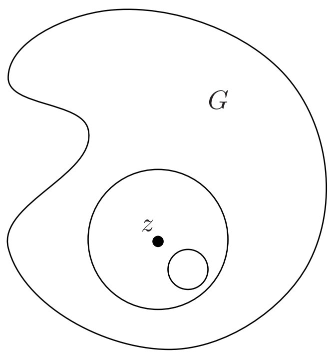
3.8 Identitätssatz für harmonische Funktionen

Satz 12.7:

Sei $u \in \mathrm{Har}(G)$, $z_0 \in G$, $r > 0$, $U_r(z_0) \subseteq G$ und $u = 0$ auf $U_r(z_0)$. Dann ist $u = 0$ auf G.

Beweis:

Wir definieren $A := \{z \in G : \exists \text{ Umgebung } U \subseteq G \text{ von } z :\ u = 0 \text{ auf } U\}$. Nach Voraussetzung ist $z_0 \in A$, also $A \neq \emptyset$.



Nach Konstruktion ist A offen. Sei w ein Häufungspunkt von A mit $w \in G$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(w) \subseteq G$. Da w ein Häufungspunkt von A ist, folgt $U_\varepsilon(w) \cap A \neq \emptyset$. Sei $w_1 \in U_\varepsilon(w) \cap A$, wobei $U_\varepsilon(w) \cap A$ offen ist. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(w_1) \subseteq U_\varepsilon(w) \cap A$. Nach Satz 12.4 existiert ein $f \in H(U_\varepsilon(w))$. Dann ist $\mathrm{Re}(f) = u$ auf $U_\varepsilon(w)$. Aus $U_\delta(w_1) \subseteq A$ folgt $u = 0$ auf $U_\delta(w_1)$ und damit $f(U_\delta(w_1)) \subseteq i\mathbb{R}$. Also gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = ic\ \forall z \in U_\delta(w_1)$. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen liefert $f = ic$ auf $U_\varepsilon(w)$, was $u = 0$ auf $U_\varepsilon(w)$ und $w \in A$ mit sich bringt. Wiederum liefert der Hilfssatz $A = G$ und damit die Behauptung.
□

3.9 Maximum- und Minimumprinzip (II)

Satz 12.8:

Sei $u \in \mathrm{Har}(G)$, $z_0 \in G$, $r > 0$, $U_r(z_0) \subseteq G$ und $u(z) \leq u(z_0)\ \forall\ z \in U_r(z_0)$ (oder $u(z) \geq u(z_0)\ \forall\ z \in U_r(z_0)$). Dann ist u auf G konstant.

Beweis:

Wir definieren $v := u - u(z_0)$. Dann gilt $v(z) \leq 0$ auf $U_r(z_0)$ und $v(z_0) = 0$. Es ist klar, dass $v \in \mathrm{Har}(U_r(z_0))$ ist. Nach Satz 12.6 (1) ist dann $v = 0$ auf $U_r(z_0)$. Nach Satz 12.7 ist $v = 0$ auf G, woraus sich die Behauptung ergibt. □

3.10 Die Integralformel von Schwarz

Satz 12.9:

Sei $0 \in G$, $f \in H(G)$, $R > 0$ und $\overline{U_R(0)} \subseteq G$. Weiter sei $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\exp(\mathrm{i}t) + z}{R\exp(\mathrm{i}t) - z} u(R\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}v(0)\ \forall\, z \in U_R(0)$$

Beweis:

Nach Satz 12.1 sind u, $v \in \mathrm{Har}(G)$. Wir setzen $\gamma(t) := R\exp(\mathrm{i}t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ und unterscheiden zwei Fälle:

- Fall 1: $z = 0$

  Mit der Mittelwerteigenschaft folgt:

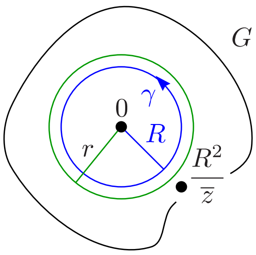
  $$f(0) = u(0) + \mathrm{i}v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}v(0)$$

- Fall 2: $z \in \dot{U}_R(0)$

  Nach der Cauchyschen Integralformel gilt:

  $$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))}{R\exp(\mathrm{i}t) - z} \mathrm{i}R\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))R\exp(\mathrm{i}t)}{R\exp(\mathrm{i}t) - z}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(I)}$$

  Es gilt $R^2/|\overline{z}| = R^2/|z| > R$. Sei $r > 0$ so, dass $R < r < R^2/|\overline{z}|$ und $U_r(0) \subseteq G$.

  Definiere $g\colon U_r(0) \mapsto \mathbb{C}$ durch

  $$g(w) := \frac{f(w)}{w - \frac{R^2}{\overline{z}}}$$

  Dann ist $g \in H(U_r(0))$. Der Cauchysche Integralsatz liefert jetzt:

  $$0 = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))}{R\exp(\mathrm{i}t) - \frac{R^2}{\overline{z}}} \mathrm{i}R\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))\exp(\mathrm{i}t)}{\exp(\mathrm{i}t) - \frac{R}{\overline{z}}} =$$

  $$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))\exp(\mathrm{i}t)\overline{z}}{\overline{z}\exp(\mathrm{i}t) - R}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))\overline{z}}{\overline{z} - R\exp(-\mathrm{i}t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(R\exp(\mathrm{i}t))\overline{z}}{R\exp(\mathrm{i}t) - \overline{z}}\,\mathrm{d}t$$

Durch komplexe Konjugation dieser Gleichung resultiert:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\overline{f(R\exp(\mathrm{i}t))z}}{R\exp(\mathrm{i}t) - z}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(II)}$$

Addition von (I) und (II) führt zu:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{(u(R\exp(\mathrm{i}t)) + \mathrm{i}v(R\exp(\mathrm{i}t9)))R\exp(\mathrm{i}t)}{R\exp(\mathrm{i}t) - z} + \frac{(u(R\exp(\mathrm{i}t)) - \mathrm{i}v(R\exp(\mathrm{i}t))z)}{R\exp(\mathrm{i}t) - z}\right]\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\exp(\mathrm{i}t))[R\exp(\mathrm{i}t) + z]}{R\exp(\mathrm{i}t) - z}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v(R\exp(\mathrm{i}t))[R\exp(\mathrm{i}t) - z]}{R\exp(\mathrm{i}t)z}\,\mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\exp(\mathrm{i}t) + z}{R\exp(\mathrm{i}t) - z}u(R\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(R\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Mit der Mittelwerteigenschaft folgt die Behauptung. □

Definition:

Seien z, $w \in \mathbb{C}$ und $z \neq w$.

$$P(w,z) := \mathrm{Re}\left(\frac{w + \mathrm{i}z}{w - z}\right) = \frac{|w|^2 - |z|^2}{|w - z|^2}$$

$P(w,z)$ wird als **Poissonscher Kern** bezeichnet. Sei $R > 0$, $w = R\exp(\mathrm{i}t)$, $z \in \mathbb{C}$ und $|z| < R$. Dann gilt:

$$P(R\exp(\mathrm{i}t), z) = \mathrm{Re}\left(\frac{R\exp(\mathrm{i}t) + z}{R\exp(\mathrm{i}t) - z}\right)$$

3.11 Poissonsche Integralformel

Satz 12.10:

Sei $0 \in G$, $u \in \mathrm{Har}(G)$, $R > 0$ und $\overline{U_R(0)} \subseteq G$.

