

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: PHYSIK DER ATOMKERNE, KERNMATERIE

Prof. Dr. Jahn

Vorlesung Wintersemester 2004/2005

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung PHYSIK DER ATOMKERNE, KERNMATERIE
von Herrn Prof. Dr. JAHN im Wintersemester 2004/2005
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	5
2	Einführung	7
2.1	Was wir vorhaben	7
2.2	Streuexperimente mit Kernen	7
2.2.1	Punktförmige Kerne	8
2.2.2	Ausgedehnte Kerne und Formfaktor	12
2.2.3	Spezialfall: Punktförmige Kerne	14
2.2.4	Dichteverteilungsfunktion von Atomkernen	19
2.3	Empirische Massenformel	21
2.3.1	Regel von MATTAUCH	24
2.3.2	Regel von ASTON	25
3	Kernspaltung	37
3.1	Verformung des Atomkerns bei der Spaltung	37

Kapitel 1

Vorwort

Die Vorlesung „Kernmaterie“ behandelt die Atomkerne als winzig kleine Stücke aus einem einheitlichen Stoff, der Kernmaterie. Der Eigenschaften dieser Materie, wie Dichte und Ladungsverteilung, sowie Energiedichte werden zum Teil in Analogie zur makroskopischen Materie betrachtet. Insbesondere wird das Problem behandelt, wie es durch die Zusammenbindung der Nukleonen in den Atomkernen überhaupt zu einer einheitlichen stabilen Dichte kommen kann und wie die Rolle ist, welche die Kernkräfte dabei spielen. Schließlich werden auch die Kräfte berechnet, die von der Kernmaterie auf die einzelnen Nukleonen in und außerhalb des Kerns ausgeübt werden.

Wir werden uns zunächst eine Einführung und einen Überblick zur Thematik der Kernmaterie verschaffen, mit dem wir hier beginnen wollen. Die Vorlesung „Kernmaterie“ kann gedacht werden als erster Teil eines drei mal zweistündigen Vorlesungskurses, der in eine erste vertiefende Beurteilung der Physik der Atomkerne einführen soll und als Wahlfachkurs für das Wahlfach Kernphysik genommen werden kann. Diesen Wahlfachkurs haben wir insgesamt als ganzes „Physik der Atomkerne“ genannt und es hat sich für ihn eine Unterteilung in drei zweistündige Vorlesungen ergeben, die der Struktur des Stoffes am meisten angemessen erscheint.

Kapitel 2

Einführung

2.1 Was wir vorhaben

- 1.) Kernmaterie:
 - a.) Dichte- und Ladungsverteilung im Kern
 - b.) Energieinhalt der Kerne
 - c.) Stabilität und Instabilität der Kerne
 - d.) Radioaktiver Zerfall
 - e.) Kernspaltung
 - f.) FERMIgasmodell der Kerne
 - g.) Sättigungsverhalten der Kerne und Kernkräfte

Wir untersuchen also die Frage des Zusammenhaltes der Kerne in ihren Grundzuständen.

- 2.) Kernmodelle:
 - a.) Erklärung der Spektren aus der inneren Struktur der Atomkerne
 - b.) Kernspektroskopie

Also die angeregten Zustände der Kerne und ihre Beschreibung

- 3.) Kernreaktionen

2.2 Streuexperimente mit Kernen

Unser Thema in diesem Semester ist nun also die **Kernmaterie**. Zu Beginn des Semesters möchten wir uns einen Überblick über den Stoff der Vorlesung verschaffen. Das Konzept der Kernmaterie besteht darin, dass man die verschiedenen Atomkerne als verschiedene Stücke einer einheitlichen Materie auffasst, so wie es in makroskopischen Dimensionen verschiedene Stücke ein und desselben Stoffes geben kann. Soll eine solche Auffassung einen Sinn haben, so muss die aus den Nukleonen in den Atomkernen gebildete Materie tatsächlich eine gewisse Einheitlichkeit aufweisen, die unabhängig davon sein muss, in welchen Atomkernen sich diese Materie befindet. Die Atomkerne müssten dann nur verschieden große Stücke ein und derselben Materie sein. Eine der Eigenschaften, von welcher wie die Einheitlichkeit fordern, wäre beispielsweise die **Dichte**. In makroskopischen Dimensionen haben ja auch verschiedene Stücke ein- und desselben Materials unter sonst gleichen Bedingungen dieselbe Dichte ebenso wie verschiedene Tröpfchen ein- und derselben Flüssigkeit unter sonst gleichen Bedingungen. Die Dichte hängt beispielsweise nicht davon ab, wie groß das Stück Materie ist, das heißt, wieviel der betrachteten Materie in dem Stück enthalten ist. Dies wäre immerhin denkbar, denn die betrachteten Stücke Materie werden ja zusammengehalten durch anziehende Kräfte, welche zwischen den Nukleonen wirken. Durch eine Vermehrung der Zahl der einander anziehenden Nukleonen könnte auch eine Ausweitung des gesamten anziehenden Potentials zustande kommen, so dass auf diese Weise mit zunehmender Anzahl der Nukleonen und damit zunehmender Materiemenge die Materie immer dichter werden könnte. Sofern dies nicht der Fall ist, sondern die Dichte unabhängig von der Menge der Materie bleibt, spricht man von einem Sättigungsphänomen, das offenbar dadurch zustande kommt, dass sich mit zunehmender Dichte abstoßende Kräfte immer stärker

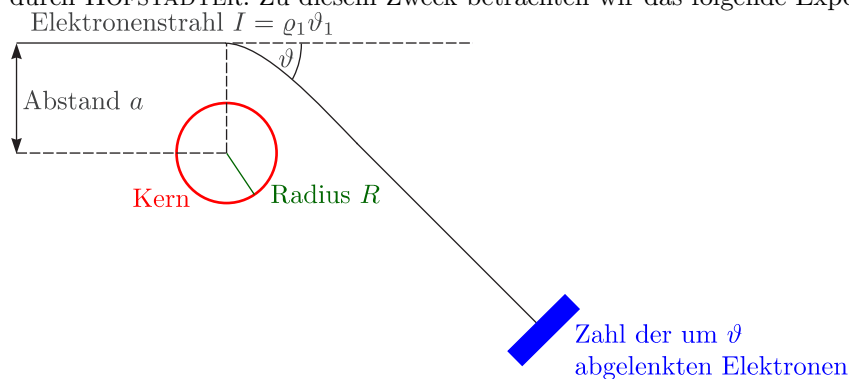
auswirken, so dass sich ein **Gleichgewichtszustand** einstellt, der eine von der **Materiemenge unabhängige** einheitliche Dichte zur Folge hat.

Um festzustellen, ob auch die Kernmaterie in den Kernen eine solche vom jeweiligen Kern unabhängige einheitliche Dichte aufweist, bediente HOFSTADTER sich der Elektronenstreuexperimente an Kernen, die es gestatteten, die räumliche Ausdehnung und damit das Volumen der Kerne zu messen, woraus sich ja die Dichte ergibt, wenn man die aus dem Atomgewicht bekannte Nukleonenzahl A durch das Volumen V dividiert, gemäß $\rho = \frac{V}{A}$. Wir beginnen also unsere Vorlesung mit den Elektronenstreuexperimenten, also der Bestimmung der Dichte von Kernen nach HOFSTADTER und erschließen daraus das Radiengesetz der Atomkerne und untersuchen darüber hinaus, ob wir diese Ergebnisse als Sättigungsphänomen der Kernmaterie interpretieren kann, aus dem wir das Tröpfchenmodell und die empirische Massenformel herleiten sowie einige Konsequenzen für die Stärke der Kernkräfte ziehen werden.

Danach fragen wir nach der Ursache des Sättigungsphänomens und versuchen, diese Frage im Rahmen bestimmter mathematischer Modelle zu beantworten. Als ein solches Modell betrachten wir beispielsweise das FERMIGASMODELL des Atomkerns, das sehr wichtig ist und an dem sich die Problematik sehr gut darlegen lässt. Darüber hinaus müssen wir noch die Korrelationen etwa von BRÜCKNER, BETHE-GOLDSTONE oder GOMEZ und WEISSKOPF berücksichtigen, was wir in den Grundzügen skizzieren wollen. Dabei spielt das Problem der Nukleon-Nukleon-Potentiale eine wichtige Rolle und zwar ist dabei ganz besonders das repulsive eine der Nukleon-Nukleon-Potentiale wesentlich. Zur Erklärung des Sättigungsphänomens werden wir also bei dieser Gelegenheit auf die Nukleon-Nukleon-Potentiale eingehen.

2.2.1 Punktförmige Kerne

Messungen lassen sich in der Kernphysik nur mit geladenen Teilchen durchführen. Wir beginnen also zunächst mit den Messungen der Kernradien und Dichteverteilung der Kernmaterie mittels der Elektron-Streumessungen durch HOFSTADTER. Zu diesem Zweck betrachten wir das folgende Experiment:



Ein Elektronenstrahl treffe auf ein sogenanntes Target, das aus den jeweiligen Kernen besteht, die man untersuchen will. Die Dichte der Kernmaterie sei ρ_2 . Mit dem Detektor misst man die Zahl der um ϑ abgelenkten Elektronen $dn = \rho_1 \cdot v_1 \cdot \rho_2 dQ$. Die Menge der abgelenkten Teilchen wird ausgedrückt durch den sogenannten Wirkungsquerschnitt dQ für die Streuung um den Winkel ϑ , nämlich $dQ = a da d\varphi$, wobei φ der Azimutwinkel sei.

Besonders leicht geht dies für den Fall, dass die Masse des **gestoßenen Teilchens** so groß ist, dass man dessen **Rückstoß vernachlässigen** kann, was bei der Elektronenstreuung an Kernen in den verwendeten Energiebereichen gewöhnlich den tatsächlichen Verhältnissen entspricht. Dann hat nämlich das gestreute Teilchen vor und nach dem Stoß die gleiche Energie und auch den gleichen Impulsbetrag, also:

$$\frac{p^{(0)2}}{2m} = \frac{p'^2}{2m} \text{ bzw. } E^{(0)} = \sqrt{(c \cdot p^{(0)})^2 + (m_0 \cdot c^2)^2} = \sqrt{(c \cdot p')^2 + (m_0 \cdot c^2)^2} = E'$$

Es gilt also $|p^{(0)}| = |p'|$ und damit erhalten wir für die Impulsänderung während des Streuprozesses:

$$\Delta p = \sqrt{(p^{(0)} - p')^2} = \sqrt{(p^{(0)})^2 + p'^2 - 2p^{(0)}p' \cos \vartheta} \stackrel{p^{(0)}=p'}{=} p^{(0)} \cdot \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}$$

Aus dem Additionstheorem des Kosinus

$$\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) = \cos(\vartheta_1) \cos(\vartheta_2) - \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_2) \text{ und } \cos(\vartheta) = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

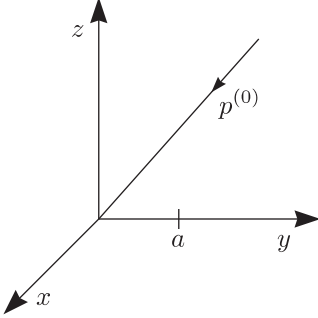
folgt

$$\cos(\vartheta) = 1 - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad 1 - \cos(\vartheta) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

und damit können wir die Formel für die Impulsänderung umschreiben:

$$\Delta p = 2p^{(0)} \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Wir berechnen nun den Impulsanteil, den ein geladenes Teilchen auf ein anderes ebenfalls elektrisch geladenes Teilchen überträgt, wenn das erste Teilchen an dem zunächst ruhenden zweiten Teilchen im Abstand a vorbeifliegt. Der Impulsübertrag kommt dann dadurch zustande, dass das vorbeifliegende Teilchen auf das ruhende Teilchen eine Kraft durch dessen elektrisches Feld ausübt. Von der Feldstärke wirkt sich nur die y -Komponente aus, wenn wir das Koordinatensystem so legen, dass das einfallende Teilchen längs der x -Achse vorbeifliegt und das zweite Teilchen im Punkt a auf der y -Achse ruht:



O sei das Ruhesystem des Atomkerns, der sich in diesem System im Punkt $(0, a, 0)$ befindetet. Das Ruhesystem des sich auf der x -Achse bewegendes Elektrons wollen wir mit O' bezeichnen. In O' ruht das Elektron im Ursprung und der Atomkern besitzt die zeitabhängigen Koordinaten $(-v \cdot t', a, 0)$. Zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten der Systeme O und O' besteht eine Verbindung in Form einer LORENTZ-Transformation in x -Richtung. Diese Transformation kann durch folgende LORENTZ-Matrix beschrieben werden:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x' = L \cdot x = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \cdot \frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma \cdot \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot (ct - \frac{v \cdot x}{c^2}) \\ -\gamma \cdot (\frac{v \cdot t}{c} - x) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

An der Stelle, wo sich der Atomkern befindet, also bei $x = 0$, gilt dann im System O' für die Zeit $t' = \gamma \cdot t$. Das Potential der bewegten Ladung in deren Ruhesystem ist gegeben durch:

$$\varphi = \frac{e}{|\vec{r}'|} = \frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Das elektrische Feld ergibt sich durch Bildung des Gradienten:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla} \frac{e}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{e}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{e}{(v^2 \cdot t'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} -v \cdot t' \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist also das elektrische Feld am Ort des Atomkerns im Ruhesystem des bewegten Teilchens O' . Das elektrische Feld \vec{E}' im Ruhesystem O des Atomkerns ergibt sich durch folgende Transformationen:

$$E_x = E'_x, E_y = \gamma \cdot \left(E'_y - \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}' \right)$$

Die Komponenten parallel und senkrecht zur Bewegung, also \vec{E}_x und \vec{E}_y transformieren sich also unterschiedlich. Der während des Streuvorganges übertragene Impuls rührt nur von E_y her, da der Beitrag von E_x wegen der Antisymmetrie des Integranden verschwindet. Außerdem gibt es kein äußeres Magnetfeld, so dass $\vec{B}' = \vec{0}$ ist. Die elektrische Feldstärke, die auf den Atomkern ausgeübt wird, beträgt damit mit $t' = \gamma \cdot t$:

$$E_x = -\gamma \cdot \frac{e \cdot v \cdot t}{(\gamma^2 \cdot v^2 \cdot t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{e \cdot v \cdot t}{\left(a^2 + \frac{v^2 \cdot t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \gamma \cdot \frac{e \cdot a}{(\gamma^2 \cdot v^2 \cdot t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{e \cdot a}{\left(a^2 + \frac{v^2 \cdot t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Der auf das anfangs ruhende Teilchen während des gesamten Streuvorganges vermöge der Kraft $Z \cdot e \cdot E$ übertragene Impuls beträgt dann:

$$\Delta \vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(t) dt = Ze \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(t) dt = Ze \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{n}_y \cdot E_y dt$$

Der Betrag des insgesamt übertragenen Impulses ist dann:

$$\Delta p = Ze \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_y dt = \frac{Ze^2 \cdot a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a^2 + \frac{v^2 \cdot t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{-\frac{3}{2}} dt \equiv \frac{Ze^2 \cdot a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot I$$

Wir berechnen dieses Integral durch folgende Substitution:

$$\frac{v^2}{a^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot t^2 = u^2, \quad u = \frac{v}{a \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot t, \quad du = \frac{v}{a \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dt$$

Damit ergibt sich:

$$I = \frac{1}{a^2} \cdot \int \left(1 + \frac{v^2}{a^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot t^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{a}{v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \int (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} du \equiv \frac{1}{a^2 \cdot v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot I'$$

Zur Berechnung von I' ist nun eine weitere Substitution hilfreich, nämlich $1 + u^2 = v^2$, $du = \frac{v}{u} dv$:

$$I' = \int (1 + u^2)^{-\frac{3}{2}} du = \int (v^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2 - 1}} dv = \int \frac{1}{v^2 \cdot \sqrt{v^2 - 1}} dv$$

