Übung Theoretische Physik A: Mechanik

Interessante Bücher

① Nolting Grundkurs Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (ISBN: 3-540-42115-7)

Dies ist ein schönes Buch mit vielen Abbildungen. Zahlreiche Beispiele erleichtern dabei das Verständnis. Außerdem helfen einem die vielen Aufgaben mit ausführlichen Lösungen; Lösungen sind nämlich in Lehrbüchern nicht selbstverständlich!

② Fliessbach: Mechanik, Lehrbuch zur theoretischen Physik I (ISBN: 3-8274-0546-7)

Auch ein schönes Buch; es ist jedoch für Theoretische Physik A meiner Meinung nach nicht so geeignet, eher für Theoretische Physik B. Man kann es sich jedoch auch für Theo A schon besorgen, weil der Autor die verschiedenen Probleme oft von einem anderen Blickwinkel betrachtet und anders angeht als Professor Nolting. Leider fehlen Lösungen zu den nach jedem Kapitel gestellten Aufgaben.

③ Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig: Taschenbuch der Mathematik (ISBN: 3-8171-2005-2)

Dabei handelt es sich um ein Mathematikbuch, in dem viele mathematische Themen kompakt zusammengefasst sind. Zum Lernen ist es daher nicht geeignet, sondern nur zum Nachschlagen. Hilfreich für theoretische Physik kann die wirklich sehr ausführliche Integraltabelle sein!

④ Kuhn, Stöckel, Glassl: Mathematische Hilfsmittel der Physik (ISBN: 3-3335-00404-3)

Gutes Buch, in dem die mathematischen Grundlagen der (theoretischen) Physik schön dargestellt sind. Außerdem gibt es Aufgaben mit Lösungen!

Man muss sich ja die Bücher nicht kaufen; es gibt viele in der Universitätsbibliothek! Außerdem gibt es im Internet zahlreiche Skripte, die man kostenlos herunterladen kann. Leider kostet das Ausdrucken im Rechenzentrum etwas, aber nicht viel.

Allgemeine Tipps

- Regelmäßig die Übungszettel bearbeiten! Es ist nicht schlimm, wenn man ein Blatt auslässt und irgendwelche Aufgaben mal nicht bearbeitet; jedoch sollte dies kein Dauerzustand werden!
- Aufgaben in der Gruppe lösen, ist dann wirklich einfacher!
- Auch mal in verschiedene Bücher schauen, falls man nicht weiterkommt! Vielleicht findet man irgendeinen Ansatz oder ein ähnliches Problem, was einem weiterhelfen kann.
- Früh anfangen, sich auf die Klausur vorzubereiten! Also nicht einen Tag davor auf die Idee kommen, jetzt mal gemächlich zu beginnen!
- Vielleicht auch einmal bei der Fachschaft vorbeischauen; dort gibt es nämlich alte Übungsblätter und Klausuren mit Lösungen.
- Schaubilder von Funktionen kann man schon mit dem Computer (beispielsweise Gnuplot) zeichnen. Trotzdem sollte vorher auch selbst überlegt werden, wie das Schaubild aussieht, da man in der Klausur auch keinen Computer (oder auch Taschenrechner) zur Verfügung hat.

Methoden der Integration

1.) Substitution:

Zu berechnen ist folgendes Integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Eine geeignete Substitution ist $x = \sin\varphi$, $\mathrm{d}x = \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$. Da x im Intervall $[0,1]$ liegt, befindet sich φ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, da ja $\sin(0) = 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ist. Damit folgt:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\varphi}\cdot\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

In der Formelsammlung findet man $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$ und damit können wir $\cos^2\varphi$ ausdrücken. Danach verwenden wir die Substitution $\vartheta = 2\varphi$, $\mathrm{d}\vartheta = 2\,\mathrm{d}\varphi$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\varphi}\cdot\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\cdot\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot\sin\vartheta\Big|_0^{\pi} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Berechnen wir noch ein weiteres Integral mit Substitution; es stammt aus einer Klausur:

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$$

Manchmal ist es sinnvoll, eine nicht direkt ersichtliche Substitution auszuprobieren. In diesem Falle versuchen wir es mit $\cos x = u$, $-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$:

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = -\int \sin^3 x\,\frac{\mathrm{d}u}{\sin x} = -\int \sin^2 x\,\mathrm{d}u = -\int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}u = -\int (1-u^2)\,\mathrm{d}u =$$
$$= -\left(u - \frac{1}{3}u^3\right) = \boxed{\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x}$$

2.) Partielle Integration:

Zuerst betrachten wir das ganze allgemein. Mittels der Kettenregel der Differentiation gilt für eine Funktion $f(x) = u(x)\cdot v(x)$:

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x)$$

Durch Integration folgt nun wieder:

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x + \int v'(x)\cdot u(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int v'(x)\cdot u(x)\,\mathrm{d}x}$$

Ein schönes Beispiel ist die Integration der natürlichen Logarithmusfunktion:

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{x\cdot\ln(x) - x}$$

Zu einem weiteren Beispiel:

$$\int \exp(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = \exp(x)\cdot\sin(x) - \int \exp(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \exp(x)\cdot\sin(x) - \exp(x)\cdot\cos(x) - \int \exp(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Den letzten Term bringen wir auf die linke Seite und erhalten:

$$2 \cdot \int \exp(x) \cdot \sin(x) \, \mathrm{d}x = \exp(x) \cdot \sin(x) - \exp(x) \cdot \cos(x)$$

$$\int \exp(x) \cdot \sin(x) \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{\exp(x)}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))}$$