1.) $u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(R\exp(\mathrm{i}t), z)u(R\exp(\mathrm{i}t))\,\mathrm{d}t$ für alle $z \in U_R(0)$

2.) $1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(R\exp(\mathrm{i}t, z))\,\mathrm{d}t \;\forall\; R > 0$ und $\forall z$ mit $|z| < R$

Beweis:

1.) Es existiert eine Zahl $\varrho > R$ mit $\overline{U_R(0)} \subseteq U_\varrho(0) \subseteq G$. Nach 12.4 existiert ein $f \in H(U_\varrho(0))$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Re}(f) = u$ auf $U_\varrho(0)$. Die Behauptung folgt jetzt aus 12.9.

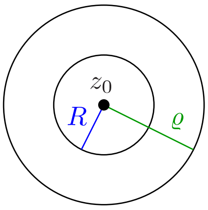
2.) Setze in (1) $G = \mathbb{C}$ und $u = 1$. □

3.12 Harnacksche Ungleichung

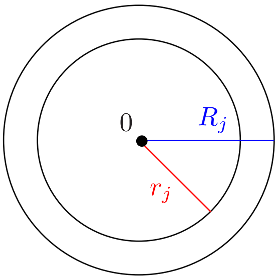
Satz 12.14:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varrho > 0$, $u \in \mathrm{Har}(U_\varrho(z_0))$, $0 < R < \varrho$ und $u \geq 0$ auf $\partial U_R(z_0)$. Ist $z \in U_R(z_0)$ und $r := |z - z_0|$ $(< R)$, so gilt:

$$\frac{R - r}{R + r}u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R + r}{R - r}u(z_0)$$



Beweis:



Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_0 = 0$ und $R = 1$. Also gilt $r = |z| < 1 = R$ und außerdem (was durch Nachrechnen gezeigt werden soll):

$(1+r)^2 \geq |\exp(it) - z|^2 \geq (1-r)^2 \,\forall\, t \in [0, 2\pi]$

Durch Kehrwertbildung und Multiplikation mit $(1-r^2)u(\exp(it))$ ergibt sich:

$$\frac{1-r^2}{(1+r)^2}u(\exp(it)) \leq \frac{1-r^2}{|\exp(it)-z|^2}u(\exp(it)) \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2}u(\exp(it))$$

$$\Rightarrow \frac{1-r}{1+r}u(\exp(it)) \leq P(\exp(it), z)u(\exp(it)) \leq \frac{1+r}{1-r}u(\exp(it))$$

$$\Rightarrow \frac{1-r}{1+r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\exp(it))\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\exp(it), z)u(\exp(it))\,\mathrm{d}t \leq \frac{1+r}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\exp(it))\,\mathrm{d}t$$

Mit der Mittelwerteigenschaft und der Poissonschen Ungleichung (12.10) folgt schließlich

$$\frac{1-r}{1+r}u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+r}{1-r}u(0)$$

und damit die Behauptung. □

3.13 Satz von Harnack

Satz 12.15:

Sei (u_k) eine Folge harmonischer Funktionen $\mathrm{Har}(G)$ mit der Monotonieeigenschaft $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ auf G. Dann gilt entweder

i.) $u_k(z) \mapsto \infty$ für $k \mapsto \infty \ \forall\ z \in G$ oder

ii.) (u_k) konvergiert auf G lokal gleichmäßig.

Beweis:

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_1 \geq 0$ auf G. (Andernfalls betrachte die Folge $(u_k - u_1)$.) Also gilt $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ auf G. Nach dem Monotoniekriterium existiert für jedes $z \in G$ der Grenzwert $u(z) := \lim_{k\mapsto\infty} u_k(z) \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$. Wir definieren zwei Mengen $A := \{z \in G : u(z) < \infty\}$, $B := \{z \in G : u(z) = \infty\}$. Dann ist $G = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$.

i.) Wir zeigen, dass B offen ist. Sei dazu $z_0 \in B$. Es existiert ein $R > 0$ mit $\overline{U_R(z_0)} \subseteq G$. Sei $z \in U_R(z_0)$, $r := |z - z_0|$. Nach 12.14 gilt:

$$\frac{R-r}{R+r}u_k(z_0) \leq u_k(z) \,\forall\, k \in \mathbb{N}$$

Da $z_0 \in B$ ist, folgt $u_k(z) \mapsto \infty$ für $k \mapsto \infty$. Damit resultiert $u(z) = \infty$, also $z \in B$, $U_R(z_0) \subseteq B$. B ist also offen.

ii.) Sei $z_0 \in A$. Es existiert ein $R > 0$ mit $\overline{U_R(z_0)} \subseteq G$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq u_k(z_0) - u_l(z_0) < \varepsilon \; \forall \; k \geq l \geq k_0$. Sei nun $z \in \overline{U_{\frac{R}{2}}(z_0)}$ und $r := |z - z_0|$. Dann gilt $(R + r)/(R - r) \leq 3$. Nach 12.14 ist

$$0 \leq u_k(z) - u_l(z) \leq \frac{R + r}{R - r}(u_k(z_0) - u_l(z_0)) \, \forall \, k \geq l \geq k_0$$

$$0 \leq u_k(z) - u_l(z) < 3\varepsilon$$

Also konvergiert (u_k) auf $\overline{U_{\frac{R}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig. Insbesondere ist $U_{\frac{R}{2}}(z_0) \subseteq A$, womit A offen ist. Weil G ein Gebiet ist, gilt entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Ist $A = \emptyset$, so ergibt sich $B = G$ und daraus resultiert (i). Ist $B = \emptyset$, folgt $A = G$, womit (u_k) auf G gleichmäßig konvergiert. $\square$

Kapitel 4

Konforme Äquivalenz von Ringgebieten

Bezeichnung:

Für $j = 1, 2$ sei $0 < r_j < R_j < \infty$ und $A_j := \{z \in \mathbb{C} : r_j < |z| < R_j\}$.

Erinnerung:

$A_1 \sim A_2$ (konform äquivalent) genau dann, wenn ein injektives $f \in H(A_1)$ existiert mit $f(A_1) = A_2$. Das Ziel dieses Paragraphen ist, herzuleiten, dass $A_1 \sim A_2$ genau dann, wenn $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Satz 13.1:

Ist $R_1/r_1 = R_2/r_2$, so gilt $A_1 \sim A_2$.

Beweis:

Wir setzen $\lambda := r_2/r_1$ und betrachten $f(z) = \lambda z$. Es ist klar, dass f sowohl $\in H(A_1)$ als auch auf A_1 injektiv ist. Durch Nachrechnen findet man $f(A_1) = A_2$. □

Lemma 13.2:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \notin G$, $f \in H(G)$, $Z(f) = \emptyset$ und $\alpha \geq 1$. Darüber hinaus gelte die Bedingung $|f(z)| = |z|^\alpha \ \forall\, z \in G$. Dann gilt:

1.) $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{\alpha}{z} \ \forall\, z \in G$

2.) Ist $R_1 > 1$, $G := A(1, R_1)$ und f auf G injektiv, so existiert ein $c \in \partial\mathbb{D}$ mit der Eigenschaft $f(z) = cz$. Insbesondere ist $\alpha = 1$.