Zu guter letzt kommen wir hier mittels der Ersetzung $v = \cosh(x)$, $dv = \sinh(x) dx$ weiter:

$$\int \frac{1}{v^2 \cdot \sqrt{v^2 - 1}} dv = \int \frac{1}{\cosh^2(x) \cdot \sinh(x)} \cdot \sinh(x) dx = \int \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \tanh(x)$$

Nun müssen wir wieder rücksostituieren

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\sqrt{v^2 - 1}}{v} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

und die Grenzen einsetzen:

$$I = \frac{1}{a^2 \cdot v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{a^2 \cdot v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \Delta p = \frac{Ze^2 \cdot a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{2}{a^2 \cdot v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \boxed{\frac{2Z \cdot e^2}{a \cdot v}}$$

Man erhält dieses Ergebnis ganz gleich, ob man relativistisch rechnet oder nicht. Der Faktor γ hebt sich bei der Integration nämlich heraus, wie wir gesehen haben. Da wir andererseits soeben $\Delta p = 2p^{(0)} \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ erhalten hatten, folgt:

$$a^2 = \left(\frac{Z \cdot e^2}{v \cdot p^{(0)}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

und somit:

$$dQ = a da d\varphi = \left(\frac{Z \cdot e^2}{v \cdot p^{(0)}}\right)^2 \cdot \frac{d\left(\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)}{\sin^3\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} d\varphi$$

Weiterhin gilt

$$d\left(\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta \text{ und } \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{\sin(\vartheta)}{2 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

so dass wir erhalten:

$$a da = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Z \cdot e^2}{v \cdot p^{(0)}}\right) \cdot \frac{\sin(\vartheta) d\vartheta}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \cdot \frac{\sin(\vartheta) d\vartheta}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Damit wird der Wirkungsquerschnitt:

$$dQ = a da d\varphi = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Dabei ist $d\Omega$ das Raumwinkelelement $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Im **nichtrelativistischen Fall** wird $mv^2 = m_0v^2 = 2E^{(0)}$ und somit:

$$dQ = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{Ze^2}{E^{(0)}}\right)^2 \cdot \frac{\sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{16 \cdot E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}}$$

Dabei handelt es sich um die RUTHERFORDSche Streuformel. Im **relativistischen Fall** gilt $mv^2 = mc^2 = E^{(0)}$ und somit:

$$dQ = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Ze^2}{E^{(0)}}\right)^2 \cdot \frac{\sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Zusammenfassung:

In den ersten beiden Vorlesungsstunden hatten wir zuletzt den Impulsanteil berechnet, den ein geladenes Teilchen auf ein anderes ebenfalls elektrisch geladenes Teilchen überträgt, wenn das erste Teilchen an dem zunächst ruhenden zweiten Teilchen im Abstand a vorbeifliegt. Der Impulsübertrag kommt dann dadurch zustande, dass das vorbeifliegende Teilchen auf das ruhende Teilchen eine Kraft durch dessen elektrisches Feld ausübt. Von der Feldstärke wirkt sich nur die y -Komponente aus, wenn wir das Koordinatensystem so legen, dass das einfallende Teilchen längs der x -Achse vorbeifliegt und das zweite Teilchen im Punkt a auf der y -Achse ruht. Dann erhält man den Impulsübertrag durch den Kraftstoß, den das vorbeifliegende Teilchen aufgrund seines elektrischen Feldes auf das ruhende Teilchen ausübt, durch:

$$\Delta p = e \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} E_y dt = \frac{2Z \cdot e^2}{v \cdot a} \text{ mit } E_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{e \cdot a}{\left(a^2 + \frac{v^2 \cdot t^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dies hatten wir berechnet, wobei mit v die Geschwindigkeit des einfallenden Teilchens und mit Z die Anzahl der Elementarladungen des ruhenden Teilchens bezeichnet wurden. Dieses Ergebnis gilt sowohl für den nichtrelativistischen Fall $\frac{v}{c} \ll 1$ als auch für den relativistischen Fall $v \approx c$, was davon herrührt, dass sich die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und $1 - \frac{v^2}{c^2}$ bei der Integration herausheben.

Andererseits hatten wir in den vorherigen Stunden für den Fall der Vernachlässigung des Rückstoßes des gestoßenen Teilchens als Impulsänderung des vorbeifliegenden Teilchens

$$\Delta p = 2p^{(0)} \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

wobei ϑ der Ablenkwinkel und $p^{(0)}$ der Impuls des vorbeifliegenden Teilchens vor der Streuung sind. Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen für Δp erhalten wir dann:

$$a = \frac{Z \cdot e^2}{v \cdot p^{(0)} \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Hierzu ist zu bemerken, dass wir bei der Berechnung der Impulsänderung Δp aus der elektrischen Kraft, die das vorbeifliegende Teilchen auf das zu stoßende Teilchen ausübt, die Bahn des vorbeifliegenden Teilchens

als eine Gerade behandelt und die Ablenkung um den Winkel ϑ nicht berücksichtigt haben. Tatsächlich ist es einleuchtend, dass dies für nicht sehr große Ablenkwinkel zulässig sein sollte, das heißt, für solche Ablenkwinkel, für die der auf der x -Achse zurückgelegte Weg $\frac{v_x \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und sein Beitrag in der Wurzel im Integranden groß ist

gegen den zusätzlichen nur zeitabhängigen Beitrag, der durch die Ablenkung zustande kommt.

Es ist klar, dass in dieser Näherung die bei den Definitionen des Stoßparameters a einmal als kleinster Abstand der Bahn des einfallenden Teilchens vom Streuzentrum zum anderen als Abstand der Asymptoten der Teilchenbahn dieses Teilchens zum Streuzentrum miteinander zusammenfallen.

Wir wie schon ausführten, bekommen wir den Wirkungsquerschnitt als Fläche, die das zu stoßende Teilchen dem einfallenden Teilchenstrom entgegenhält, wobei diese Fläche den jeweiligen Stoßparameter a als Radius hat, also ist $dQ = a da d\varphi$. Aus

$$a^2 = \left(\frac{Z \cdot e^2}{v \cdot p^{(0)}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}$$

2.2.2 Ausgedehnte Kerne und Formfaktor

Die vorstehende Herleitung dieser Formeln war nur für den Fall durchgeführt wurden, dass beide Teilchen als punktförmig angenommen worden waren. Wir müssten dieselbe Herleitung nochmal für den Fall durchführen, dass das anfangs ruhende Teilchen ein **ausgedehnter** Kern ist. Sehen wir uns jedoch die Messergebnisse für den Fall des ausgedehnten Kerns an, so sieht man eigentümliche Beugungsminima, die für ganze Vielfache von $\Delta p \cdot R$ auftreten, wenn R der Radius des betreffenden Kerns ist. Dieses Phänomen deutet auf den Wellencharakter des gestreuten Teilchens hin, durch den diese Minima als Beugungsminima hervorgerufen werden, wenn man dem übertragenden Impuls Δp die Materiewellenlänge $\lambda = \frac{h}{\Delta p}$ zuordnet. Wir können also den Fall des **ausgedehnten Kerns** nur mit Hilfe der Quantenmechanik berücksichtigen. Zu diesem Zweck nehmen wir einfach die entsprechende Formel aus der quantenmechanischen Streutheorie vorweg und holen ihre Herleitung später nach. Es handelt sich um die Formel für den Wirkungsquerschnitt in der BORNschen Näherung (nichtrelativistisch), welche lautet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^2 \cdot \left| \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p}' - \vec{p}) \cdot \vec{r} \right] \cdot V(\vec{r}) dr \right|^2 = \left(\frac{m}{2\pi\hbar} \right)^2 \cdot \left| \int \exp \left[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r} \right] \cdot V(\vec{r}) dr \right|^2$$

\vec{k} ist der Impuls des einfallenden und \vec{k}' der Impuls des gestreuten Teilchens, die sich nur durch den Streuwinkel unterscheiden, während die Beträge gleich sind, also $|\vec{k}'| = |\vec{k}|$. Das Integral

$$\int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] V(\vec{r}) dr$$

ist nicht weiter als die FOURIER-Transformierte des Potentials $V(\vec{r})$. Im Falle des COULOMB-Potentials einer Punktquelle $V(r) = \frac{Z \cdot e^2}{r}$ ist diese FOURIER-Transformierte:

$$\int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] V(\vec{r}) dr = \frac{4\pi \cdot Z e^2}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2}$$

Damit wird der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2 \cdot M \cdot Z e^2}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2} \right)^2$$

mit $|\vec{k}' - \vec{k}|^2 = 4k^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$ wird daraus:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \cdot e^4}{16 \cdot E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)}$$

$E = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2M}$ ist die Energie des einfallenden Teilchens. Diese Formel beschreibt den Wirkungsquerschnitt im Falle eines punktförmigen Streuzentrum. Für den Fall des ausgedehnten Streuzentrums bedienen wir uns der POISSON-Gleichung

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \cdot V(r)) = 4\pi \cdot Z e^2 \cdot \varrho(r)$$

Für die Punktquelle gilt $\varrho(r) = c \cdot \delta(r)$. Ferner ist:

$$\begin{aligned} I &= \int \exp\left(i\left[(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}\right]\right) \cdot V(\vec{r}) \, d\vec{r} = -2\pi \cdot \int_0^\pi \int_0^\infty \exp\left[i|\vec{k}' - \vec{k}|r \cos\vartheta\right] \cdot V(r) \cdot r^2 \, dr \, d(\cos\vartheta) = \\ &= -2\pi \cdot \frac{1}{i|\vec{k}' - \vec{k}|} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\exp(-i|\vec{k}' - \vec{k}|r) - \exp(i|\vec{k}' - \vec{k}|r)\right] \cdot V(r)r^2 \, dr = \\ &= \frac{4\pi}{|\vec{k}' - \vec{k}|} \cdot \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) V(r)r \, dr \end{aligned}$$

Partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) \cdot V(r)r \, dr &= \frac{1}{|\vec{k}' - \vec{k}|} \cdot \int_0^\infty \cos\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) \cdot \frac{d}{dr}\left(r \cdot V(r)\right) \, dr = \\ &= -\frac{1}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2} \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) \frac{d^2}{dr^2}\left(r \cdot V(r)\right) \, dr = -\frac{4\pi \cdot Z \cdot e^2}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2} \cdot \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) \cdot \varrho(r)r \, dr \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ergibt sich unter Ausnutzung der POISSON-Gleichung. Also folgt:

$$\begin{aligned} \int \exp\left[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}\right] \cdot V(\vec{r}) \, d\vec{r} &= -\frac{4\pi \cdot Z \cdot e^2}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2} \cdot \frac{4\pi}{|\vec{k}' - \vec{k}|} \cdot \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) \cdot \varrho(r)r \, dr = \\ &= -\frac{4\pi \cdot Z \cdot e^2}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2} \cdot \int \exp\left[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}\right] \cdot \varrho(\vec{r}) \, d\vec{r} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{Z^2 \cdot e^4}{16 \cdot E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \left| \int \exp\left[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}\right] \varrho(\vec{r}) \, d\vec{r} \right|^2 = \left(\frac{dQ}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \cdot |F(\vec{k} - \vec{k}')|^2 \text{ mit} \\ |F(|\vec{k}' - \vec{k}|) &= \int \exp\left[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}\right] \varrho(\vec{r}) \, d\vec{r} = \frac{4\pi}{|\vec{k}' - \vec{k}|} \cdot \int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}' - \vec{k}|r\right) \varrho(r)r \, dr \end{aligned}$$

Dies unterscheidet sich von der RUTHERFORD-Formel durch einen Faktor F^2 , der als **Strukturfaktor** oder **Formfaktor** des Kerns bezeichnet wird. Durch ihn wird die endliche Ausdehnung der Dichteverteilung des Kerns berücksichtigt. Wie man sieht, ist $F(|\vec{k}' - \vec{k}|)$ mit der FOURIER-Transformierten der Dichteverteilung $\varrho(\vec{r})$ des Kerns identisch. Dabei ist

$$|\vec{k}' - \vec{k}| = 2k \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

wie schon vorhin gezeigt wurde.

Dies gilt nun zunächst für α -Teilchen und tatsächlich hat man solche Messungen auch zunächst für α -Teilchen durchgeführt. Für Elektronen, die sich mit beinahe Lichtgeschwindigkeit bewegen, modifiziert sich die obige Formel nur auf die Art, dass an die Stelle des RUTHERFORD-Faktors nun die MOTTSche Streuformel für relativistisch bewegte Elektronen als Faktor tritt, während der Formfaktor derselbe bleibt.

Zusammenfassung:

In den vorigen Vorlesungsstunden hatten wir gesehen, dass für den Fall, dass der von dem Elektron zu stoßende Kern nicht punktförmig, sondern ausgedehnt ist, also bei Berücksichtigung der Ausdehnung des zu stoßenden Kerns an Stelle eines punktförmigen Kerns die RUTHERFORD-Formel in der folgenden Weise zu erweitern ist:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \cdot e^4}{16 \cdot E^2} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \cdot |F(\vartheta)|^2$$

mit den Ablenkwinkeln ϑ und φ , so dass $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ und der Energie E des einfallenden Elektrons mit $Z = 1$ und der Kernladungszahl Z . Hinzuge treten zu der ursprünglichen RUTHERFORD-Formel ist nun für den Fall des ausgedehnten Kerns der Faktor $|F(\vartheta)|^2$, wobei man

$$F(\vartheta) = \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot \varrho(\vec{r}) dr$$

als den Formfaktor des Elektrons bezeichnet mit den Wellenzahlen $k' = \frac{p'}{\hbar}$ und $k = \frac{p^{(0)}}{\hbar}$ des Elektrons vor und nach der Streuung. Außerdem gilt

$$|\vec{p}' - \vec{p}^{(0)}| = \Delta p = 2p^{(0)} \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \quad \text{und} \quad |\vec{k}' - \vec{k}| = 2k \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

wie wir es in den ersten Vorlesungsstunden hergeleitet hatten.

2.2.3 Spezialfall: Punktförmige Kerne

Eine punktförmige Ladungsverteilung des Kerns kann beschrieben werden durch $\varrho(r) = \delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Mit

$$\exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] = \exp[i(\vec{k}' - \vec{k})_x \cdot \vec{x}] \cdot \exp[i(\vec{k}' - \vec{k})_y \cdot \vec{y}] \cdot \exp[i(\vec{k}' - \vec{k})_z \cdot \vec{z}]$$

wird $\exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}]\delta(r) = \delta(r)$, also gilt für $\varrho(r) = \delta(r)$:

$$F(\vartheta, k) = \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot \varrho(\vec{r}) dr = \int \delta(r) dr = 1$$

Für den Fall des punktförmigen Kerns erhalten wir also wieder die ursprüngliche RUTHERFORD-Formel.

Für den Fall, der extrem relativistischen Bewegung des Elektrons bekommen wir schon dann, wenn der Kern als punktförmig angenommen wird, eine Abweichung von der beim letzten mal hergeleiteten klassischen Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Z \cdot e^2}{E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Eine Abweichung von dieser klassischen Formel kommt im relativistischen Fall auch beim punktförmigen Kern allein schon durch die quantenmechanische Behandlung zustande, die im nichtrelativistischen Fall mit punktförmigem Kern noch keines von der klassischen Behandlungsweise verschiedenes Resultat lieferte. Im relativistischen Fall lautet das Ergebnis der quantenmechanischen Behandlung für den punktförmigen Kern:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Z \cdot e^2}{E}\right)^2 \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ ist hier also im Unterschied zum klassischen Fall noch hinzuge treten, was mit dem Elektronenspin zusammenhängt. Dies muss hier ohne Herleitung mitgeteilt werden, da zur Herleitung die relativistische Quantenmechanik des Elektrons, das heißt, die DIRAC-Theorie benötigt wird.

