Die Greensche Funktion

Einführung zur Fourier-Transformation

Periodische Funktionen $f(x)$, die innerhalb der jeweiligen Periode stetig sind, lassen sich als Überlagerung (Superposition) von Sinus- und Kosinusfunktionen schreiben. Die zugehörige Reihe, welche $f(x)$ beschreibt, bezeichnet man als Fourierreihe.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\text{mit } a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\omega n t)\,\mathrm{d}t \text{ und } b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Unter Verwendung von

$$\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}x) - \exp(-\mathrm{i}x)) \text{ und } \cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x))$$

können wir die Fourierreihe in komplexer Form schreiben:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(\mathrm{i}n\omega t) \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ wobei } c_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp(-\mathrm{i}\omega n t)\,\mathrm{d}t$$

Das Intervall, auf dem $f(t)$ periodisch ist, sei $[-T/2, T/2]$. Die Länge des Intervalls ist somit gleich L. Bilden wir den Grenzübergang $L \mapsto \infty$, so erhalten wir:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\Delta\Omega} c_n \underbrace{\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}_{\Omega} \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi n}{T}t\right) \overset{T\mapsto\infty}{=}$$

$$\overset{T\mapsto\infty}{=} \frac{T}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Omega\, c(\Omega)\exp(\mathrm{i}\Omega t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \widetilde{f}(\Omega)\exp(\mathrm{i}\Omega t)$$

$$\widetilde{f}(\Omega) = T \cdot c(\Omega) = \lim_{T\mapsto\infty} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(t)\exp\left(-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{T}t\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

Fassen wir also zusammen:

$$f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \widetilde{f}(\Omega)\exp(\mathrm{i}\Omega t),\ \widetilde{f}(\Omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}\Omega t)\,\mathrm{d}t$$

Die Greensche Funktion

Die Greensche Funktion erweist sich als sehr nützlich zur Lösung von inhomogenen Differentialgleichungen der Form

$$D_t f(t) = h(t) \text{ mit } D_t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}.$$

Die gesamte Lösung einer solchen Differentialgleichung setzt sich zusammen als Überlagerung von homogener und inhomogener Lösung:

$$f(t) = f_{\text{hom}}(t) + f_{\text{inhom}}(t).$$

f_{hom} löst die homogene Gleichung $D_t f(t) = 0$. Die Problemstellung ist nun, die Lösung der inhomogenen Gleichung $D_t f(t) = h(t)$ zu finden. Es erweist sich als sehr geschickt, eine Inhomogenität in Form einer δ-Funktion zu betrachten, also

$$D_t G(t,t') = \delta(t-t')$$

wobei t' eine zunächst nicht näher spezifizierte Koordinate ist. $G(t,t')$ sei eine zunächst unbekannte Funktion, die sowohl von t als auch t' abhängt. Wird diese Gleichung nun mit $h(t')$ multipliziert und über t' integriert, so ergibt sich:

$$D_t G(t,t')h(t') = \delta(t-t') \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} D_t G(t,t')h(t')\,\mathrm{d}t' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')\delta(t-t')\,\mathrm{d}t' \Rightarrow D_t\left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')h(t')\,\mathrm{d}t'\right) = h(t)$$

Hieraus ist also die Lösung der inhomogenen Gleichung ersichtlich, nämlich

$$f_{\text{inhom}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')h(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Sie ist also gegeben als Integral über das Produkt von $G(t,t')$ mit der Inhomogenität $h(t')$. $G(t,t')$ wird als **Greenfunktion** der zugehörigen Differentialgleichung bezeichnet.

Beispiel: Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Der Einfachheit halber betrachten wir nun den Fall $n = 1$. Es ergibt sich dann folgende Gleichung:

$$\left(a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) G(t,t') = \delta(t-t')$$

Dabei handelt es sich um eine Differentialgleichung, die geschickt mit Fouriertransformation gelöst werden kann. Dazu schreiben wir $G(t,t')$ und $\delta(t-t')$ als Rücktransformierten von $\widetilde{G}(\omega)$ und 1 (da 1 die Fouriertransformierte von $\delta(t-t')$ ist) auf:

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\widetilde{G}(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))$$

$$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,1\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich, wobei wir davon ausgehen, dass wir Integration und Differentiation vertauschen können:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,(a_0 + \mathrm{i}\omega a_1)\,\widetilde{G}(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega(t-t')) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))$$

Die Integrale sind genau dann gleich, wenn die Integranden gleich sind:

$$(a_0 + \mathrm{i}\omega a_1)\widetilde{G}(\omega) = 1 \Rightarrow \boxed{\widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{a_0 + \mathrm{i}\omega a_1}}$$

Dies ist die Fouriertransformierte der Greenfunktion. Wir müssen also zurück transformieren:

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\widetilde{G}(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega(t-t')) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\frac{\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))}{a_0 + \mathrm{i}\omega a_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))}{\frac{a_0}{\mathrm{i}} + \omega a_1} =$$

$$= \frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}}\,\frac{\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))}{\omega - \frac{a_0}{a_1}\mathrm{i}}$$

Dieses Integral besitzt nun wieder die Form des Integrals aus der Klausur:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{\omega - \mathrm{i}x} = \theta(t)\exp(-xt)$$

Damit ergibt sich also:

$$\boxed{G(t,t') = \frac{1}{a_1}\theta(t-t')\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}(t-t')\right)}$$

Dabei handelt es sich (ohne Vorfaktor) um die homogene Lösung der Gleichung multipliziert mit der θ-Funktion und außerdem mit dem Argument $t - t'$. Wir überprüfen nun die Greenfunktion anhand der inhomogenen Differentialgleichung 1.Ordnung:

$$\left(a_0 + a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) f(t) = 1 \Leftrightarrow a_0 f(t) + a_1 f'(t) = 1$$

Mit der Greenfunktion folgt nun die inhomogene Lösung durch Berechnung des bekannten Faltungsintegrals:

$$\begin{aligned} f_{in}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')\cdot 1\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t-t')\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}(t-t')\right)\mathrm{d}t' = \frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}(t-t')\right)\mathrm{d}t' = \\ &= \frac{1}{a_1}\cdot\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\exp\left(-\frac{a_0}{a_1}(t-t')\right)\Bigg|_{-\infty}^{t} = \frac{1}{a_0}\cdot[1-0] = \frac{1}{a_0} \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung ist die Summe aus homogener Lösung f_{hom} und inhomogener Lösung f_{in}. Wir überprüfen, ob die inhomogene Lösung die Differentialgleichung tatsächlich löst:

$$a_0 \cdot \frac{1}{a_0} + a_1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{a_0}\right) = 1 + 0 = 1$$

Die inhomogene Lösung genügt also der Differentialgleichung, unsere Greenfunktion erfüllt ihren Zweck!

Beispiel aus der Mechanik: Der getriebene (ungedämpfte) harmonische Oszillator

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator ohne Dämpfung mit einer äußeren Kraft $F(t)$. Das Weg-Zeit-Gesetz von diesem genügt folgender Differentialgleichung:

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

Gelöst wird nun die Differentialgleichung mit einer gepeakten Kraft

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \delta(t-t')$$

mittels Fouriertransformation. Durch Einsetzen von

$$G(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,\widetilde{G}(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))$$

$$\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\,1\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))$$

ergibt sich:

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)\widetilde{G}(\omega) = 1 \Rightarrow \widetilde{G}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Die Greenfunktion ergibt sich durch Rücktransformation:

$$G(t,t') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \widetilde{G}(\omega) \exp(\mathrm{i}\omega(t-t')) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \frac{\exp(\mathrm{i}\omega(t-t'))}{\omega_0^2 - \omega^2} =$$
$$= -\frac{2\pi \mathrm{i}}{2\pi} \left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega_0(t-t'))}{2\omega_0} + \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega_0(t-t'))}{-2\omega_0} \right] \theta(t-t') = \frac{1}{\omega_0} \sin[\omega_0(t-t')]\theta(t-t')$$

Mit den beiden Integralen folgt:

$$\boxed{G(t,t') = \frac{1}{\omega_0} \sin[\omega_0(t-t')]\theta(t-t')}$$

Die inhomogene Lösung der Gleichung mit allgemeiner äußeren Kraft ist gegeben durch:

$$x(t) = \frac{1}{m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,t')F(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{1}{m\omega_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin[\omega_0(t-t')]\theta(t-t')F(t')\,\mathrm{d}t'$$

Beispiel aus der Elektrostatik: Das Potential einer Ladungsverteilung

In der Elektrodynamik kann zu einer bestehenden Ladungsdichte $\varrho(\vec{x})$ das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{x})$ durch Lösung der Poissongleichung

$$\triangle\varphi(\vec{x}) = -\frac{\varrho(\vec{x})}{\varepsilon_0} \text{ mit } \triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

bestimmt werden. Für eine Punktladung $\varrho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ gilt die Gleichung

$$\triangle\varphi(\vec{x}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

deren Lösung wir aus der Schule (!!) kennen:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Ohne es gewusst zu haben, lief uns damals schon die Greensche Funktion der Elektrostatik über den Weg! Beachten wir, dass die Greensche Funktion definiert ist als Lösung der Gleichung

$$\triangle G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

so können wir $G(\vec{x}, \vec{x}')$ direkt ablesen:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Für eine beliebige Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ gilt dann:

$$\boxed{\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\, G(\vec{x}, \vec{x}')\varrho(\vec{x}') \text{ mit } G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$