Beweis:

1.) Stets sei $z = x + \mathrm{i}y \in G$ mit $x, y \in R$, $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$. Es gilt $|f(z)|^2 = (|z|^2)^\alpha$. Also ist $u^2(z) + v^2(z) = (x^2 + y^2)^\alpha$ (I). Differenzieren wir Gleichung (I) nach x bzw. y, so erhalten wir:

$$2uu_x + 2vv_x = \alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2x \Rightarrow uu_x + vv_x = \alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}x \qquad \text{(II)}$$

$$2uu_y + 2vv_y = \alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1} \cdot 2y \Rightarrow uu_y + vv_y = \alpha(x^2+y^2)^{\alpha-1}y \qquad \text{(III)}$$

Es ist $f' = u_x + \mathrm{i}u_y$ und somit:

$$\frac{f'}{f} = \frac{u_x + \mathrm{i}v_x}{u + \mathrm{i}v} = \frac{(u_x + \mathrm{i}v_x)(u - \mathrm{i}v)}{u^2 + v^2} \overset{\text{(I)}}{=} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}(uu_x + vv_x + \mathrm{i}(uv_x - vu_x))$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}(uu_x + vv_x) \overset{\text{(II)}}{=} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\alpha x(x^2y^2)^{\alpha-1} = \frac{\alpha x}{|z|^2}$$

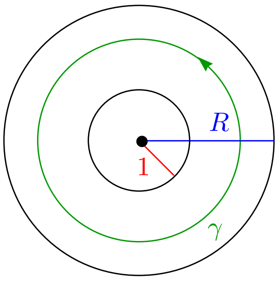
Analog mit (III) und den Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen gilt:

$$\mathrm{Im}\left(\frac{f'}{f}\right) = -\frac{\alpha y}{|z|^2}$$

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich schlussendlich:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\alpha\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\alpha}{z}$$

2.) Sei $1 < r < R_1$, $\gamma(t) = r\exp(\mathrm{i}t)$ und $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$ mit $t \in [0, 2\pi]$.



Die Umlaufzahl ist gegeben durch:

$$n(\Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma \frac{\alpha}{z}\,\mathrm{d}z =$$
$$= \alpha\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \alpha n(\gamma, 0) = \alpha$$

Nach Funktionentheorie I ist $n(\Gamma, 0) = \alpha \in \mathbb{Z}$. Da $\alpha \geq 1$ ist, folgt $\alpha \in \mathbb{N}$. Sei nun $g(z) := f(z)/z^\alpha$ mit $z \in G$.

$$g'(z) = \frac{f'(z)z^\alpha - \alpha z^{\alpha-1}f(z)}{z^{2\alpha}} \overset{(1)}{=} 0$$

Also existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = cz^\alpha$, da $g(z)$ konstant sein muss.

$$|z|^\alpha = |f(z)| = |c||z|^\alpha \Rightarrow |c| = 1$$

Wir nehmen an, dass $\alpha \geq 2$ ist. Sei $z_0 \in G$. Dann ist $z_0 \neq 0$ und es existieren w_1, $w_2 \in \mathbb{C}$ mit $w_1^\alpha = z_0 = w_2^\alpha$ und $w_1 \neq w_2$.

$$|z_0| > 1 \Rightarrow |z_0|^{\frac{1}{\alpha}} > 1 \Rightarrow |w_j| > 1 \text{ mit } j = 1, 2$$

$$|w_j| = |z_0|^{\frac{1}{\alpha}} < R_1^{\frac{1}{\alpha}} \leq R_1$$

Dann ist $R_1 > 1$ für $j = 1, 2$ und somit w_1, $w_2 \in G$. Hieraus ergibt sich $f(w_1) = cw_1^\alpha = cw_2^\alpha = f(w_2)$. Da f injektiv ist, muss $w_1 = w_2$ sein. Dieser Widerspruch zeigt, dass $\alpha = 1$ ist. $\square$

4.1 Nachtrag zu Kapitel 13

Neufassung von 13.4:

Sei $1 < R_1 \leq R_2$, $A_j := A(1, R_j)$ für $j = 1, 2$ und f sei eine konforme Abbildung von A_1 und A_2. Dann gilt:

1.) $R_1 = R_2$ (also $A_1 = A_2$)

2.) Es ist $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$ oder $f(z) = c/z$ mit $|c| = R_1$ $(= R_2)$.

Beweis:

Wir wählen $r := \sqrt{R_2}$. Weiterhin sei $K := \partial U_r(0) \subseteq A_2$, $A(1, 1+\varepsilon)$ und $V := f(A(1, 1+\varepsilon))$ seien wie im „alten Beweis“ von 13.4. Dann ist $V \subseteq A(1, r)$ oder $V \subseteq A(r, R_2)$.

a.) Fall 1: $V \subseteq A(1, r)$

Der „alte Beweis“ liefert $R_1 = R_2$ und $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$.

b.) Fall 2: $V \subseteq A(r, R_2)$

Wir setzen $g(z) = R_2/f(z)$ mit $z \in A_1$. Da f sowohl holomorph als auch injektiv ist, gilt das auch für g. Durch Nachrechnen kann gezeigt werden, dass g eine konforme Abbildung von A_1 auf A_2 ist. Sei nun $\widetilde{V} := g(A(1, 1+\varepsilon))$. Die beiden Eigenschaften $V \subseteq A(r, R_2)$ und $r = \sqrt{R_2}$ liefern $\widetilde{V} \subseteq A(1, r)$ (Nachrechnen!). Die Anwendung von Fall 1 auf g liefert $R_1 = R_2$ und $g(z) = \widetilde{c}z$ mit $|\widetilde{c}| = 1$. Also gilt $\widetilde{c}z = R_2/f(z)$ und somit:

$$f(z) = \frac{R_2}{\widetilde{c}} \frac{1}{z} = \frac{c}{z} \text{ mit } c = \frac{R_2}{\widetilde{c}} \qquad \square$$

Neufassung von 13.5:

Für $j = 1, 2$ sei $0 < r_j < R_j$ und $A_j := A(r_j, R_j)$. f sei eine konforme Abbildung von A_1 auf A_2. Dann gilt:

1.) $R_1/r_1 = R_2/r_2$

2.) Es ist $f(z) = cz$ mit $|c| = r_2/r_1$ oder $f(z) = c/z$ mit $|c| = r_1R_2$ $(= r_2R_1)$.