Den Fall des ausgedehnten Kerns bekommt man dann im relativistischen wie im nichtrelativistischen Fall einfach dadurch, dass man dem vorstehenden Ergebnis für den punktförmigen Kern denselben Formfaktor

$$F(\vartheta, k) = \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot \varrho(\vec{r}) dr$$

hinzufügt, wie wir ihn auch im nichtrelativistischen Fall erhalten hatten, also:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Z \cdot e^2}{E}\right)^2 \cdot |F(\vartheta, k)|^2$$

Die Methode, mit der man diese Formeln benutzt, verläuft in der Weise, dass man zunächst Ladungsverteilungen $\varrho(\vec{r})$, die einem als plausibel erscheinen in den Ausdruck für den Formfaktor einsetzt, diesen und dann den Wirkungsquerschnitt ausrechnet und sieht, wie gut letzterer mit den Experimenten übereinstimmt. Falls keine gute Übereinstimmung zu erzielen ist, versucht man es mit einem anderen $\varrho(\vec{r})$ solange, bis optimale Übereinstimmung mit dem Experiment erkennbar ist. Als Beispiel wollen wir

Also gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot E} \right)^2 \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \cdot \left| \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot \varrho(\vec{r}) \, d\vec{r} \right|^2$$

wobei E die einfallende Energie des relativistisch bewegten Elektrons ist. Die Güte der Übereinstimmung ist bei leichten Kernen recht gut. Allerdings können die Nullstellen der BORNschen Näherung nicht verifiziert werden. Für schwere Kerne gibt es größere Abweichungen.

Für mittlere und schwere Kerne haben HAHN, RAVENHALL und HOFSTADTER die DIRAC-Gleichung voll numerisch gelöst mit $\Delta V(r) = 4\pi \cdot Z \cdot e^2 \cdot \varrho(r)$, wobei folgende $\varrho(r)$ eingesetzt wurden:

- * Exponentiell: $\varrho(r) = \varrho_0 \cdot \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$
- * GAUSSförmig: $\varrho(r) = \varrho_0 \cdot \exp\left(-\left(\frac{r}{b}\right)^2\right)$
- * Gleichmäßig: $\varrho(r) = \begin{cases} \varrho_0 & \text{für } |\vec{r}| < \frac{k}{R} \\ 0 & \text{für } |\vec{r}| > \frac{k}{R} \end{cases}$
- * Abgeflacht: $\varrho(r) = \varrho_0 \cdot [1 + \exp(k(x - r))]^{-1}$
- * Gleichförmig: $\varrho(r) = \varrho_0 \cdot \left[1 + \left(\frac{r}{d}\right)^4\right] \cdot [1 + \exp(k(x - r))]^{-1}$

Zusammenfassung:

In den ersten Vorlesungsstunden dieser Vorlesung haben wir damit begonnen, die Streuung von Elektronen an Kernen unter dem Gesichtspunkt zu behandeln, die Ausdehnung des Kerns durch die Elektronenstreuung zu messen. Zu diesem Zweck hatten wir zunächst eine Formel für die Elektronenstreuung an Kernen in der BORNschen Näherung der quantenmechanischen Theorie der Elektronenstreuung hergeleitet, in welcher der Einfluss der Ausdehnung des Kerns berücksichtigt wurde. Sie lautete:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \cdot e^4}{16 \cdot E^4} \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \cdot |F(\vartheta)|^2$$

Dabei war $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ der differentielle Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkeleinheit mit dem Raumwinkelement $d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, dem Streuwinkel ϑ , also dem Winkel zwischen der Bahn des einlaufenden Teilchens und der Bahntangente des auflaufenden Teilchen nach dem Stoß. Der Einfluss der Ausdehnung des Kerns hatte sich in der obigen Formel nur dadurch bemerkbar gemacht, dass zu dem Ausdruck, der für den Fall der punktförmigen Ladungskonzentration gegolten hatte, nun für den Fall der ausgedehnten Ladungsverteilung des Kerns durch den Faktor F hinzugetreten ist. Diesen Faktor F nennt man deshalb den Formfaktor, weil man ja nur im Fall des ausgedehnten Kerns von einer Form oder Struktur des Kerns sprechen kann, von dem dieser Formfaktor abhängt, nicht jedoch im Falle des punktförmigen Kerns. Der Ausdruck, den wir das letzte mal für den Formfaktor F erhalten hatten, lautete

$$F(\vartheta) = \oint \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot \varrho(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_0^\infty \frac{\sin(|\vec{k}' - \vec{k}|r)}{|\vec{k}' - \vec{k}|r} \cdot \varrho(r) \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

mit $|\vec{k}' - \vec{k}| = 2k \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$. Im Grenzfall der Punktquelle wird die Ladungsdichte:

$$\varrho(r) = \delta(r) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

Dies gilt beim Übergang zu Polarkoordinaten. Da in diesem Fall der Integrand nur für $r = 0$ endlich bleibt, und zwar

$$\frac{\sin\left(\frac{|\vec{k}' - \vec{k}|r}{|\vec{k}' - \vec{k}|r}\right)}{|\vec{k}' - \vec{k}|r} \mapsto 1 \text{ für } r \mapsto 0$$

wird $F(\vartheta) \mapsto 1$ für $r \mapsto 0$.

Die bisherigen Formeln der BORNschen Näherung galten aber nur für den Fall der Streuung eines nichtrelativistischen Teilchens wie beispielsweise eines α -Teilchens an einem ausgedehnten Kern. Für die Streuung eines relativistisch bewegten Elektrons lautet die BORNsche Näherung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \left| \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot V(\vec{r}) \, d\vec{r} \right|^2$$

an Stelle von

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{M}{2\pi}\right)^2 \cdot \left| \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot V(\vec{r}) \, d\vec{r} \right|^2$$

wobei wir vom nichtrelativistischen Fall ausgegangen waren. Man sieht, dass E im nichtrelativistischen Fall in M übergeht. $\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ kommt jedoch noch durch den Spin des Elektrons hinzu, während das α -Teilchen ja den Spin 0 hat. Sonst gibt es weiter keine Unterschiede zwischen den beiden Formeln. Wir haben wieder denselben FOURIER-Koeffizient für das Potential. Für das COULOMBfeld mit Punktquelle lautet dieser beispielsweise

$$\int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot V(\vec{r}) \, d\vec{r} = \frac{4\pi \cdot Z \cdot e^2}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2}$$

so dass wir den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2 \cdot E \cdot Z \cdot e^2 \cdot \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{|\vec{k}' - \vec{k}|^2} \right)^2$$

mit $|\vec{k}' - \vec{k}|^2 = 4k^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$. Anstelle von $E = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2M}$ wird $E = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} = k^0$. Für das **relativistisch bewegte Elektron** bekommen wir die MOTTsche Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot E} \right)^2 \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

an Stelle der RUTHERFORD-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z \cdot e^2}{4 \cdot E} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

Bei der Berücksichtigung der **Ausdehnung** des Kerns geht alles genauso wie beim nichtrelativistischen Fall jede Näherung und wir bekommen:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z \cdot e^2}{2 \cdot E} \right)^2 \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \cdot |F(\vartheta)|^2$$

mit

$$F(\vartheta) = \int \exp[i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}] \cdot \varrho(\vec{r}) \, d\vec{r} = \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{|\vec{k}' - \vec{k}|r}{|\vec{k}' - \vec{k}|r}\right)}{|\vec{k}' - \vec{k}|r} \cdot \varrho(r) \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

das heißt, wie bekommen denselben Formfaktor wie für den nichtrelativistischen Fall. Das rechnerische Ergebnis (einer solchen BORNschen Näherung) verglichen mit dem Experiment bei ^{16}O zeigt Figur ② auf Seite 14 des ELTON. Die Rechnung, die Figur ② zugrunde liegt, wurde mit dem folgenden Ausdruck für die Dichte durchgeführt:

$$\varrho(r) = \frac{1}{4\pi \cdot R^3} \cdot \frac{8}{Z} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{R}{b}\right)^3 \cdot \left[1 + \frac{Z-2}{3} \cdot \left(\frac{3 \cdot (b^2 - a^2)}{2b^2} + \frac{a^2 \cdot r^2}{b^4} \right) \right]$$

Den Verlauf dieser Dichte ist etwa auf Figur ③ auf Seite 327 vom HOFSTADTER zu übernehmen sowie auf Figur 32 auf Seite 391. Man sieht, dass ein Dichteverlauf der vorliegenden Art für leichte Kerne charakteristisch ist. Der Formfaktor wird für diesen Dichteverlauf:

$$F(\vartheta) = \left(1 - \frac{Z-2}{6Z} \cdot a^2 \cdot |\vec{k}' - \vec{k}|^2 \right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{4} \cdot b^2 \cdot |\vec{k}' - \vec{k}|^2 \right)$$

mit $|\vec{k}' - \vec{k}| = 2k \cdot \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$ und $b^2 = a^2 + a_p^2$, wobei a_p der Radius des Protons, also des Wasserstoffkerns ist. Nach optimaler Anpassung der BORNschen Näherung an die Messwerte erhält man a aus der Lage aller Nullstellen des Formfaktors $F(\vartheta)$ und b aus der Anpassung der übrigen Kurve.

Für leichte Kerne wie ^{16}O stimmt – wie man sieht – die BORNsche Näherung mit den Messwerten und mit der exakten Kurve sehr gut überein bis an die Bezugsnullstelle, wo die Messwerte und die exakte Kurve nur ein Minimum erreichen. Figur 21 auf Seite 376 im HOFSTADTER zeigt jedoch, wieviel schlechter die Übereinstimmung zwischen BORNscher Näherung und exakter Kurve bei höher geladenen Kernen wie Gold und Kupfer mit $Z = 79$ und $Z = 29$ ist. Für Gold ist die BORNsche Näherung sogar noch schlechter als für Kupfer. Dies hat seinen Grund darin, dass die BORNsche Näherung die niedrigste Näherung in einer Entwicklung nach dem Parameter $\frac{e^2 \cdot Z^2}{\hbar \cdot r}$ ist. Sie kann also nur einigermaßen gut sein, falls $\frac{e^2 \cdot Z^2}{\hbar \cdot r} < 1$ ist. Nun gilt

$$\frac{e^2}{\hbar \cdot r} = \frac{1}{137}$$

so dass für $Z = 0$ tatsächlich

$$\frac{e^2 \cdot Z^2}{\hbar \cdot r} < \frac{1}{2} < 1$$

ist. Für $Z = 29$ und $Z = 79$ ist dies aber keineswegs mehr der Fall. Für diese schweren Kerne muss man daher eine exakte vollnumerische Rechnung machen, wie sie von HAN, RAVENHALL und HOFSTADTER (siehe Seite 192 im HOFSTADTER) ausgeführt worden ist. Die Gleichung, welche sie vollnumerisch lösten, war die DIRAC-Gleichung:

$$[\alpha \cdot p + \beta \cdot mc^2 + V(r)] \psi = E\psi$$

wobei insbesondere eine Ladungsverteilung der Form

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\exp\left(\frac{r-\tau}{Z_1}\right) + 1}$$

angenommen wurde. Für Elemente zwischen $^{40}_{20}\text{Ca}$ und $^{209}_{83}\text{Bi}$, nämlich $^{40}_{20}\text{Ca}$, $^{51}_{23}\text{V}$, $^{59}_{27}\text{Co}$, $^{115}_{49}\text{In}$, $^{122}_{51}\text{Sb}$, $^{197}_{79}\text{Au}$ und $^{209}_{83}\text{Bi}$ ergibt sich durch Messung $r = (1,07 \pm 0,02) \cdot A^{\frac{1}{3}}$ und $\tau = 2,4 \pm 0,3$ unabhängig von A . Anstelle des Parameters Z_1 ist es üblich, diejenige Strecke t einzuführen, längs welcher der Dichteabfall von 90% bis auf 10% stattfindet. Man erhält als von A unabhängiges Ergebnis $t = 2,4 \cdot 10^{-13}$ cm.

Figur 24 auf Seite 379 im HOFSTADTER zeigt, dass die Dichte des Kerns innerhalb gewisser Grenzen einen bestimmten einheitlichen für alle Kerne im Mittel etwa geltenden Durchschnittswert annimmt. Betrachtet man die Größe des Kernradius, also $R = r = (1,07 \pm 0,02) \cdot A^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{-13}$ cm, so folgt für das Kernvolumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3 \cdot A \text{ mit } R_0 = (1,07 \pm 0,02) \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

Dieses Ergebnis für das Kernvolumen bedeutet also in Worten:

Das Volumen der Kerne ist proportional zur Anzahl A der Nukleonen im Kern.

Wenn wir die Dichte des Kern gemäß $\bar{\rho} = \frac{A}{V}$ einführen, so ergibt sich:

Die zuvor betrachtete Dichte $\rho(r)$, für die sich zuletzt die FERMI-Verteilung als besonders gut ergeben hatte, wurde so eingeführt, dass sie auf ein normiert war:

$$\int \rho(r) dr = 1$$

Nach Ausführung der Integration über die FERMI-Verteilung ergibt sich:

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi \cdot r^3} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot Z_1^2}{r^2}\right)^{-1} = \frac{3}{4\pi \cdot R_0^3 \cdot A} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot Z_1^2}{R_0 r \cdot A^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}$$

Es ist aber

$$Z_1 = \frac{t}{4,4} = 0,545 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

und somit:

$$\pi^2 \cdot \frac{Z_1^2}{r^2} = \pi^2 \cdot \left(\frac{0,545}{1,07}\right)^2 \cdot \frac{1}{A^{\frac{2}{3}}} = \pi^2 \cdot \frac{0,255}{A^{\frac{2}{3}}} = \frac{2,52}{A^{\frac{2}{3}}} < 0,28 \text{ für } A > 27$$

$$\varrho_0 = \frac{\bar{\varrho}}{A} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot Z_1^2}{R_0^2 \cdot A^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1}$$

$\bar{\varrho}$ ist also eine von A unabhängige Sättigungsdichte, von der $\varrho_0 \cdot A$ nur wenig verschieden ist und der sich $\varrho_0 \cdot A$ mit wachsendem A immer mehr annähert, so dass $\varrho_0 \cdot A = 1,1 \cdot \bar{\varrho}$ für $A = 125$ gilt und $\varrho_0 \cdot A = 1,07 \cdot \bar{\varrho}$ für $A = 216$ (siehe HOFSTADTER auf Seite 379 Figur 24 und auf Seite 391 Figur 32). Die Sättigungsdichte, die der Dichte $\varrho_0 \cdot A$ im Innern des Kerns zustrebt, ist also $\bar{\varrho} = \frac{3}{4\pi \cdot R_0^3}$ mit $R_0 = (1,07 \pm 0,02) \cdot 10^{-13}$ cm.