3.) Partialbruchzerlegung:

Als erstes ein einfaches Beispiel:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5x+6} \, \mathrm{d}x$$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner des zu zerlegenden Bruches ergibt:

$$2x + 3 \stackrel{!}{=} A \cdot (x+3) + B \cdot (x+2) = x \cdot (A+B) + (3A + 2B)$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $B = 3$ und $A = -1$ und damit:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+5x+6} \, \mathrm{d}x = \int \left[-\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x+3} \right] \mathrm{d}x = \boxed{3 \ln|x+3| - \ln|x+2|}$$

Das folgende Integral stammt aus einer HM-Klausur für Informatiker:

$$\int \frac{x^2 - 6x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

Um dieses zu lösen, zerlegt man den Nenner in seine Linearfaktoren:

$$x^4 + 2x^4 + x^2 = x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^2 \cdot (x+1)^2$$

0 und -1 sind doppelte Nullstellen, weshalb man folgenden Ansatz machen muss:

$$\frac{x^2 - 6x - 3}{x^2 \cdot (x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

Durchmultiplizieren mit dem Nenner des zu zerlegenden Bruches ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 3 &\stackrel{!}{=} A \cdot x \cdot (x+1)^2 + B \cdot (x+1)^2 + C \cdot (x+1) \cdot x^2 + D \cdot x^2 = \\ &= A \cdot (x^3 + 2x^2 + x) + B \cdot (x^2 + 2x + 1) + C \cdot (x^3 + x^2) + D \cdot x^2 = \\ &= x^3 \cdot (A + C) + x^2 \cdot (2A + B + C + D) + x \cdot (A + 2B) + B \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ und $D = 4$ und damit:

$$\int \frac{x^2 - 6x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2} \, \mathrm{d}x = \int \left[-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{(x+1)^2} \right] \mathrm{d}x = \boxed{\frac{3}{x} - \frac{4}{x+1}}$$

Ein weiteres Beispiel ist folgendes:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1) \cdot (x+1)} \, \mathrm{d}x$$

Das Polynom $x^2 + x + 1$ besitzt keine reellen Nullstellen, weshalb folgender Ansatz gemacht werden muss:

$$\frac{2x+1}{(x^2+x+1) \cdot (x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+1}$$

Wir multiplizieren wieder mit dem Nenner durch:

$$2x+1 \stackrel{!}{=} (Ax+B)\cdot(x+1)+C\cdot(x^2+x+1) = A\cdot x^2 + A\cdot x + B\cdot x + B + C\cdot x^2 + C\cdot x + C = \\ = x^2\cdot(A+C)+x\cdot(A+B+C)+(B+C)$$

Daraus ergibt sich $A=1$, $B=2$ und $C=-1$, also:

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\cdot(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x$$

Zum ersten Ausdruck:

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1} = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$\int \left[\frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{1}{x+1}\right]\mathrm{d}x = \\ = \boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \ln|x+1|}$$

4.) <u>Parameterdifferentiation:</u>

Wir führen einen Parameter λ zur Berechnung des Integrals ein:

$$\int\limits_0^\infty x^2\cdot\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda\cdot x^2\right)\,\mathrm{d}x\Big|_{\lambda=1}$$

Zu $\exp(-\lambda\cdot x^2)$ lässt sich keine Stammfunktion finden. Das ist aber kein Problem, da sich dieses Integral mit den Grenzen $[0,\infty)$ in Integraltabellen (beispielsweise Bronstein) findet, womit sich ergibt:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\lambda\cdot x^2\right)\,\mathrm{d}x\Big|_{\lambda=1} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right]\Big|_{\lambda=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\lambda^{\frac{3}{2}}}\Big|_{\lambda=1} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{4}}$$

5.) <u>Koordinatentransformation:</u>

Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

Zuerst substituieren wir $x=y\cdot a$, $\mathrm{d}x = a\cdot\mathrm{d}y$; die Grenzen bleiben dabei gleich:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x = a\cdot\int\limits_{-\infty}^\infty \exp\left(-y^2\right)\,\mathrm{d}y$$

Wie berechnet man nun dieses Integral? Man verwendet einen kleinen Trick, und zwar quadriert man den Ausdruck. Beim zweiten Faktor kann man nun die Variable von x in y umbenennen; dies ändert an dem Integral ja nichts:

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x\right]^2 = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x\right] \cdot \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x\right] \cdot \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right)\,\mathrm{d}y\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

An dieser Stelle kommen wir weiter, indem wir Polarkoordinaten $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$ einführen:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(x^2+y^2\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} r \cdot \exp(-r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot \int\limits_{0}^{\infty} r \cdot \exp(-r^2)\,\mathrm{d}r =$$
$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \exp\left(-r^2\right)\,\mathrm{d}r\right] = 2\pi \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot \exp\left(-r^2\right)\right]\Bigg|_0^\infty = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Da wir das Integral am Anfang quadriert hatten, müssen wir jetzt also vom Ergebnis die Wurzel ziehen; damit erhalten wir:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\,\mathrm{d}x = a \cdot \sqrt{\pi}}$$

Weitere Daten

- Tutor: Marco Schreck
- E-Mail-Adresse: `Marco.Schreck@gmx.de`
- Internetauftritt: `http://www.stud.uni-karlsruhe.de/~uvf9`
- Übungsgruppe: 12
- Raum: 5.1
- Zeit: Freitag, 11:30 - 13:00 Uhr