Beweis:

Wir definieren zwei neue Kreisringe $B_j := A(1, R_j/r_j)$ mit $j = 1, 2$ und setzen $g(z) = 1/r_2 f(r, z)$ mit $z \in B_1$. Nach Voraussetzung ist g eine konforme Abbildung von B_1 auf B_2. Aus 13.4 ergibt sich $R_1/r_1 = R_2/r_2$ und $g(z) = cz$ mit $|c| = 1$ oder $g(z) = c/z$ mit $|c| = R_1/r_1$. Hieraus folgt ach (2). $\square$

4.2 Der Satz von Mittag-Lefter

Sei (b_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $|b_n| \mapsto \infty$ für $n \mapsto \infty$ und $b_j \neq b_k$ für $j \neq k$. (p_n) sei eine Folge in $\mathcal{P}_0$ und $h_n(z) := p_1(z - b_n)^{-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in M(\mathbb{C})$, welches genau in den Punkten b_n Pole mit den Hauptteilen h_n hat. Jedes solche f hat die Gestalt

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (h_n - q_n) + g$$

wobei $g \in H(\mathbb{C})$ und die $q_n \in \mathcal{P}$ geeignet zu wählen sind. Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(h_n - q_n)$ konvergiert auf $\mathbb{C} \setminus \{b_1, b_2, \ldots\}$ lokal gleichmäßig.

Bemerkung:

Die q_n heißen konvergenzerzeugende Polynome, weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ im allgemeinen nicht konvergiert.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|b_1| \leq |b_2| \leq |b_3| \leq \ldots$ und $b_1 \neq 0$. Wir setzen $c_n := |b_n|/2$, also $0 < c_1 \leq c_2 \leq \ldots$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion h_n ist $\in H(\mathbb{C} \setminus \{b_n\})$, also $h_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots$ für $|z| < |b_n|$. Diese Potenzreihe konvergiert für $|z| \leq c_n$ gleichmäßig. Damit existiert ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$|h_n(z) - \underbrace{(a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \ldots + a_{k_n}^{(k)} z^{k_n})}_{=:q_n(z)}| \leq \frac{1}{2^n} \text{ für } |z| \leq c_n$$

Also existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $q_n \in \mathcal{P}$ mit $|h_n - q_n| \leq 1/2^n$ auf $\overline{U_{c_n}(0)}$. Betrachte die Reihe $f_0 := \sum_{n=1}^{\infty}(h_n - q_n)$. Sei $R > 0$. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $c_m > R$ ist. Sei $n \geq m$ und $|z| \leq R$. Dann ist $|z| < c_n$, also

$$|h_n(z) - q_n(z)| \leq \frac{1}{2^n}$$

Hieraus ergibt sich, dass die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty}(h_k - q_k)$ auf $\overline{U_R(0)}$ gleichmäßig konvergiert. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - q_n)$ gleichmäßig auf $\overline{U_R(0)} \setminus \{b_1, b_2, \ldots\}$. Da $R > 0$ beliebig, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty}(h_n - q_n)$ lokal gleichmäßig auf $\mathbb{C} \setminus \{b_1, b_2, \ldots\}$ und der Konvergenzsatz von Weierstraß liefert $f_0 \in M(\mathbb{C})$; also leistet f_0 das Gewünschte. Sei $f \in M(\mathbb{C})$ eine weitere Funktion, die das gewünschte leistet. Dann ist $f - f_0 \in H(\mathbb{C})$, da f und f_0 an den gleichen Stellen Pole hat und der Hauptteil derselbe ist. Aus $g := f - f_0$ ergibt sich $f = f_0 + g$. $\square$

Kapitel 5

Unendliche Produkte

Definition:

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $p_n := (1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)$ mit $n\in\mathbb{N}$. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ ist ein anderes Symbol für die Folge (p_n). $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ **konvergiert** genau dann, wenn (p_n) konvergent ist. In diesem Falle schreibt man:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) := p := \lim_{n\mapsto\infty} p_n$$

Lemma 15.1:

Seien (a_n) und (p_n) wie oben, $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ sei konvergent und $p := \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \neq 0$. Dann gilt $a_n \mapsto 0$ für $n\mapsto\infty$.

Beweis:

Wir können $1+a_{n+1}$ in der Form p_{n+1}/p_n schreiben. Da die Folge konvergiert, strebt p_{n+1}/p_n gegen $p/p = 1$ und damit gilt $a_n \mapsto 0$ □

Lemma 15.2:

(a_n) und (p_n) seien wie oben und es sei $P_n := (1+|a_1|)\cdot(1+|a_2|)\cdot\ldots\cdot(1+|a_n|)$ für $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:

1.) $P_n \le \exp(|a_1|+\ldots+|a_n|)\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

2.) Es gilt $|p_n-1| = P_n - 1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Beweis:

1.) Für $x\ge 0$ gilt:

$$\exp(x) = 1x+\frac{x^2}{2}+\ldots \ge 1+x \Rightarrow 1+|a_j| \le \exp(|a_j|) \Rightarrow \prod_{j=1}^{n}(1+|a_j|) \le \prod_{j=1}^{n}\exp(|a_j|) = \exp(|a_1|+\ldots+|a_n|)$$

2.) Allgemein gilt

$(p_n-1)(1+a_{n+1})+a_{n+1} = p_n(1+a_{n+1})-(1+a_{n+1})+a_{n+1} = p_{n+1}-1$

und analog

$(P_n-1)(1+|a_{n+1}|)+|a_{n+1}| = P_{n+1}-1$

Wir führen den restlichen Beweis mit vollständiger Induktion.

a.) Induktionsanfang $n=1$. $|p_1-1| = |a_1| = P_1 - 1$

b.) Induktionsvoraussetzung: Sei $n\in\mathbb{N}$ und $p_n - 1| \le P_n - 1$.

c.) Induktionsschluss:

$$|P_{n+1}-1| = |(P_n-1)(1+a_{n+1})+a_{n+1}| \le |P_n-1|(1+|a_{n+1}|)+|a_{n+1}| \overset{\text{I.V.}}{\le}$$
$$\overset{\text{I.V.}}{\le} (P_n-1)(1+|a_{n+1}|)+|a_{n+1}| = P_{n+1}-1$$

□

Definition:

Sei $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{C}$ und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : D \mapsto \mathbb{C}$. Wir setzen

$P_n(z) := (1 + f_1(z)) \cdot (1 + f_2(z)) \cdot \ldots \cdot (1 + f_n(z))$ mit $n \in \mathbb{N}$, $z \in D$

$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)$ heißt auf D [lokal] gleichmäßig konvergent genau dann, wenn (p_n) auf D [lokal] gleichmäßig konvergiert.

5.1 der Produktsatz von Weierstraß (I)

Sei z_n eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $|z_n| \mapsto \infty$ für $n \mapsto \infty$. Des weiteren sei (p_n) eine Folge in $\mathbb{N}_0$ so, dass $\sum_{n=1}^{\infty}(R/|p_n|)^{1+p_n}$ konvergiert für alle $R > 0$ (vergleiche 16.2). Dann konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/z_n)$ auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig. Für $f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(z/z_n)$ gilt:

1.) Es ist $f \in H(\mathbb{C})$.

2.) Es gilt $Z(f) = \{z_1, z_2, \ldots\}$.

3.) Kommt z_j in (z_n) k_j-mal vor, so ist $\operatorname{ord}_{z_j}(f) = k_j$.

Bemerkung:

Es gilt:

$$E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\varphi_n(z) \text{ mit } \varphi_n(z) = \exp\left(\frac{z}{z_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n}\right)$$

Im allgemeinen wir $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n)$ nicht konvergieren. Daher bezeichnet man die $\varphi_n(z)$ auch als „konvergenzerzeugende" Faktoren.