Die Existenz einer solchen Sättigungsdichte legt nun eine Vorstellung vom Aufbau des Kerns nahe, nach der die Nukleonen im Kern in einer Art von dichtester Kugelpackung aufeinander liegen. Dieses Bild würde ja gerade dieselbe konstante Dichte für jeden Kern ergeben und die einzelnen Kerne würden sich nur durch ihre Nukleonenzahl, das heißt durch ihre Größe unterscheiden, so wie verschieden große Tropfen ein und derselben Flüssigkeit. Bei den Kernen ist diese Flüssigkeit die Kernmaterie mit der Dichte $\bar{\varrho}$. Das Volumen des Kerns wächst selbstverständlich proportional zur Nukleonenzahl, also:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3 \cdot A = \frac{A}{\bar{\varrho}}$$

Aus einem solchen Modell ergeben sich nun aber auch Folgerungen für die Bindungsenergien der Kerne, da bei dieser Kugelpackung der Nukleonen jedes Nukleon nur mit seinen nächsten Nachbarn wechselwirkt. Daraus folgt, dass für alle Kerne oberhalb Helium bzw. Kohlenstoff auf jedes Nukleon der gleiche Betrag an Bindungsenergie entfallen muss. Nur die Nukleonen an der Oberfläche haben eine geringere Anzahl von nächsten Nachbarn und somit einen geringeren Betrag an Bindungsenergie. Für die Bindungsenergie setzt man also zunächst an:

Zusammenfassung:

In der letzten Vorlesung hatten wir aus den Resultaten der Elektronenstreuungen von HOFSTADTER Folgerungen für die Bindungsenergien der Atomkerne gezogen. Das Ergebnis der Elektronenstreuungen von HOFSTADTER war ja gewesen, dass die Kerne oberhalb einer gewissen Mindestzahl von Nukleonen eine einheitliche Dichte besitzen. Mit Hilfe dieses Resultats hatten wir eine halbempirische Massenformel für die Bindungsenergien der Atomkerne aufgestellt, die auch BETHE-WEIZSÄCKER-Formel genannt wird. Die Bindungsenergie war dabei zu definieren als die Differenz zwischen der Ruhemasse Mc^2 des zusammengebundenen Kerns und aus der Summe der Ruhemassen der einzelnen freien Nukleonen dieses Kerns, also $E = -B = M \cdot c^2 - (N \cdot M_n + Z \cdot M_p)$. Mit diesen Definitionen hatten wir als halbempirische Massenformel folgenden Ausdruck erhalten:

$$-B = a_v \cdot A - a_o \cdot A^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - b \cdot \left(\frac{N - Z}{N + Z} \right)^2 + \delta$$

Die einzelnen Terme hatten wir dabei eingehend begründet und zwar hatten wir den ersten Term als Volumenterm, den zweiten als Oberflächenterm, den dritten als COULOMBkern und den vierten als Symmetrieterm eingeführt. Die zahlenmäßige Werte der Konstanten waren dabei gewesen:

$$a_v = 16 \text{ MeV}, a_o = 19 \text{ MeV}, b = 22 \text{ MeV}, \delta = \begin{cases} 12A^{-\frac{1}{2}} & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -12A^{-\frac{1}{2}} & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

Den COULOMBterm hatten wir dabei erhalten aus der Abschätzung des aus der Elektrostatik für die elektrostatische potentielle Energie bekannten Ausdrucks

$$E_{\text{COULOMB}} = \frac{1}{2} \int \frac{\varrho_{el}(\vec{r}) \cdot \varrho_{el}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r} d\vec{r}'$$

wobei

$$\varrho_{el}(r) = \frac{e \cdot Z}{A} \cdot \begin{cases} \bar{\varrho} & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases} = \frac{e \cdot Z}{A} \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\pi \cdot R_0^3 \right)^{-1} & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Dabei messen wir die Richtung von \vec{r}' relativ zur Richtung von \vec{r} durch den Kosinus des von \vec{r} und \vec{r}' eingeschlossenen Winkels, also

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}| \cdot |\vec{r}'|} = \xi$$

so dass:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{COULOMB}} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot Z \cdot e}{4\pi \cdot A \cdot R_0^3} \right)^2 \cdot \int_0^R 4\pi r^2 dr \int_0^{R+1} \int_{-1}^1 \frac{2\pi \cdot r'^2 dr' d\xi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \xi}} = \\
 &= \frac{9 \cdot Z \cdot e^2}{4 \cdot R^6} \cdot \int_0^R r dr \cdot \int_0^R r' dr' [|r + r'| - |r - r'|] = \frac{9 \cdot Z \cdot e^2}{2 \cdot R^6} \cdot \int_0^R r dr \cdot \int_0^r r' dr' \cdot 2r' = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 \cdot e^2}{R} = \\
 &= \boxed{\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}}
 \end{aligned}$$

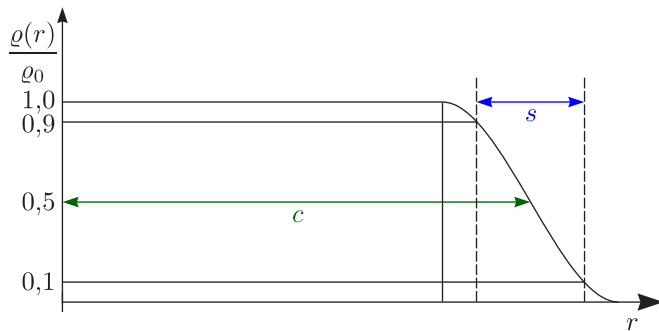
Es wurde beim letzten Schritt $R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ berücksichtigt.

Der Symmetrieterm lässt sich daraus erklären, dass das PAULI-Prinzip nur je zwei Protonen (mit Spin nach oben und Spin nach unten) und zwei Neutronen (mit Spin nach oben und Spin nach unten) in einem Energieniveau zulässt. Hat man aber mehr als zwei nur gleichartige Teilchen, das heißt, mehr als zwei Neutronen **oder** mehr als zwei Protonen, so können die über die Zahl zwei hinausgehenden Neutronen oder Protonen nur in einem höheren Energieniveau Platz nehmen.

2.2.4 Dichteverteilungsfunktion von Atomkernen

Die Dichte von Kernmaterie lässt sich durch folgende Formel beschreiben:

$$\rho(r) = \frac{\rho_F}{1 + \exp\left[\frac{r-c}{s}\right]}$$



c bezeichnet man als Halbdichterradius und s als Oberflächendicke. s besitzt für alle Kerne den konstanten Wert $4\pi \cdot \ln(3) \cdot 10^{-13}$ cm. Für c gilt etwa $c = 1,0 \cdot 10^{-13} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ cm. Leichte Kerne besitzen näherungsweise eine Kugelform, also kann man folgenden Ansatz für die Kerndichte machen:

$$\rho_0(r) = \begin{cases} \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} & \text{für } r < R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

Man bezeichnet ρ_0 als „equivalent uniform density“. Als eigentlichen Kernradius definiert man:

$$\int \rho_0(r) \cdot r^2 d^3r = 4\pi \cdot \int_0^R \frac{r^4}{\frac{4\pi}{3}R^3} dr = \frac{3}{5}R^2 \sim R^2$$

Das Kernvolumen ist damit proportional zu A , wobei A die Massenzahl des Kerns darstellt. Das liegt daran, dass aufgrund der kurzreichweitigen Kernkraft die Nukleonen sehr eng beieinander liegen (Tröpfchenmodell, „liquid dropped water“). Näherungsweise gilt für den Kernradius $R = 1,2 \cdot 10^{-13} \cdot A^{\frac{1}{3}}$ cm. Wenn wir ungefähr abschätzen wollen, wie sich ein Kern aufbaut, so kann man dies für leichte Kerne in der folgenden Weise tun: Man nimmt an, dass die Nukleonen in einem Potentialtopf liegen, wobei die einzelnen Nukleonen der stationären SCHRÖDINGER-Gleichung genügen:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{1}{2}k^2 \right] \psi_n(r) = E_n \psi_n(r) \text{ mit } \psi_n(r) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} k x^2 \right] \psi_{n_x}(x) = E_{n_x} \psi_{n_x}(x) \text{ mit } E_{n_x} = \hbar \omega \left(n_x + \frac{1}{2} \right)$$

Mit $k = m\omega^2$ und $a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ erhält man die normierten Eigenfunktionen:

$$\psi_{n_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{a\pi^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{n_x!} \cdot 2^{\frac{n_x}{2}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2\right] \cdot H_{n_x}\left(\frac{x}{a}\right) \text{ mit } \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho_{n_x}(x) dx = 1$$

H_{n_x} sind die HANKEL-Funktionen:

$$H_1 = 2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right); H_2 = 4 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2; H_3 = 8 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^3 - 12 \cdot \left(\frac{x}{a}\right); \dots$$

Außerdem gilt $\varrho_{n_x}(x) = |\psi_{n_x}(x)|^2$. Somit folgt für $n = n_x + n_y + n_z = 0$:

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{a\pi^{\frac{1}{2}}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$

Dies führt auf die auf eins normierte Dichte des He-Kerns:

$$\varrho_0(r) = \left(\frac{1}{a\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^3 \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

Der Zustand für $n = n_x + n_y + n_z = 1$ ist dreifach entartet, nämlich:

$$1.) n_x = 1, n_y = n_z = 0$$

$$\psi_{\substack{n=1 \\ 1,0,0}}(r) = \frac{1}{\sqrt{a\pi^{\frac{1}{2}}}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)$$

$$2.) n_x = 0, n_y = 1, n_z = 0$$

$$\psi_{\substack{n=1 \\ 0,1,0}}(r) = \frac{1}{\sqrt{a\pi^{\frac{1}{2}}}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{y}{a}\right)$$

$$3.) n_x = n_y = 0, n_z = 1$$

$$\psi_{\substack{n=1 \\ 0,0,1}}(r) = \frac{1}{\sqrt{a\pi^{\frac{1}{2}}}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{z}{a}\right)$$

$$\varrho_{n=1}(r) = \sum_{x,y,z} \psi_{\substack{n=1 \\ x,y,z}}^*(r) \psi_{\substack{n=1 \\ x,y,z}}(r) = \left(\frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^3 \cdot \exp\left(-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \cdot 2 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$\varrho_{\substack{16 \\ 8}}^{SM}(r) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{a\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^3 \cdot \left[4 + 8 \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \cdot \exp\left(-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$

$$\varrho_{\substack{16 \\ 8}}(r) = \int \varrho_{\substack{16 \\ 8}}^{SM}(r') \cdot \varrho_N(r' - r) dr' \text{ mit } \varrho(r) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \cdot a_N^2} \cdot \exp\left(-\left(\frac{r}{a_N}\right)^2\right)$$

$$\varrho_{\substack{16 \\ 8}}(r) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a \cdot \pi^{\frac{1}{2}}}\right)^3 \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{a_N^2}{a^2 + a_N^2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{a^2}{a^2 + a_N^2}\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$F = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot (\vec{p}^{(0)} - \vec{p}') \cdot \vec{r}\right) \cdot \varrho(r) dr = \left(1 - \frac{1}{8} \cdot a^2 \cdot \frac{|\vec{p}^{(0)} - \vec{p}'|^2}{\hbar^2}\right)^2 \cdot \exp\left(-\frac{a^2 + a_N^2}{4}\right) \cdot \frac{|\vec{p}^{(0)} - \vec{p}'|}{\hbar^2}$$

Summiert man diese Funktionen auf, so ergibt sich für schwere Kerne obiger Verlauf.

2.3 Empirische Massenformel

Liegen A Nukleonen vor, so haben diese die Energie $E(A) = A \cdot Mc^2$. Um aber noch die Zusammenbindung der Nukleonen zu berücksichtigen, muss man einen Term B , nämlich die Bindungsenergie, abziehen. Die semi-empirische Formel für B geht aus WEIZSÄCKER zurück:

$$B = a_v \cdot A - a_o \cdot A^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - b \cdot \left(\frac{N - Z}{N + Z} \right)^2 + \delta$$

Den ersten Term bezeichnet man als Volumenterm, den zweiten als Oberflächenterm, den dritten als COULOMBterm, den vierten als Asymmetrieterm und den fünften schließlich als Paarungsterm.

* Volumenterm:

Die Nukleonen sitzen sehr dicht beieinander, wobei das Volumen des Kerns und damit auch die Bindungsenergie proportional zu A ist.

* Oberflächenterm:

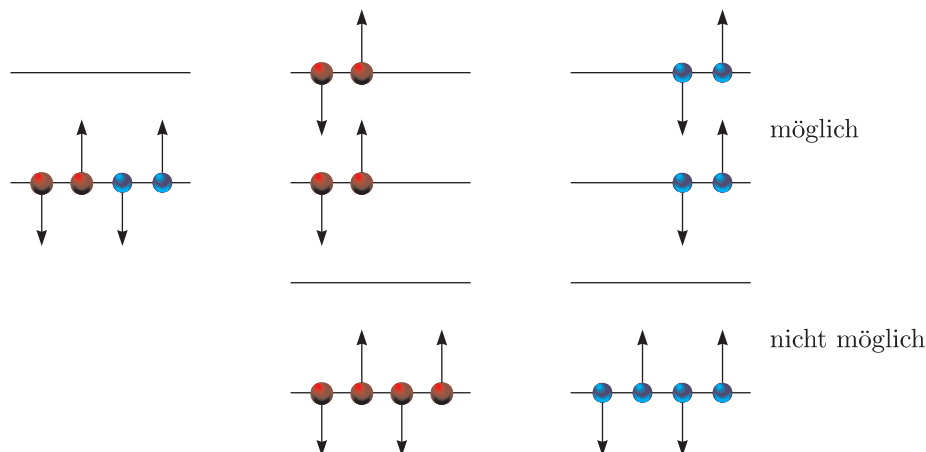
Die Nukleonen an der Oberfläche erfahren keine so große Kraft, weshalb man einen Oberflächenterm abziehen muss. Da die Oberfläche nicht mit A , sondern nur mit $A^{\frac{2}{3}}$ ansteigt, ist auch der Oberflächenterm proportional zu $A^{\frac{2}{3}}$.

* COULOMBterm:

Auf Protonen wirkt die COULOMB-Kraft abstoßend, was ebenfalls die Bindung verringert, womit man einen weiteren Term abziehen muss.

* Symmetrieterm:

Protonen und Neutronen befinden sich im Kern innerhalb eines Potentials, in dem sie nur bestimmte Energieniveaus einnehmen können. Der Symmetrieterm lässt sich nun daraus erklären, dass das PAULI-Prinzip nur je zwei Protonen (mit Spin nach oben und Spin nach unten) und zwei Neutronen (mit Spin nach oben und Spin nach unten) in einem Energieniveau zulässt. Hat man aber mehr als zwei nur gleichartige Teilchen, also mehr als zwei Neutronen **oder** mehr als zwei Protonen, so können die über die Zahl zwei hinausgehenden Neutronen nur in höheren Energieniveaus Platz finden. Zwei Protonen und zwei Neutronen können also in ein- und demselben Energieniveau Platz nehmen, während von vier Neutronen oder vier Protonen jeweils zwei in einem höheren Niveau untergebracht werden müssen. Siehe die nachfolgenden Figuren:



Dies ist so, da Nukleonen halbzahligen Spin haben und damit FERMI-Teilchen sind. Beispielsweise befinden sich im ${}^4_2\text{He}$ zwei gepaarte Protonen und zwei gepaarte Neutronen im selben Quantenzustand. Hat man weitere Nukleonen, so müssen diese höhere Energiezustände besetzen. Dass gleichartige Fermionen (wie Nukleonen) die Paarungseigenschaft besitzen, ist ein fundamentaler Effekt auf dem im Falle der Elektronen auch die Supraleitung beruht. Die Begründung dieses Effekts müssen wir uns jedoch für später vorbehalten.

* Zahlenwerte:

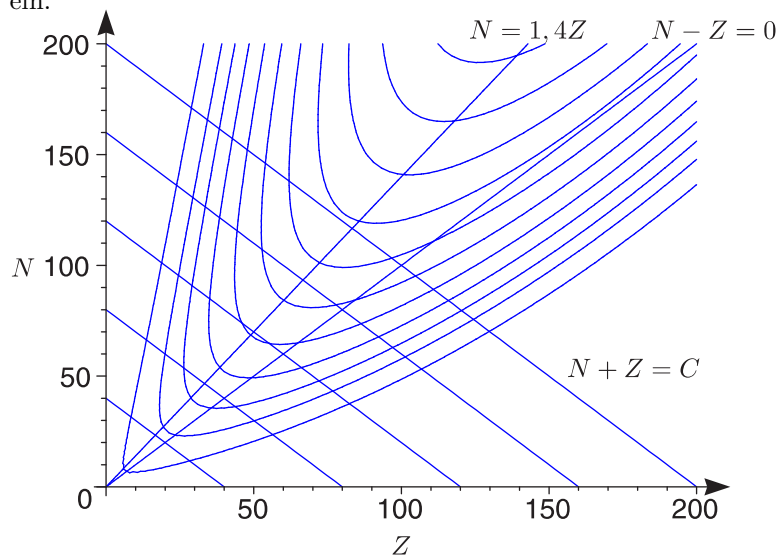
$$a_v = 16 \text{ MeV}, a_o = 19 \text{ MeV}, b = 22 \text{ MeV}, \delta = \begin{cases} 12A^{-\frac{1}{2}} & \text{für gg-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- oder gu-Kerne} \\ -12A^{-\frac{1}{2}} & \text{für uu-Kerne} \end{cases}$$

gg- und uu-Kerne haben den Spin 0. ug- oder gu-Kerne besitzen jedoch einen ungeraden Spin.

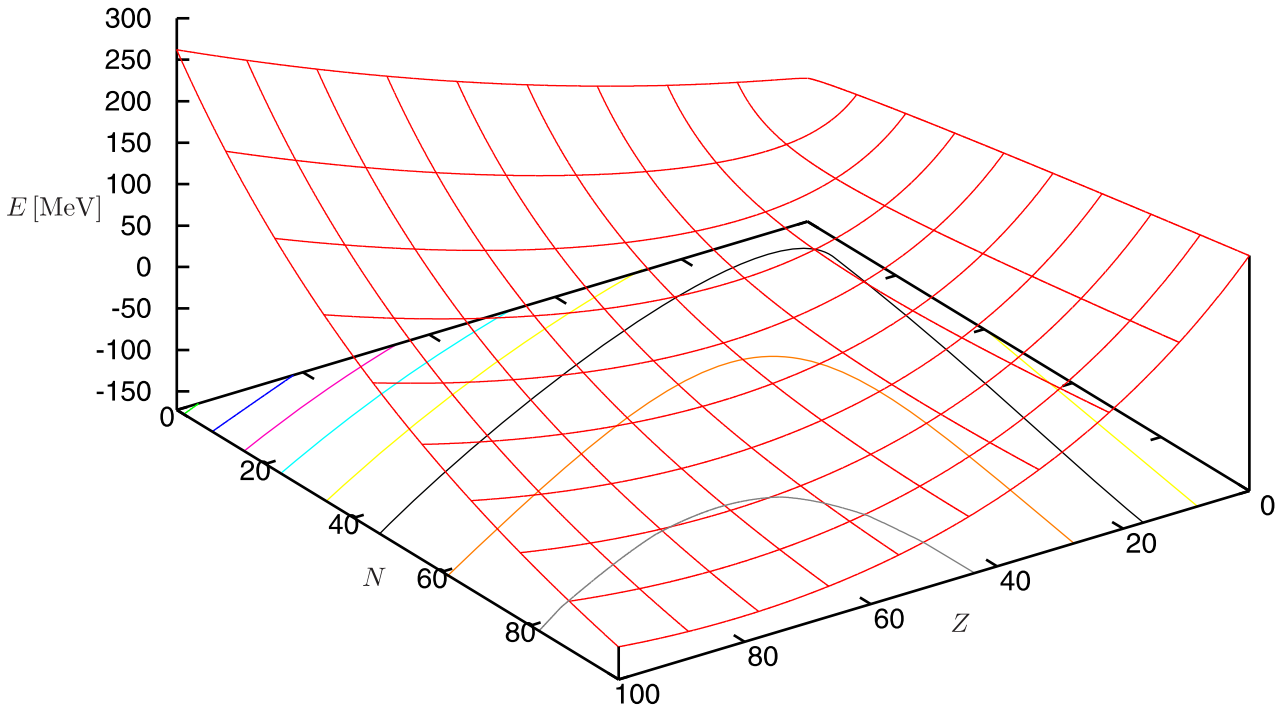
Allgemein gilt für die Kernenergie:

$$E = M \cdot c^2 - [N \cdot M_n + Z \cdot M_p] \cdot c^2 = -B$$

Die Masse des Kerns ist also kleiner als die Summe der Massen aller freien Nukleonen, aus denen der Kern besteht. Bei der Aufstellung der vorstehend behandelten BETHE-WEIZSÄCKER-Forme, hatten wir vorausgesetzt, dass die Kerne kugelsymmetrisch seien. Tatsächlich sind sie dies auch bis zu einer Massenzahl von $A = N + Z = 155$. Die BETHE-WEIZSÄCKER-Formel ist eine Funktion von N und Z , da ja $A = N + Z$, also $E = E(N, Z) = -B(N, Z)$ gilt. Um einen Überblick über ihre physikalischen Aussagen für die Systematik der Bindungsenergien der Kerne zu gewinnen, ist es am zweckmäßigsten, sie in Form eines Energietals darzustellen, und zwar als Energietal über der N - Z -Ebene. Die N - Z -Ebene wird gewöhnlich so dargestellt, dass man N nach oben und Z nach rechts aufträgt, so dass jeder Kern mit einem N - Z -Koordinatenpaar durch einen Punkt in der N - Z -Ebene eindeutig vertreten ist. Senkrecht über diesem Punkt trägt man dann den Wert der Bindungsenergie des betreffenden Kerns auf, den dieser nach der BETHE-WEIZSÄCKER-Formel hat und bekommt so das genannte Energietal (siehe HEISENBERG, Abbildung 12, Seite 15). Wir stellen dieses Tal durch Äquipotentialkurven für konstante Energie dar; ebenso zeichnen wir die Geraden $N + Z = C$ und $N - Z = 0$ ein.



Durch Wirkung des Symmetrieterms besitzt dieses Energietal eine Talsohle, die für kleine Z bei $N = Z$ beginnt und bei großen Z jedoch auf etwa $N = 1,4Z$ umbiegt und zwar aufgrund des COULOMBterms, der nicht in N und Z symmetrisch ist.



Dazu betrachten wir zunächst den Energieunterschied von benachbarten Kernen mit demselben $N+Z = A$ und einem um zwei verschiedenen Neutronenüberschuss $N - Z$. Dieser Überschuss kann nur vom Symmetrieterm und dem COULOMBterm herrühren, da der Volumen- und Oberflächenterm nur von A abhängen. Aus der BETHE-WEIZSÄCKER-Formel folgt für den Beitrag des Symmetrieterms:

$$\Delta E_{\text{Symmetrie}} = b \cdot \left[\frac{(N - Z + 2)^2}{N + Z} - \frac{(N - Z)^2}{N + Z} \right] = b \cdot \frac{2 \cdot (N - Z)^2 + 4}{N + Z}$$

Damit ergibt sich für $N = Z$:

$$\Delta E_{\text{Symmetrie}}(\Delta(N - Z) = 2) = \frac{44 \text{ MeV}}{A} < 4,4 \text{ MeV für } A > 10$$

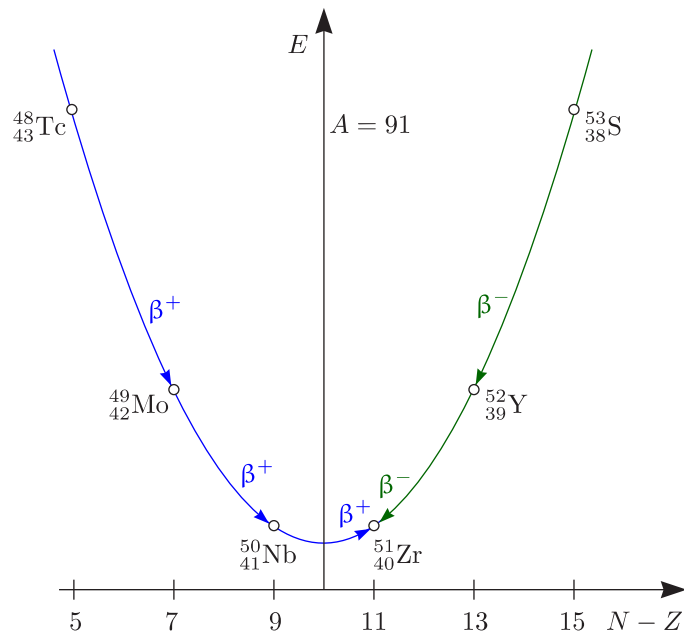
Für den Beitrag des COULOMBterms folgt:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{COULOMB}}(\Delta(N - Z) = 2) &= -\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot \left[\frac{(Z + 1)^2 - Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \right] \approx \frac{6}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}} \cdot Z = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{R_0} \cdot A^{\frac{2}{3}} \text{ für } Z = \frac{A}{2} \\ &= 0,646 \cdot 0,931 \cdot A^{\frac{2}{3}} \text{ MeV} = 0,601 \cdot A^{\frac{2}{3}} \text{ MeV} \end{aligned}$$

Für verschiedene A ergibt sich:

$$\Delta E_{\text{COULOMB}} = \begin{cases} 0,601 \cdot 20 \text{ MeV} \approx 12 \text{ MeV} & \text{für } A = 91 \\ 0,601 \cdot 10 \text{ MeV} \approx 6,01 \text{ MeV} & \text{für } A = 40 \\ 0,601 \cdot 7 \text{ MeV} \approx 4,2 \text{ MeV} & \text{für } A = 20 \end{cases}$$

Durch jeden Schnitt $N + Z = A = \text{const.}$ bekommen wir also Kurven $E(N - Z)$ in der Schnittebene, auf denen die Kerne mit diesen Energiedifferenzen liegen. Legen wir den Schnitt zunächst bei **ungeradem** A , so liegen die Kerne alle **auf einer einzigen Kurve**, die wegen der Form des Symmetrieterms parabolisch ist. Beispielsweise für $A = 91$ bekommen wir die Kurve von Abbildung 18 auf Seite 17 im HEISENBERG-Skript:

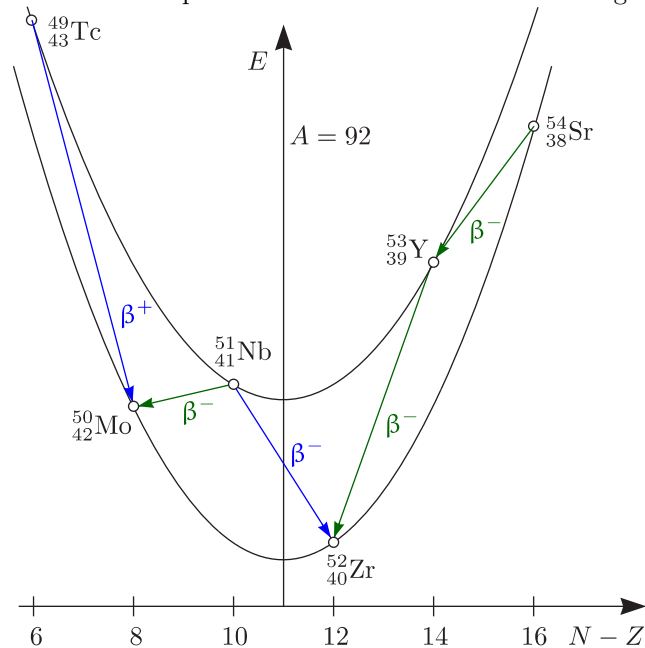


Der tiefste Kern ist der stabilste, die jeweils nächst höheren wandeln sich in den jeweils nächst tieferen durch β^+ - oder β^- -Zerfall um. Beim β^- -Zerfall wandelt sich ein Neutron in ein Proton und Elektron um; beim β^+ -Zerfall findet die Umwandlung eines Protons in ein Neutron und Positron statt. Diese Umwandlung tritt nicht bei freien Protonen auf, sondern nur bei im Kern gebundenen. Die Ruheenergie des Neutrons ist $m_N c^2 = 939,7 \text{ MeV}$ und die des Protons $m_P c^2 = 938,5 \text{ MeV}$. Damit ergibt sich die Differenz $(m_N - m_P)c^2 = 1,2 \text{ MeV}$. Bei freien Protonen gibt es keinen Energiegewinn durch β -Zerfälle, sondern nur bei Neutronen. Beim gebundenen Proton kann es einen Energiegewinn durch β -Zerfall des Protons wie beim Neutron geben und findet deshalb auch statt. Wir sehen schließlich:

2.3.1 Regel von Mattauch

Bei ungeradem A kann es nur einen stabilen Kern geben. Alle übrigen sind β -aktiv.

Legen wir den Schnitt jedoch bei geradem A , so kann man die Kerne nur auf zwei parabolischen Kurven anordnen. Beispielsweise erhalten wir für $A = 92$ folgende Kurve (Abbildung 19 auf Seite 17, HEISENBERG):



Dieses Doppel-Parabelphänomen rührt daher, dass die (uu)-Kerne sehr viel weniger stabil als die (gg)-Kerne sind aufgrund der Paarungseigenschaft gleichartiger Fermionen. Zustände mit $\uparrow\downarrow$ kann es bei sonst gleichen Quantenzahlen geben; Zustände mit $\uparrow\uparrow$ dagegen nicht aufgrund des PAULIprinzips. $\uparrow\downarrow$ ist daher bevorzugt, was durch den Paarungsterm in der BETHE-WEIZSÄCKER-Formel berücksichtigt wird. Daraus ergibt sich:

2.3.2 Regel von Aston

Bei den (gg)-Kernen kann es bis zu drei stabile Isobaren geben; bei den (uu)-Kernen höchstens einen.

In Wirklichkeit sind alle (uu)-Kerne bis auf ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$ und ${}^{14}_7\text{N}$ instabil. Dies ist auf der Nuklidkarte erkennbar.

Anwendung:

1.) Ungerades A :

Der einzig stabile Kern mit $A = 91$ besitzt 11 Neutronen mehr als Protonen:

$$N - Z = 11, A = N + Z = 91 \Rightarrow Z = 40, N = 51$$

Dabei handelt es sich um Zirkonium. Dies ist ein (u,g)-Kern. Die Kerne links vom Zirkonium zerfallen nach dem β^+ -Zerfall, die rechts vom Zirkonium nach dem β^- -Zerfall. Niob besitzt beispielsweise 9 Neutronen mehr als Protonen:

$$N + Z = 91, A = N - Z = 9 \Rightarrow Z = 41, N = 50$$

Dabei handelt es sich um einen (g,u)-Kern. Es gibt also für ein A immer einen (g,u)- und (u,g)-Kern. Von diesen beiden ist der mit niedrigerer Energie stabil.

2.) Gerades A :

$$A = N + Z = 92, N - Z = 8 \Rightarrow Z = 42, N = 50 \quad (\text{g,g})$$

$$A = N + Z = 92, N - Z = 10 \Rightarrow Z = 41, N = 51 \quad (\text{u,u})$$

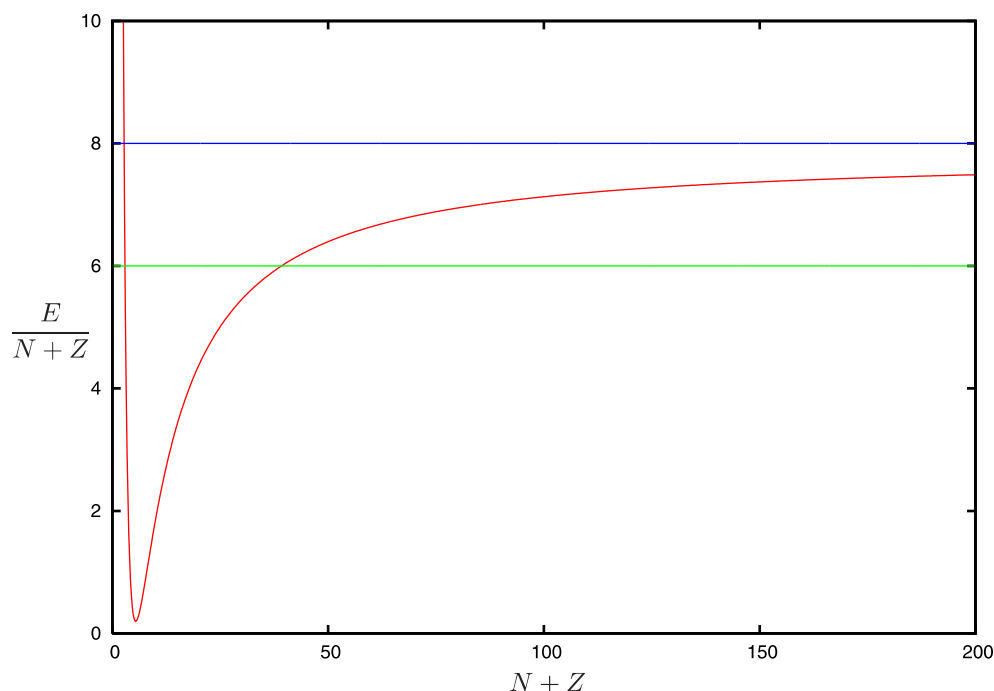
$$A = N + Z = 92, N - Z = 12 \Rightarrow Z = 40, N = 52 \quad (\text{g,g})$$

Es wechseln immer (g,g)- mit (u,u)-Kernen ab, wobei die meisten (u,u)-Kerne instabil sind. Beispielsweise ist der Kern Nb ein instabiler (u,u)-Kern ist; welcher zwei Zerfallsmöglichkeiten besitzt, nämlich in Zirkonium Zr oder auch Molybdän Mb.