Beweis:

Sei $R > 0$. Wegen 15.3 ist nur zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{p_n}(z/z_n)|$ $(*)$ auf $\overline{U_R(0)}$ gleichmäßig konvergiert. Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|z_n| \geq 2R$ für alle $n \geq n_0$. Hieraus folgt $R/|z_n| \leq 1/2$ für alle $n \geq n_0$. Sei $z \in \overline{U_R(0)}$:

$$\frac{|z|}{|z_n|} \leq \frac{R}{|z_n|} \leq \frac{1}{2} \leq 1 \, \forall \, n \geq n_0$$

Hieraus folgt mit 16.1:

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left(\frac{|z|}{|z_n|}\right)^{1+p_n} \leq \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{1+p_n} =: \alpha_n \, \forall \, n \geq n_0$$

Nach Voraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ konvergent. Nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß ergibt sich hieraus $(*)$. □

Beispiele:

1.) Wir suchen eine ganze Funktion, die Nullstellen in den natürlichen Zahlen aufweist. Also sei $z_n; = n \in \mathbb{N}$. Hier kann $p_n = 1$ gewählt werden, weil

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{1+p_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{n^2}$$

für alle $R > 0$ konvergiert. Dann gilt:

$$E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)\exp\left(\frac{z}{n}\right)$$

Also gilt für

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n}\right)\exp\left(\frac{z}{n}\right)$$

$f \in H(\mathbb{C})$ und $Z(f) = \mathbb{N}$.

2.) Sei $z_n := n^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

Hier kann $p_n \equiv 0$ gewählt werden, weil $\sum_{n=1}^{\infty}(R/|z_n|)^{1+p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} R/n^2$ für alle $R > 0$ konvergiert. Dann ergibt sich:

$$E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \text{ und } f(z) := \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

Dann ist $f \in H(\mathbb{C})$ und die Nullstellenmenge ist gegeben durch $Z(f) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkung:

Die ganzen Funktion $f(z)$ sind natürlich nicht eindeutig bestimmt, da es eine gewisse Freiheit in der Wahl von p_n gibt.

5.2 Produktsatz von Weierstraß (II)

Sei (α_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $|\alpha_n| \mapsto \infty$ für $n \mapsto \infty$ und $\alpha_j \neq \alpha_k$ für $j \neq k$. Weiterhin sei (m_n) eine Folge in $\mathbb{N}$. Dann existiert ein $f \in H(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $Z(f) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ und $\operatorname{ord}_{\alpha_n}(f) = m_n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Sei $A := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$. Wir unterschieden zwei Fälle:

1.) Sei $0 \notin A$.

$$(z_n) := (\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m_1\text{-mal}}, \underbrace{(\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{m_2\text{-mal}}, \underbrace{\alpha_3, \ldots, \alpha_3}_{m_3\text{-mal}}, \ldots)$$

Zu (z_n) wähle (p_n) wie in 16.3. Aus 16.3 ergibt sich, dass

$$f(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

das Verlangte leistet.

2.) Es sei $0 \in A$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $\alpha_1 = 0$.

$$(z_n) := (\underbrace{\alpha_2, \ldots, \alpha_2}_{m_2\text{-mal}}, \underbrace{\alpha_3, \ldots, \alpha_3}_{m_3\text{-mal}}, \ldots)$$

Zu (z_n) wähle (p_n) wie in 16.3. Wegen 16.3 leistet

$$f(z) := z^{m_1} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

das Gewünschte. $\square$

5.3 Faktorisierungssatz von Weierstraß

Sei $f \in H(\mathbb{C})$, $k := \operatorname{ord}_0(f) \geq 0$ und es sei $Z(f) \setminus \{0\} = \{z_1, z_2, z_3, \ldots\}$ abzählbar unendlich (insbesondere $|z_n| \mapsto \infty$). Sei $m_j := \operatorname{ord}_{z_j}(f)$ $(j \in \mathbb{N})$ und jedes z_j komme in (z_n) genau m_j-mal vor. Dann existiert eine Folge (p_n) in $\mathbb{N}_0$ und ein $g \in H(\mathbb{C})$:

$$f(z) = z^k \exp(g(z)) \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \ \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Das Produkt konvergiert auf $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig.

Beweis:

Zu (z_n) wähle (p_n) wie in 16.3.

$$P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

Nach 16.3 ist $p \in H(\mathbb{C})$. Außerdem ist $Z(p) = Z(f) \setminus \{0\}$ und $\operatorname{ord}_{z_j}(P) = \operatorname{ord}_{z_j}(f)\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Setze:

$$G(z) := \frac{f(z)}{z^k P(z)}$$

Dann ist $G \in H(\mathbb{C})$ und $Z(G) = \emptyset$. $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend. Damit existiert ein $g \in H(\mathbb{C})$ mit der Eigenschaft $G = \exp(g)$ auf $\mathbb{C}$. Dann ist $f(z) = z^k \exp(g(z))P(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$. Also ist $f_1 = \exp(g(z))f_2$. □

Sätzchen:

Seien $f_1,\ f_2 \in H(\mathbb{C})$, $Z(f_1) = Z(f_2)$, $\operatorname{ord}_{z_0}(f_1) = \operatorname{ord}_{z_0}(f_2)$ für alle $z_0 \in Z(f_1)$. Dann ist $f_1/f_2 \in H(\mathbb{C})$.

Beweis:

Es gilt $f_1/f_2 \in M(\mathbb{C})$. Die Menge der Pole von f_1/f_2 ist $\subseteq Z(f_2)$. Sei $z_0 \in Z(f_1) = Z(f_2)$. Dann gilt

$$f_1(z) = (z - z_0)^m g_1(z) \text{ und } f_2(z) = (z - z_0)^m g_2(z)$$

wobei $m = \operatorname{ord}_{z_0}(f_1) = \operatorname{ord}_{z_0}(f_2)$. Weiterhin ist $g_1,\ g_2 \in H(\mathbb{C})$ und $g_1(z_0) \neq 0 \neq g_2(z_0)$.

$$\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$$

Damit ist z_0 eine hebbare Singularität von f_1/f_2. Also ist $f_1/f_2 \in H(\mathbb{C})$ und $Z(f_1/f_2) = \emptyset$. Es existiert damit $g \in H(\mathbb{C})$ mit $f_1/f_2 = \exp(g)$. □

Satz 16.6:

Es gilt $f \in M(\mathbb{C})$ genau dann, wenn Funktionen g und $h \in H(\mathbb{C})$ existieren mit $f = g/h$ mit $h \not\equiv 0$.