Zusammenfassung:

Wir haben also festgestellt, dass die BETHE-WEIZSÄCKER-Formel bzw. die semiempirische Massenformel ein erstes Hilfsmittel bietet, um einen ersten Überblick über die Systematik des Kerns zu gewinnen. Sie ist der formale Ausdruck der Sättigungseigenschaft der Kernmaterie soweit es den Volumen- und Oberflächenterm angeht. Dazu kommt die COULOMB-Abstoßung der Protonen. Ferner kommen gewisse Auswirkungen des PAULIprinzips im Symmetrieterm zum Ausdruck und schließlich haben wir noch den Paarterm, aufgrund der Paarungseigenschaft gleichartiger Nukleonen. Alle Terme dieser Formel sind zunächst aus Plausibilitätsüberlegungen gewonnen, wobei einen Oberflächen- und COULOMBterm das klassische Modell einer Flüssigkeit durch optimale Anpassung an das empirische Materie bestimmt wurden. Eine weitgehende theoretische Begründung der Terme und der Zahlenwerte der jeweiligen Konstanten würde eine Herleitung aus der quantenmechanischen Vielteilchentheorie der Kernphysik erfordern. Wie wir jedoch öfters betont haben, ist dies ein Unternehmen, das durchaus noch nicht abgeschlossen ist. Bevor wir uns jedoch damit befassen, wollen wir zunächst, die Aussagen der Theorie in dem Stadium vor Augen führen, wie wir es jetzt erreicht haben. Wir fragen uns also, was aus dem folgt, was wir jetzt hier schon erhalten haben.

Beim letzten mal hatten wir die Stabilität der Kerne für konstante Nukleonenzahl $A = \text{const.}$ diskutiert und hatten daraus Regeln für die Stabilität der Kerne mit gleichem A abgeleitet. Als MATTAUCHSche Regel hatten wir dabei festgestellt, dass zu einem bestimmten ungeraden A immer ein stabiler Kern existiert. Der theoretisch denkbare Fall von zwei stabilen Kernen kann eintreten, wenn die Energie der beiden Kerne sich höchstens um die Ruheenergie eines Elektrons unterscheidet, da somit der Kern mit der höheren Energie in den Kern mit der niedrigeren Energie durch β -Zerfall übergehen könnte. Dieser Fall zweier stabiler Kerne für ungerade A ist aber bisher nie gefunden wurden. Offenbar sind die Unterschiede zwischen den Bindungsenergien zwischen zwei Kernen mit demselben ungeraden A nie kleiner als die Ruheenergie der Elektronen, sondern ist von der Größenordnung der Bindungsenergie pro Nukleon von 6 MeV bis 8 MeV.



Betrachtet man nun alle Kerne mit derselben, ungeraden Protonenzahl Z , so werden unter ihnen zunächst mehrere mit ungeradem A vorkommen, aber höchstens zwei von ihnen werden der Talsohle der Energiefläche nächst benachbart, also stabil sein (siehe Figur 177, Seite 653). Zu ungerader Protonenzahl Z gibt es also höchstens zwei stabile Isotope, was als **ASTONsche Isotopenregel** bekannt ist.

Da die Oberflächenenergie aber der Kernoberfläche proportional ist, wird dieser der Bindung entgegenwirkende Effekt der Oberflächenenergie umso kleiner sein, je kleiner die Oberfläche ist. Die kleinste Oberfläche hat bekanntlich die Kugel. Somit wirkt also die Oberflächenenergie dahin, dass der Kern die Kugelgestalt annimmt. Dann ist die Bindungsenergie $E = -B$ dem Vorzeichen der Oberflächenenergie entsprechend am negativsten. In ganz anderem Sinne wirkt jedoch die **COULOMB**energie. Sie wirkt zwar auch der Bindung entgegen, da sich die Protonen aufgrund ihrer **COULOMB**kräfte gegenseitig abstoßen. Dieser Effekt wird jedoch umso geringer sein, je größer die mittleren Abstände der Nukleonen sein werden. Da nun bei der Kugelform die mittleren Abstände am kleinsten sind, ist die Kugelform bezüglich der Rolle der **COULOMB**kräfte am ungünstigsten, so dass die Wirkung der **COULOMB**kräfte von der Kugelform begünstigt werden, da bei diesen die mittleren Abstände der Nukleonen immer größer sind als bei der Kugelform. Mit steigender Protonenzahl (Z -Abhängigkeit des **COULOMB**terms) wird nun die Wirkung der **COULOMB**kräfte immer mehr zunehmen und schließlich die Wirkung der Oberflächenkräfte soweit überwiegen, dass die Tendenz zu Abweichungen von der Kugelform wirksam wird. Dies sieht man schon daran, dass mit wachsendem Z , das heißt, wachsendem A der **COULOMB**term mit $A^{\frac{5}{3}}$ ansteigt, also wesentlich stärker wächst als der Oberflächenterm, der nur mit $A^{\frac{2}{3}}$ zunimmt. Dies führt schließlich dazu, dass oberhalb der Massenzahl $A = 150$ die **BETHE-WEIZSÄCKER-Formel** das Ergebnis liefert, dass die Existenz von zwei getrennten Kernen mit insgesamt $A \geq 150$ Nukleonen energetisch günstiger ist, als wenn diese Kerne zu einem gemeinsamen Kern vereint wären, also

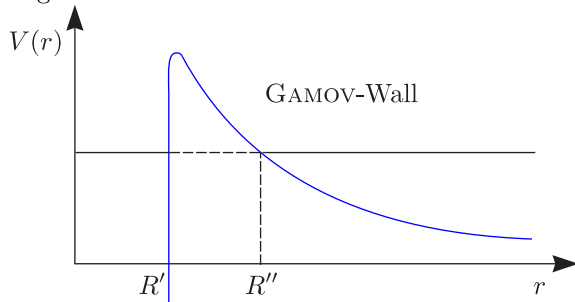
$$B(A_1 + A_2) \leq B(A_1) + B(A_2) \text{ für } A_1 + A_2 \geq 150$$

während

$$B(A_1 + A_2) \geq B(A_1) + B(A_2) \text{ für } A_1 + A_2 \leq 150$$

Dies bedeutet allerdings nicht, dass es für $A > 150$ keine stabilen Kerne mehr gäbe. Tatsächlich zeigt ein Blick auf die Nuklidkarte, dass der schwerste bekannte stabile Kern Wismut mit der Massenzahl $A = 209$, also ${}_{83}^{209}\text{Bi}$ ist. Andererseits zeigt jedoch die Nuklidkarte, dass von $A = 14$ an die α -Strahler beginnen, das heißt, unterhalb von $A = 144$ gibt es nur solche instabilen Kerne, die durch Aussendung von Elektronen oder Positronen zerfallen. Mit $A = 14$ beginnen jedoch die Kerne, die durch Ausstrahlung von α -Teilchen, also von Heliumkernen zerfallen und somit der obigen aus der **BETHE-WEIZSÄCKER-Formel** errechneten Ungleichung entsprechen. Die Kerne, deren Feld auf der Nuklidkarte in der oberen Hälfte schwarz ist, sind sehr langlebige Kerne, deren Lebensdauern mindestens von der Größenordnung des Weltalters ($\approx 10^9$ Jahre) ist. Die Kerne kommen **als radioaktive Kerne in der Natur** vor wie beispielsweise ${}_{92}^{238}\text{U}$ ($4,51 \cdot 10^9$ Jahre), ${}_{92}^{235}\text{U}$ ($7,1 \cdot 10^8$ Jahre) und ${}_{90}^{232}\text{Th}$ ($1,39 \cdot 10^{10}$ Jahre).

Es bleibt nun die Frage, wie es kommt, dass trotz der obenstehenden Ungleichung noch stabile Kerne oberhalb von $A = 155$ anzutreffen sind. Dieser Umstand wird verständlich, wenn man den gegenseitigen Potentialverlauf zweier Kerne mit den Nukleonenzahlen A_1 und A_2 betrachtet. Für diesen Potentialverlauf ergibt sich das folgende Bild:



Außen ist das langreichweitige abstoßende COULOMBpotential wirksam. Innen überwiegt jedoch die sehr viel stärkere, kurzreichweitige anziehende Kernkraft. Wir haben also innen ein Potentialloch, das nach Außen von einem Potentialwall umgeben ist. Dieser Potentialwall kann den Zerfall eines Kerns in zwei Bruchstücke auch dann verhindern oder wenigstens verzögern, wenn die getrennten Bruchstücke geringere Energie haben, also die zu einem gemeinsamen Kern im Potentialloch verschmolzenen Bruchstücke. Nach der klassischen Physik würde jedoch der Wall der Zerfall des in dem Loch befindlichen Kerns in die beiden Bruchstücke überhaupt völlig verhindern. Die Quantenmechanik erlaubt jedoch die Durchdringung des Walls, wobei die Durchdringungsfähigkeit von der Breite des Walls abhängt.

Die quantenmechanische Theorie hierzu wurde von GAMOV durchgeführt. Zur Durchführung dieser Theorie muss man von der SCHRÖDINGER-Gleichung für zwei Teilchen ausgehen, nämlich für die beiden Kerne mit den Nukleonenzahlen A_1 und A_2 und den Massen M_1 und M_2 . Die Theorie geht davon aus, dass für den Radialanteil der Wellenfunktion näherungsweise der Ansatz

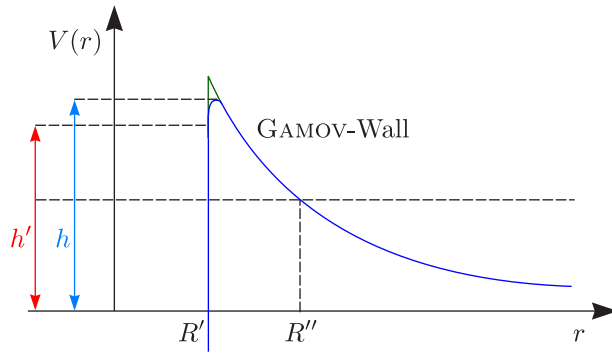
$$\psi(r) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \cdot \int_0^r p_r dr\right)$$

gemacht werden kann.

Zusammenfassung:

In der letzten Vorlesung hatten wir damit begonnen zu versuchen, den Zerfall eines Kerns in zwei Bruchstücke quantenmechanisch zu beschreiben. Wir waren davon ausgegangen, dass wir es mit einem Fall zu tun haben, in dem es energetisch günstiger ist, wenn zwei Kerne mit den Nukleonenzahlen A_1 und A_2 voneinander getrennt sind, als wenn sie zu einem Kern mit der Nukleonenzahl $A = A_1 + A_2$ vereinigt sind, also $B(A_1 + A_2) < B(A_1) + B(A_2)$.

Wir hatten uns nun klar gemacht, dass eine solche, die Trennung begünstigende Energiebilanz noch keineswegs den Zerfall des Kerns mit $A = A_1 + A_2$ bedeuten muss, da man sich nun noch überlegen kann, dass der gegenseitige Potentialverlauf der beiden Teilkerns mit A_1 und A_2 die Form eines Potentialwalls haben muss, durch den die beiden Teilkerns auch bei einer die Trennung begünstigenden Energiebilanz noch bis zu einem gewissen Grade zusammengehalten werden. Diese Form des gegenseitigen Potentials der beiden Teilkerns mit A_1 und A_2 folgt aus der Überlegung, dass für großen gegenseitigen Abstand allein das langreichweitige abstoßende COULOMBpotential wirken muss, während die anziehende Wirkung der Kernkräfte wegen deren Kurzreichweitigkeit erst bei sehr kleinen Abständen nach einem sehr starken Ansteigen des abstoßenden COULOMBpotentials zur Geltung kommen kann, um dann ein Loch oder einen Krater hinter dem abstoßenden COULOMBwall zu bilden. Wir bekommen also den Verlauf des gegenseitigen Potentials, wenn $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ der gegenseitige Abstand der beiden Teilkerns ist:



Würde die klassische Physik gelten, so würde der Kern also auch noch in einem Bereich zusammengehalten werden, so dass eine die Trennung begünstigende Bilanz der Bindungsenergien vorhanden ist. Dieser Bereich ist gegeben durch

$$B(A_1) + B(A_2) - B(A_1 + A_2) < h > 0$$

wenn h die Höhe des Potentialwalls ist.

Bei Gültigkeit der Quantenmechanik ist jedoch ein Durchdringen von Potentialwällen möglich, wie wir schon an dem im Proseminar vorgetragenen Beispiel gesehen haben. Wir wollen uns daher jetzt der quantenmechanischen Behandlung dieses Problems zuwenden, indem wir uns fragen, wie sich die beiden Teilkerne mit den Nukleonenzahlen A_1 und A_2 in dem vorstehend skizzierten Potential bewegen. Zu diesem Zweck stellen wir die SCHRÖDINGER-Gleichung für die gegenseitige Bewegung der beiden Teilkerne auf. Sie lautet, wenn wir mit M_1 und M_2 die Massen und mit $\vec{r}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ und $\vec{r}_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ die Ortskoordinaten der beiden Teilkerne bezeichnen:

$$-\frac{\hbar^2}{2M_1} \Delta_1 \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - \frac{\hbar^2}{2M_2} \Delta_2 \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ ist ein Potential der vorstehend skizzierten Art. Die Δ -Operatoren besitzen folgende Gestalt:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}$$

An Stelle der Ortskoordinaten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 der beiden Teilchen führen wir nun neue Koordinaten ein nämlich die **Schwerpunktskoordinate**:

$$\vec{R} = \frac{M_1 \cdot \vec{r}_1 + M_2 \cdot \vec{r}_2}{M_1 + M_2} \equiv (X, Y, Z)$$

und die **Relativkoordinate**:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \equiv (x, y, z)$$

Dann ergibt sich:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial X} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{\partial \Psi}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial Y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$

In derselben Weise kann man

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)}{\partial x_1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \frac{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)}{\partial X} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)}{\partial x}$$

ausrechnen und erhält, wenn man die vorstehenden Ausdrücke für $\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x_2}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial \Psi}{\partial y_2}$ einsetzt:

$$\Delta_1 \Psi = \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} \right)^2 \Delta_R \Psi + \Delta_r \Psi + \frac{2M_1}{M_1 + M_2} (\vec{\nabla}_R \cdot \vec{\nabla}_r) \Psi$$

$$\Delta_2 \Psi = \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 \Delta_R \Psi + \Delta_r \Psi - \frac{2M_2}{M_1 + M_2} (\vec{\nabla}_R \cdot \vec{\nabla}_r) \Psi$$

mit

$$\Delta_R = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}, \quad \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Man beachte den Vorzeichenunterschied in den Ausdrücke für Δ_1 und Δ_2 , der durch $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zustande kommt. Durch diesen Vorzeichenunterschied wird bei Addition von Δ_1 und Δ_2 der letzte Term kompensiert und man erhält für die Zwei-Teilchen-SCHRÖDINGER-Gleichung, wenn man die Substitutionen $M = M_1 + M_2$ und die reduzierte Masse

$$\mu = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}$$

einführt:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R \Psi(\vec{R}, \vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \Psi(\vec{R}, \vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E \Psi(\vec{R}, \vec{r})$$