Beweis:

1.) „$\Leftarrow$“: Klar

2.) „$\Rightarrow$“:

Wir setzen A gleich der Menge der Pole von f. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $A \neq \emptyset$. Für jedes $a \in A$ sei $m(a)$ die Ordnung des Pols a von f. Es existiert eine Funktion $h \in H(\mathbb{C})$ mit $Z(h) = A$ und $\operatorname{ord}_a(h) = m(a)$. Ist A endlich, so ist dies klar. Im Falle, dass A abzählbar unendlich ist, so folgt dies aus 16.4. Sei $a \in A$. Dann gibt es ein $r > 0$ $(r = r(a))$ mit der Eigenschaft

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{=:\alpha(z)} + \sum_{n=1}^{m(a)} \frac{b_n}{(z-a)^n}\ \forall\ z \in \dot{U}_r(a)$$

$$\beta(z) := (z-a)^{m(a)} \sum_{n=1}^{m(a)} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

Dann ist $\alpha \in H(U_r(a))$ und $\beta \in H(\mathbb{C})$. Weiter gilt $h(z) = (z-a)^{m(a)}\gamma(z)$ mit $\gamma \in H(\mathbb{C})$ und $\gamma(a) \neq 0$.

$$\Rightarrow h(z)f(z) = (z-a)^{m(a)}\gamma(z)\alpha(z) + \beta(z)\gamma(z)$$

Hieraus resultiert, dass a eine hebbare Singularität von $h \cdot f$ ist. Da $a \in A$ beliebig ist, gilt $g := h \cdot f \in H(\mathbb{C})$. □

Satz 17.3:

Sei $R > 0$, $f \in H(U_R(0))$, $f(0) \neq 0$ für $0 < r < R$ und $Z(f) \cap \overline{U_r(0)} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |f(r\exp(it))| \, \mathrm{d}t = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{r}{|a_k|} \right)$$

Beweis:

Wir führen zwei Mengen ein, nämlich $A := \{k \in \{1, \dots, n\} : |a_k| < r\}$ und $B := \{k \in \{, \dots, n\} : |a_k| = r\}$. Möglich ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Wir vereinbaren $\prod_{k \in \emptyset} := 1$, um uns eine Fallunterscheidung zu ersparen. Definiere weiterhin $h\colon U_R(0) \mapsto \mathbb{C}$ durch

$$h(z) := f(z) \prod_{k \in A} \frac{r^2 - \overline{a_k} z}{r(a_k - z)} \prod_{k \in B} \frac{a_k}{a_k - z}$$

Die Vereinbarung liefert, dass $h \in H(U_R(0))$. Sei $z_0 \in \overline{U_r(0)}$ und $h(z_0) = 0$. Dann existiert ein $k \in A$, so dass $r^2 - \overline{a_k} z_0 = 0$ bzw. $z_0 = r^2/\overline{a_k}$ ist. Somit ist $|z_0| = r^2/|\overline{a_k}| > r$, was ein Widerspruch ist. Also ist $Z(h) \cap \overline{U_r(0)} = \emptyset$. Aus 17.2 folgt dann:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log |h(r\exp(it))| \, \mathrm{d}t = \log |h(0)| \qquad \text{(I)}$$

Schauen wir uns nun $|h(0)|$ an:

$$|h(0)| = |f(0)| \prod_{k \in A} \frac{r}{|a_k|} = |f(0)| \prod_{k \in A} \frac{r}{|a_k|} \cdot 1 = |f(0)| \prod_{k \in A} \frac{r}{|a_k|} \prod_{k \in B} \frac{r}{|a_k|} = |f(0)| \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|a_k|}$$

Somit folgt:

$$\log |h(0)| = \log |f(0)| + \sum_{k=1}^{n} \log \left(\frac{r}{|a_k|} \right) \qquad \text{(II)}$$

Wegen (I) und (II) ist zu zeigen:

$$\int\limits_0^{2\pi} \log |h(r\exp(it))| \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} \log |f(r\exp(it))| \, \mathrm{d}t$$

Sei $z \in \partial U_r(0)$, also $z = r\exp(it)$. Für $k \in A$ gilt (nachrechnen):

$$\left| \frac{r^2 - \overline{a_k} z}{r(a_k - z)} \right| = 1 \qquad (*)$$

(Dies kann unter Verwendung von $T(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ mit $T(z) = \lambda(z-a)/(1-\overline{a}z)$ ($a \in \mathbb{D}$, $|\lambda| = 1$) gezeigt werden.)
Für $k \in B$ ist $|a_k| = r$, also $a_k = r\exp(it_k)$. Dann gilt:

$$\frac{|a_k|}{|a_k - z|} = \frac{|a_k|}{|a_k| \left| 1 - \frac{z}{a_k} \right|} = |1 - \exp(i(t - t_k))|^{-1}$$

$$\Rightarrow |h(r\exp(it))| = |f(r\exp(it))| \prod_{k \in B} |1 - \exp(i(t - t_k))|^{-1}$$

$$\Rightarrow \log |h(r\exp(it))| = \log |f(r\exp(it))| - \sum_{k \in B} \log |1 - \exp(i(t - t_k))|$$

Durch Integration und 17.1 (3) resultiert die Formel von Jensen.
Zu guter letzt zeigen wir noch Formel (*):

$$\frac{r^2 - \overline{a_k} z}{r(a_k - z)} = \frac{r\left(r - \overline{a_k}\frac{z}{r}\right)}{r(a_k - z)} = \frac{r - \overline{a_k}\frac{z}{r}}{a_k - z} = \frac{1 - \frac{\overline{a_k}}{r} \cdot \frac{z}{r}}{\frac{a_k}{r} - \frac{z}{r}} = \frac{1 - \overline{b_k} w}{b_k - w} = \left(\frac{b_k - w}{1 - \overline{b_k} w} \right)^{-1} \quad \text{mit } b_k := a_k/r,\ w := z/r$$

Es gilt $|b_k| < 1$ und $|w| = 1$.

$$T(w) := \frac{b_k - w}{1 - \overline{b_k} w}$$

ist ein Automorphimus von $\mathbb{D}$, also $T(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Also gilt $|b_k - w|/|1 - \overline{b_k} w| = 1$. □

Definition:

Sei $R > 0$ und $f \in H(U_R(0))$. Für $0 < r < R$ sei $M(r,f) := \max_{|z|=r} |f(z)|$ und $n(r,f)$ die Anzahl der Nullstellen von f in $\overline{U_r(0)}$ (gezählt mit Vielfachheiten!).

Bemerkungen:

1.) Aus dem Maximumprinzip folgt $M(r,f) = \max_{|z|\leq r} |f(z)|$. Dann ist die Abbildung $r \mapsto M(r,f)$ wachsend auf $(0,R)$.

2.) Sei $f \in H(\mathbb{C})$, also $f \in H(U_R(0))$ für alle $R > 0$. Bemerkung (1) liefert dann, dass $L := \lim_{r\mapsto\infty} M(r,f)$ existiert und $\in [0,\infty) \cup \{\infty\}$. Der Satz von Liouville zeigt, dass $L < 0$ ist genau dann. wenn f konstant ist.

5.4 Ungleichung von Jensen

Es gelten dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in 17.3.

Satz 17.4:

Es besteht ein Zusammenhang zwischen den Wachstumseigenschaften, der Lage und Beträge der Nullstellen der Funktion f:

$$|f(0)| \prod_{k=1}^{n(r,f)} \frac{r}{|a_k|} \leq M(r,f) \, \forall \, r \in (0,R)$$

Beweis:

Wir gehen aus von der Formel von Jensen:

$$\log|f(0)| + \sum_{k=1}^{n(r,f)} \log\left(\frac{r}{|a_k|}\right) \overset{17.3}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(r\exp(it))| \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(M(r,f)) \, \mathrm{d}t = \log(M(r,f)) \qquad \square$$

Lemma 17.5:

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, es sei $c > 0$ ud es gelte $\prod_{j=1}^k |a_j| \geq c \; \forall \; k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{n=1}^\infty (1 - |a_n|)$ konvergent.