In dieser Form der 2-Teilchen-SCHRÖDINGER-Gleichung bedeutet der erste Term die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung mit der Masse $M = M_1 + M_2$ und der zweite Term die kinetische Energie der Relativbewegung mit der reduzierten Masse

$$\mu = \frac{M_1 \cdot M_2}{M_1 + M_2}$$

Ein Operator der **nur** auf die Schwerpunktskoordinaten wirkt, ist **nur** in dem ersten Term enthalten. Ein Operator, der **nur** auf die Relativkoordinaten wirkt, findet man **nur** in den beiden weiteren Termen. Es gibt keinen Term und keinen Operator, der auf beide Koordinaten wirkt. Daher kann die Schwerpunkts- und die Relativbewegung voneinander separieren durch den Produktansatz

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = F(\vec{R}) \cdot \psi(\vec{r})$$

der ein Produkt ist von einer Funktion $F(\vec{R})$, die allein von der Schwerpunktskoordinaten \vec{R} abhängt und einer Funktion $\psi(\vec{r})$, die nur von der Relativkoordinaten \vec{r} abhängt. Setzen wir diesen Ansatz in die vorstehende SCHRÖDINGER-Gleichung ein und dividieren durch $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = F(\vec{R}) \cdot \psi(\vec{r})$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\Psi(\vec{r})} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \psi(\vec{r}) \right) + V(\vec{r}) - E = \frac{1}{F(\vec{R})} \left(\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_R F(\vec{R}) \right)$$

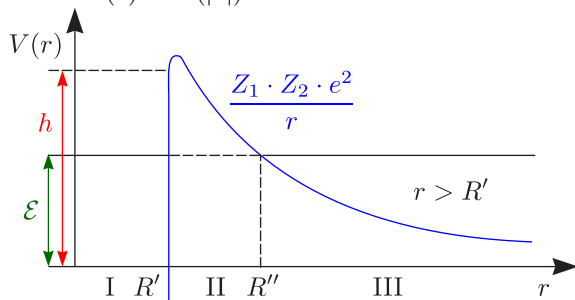
Die linke Seite hängt nur von \vec{r} und die rechte Seite nur von \vec{R} ab. Gleichheit beider Seiten für alle Werte von \vec{r} und \vec{R} ist nur erreichbar, wenn jede Seite für sich derselben Konstanten ist, etwa $-C$. Folglich gilt:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r F(\vec{R}) = C \cdot F(\vec{R})$$

Dies ist aber gerade die SCHRÖDINGER-Gleichung der kräftefreien Bewegung mit der Lösung $F(\vec{R}) = \exp(i\vec{k}\vec{R})$. und $C = \frac{\hbar^2 \cdot k^2}{2M}$. Der Schwerpunkt bewegt sich also kräftefrei und die kräftefreie Schwerpunktsbewegung kann absepariert werden. Nach Abseparation der kräftefreien Schwerpunktsbewegung erhalten wir für die Relativbewegung die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = \mathcal{E} \psi(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = E - \frac{\hbar^2 k^2}{2M}$$

wobei $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$ ein Potential von der vorher betrachteten Art sein soll:



Für ein Energieniveau, wie es dort eingezeichnet ist, nämlich mit $0 < \mathcal{E} < h$, kann nun die Wellenfunktion nicht nur auf den Innenraum beschränkt sein, sondern sie wird durch den Potentialwall hindurch in den Außenraum hinausschwingen und in entsprechendem Abstand vom Austrittspunkt R'' aus dem Potentialwall, wo man das COULOMBpotential vernachlässigen kann, die Form einer auslaufenden Kugelwelle haben:

$$\psi(r) = A \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \text{ für } r \gg R''$$

Daraus folgt aber für den Volumenbereich V des Ausgangskerns, in dem die beiden Teilkern vor dem Zerfall vereinigt sind, dass

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi^*(r, t) \psi(r, t) dr \neq 0$$

Die Kontinuitätsgleichung verlangt ja, dass

$$\frac{d}{dt} \int_V \psi^*(r, t) \psi(r, t) dr = - \int J_r df = - \int J_r \cdot r^2 d\Omega$$

mit der radialen Stromdichte

$$J_r = \frac{i\hbar}{2\mu} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \psi^* \right)$$

Die Zeitabhängigkeit von $\psi(r, t)$ kann also nicht von der Form

$$\psi(r, t) = \psi(r) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E} t\right)$$

sein, solange \mathcal{E} reell ist. Eine Zeitabhängigkeit dieser Form ist mit den vorstehenden Feststellungen jedoch dann verträglich, wenn \mathcal{E} komplex gewählt wird, also $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{i\hbar\lambda}{2}$. Dann bekommen wir für die im Volumen V des Ausgangskerns befindliche Teilchenzahl

$$N(t) = \int_V \psi^*(r, t) \psi(r, t) dt$$

die Zeitabhängigkeit

$$N(t) = \exp(-\lambda t) \cdot N(0)$$

Wir erhalten also genau das radioaktive Zerfallsgesetz mit der Zerfallskonstanten λ . Für die zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Funktion $\psi(r)$ ist dann die SCHRÖDINGER-Gleichung mit dem komplexen „Eigenwert“ \mathcal{E} zu lösen. Zu diesem Zweck machen wir den Separationsansatz

$$\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{r} \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

mit den Kugelfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$. Dabei trennen wir in Radial- und Winkelanteil, so dass für die SCHRÖDINGER-Gleichung übrigbleibt:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} = \left[\mathcal{E} - V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \varphi(r)$$

Für die meisten Fälle genügt es, sich auf $l = 0$ zu beschränken. Wir erhalten dann:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi(r)}{\partial r^2} = (\mathcal{E} - V(r)) \varphi(r)$$

und machen für $\varphi(r)$ die WKB-Näherung (nach WENZEL, KRAMERS und BRILLOUIN) mit dem Ansatz:

* Bereich ①: $0 < r < R'$

$$\varphi_I = \frac{A}{\sqrt{k(r)}} \exp\left(i \int_0^r k(r') dr'\right) + \frac{B}{\sqrt{k(r)}} \exp\left(-i \int_0^r k(r') dr'\right) \text{ mit } k(r) = \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} (\mathcal{E} - V(r))}$$

* Bereich ②: $R' < r < R''$

$$\varphi_{\text{II}} = \frac{C}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left(-\int_{R'}^r \kappa(r') dr'\right) + \frac{D}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left(\int_{R'}^r \kappa(r') dr'\right) \quad \text{mit } \kappa(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - \mathcal{E})}$$

* Bereich ③: $R'' < r$

$$\varphi_{\text{III}} = \frac{F}{\sqrt{k(r)}} \exp\left(i \int_{R''}^r k(r') dr'\right) + \frac{G}{\sqrt{k(r)}} \exp\left(-i \int_{R''}^r k(r') dr'\right) \quad \text{mit } k(r) = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(\mathcal{E} - V(r))}$$

Wir benutzen jetzt unser Unwissen über den Verlauf von $V(r)$ im Innern, um dort vereinfachende Annahmen zu machen und zwar nehmen wir an, $V(r)$ habe im Innern einen konstanten negativen Wert, also

$$V(r) = -V_0 = \text{const. für } 0 < r < R'$$

Dann wird in u_{I} :

$$\exp\left(i \int_0^r k(r) dr\right) = \exp(iKr) \quad \text{und} \quad \exp\left(-i \int_0^r k(r) dr\right) = \exp(-iKr) \quad \text{mit } K = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(\mathcal{E} + V_0)}$$

Wenn die Dichte $|\psi(r)|^2$ im Nullpunkt $r = 0$ endlich bleiben soll, muss $\varrho(r)$ für $r = 0$ verschwinden, was nur erfüllt werden kann, wenn $B = -A$ ist. Dann bekommen wir also:

$$\varphi_{\text{I}}(r) = \frac{2iA}{\sqrt{K}} \cdot \sin(Kr)$$

Ein unendlich hoher Potentialwall würde die Funktion φ_{II} zu null herunter drücken. Aber auch unser endlicher Potentialwall mach φ_{II} so klein, dass dessen Beitrag zum Integral über das Kernvolumen vor dem Zerfall

$$N(0) = \int_V |\psi(r)|^2 dr$$

gegen den Beitrag von φ_{I} vernachlässigt werden kann. Also nimmt man an:

$$N(0) \approx \int_V |\psi_{\text{I}}(r)|^2 dr$$

Deshalb kann man auch ausrechnen, dass $\varphi_{\text{I}}(R') \approx 0$ ist, also $KR' = \pi$ und somit:

$$N(0) = \int_V |\psi_{\text{I}}(r)|^2 dr = \frac{4\pi \cdot |A|^2}{K} \cdot 4 \cdot \int_0^{R'} \sin^2(Kr) dr \stackrel{Kr=r'}{=} \frac{16\pi \cdot |A|^2}{K} \cdot \frac{1}{K} \int_0^{\pi} \sin^2(r') dr' = \frac{16\pi \cdot |A|^2}{K^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 8\pi \cdot |A|^2 \cdot \frac{R'}{K}$$

Andererseits ist der auslaufende Strom durch φ_{III} gegeben, wenn dort $G = 0$ gesetzt wird. Also ist:

$$J_r = \frac{i\hbar}{2\mu} \cdot \left(\psi_{\text{III}} \frac{\partial \psi_{\text{III}}^*}{\partial r} - \psi_{\text{III}}^* \frac{\partial \psi_{\text{III}}}{\partial r} \right) \cdot \exp(-\lambda \cdot t) = \frac{\hbar}{\mu} \frac{|F|^2}{r} = \frac{\hbar}{\mu} \cdot \frac{|F|^2}{r^2} \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$$

Setzen wir dies in obige Kontinuitätsgleichung ein, die wir auch als

$$\dot{N} = - \int \vec{J} d\vec{f} \quad \text{oder} \quad -\lambda \cdot N(t) = - \int J_r \cdot r^2 d\Omega$$

schreiben können, so erhalten wir

$$\lambda \cdot 8\pi |A|^2 \cdot \frac{R'}{K} = 4\pi \cdot |F|^2 \cdot \frac{\hbar}{\mu}$$

und somit

$$\lambda = \frac{\hbar \cdot K}{2\mu \cdot R'} \cdot \frac{|F|^2}{|A|^2} = \frac{\hbar K}{2\mu R'}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\hbar K}{\mu} = v_i$ die Geschwindigkeit im Innern des Kerns ist, so gilt $\lambda = \frac{v_i}{2R'} \cdot T$, also die Zerfallsgeschwindigkeit pro Sekunde. λ ist gleich der Zahl der Stöße gegen den Wall pro Sekunde mal dem Transmissionskoeffizienten T . Dieser lässt sich aus den Beziehungen berechnen, die für die Koeffizienten F , C und A aus den Bedingungen folgende, welche die Verbindung der Funktionen φ_I , φ_{II} und φ_{III} über die Stellen R' und R'' hinweg gewährleisten. Wir können die Stelle R' so konzipieren, dass unmittelbar links von R' bis an R' heran $V(r) = -V_0$ gilt, während rechts bis an R' heran ein erheblich über \mathcal{E} liegenden positiver Wert $V(r) = h'$ des Potentials vorhanden ist, der etwa gleich h ist, also $h' \simeq h$. Dann gilt also rechts bis an die Stelle R' heran immer noch die WKB-Näherung und wir müssen nur verlangen, dass die Funktionen φ_I und φ_{II} an der Unstetigkeitsstelle R' des Potentials $V(r)$ stetig aneinander anschließen. Die Bedingung $\varphi_I(R') = \varphi_{II}(R')$ ergibt dann

$$2i \cdot \frac{A}{\sqrt{K}} \cdot \sin(KR') = \frac{C + D}{\sqrt{\kappa(R')}}$$

und $\varphi_I'(R') = \varphi_{II}'(R')$ liefert

$$2i \cdot A\sqrt{K} \cdot \cos(KR') = (-C + D) \cdot \sqrt{\kappa(R')}$$

Wir dividieren diese beiden Gleichungen durcheinander und erhalten:

$$K \cdot \cot(KR') = -\kappa(R') \cdot \frac{C - D}{C + D} = -\kappa(R') \cdot \frac{1 - \frac{i}{2} \cdot \exp(-2\sigma)}{1 + \frac{i}{2} \cdot \exp(-2\sigma)} = -\kappa(R') \cdot \frac{1 - i \exp(-2\sigma) - \frac{1}{4} \exp(-2\sigma)}{1 + \frac{1}{4} \exp(-2\sigma)}$$

Für reelles \mathcal{E} ist diese Gleichung exakt nicht zu erfüllen, sondern nur für komplexes \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - i \frac{\lambda \hbar}{2} \text{ in } K = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar}(\mathcal{E} + V_0)} \text{ und } \kappa(R') = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar}(V(R') - \mathcal{E})}$$

Um den Zusammenhang über den Punkt R'' hinweg sicherzustellen, müssen wir φ_{II} so umformen, dass die unbestimmten Integrale vom Punkt R'' ausgehen. mit der Abkürzung

$$\sigma = \int_{R'}^{R''} \kappa(r) dr$$

ergibt dies:

$$\varphi_{II} = \frac{C \exp(-\sigma)}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left(-\int_{R''}^r \kappa(r) dr\right) + \frac{D \exp(\sigma)}{\sqrt{\kappa(r)}} \exp\left(\int_{R''}^r \kappa(r) dr\right)$$

In der Umgebung von R'' verliert die WKB-Näherung ihre Gültigkeit. Wie man hier eine andere Näherung einsetzen kann, hatten wir im Proseminar gesehen. Das Ergebnis ist, dass die Koeffizienten der WKB-Näherung über so einen Umkehrpunkt wie R'' hinweg einen Phasensprung um $\pm \frac{\pi}{4}$ machen. So ergibt sich:

$$C \exp(-\sigma) = \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) F \text{ und } D \exp(\sigma) = \frac{1}{2} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) F$$

oder

$$C = \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp(\sigma) F \text{ und } D = \frac{1}{2} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp(-\sigma) F$$

Daraus folgt:

$$\frac{|D|^2}{|C|^2} = \frac{1}{4} \cdot \exp(-4\sigma)$$

Da σ mindestens von der Größenordnung 10 ist, folgt $|D|^2 \ll |C|^2$, so dass wir D gegen C in der Bedingung $\varphi_I'(R') = \varphi_{II}'(R')$ vernachlässigen können. Außerdem können wir dort $KR' = \pi$ annehmen und somit $\cos(KR') \approx 1$, so dass:

$$C = -2iA \cdot \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\kappa(R')}} \text{ und } F = \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right) \cdot \exp(-\sigma) C = -2 \exp\left(i \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{\kappa(R')}} \cdot \exp(-\sigma) A$$

Somit wird der Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = 4 \cdot \frac{K}{\kappa(R')} \cdot \exp(-2\sigma_0)$$

wobei der Imaginärteil von σ in $\exp(-\sigma) = \exp(-\sigma_0 + i\sigma_1)$ bei der Bildung des Betragsquadrats herausfällt. Für die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Sekunde folgt:

$$\lambda = 2 \cdot \frac{\hbar K}{\mu R'} \cdot \frac{K}{\kappa(R')} \cdot \exp(-2\sigma_0) = 2 \frac{\hbar K}{\mu R'} \cdot \frac{K}{\kappa(R')} \cdot \exp\left(-2 \int_{R'}^{R''} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - \mathcal{E}_0)} dr\right)$$

Den Faktor

$$G = \exp\left(-2 \int_{R'}^{R''} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}(V(r) - \mathcal{E}_0)} dr\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{R'}^{R''} \sqrt{2\mu(V(r) - \mathcal{E}_0)} dr\right)$$

nennt man den GAMOV-Faktor. Zu seiner Auswertung müssen wir das Potential $V(r)$ genauer festlegen. Wir treffen die naheliegende Wahl:

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{r} & \text{für } r > R' \\ -V_0 & \text{für } r < R' \end{cases}$$