Beweis:

Sei $b_j := 1 - |a_j| > 0$ $(j \in \mathbb{N})$, $s_k := b_1 + \ldots + b_k$ und $p_k := \prod_{j=1}^k |a_j| = \prod_{j=1}^k (1 - b_j)$ für $k \in \mathbb{N}$. Es ist $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq \ldots \geq c > 0$. Es existiert damit ein $p := \lim_{k\mapsto\infty} p_k$ mit $p_k \geq p \geq c > 0$. Insbesondere ist $p \neq 0$. Aus 15.2 ergibt sich $0 \leq p_k \leq \exp(-s_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen nun an, dass $\sum_{n=1}^\infty (1 - |a_k|)$ divergent ist. Dann gilt $s_k \mapsto \infty$ und somit $\exp(-s_k) \mapsto 0$ und somit $p_k \mapsto 0$, also $p = 0$, was ein Widerspruch darstellt. $\square$

Satz 17.6:

Sei $f \in H(\mathbb{D})$ beschränkt und $\not\equiv 0$. f habe in den abzählbar unendlich vielen Punkten $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{D}$ Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten). Dann ist $\sum_{n=1}^\infty (1 - |a_n|)$ konvergent.

Beispiel:

Sei $a_n = 1 - 1/n$, $1 - |a_n| = 1/n$. Es gilt also **kein** $f \not\equiv 0 \in H(\mathbb{D})$, welches beschränkt ist mit $\{a_1, a_2, \ldots\} \subseteq Z(f)$.

Beweis:

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(0) \neq 0$. (Andernfalls betrachte $g(z) := f(z)/z^m$ mit $m = \mathrm{ord}_0(f)$.) Außerdem nehmen wir an, dass $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots$ ist. Da f beschränkt ist, gibt es ein $\gamma > 0$ mit $M(r,f) \leq \gamma$

für alle $r \in (0,1)$. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. $Z(f)$ ist unendlich, womit ein $r_0 \in (0,1)$ existiert mit $n(r,f) > k$. Sei $r \geq r_0$. Dann ist $n(r,f) \geq n(r_0,f)$. Setzen wir $N := n(r,f)$, so resultiert unter Verwendung von 17.4:

$$|f(0)| \prod_{j=1}^{N} \frac{r}{|a_j|} \leq M(r,f) \leq \gamma$$

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{r}{|a_j|} = \prod_{j=1}^{k} \frac{r}{|a_j|} \underbrace{\prod_{j=k+1}^{N} \frac{r}{|a_j|}}_{\geq 1} \geq \prod_{j=1}^{k} \frac{r}{|a_j|} \Rightarrow |f(0)| \prod_{j=1}^{k} \frac{r}{|a_j|} \leq |f(0)| \prod_{j=1}^{N} \frac{r}{|a_j|} \leq \gamma$$

$$\Rightarrow |f(0)| r^k \Big(\prod_{j=1}^{k} |a_j|\Big)^{-1} \leq \gamma \overset{r \mapsto 1}{\Rightarrow} |f(0)| \Big(\prod_{j=1}^{k} |a_j|\Big)^{-1} \leq \gamma \Rightarrow \prod_{j=1}^{k} |a_j| \geq \frac{|f(0)|}{\gamma} =: c$$

Aus 17.5 folgt die Behauptung. □

Satz 17.7:

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ konvergent. Wir definieren das sogenannte Blaschkeprodukt durch:

$$B(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \cdot \frac{|a_n|}{a_n}$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

1.) Das Produkt konvergiert auf $\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig.

2.) $B \in H(\mathbb{D})$

3.) $Z(B) = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
Kommt darüber hinaus a_j in (a_n) m_j-mal vor, so ist $\mathrm{ord}_{a_j}(B) = m_j$.

4.) Es gilt $|B(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Beweis:

Wir definieren:

$$f_n(z) := \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \cdot \frac{|a_n|}{a_n}$$

Es gilt $f_n \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Sei $0 < r < 1$ und $z \in \overline{U_r(0)}$. Durch Nachrechnen folgt:

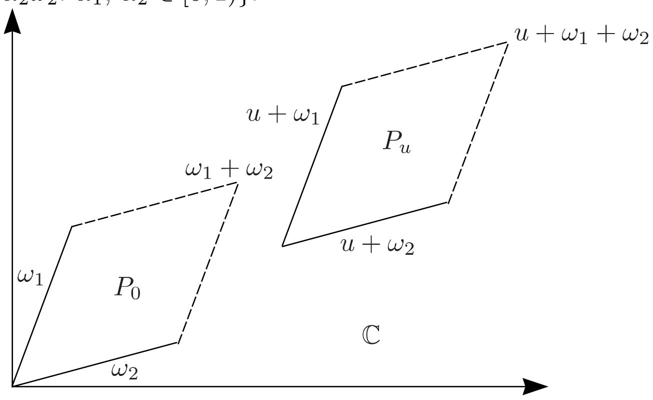
$$|1 - f_n(z)| \leq \frac{1+r}{1-r}(1 - |a_n|) \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Das Majorantenkriterium liefert, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ auf $\overline{U_r(0)}$ gleichmäßig konvergiert. $0 < r < 1$ war beliebig, was bedeutet, dass $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n|$ auf $\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Aus 15.3 folgen jetzt (1), (2) und (3). Punkt (4) ergibt sich daraus, dass $|f_n(z)| \leq 1 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$ und $\forall\; z \in \mathbb{D}$. Deshalb gilt $|B(z)| \leq 1 \;\forall\; z \in \mathbb{D}$. □

Kapitel 6

Elliptische Funktionen

In diesem Paragraphen seien ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ und $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Eine Funktion $f \in M(\mathbb{C})$ heißt bezüglich Ω elliptisch genau dann, wenn $\Omega \subseteq \Omega(f)$. In diesem Falle schreibt man $f \in K(\Omega)$. Beachte: Konstante Funktionen sind elliptisch.
Zu Ω und $u \in \mathbb{C}$ definiert man das **halboffene** Periodenparallelogramm P_u durch $P_u := P_u(\Omega) := \{u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2\colon \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1)\}$.



Im folgenden sei stets $f \in K(\Omega)$, A die Menge der Pole von f und N die Menge der Nullstellen von f. Beachte:

1.) Kennt man f auf einem P_n, so kennt man f auf $\mathbb{C}$.

2.) $A \cap P_u$ und $N \cap P_u$ sind endliche Mengen, falls $f \not\equiv 0$.

Als Übung kann gezeigt werden, dass $u \in \mathbb{C}$ so gewählt werden kann, dass $A \cap \partial P_u = \emptyset = N \cap \partial P_u$.

6.1 Erster Satz von Liouville

Satz 19.1:

Ist $f \in K(\Omega)$ und $f \in H(\mathbb{C})$, so ist f konstant.

Beweis:

$\overline{P_0}$ ist kompakt, womit f auf P_0 beschränkt ist. Also ist f auf $\mathbb{C}$ beschränkt. Aus dem klassischen Satz von Liouville folgt die Behauptung. $\square$

6.2 Zweiter Satz von Liouville

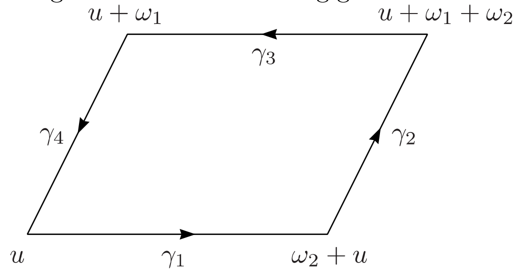
Satz 19.2:

Sei $u \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\sum_{a \in A \cap P_u} \operatorname{Res}(f; a) = 0$$

Beweis:

Obige Summe ist unabhängig von der Wahl von u. Daher nehmen wir an, dass $A \cap \partial P_u = \emptyset$.



γ_1, γ_2, γ_3 und γ_4 seien wie im Bild und $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \oplus \gamma_4$. Dann ist $\mathrm{Sp}(\gamma) = \partial P_u$. Nach dem Residuensatz gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in A \cap P_n} n(\gamma, a) \mathrm{Res}(f; a)$$

Also ist zu zeigen, dass

$$\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt. Da $\omega_1 \in \Omega(f)$ ist, gilt:

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_3^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z \Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Da auch $\omega_2 \in \Omega(f)$ ist, gilt analog:

$$\int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Daraus erhalten wir schließlich:

$$\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{4} \int\limits_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

□

Definition:

$\mathrm{ord}(f)$ sei die Anzahl der Pole von f in einem P_u (gezählt mit Vielfachheiten) heißt die **Ordnung** von f.

Folgerung 19.3:

Ist f **nicht** konstant, so ist $\mathrm{ord}(f) \geq 2$.

Beweis:

Wir nehmen an, dass $\mathrm{ord}(f) = 1$ ist. f hat in P_u einen Pol b_0 der Ordnung 1. Es existiert damit ein $\varepsilon > 0$ mit $\dot{U}_\varepsilon(b_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus A$. Dann gilt die Laurententwicklung von f um die Polstelle b_0:

$$f(z) = \frac{\alpha}{z - b_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b_0)^n \,\forall\, z \in \dot{U}_\varepsilon(z_0)$$

Dann ist $\alpha = \mathrm{Res}(f; b_0) = 0$ wegen Satz 19.2. Also besitzt f in b_0 eine hebbare Singularität und ist $\in H(\mathbb{C})$. Nach Satz 19.1 ist f konstant, was ein Widerspruch darstellt! □

Lemma 19.4:

f' und f'/f sind $\in K(\Omega)$.

Beweis:

Es ist klar, dass f' und $f'/f \in M(\mathbb{C})$ sind. Sei $\omega \in \Omega \subseteq \Omega(f)$. Für $h \neq 0$ betrachten wir:

$$\frac{f(z+\omega+h)-f(z+\omega)}{h} = \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \xrightarrow{h\mapsto 0} f'(z+\omega) = f'(z)$$

Also ist $\omega \in \Omega(f')$ und somit $\Omega \subseteq \Omega(f')$ und hieraus folgt $f \in K(\Omega)$.

$$\frac{f'(z+\omega)}{f(z+\omega)} = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Damit gilt $\omega \in \Omega(f'/f)$, also $\Omega \subseteq \Omega(f'/f)$ und schließlich $f'/f \in K(\Omega)$. $\square$

6.3 Dritter Satz von Liouville

Satz 19.5:

f sei **nicht** konstant. Des weiteren seien $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von f in P_u und $b_1, \ldots, b_p$ seien die Pole von f in P_u (jeweils gezählt mit Vielfachheiten). Dann gilt $n = p$.

Beweis:

Es ist $g(z) = f'(z)/f(z)$. Nach 19.4 gilt $g \in K(\Omega)$. γ sei wie im Beweis von 19.2 und es gelte $A \cap \partial P_u = \emptyset$. Satz 19.2 liefert:

$$0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \overset{\text{Argumentenprinzip}}{=} \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{p} n(\gamma, b_j) = n - p \text{ wegen } n(\gamma, a_j) = n(\gamma, b_j) = 1 \qquad \square$$

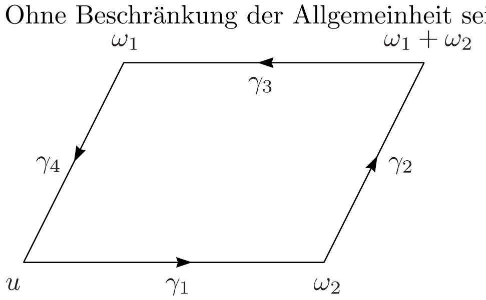
Lemma 19.6:

Sei $u \in \mathbb{C}$ und $A \cap \partial P_u = \emptyset = N \cap \partial P_u$. γ sei wie im Beweis von 19.2. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_\gamma z\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \in \Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$$

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $u = 0$.



Wir betrachten $\gamma_1(t) = t\omega_2$ und $\gamma_3^-(t) = \omega_1 + t\omega_2$. Es sei weiterhin $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$ mit $t \in [0,1]$.

$\Gamma(0) = f(\gamma_1(0)) - f(0) = f(\omega_2) = f(\gamma_1(1)) = \Gamma(1)$

Γ ist abgeschlossen. Aus $N \cap \partial P_u = \emptyset$ ergibt sich $0 \notin \mathrm{Sp}(\Gamma)$.

$$-\int\limits_{\gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_3^-} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 (\omega_1 + t\omega_2)\frac{f'(\omega_1 + t\omega_2)}{f(\omega_1 + t\omega_3)}\omega_2\,\mathrm{d}t \overset{19.4}{=} \int\limits_0^1 (\omega_1 + t\omega_2)\frac{f'(t\omega_2)}{f(t\omega_2)}\omega_2\,\mathrm{d}t =$$

$$= \omega_1 \int\limits_0^1 \frac{f'(t\omega_2)}{f(t\omega_2)}\omega_2\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 t\omega_2 \frac{f'(t\omega_2)}{f(t\omega_2)}\omega_2\,\mathrm{d}t = \omega_1 \int\limits_0^1 \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma_1(t))}\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \omega_1 \int\limits_\Gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \omega_1 n(\Gamma, 0)\cdot 2\pi\mathrm{i} + \int\limits_{\gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

Hieraus folgt weiter:

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = -\omega_1 2\pi\mathrm{i}n(\Gamma, 0) \in \mathbb{Z}(\omega_1 2\pi\mathrm{i})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \in \mathbb{Z}\omega_1$$

Analog kann man zeigen:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_2} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_4} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \in \mathbb{Z}\omega_2$$

Durch Addition resultiert die Behauptung. □

6.4 Vierter Satz von Liouville

Satz 19.7:

Es gelten dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in 19.5. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{j=1}^{n} b_j \in \Omega$$

Beweis:

Mit Hilfe des Argumentenprinzips gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{zf'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z}_{\in\Omega \text{ nach } 19.6} = \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{=1} - \sum_{j=1}^{n} b_j \underbrace{n(\gamma, a_j)}_{=1}$$ □