Dann wird mit $\mathcal{E}_0 = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{R''}$, was aus der Definition von R'' folgt:

$$\begin{aligned} -\ln G &= \frac{2}{\hbar} \int_{R'}^{R''} \sqrt{2\mu \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{r} - \mathcal{E}_0 \right)} dr = \frac{2}{\hbar} \sqrt{2\mu \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2 \cdot R''} \cdot \int_{R'}^{R''} \sqrt{\frac{1}{r \cdot R''} - \frac{1}{R''^2}} dr = \\ &= \frac{2}{\hbar} \sqrt{2\mu Z_1 \cdot Z_2 e^2 \cdot R''} \cdot \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R'}{R''}}\right) - \sqrt{\frac{R'}{R''} \cdot \left(1 - \frac{R'}{R''}\right)} \right] = \\ &= \frac{4e^2 Z_1 \cdot Z_2}{\hbar v} \cdot \left[\arccos\left(\sqrt{\frac{R'}{R''}}\right) - \sqrt{\frac{R'}{R''} \cdot \left(1 - \frac{R'}{R''}\right)} \right] \end{aligned}$$

Aus $R'' = \frac{Z_1 \cdot Z_2 e^2}{\mathcal{E}_0}$ kann man leicht sehen, dass R'' normalerweise ein mehrfaches von R' beträgt, also $R'' \gg R'$ ist. Man kann also annähern:

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{R'}{R''}}\right) \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{R'}{R''}}$$

und somit:

$$-\ln(G) = \frac{4e^2 Z_1 \cdot Z_2}{\hbar v} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R'}{R''}} \right) = \frac{2\pi e^2 Z_1 \cdot Z_2}{\hbar v} - \frac{4\sqrt{2} \cdot e \cdot \sqrt{\mu}}{\hbar} \cdot \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot R'}$$

Für die Zerfallswahrscheinlichkeit bekommen wir dann:

$$\frac{2\pi \cdot e^2 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot \sqrt{\mu}}{\hbar \sqrt{2\mathcal{E}_0}}$$

$$\ln(\lambda) = \ln(G) + \ln(2) \cdot \frac{\hbar K}{\mu R'} \cdot \frac{K}{\kappa(R')} = -\frac{2\pi e^2 Z_1 \cdot Z_2}{\hbar v} - \frac{4\sqrt{2} \cdot e \cdot \sqrt{\mu}}{\hbar} \cdot \sqrt{Z_1 \cdot Z_2 \cdot R'} + \ln(2) \cdot \frac{\hbar K}{\mu R'} \cdot \frac{K}{\kappa(R')}$$

Dies entspricht dem GEIGER-NUTALLSchen Gesetz:

$$\ln(\lambda) = -\frac{C}{v} + D = -\frac{C''}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} + D$$

R' liegt etwa zwischen $5 \cdot 10^{-12}$ cm und $9 \cdot 10^{-12}$ cm und entspricht etwa $R = R_0 \sqrt[3]{A}$. Dies entspricht sehr engen Grenzen für die Radien. $\frac{e^2}{\hbar v}$ lässt sich besonders leicht abschätzen, da man weiß, dass $\frac{e^2}{\hbar r} \approx \frac{1}{137}$

(SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante). In den meisten Darstellungen wird jedoch die Halbwertszeit des betreffenden radioaktiven Zerfalls in Abhängigkeit von der Energie aufgetragen. Die Halbwertszeit $\tau_{1/2}$ ist diejenige Zeit, für die $\exp(-\lambda\tau_{1/2}) = \frac{1}{2}$ ist, also

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \cdot \lambda} \approx \frac{0,697}{3,15 \cdot 10^7 \text{ s} \cdot \lambda}$$

Die Energie können wir anstelle von v einführen durch $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_0}{\mu}}$. Betrachten wir einen α -Zerfall mit $Z_1 = 2$. So erhalten wir aus dem obenstehenden Ausdruck für $\ln(\lambda)$ mit den vorstehenden Substitutionen:

$$\log_{10}(\tau_{1/2}) = 1,171 \cdot Z_2 \cdot \mathcal{E}_0^{-\frac{1}{2}} - 1,29 \cdot Z_2^{\frac{1}{2}} \dot{R}'^{\frac{1}{2}} - 29$$

Dieses Gesetz ist nachstehend mit der für die Energie im logarithmischen genommenen Abszisse für Uran ($Z_2 = 92$) und Thorium ($Z_2 = 90$) und deren Isotopen aufgetragen (siehe POOK, Seite 359)

es ergeben sich zwei parallele Geraden, die sehr deutlich zeigen, dass die zweite Variation von Lebensdauern zwischen 10^{-7} s und 10^{10} Jahren durch die Energieabhängigkeit zustande kommt, während der Radius R' nur zwischen den engen Grenzen von $5 \cdot 10^{-12}$ cm bis $9 \cdot 10^{-12}$ cm variiert, was dem Radiengesetz $R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ entspricht und somit in die bei diesem einfachen logarithmischen Maßstab erhaltene Gerade hineinpasst.

Schließlich zeigt das obige Gesetz, dass Kerne, deren Zerfallsenergie unterhalb einer gewissen Grenze liegt, wegen der exponentiellen Abhängigkeit der Lebensdauern von der Zerfallsenergie so lange Lebensdauern haben, dass ihr Zerfall nicht mehr wahrscheinlich ist. Damit ist das obige Gesetz relativ gut bestätigt. Die folgende Tabelle gibt für eine Reihe von Ordnungszahlen den Wert der Zerfallsenergie an, die nicht überschritten werden darf, wenn die Lebensdauer des Elements größer als 10^{10} Jahre bleiben soll (NACH WEIZSÄCKER, Seite 102):

Z	$E [10^6 \text{ V}]$
92	3,9
65	2,7
45	1,5
25	0,55
10	0,10

Dies zeigt die stabilisierende Wirkung des Potentialwalls ($\log(\tau_{1/2}) \sim Z_1$) mit wachsender Ordnungszahl trotz der destabilisierenden Wirkung des zunehmenden Anteil der COULOMBabstoßung. Wir wollen nun noch die Rückführung dieses zeitabhängigen Problems auf das zeitunabhängige Eigenwertproblem $H\psi = E\psi$ andeuten. Wie wir gesehen haben, ist die Wellenfunktion nicht räumlich beschränkt, sondern der Zerfallsprozess bedeutet ja, dass die Wellenfunktion sich schließlich bis ins Unendliche erstreckt. Deshalb haben wir keine diskreten Zustände mit diskretem Spektrum, sondern ein Kontinuum von Zuständen mit kontinuierlichem Eigenwertspektrum so wie beim kräftefreien Eigenwertproblem

$$-\frac{\Delta}{2\mu}\psi = \frac{p^2}{2\mu}\psi$$

mit der ebenen Welle

$$\psi(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{r}\right)$$

als Lösung. Bei Anwesenheit eines Potentials $B(r)$ gemäß

$$\left(-\frac{\Delta}{2\mu} + V(r)\right)\psi(r) = E\psi(r)$$

kommt bei der asymptotischen Darstellung im Außenraum $rk \gg 1$ bzw $r > R''$ zur der ebenen Welle noch die durch die Streuung von dem Potential entstehende auslaufende Kugelwelle $f(\vartheta, k) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r}$ hinzu, so dass wir im Ganzen

$$\psi(r) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + f(\vartheta, k) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r}\right)$$

wobei $f(\vartheta, k)$ die Streuamplitude bedeutet. Man kann nun aus $\psi(r)$ ein zeitabhängiges Wellenpaket bilden gemäß

$$\mathcal{E} = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2\mu}$$

$$\Psi(r, k, t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \int E(k - k') \cdot \left[\exp(i\vec{k}' \cdot \vec{r}) + f(\vartheta, k') \cdot \frac{\exp(ik'r)}{r} \right] \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E' t\right) dk'$$

Man kann nun zeigen, dass sich ein zeitabhängiges Verhalten wie beim radioaktiven Zerfall ergibt, wenn $f(\vartheta, k)$ ein Resonanzverhalten zeigt gemäß

$$f(\vartheta, k') = \frac{\lambda}{2(\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0) + i\frac{\hbar\lambda}{2}} = \frac{1}{2k'} \cdot \frac{\lambda}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0 + i\frac{\hbar\lambda}{2}}$$

Man sieht dies, wenn man den Streuteil, des vorstehenden Ausdrucks

$$\Psi_{str}(r, k, t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \int E(k - k') \cdot f(\vartheta, k') \cdot \frac{\exp(ik'r)}{r} \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E}' t\right) dR'$$

berechnet. Durch Umformung erhält man zunächst

$$\Psi_{str}(r, k, t) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\exp\left(i\left[kr - \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar} \cdot t\right]\right)}{r} \cdot I \text{ mit } I = \int \frac{E(k - k')}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0 + i\frac{\lambda}{2}} \exp\left(i\left[(k' - k) \cdot r - (\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0) \cdot \frac{t}{\hbar}\right]\right) \frac{dk'}{k'}$$

weiter Polarkoordinaten für k :

$$dk' = k'^2 dk' d\Omega = \frac{m \cdot k'}{\hbar^2} d\mathcal{E}' d\Omega \text{ und } k' = k + \frac{1}{\hbar v} (\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0)$$

Wenn die Energiebreite $\Delta\mathcal{E}$ des Wellenpakets groß gegen I ist, also $\mathcal{E}_r \gg \Delta\mathcal{E} \gg \hbar\lambda$ ist, dann liefert $|\mathcal{E} - \mathcal{E}_0| \leq \hbar\lambda$ den Hauptbeitrag und somit in C :

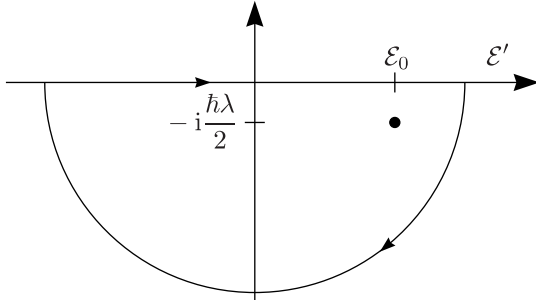
Man kann dann schreiben:

$$I = \frac{m}{\hbar^2} \cot C_0 \cdot F\left(t - \frac{r}{v}\right)$$

mit

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\exp\left[-i(\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0) \cdot \frac{1}{\hbar} \cdot \left(t - \frac{r}{v}\right)\right]}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0 + i\hbar\frac{\lambda}{2}} d\mathcal{E}' = \int_{-\mathcal{E}_0}^{\infty} \frac{\exp\left[-i(\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0) \cdot \frac{1}{\hbar} \cdot \left(t - \frac{r}{v}\right)\right]}{\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0 + i\hbar\frac{\lambda}{2}} d(\mathcal{E}' - \mathcal{E}_0)$$

Wenn $\mathcal{E}_0 \gg \frac{\lambda}{2}$, dann kann die untere Integrationsgrenze $-\mathcal{E}_0$ durch $-\infty$ ersetzt werden und der Kreis kann nach unten geschlossen werden.



Also ergibt sich mit dem Residuensatz, wobei der Beitrag des Integrals entlang des Halbkreises für $\mathcal{E}' \mapsto \infty$ verschwindet:

$$F\left(t - \frac{r}{v}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } t - \frac{r}{v} < 0 \text{ bzw. } t < \frac{r}{v} \\ 2\pi i \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \left(t - \frac{r}{v}\right)\right) & \text{für } t - \frac{r}{v} > 0 \gg \frac{\hbar}{\Delta\mathcal{E}}; t > \frac{r}{v} \end{cases}$$

Die Welle setzt für $t = \frac{r}{v}$ mit ihrem Maximum ein und nimmt dann exponentiell ab. Auch für unendliche Zeiten ist sie immer mit ihrem Maximalbetrag vorhanden nämlich von der Stelle $r = v \cdot t$. Die exponentielle Zunahme mit r folgt auch aus der Funktion ψ_{III} der WKB-Methode nämlich für große r mit

$$\tilde{k} = \sqrt{2\mu \cdot \left(\mathcal{E}_0 - i\frac{\lambda\hbar}{2}\right)}$$

$$\psi_{\text{III}} = F \cdot \frac{\exp(i\tilde{k}r)}{r} = F \cdot \frac{\exp(ik_0r)}{r} \cdot \exp\left(\frac{\hbar\lambda}{2v} \cdot r\right)$$

$$\psi_{\text{III}} \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \cdot \left(\mathcal{E}_0 - i\frac{\hbar\lambda}{2}\right) \cdot t\right) = F \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_0 \cdot t\right) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \left(t - \frac{r}{v}\right)\right)$$

folgt aus dem Gesamtausdruck für $\Psi_{str}(r, k, t)$ mit den Ausdrücken für I und F zu:

$$\Psi_{str}(r, k, t) = \psi_{\text{III}}(r, k, t) \equiv \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{r}{v} \\ -(2\pi)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{i\lambda}{2} \cdot \frac{m}{\hbar^2} \cdot C_0 \cdot \frac{\exp(i[kr - \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar} \cdot t])}{r} \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \cdot \left[t - \frac{r}{v}\right]\right) & \end{cases}$$

Kapitel 3

Kernspaltung

Wir kommen wieder auf die BETHE-WEIZSÄCKER-Massenformel zurück:

$$E(N, Z) = -a_v A + a_o A^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + b \cdot \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta \text{ mit } A = N + Z$$

N ist die Neutronenzahl und Z die Protonenzahl. Die Konstanten sind gegeben durch:

- * $a_v = 15,75 \text{ MeV}$ als Koeffizient des Volumenterms
- * $a_o = 17,8 \text{ MeV}$ als Koeffizient des Oberflächenterms
- * $b = 23,7 \text{ MeV}$ als Koeffizient des Symmetrieterms

Für δ ergibt sich:

$$\delta = \begin{cases} 34A^{-\frac{3}{4}} & \text{für (gg)-Kerne} \\ 0 & \text{für (u,g)-Kerne} \\ -34A^{-\frac{3}{4}} & \text{für (uu)-Kerne} \end{cases}$$

Bilden wir die Differenz der Energie zweier Bruchstücke, in die der Kern zerfallen ist, und der Energie des Kerns selbst:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(A_1) + E(A_2) - E(A_1 + A_2) = \\ &= a_o \cdot A^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\left(\frac{A_1}{A} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{A_2}{A} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 + \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{r_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}}{a_o \cdot A^{\frac{2}{3}}} \cdot \left[\frac{\left(\frac{Z_1}{Z} \right)^2}{\left(\frac{A_1}{A} \right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{\left(\frac{Z_2}{Z} \right)^2}{\left(\frac{A_2}{A} \right)^{\frac{1}{3}}} - 1 \right] \right] \end{aligned}$$

Wir definieren dazu:

$$y_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{Z_1}{Z} \text{ und } y_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{Z_2}{Z} \text{ sowie } \frac{E(A_1) + E(A_2) - E(A_1 + A_2)}{a_o A^{\frac{2}{3}}} = \xi$$

Damit können wir schreiben:

$$\Delta E = y_1^{\frac{2}{3}} + y_2^{\frac{2}{3}} - 1 + 2x \cdot \left(y_1^{\frac{5}{3}} + y_2^{\frac{5}{3}} - 1 \right) \text{ mit } x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{r_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}}{a_o \cdot A^{\frac{2}{3}}}$$

Ab $x = 0,384$ treten Minima auf, wobei ab $x = 0,7$ das Minimum bei $\xi = 0$ liegt. Für $x > 0,7$ gewinnt man bei einem solchen Vorgang Energie.

3.1 Verformung des Atomkerns bei der Spaltung

Es ist $R \equiv R(\vartheta)$.

$$R(\vartheta) = R_0 \left(1 + \sum_n \alpha_n P_n(\vartheta) \right) \text{ mit } R_0 = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + \alpha_0 + \alpha_2 \cdot P_2(\cos \vartheta)), \quad P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$$\alpha_0 = -\frac{\alpha_2^2}{5}$$

$$\Delta E = a_0 A^{\frac{2}{3}} \cdot [0,4(1-x) \cdot \alpha_2^2 - 0,0381 \cdot (1+2x) \cdot \alpha_2^3] = \widetilde{W}$$