

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: KOSMOLOGIE

Prof. Dr. Kühn

Vorlesung Sommersemester 2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 30. Juli 2006

Mitschrieb der Vorlesung KOSMOLOGIE
von Herrn Prof. Dr. KÜHN im Sommersemester 2006
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Inhalt	5
1.2	Literatur	5
2	Geschichte	7
3	Entfernungsmessung in der nahen Umgebung	9
3.1	Kinetische Methoden	9
3.1.1	Parallaxe p bis zu $\lesssim 30$ pc	9
3.1.2	Nahe Sternhaufen (Hyaden mit ungefähr 100 Sternen)	9
3.2	Luminositätsmessung	10
3.2.1	Größenklassen	10
3.3	Hauptsequenz	10
3.3.1	Variable Sterne (Cepheiden)	10
3.4	Hubble-Gesetz	11
4	Einstein-Gleichungen und Robertson-Walker-Metrik, Friedmann-Universum	13
4.1	Kugeloberfläche, Geometrie auf der Kugel	14
4.2	Hyperkugel	15
4.3	Zusammenhang zwischen Hubble-Gesetz und Robertson-Walker-Metrik	16
4.3.1	Ausbreitung eines Lichtsignals	16
5	Einstein-Gleichungen	17
5.1	Plausibilitätsbetrachtungen aus der Newtonschen Theorie	17
5.2	Bewegungsgleichung, zeitliche Ableitung der Friedmann-Gleichung	18
6	Einstein-Gleichungen	21
6.1	Allgemeine Aussagen über $R(t)$	22
6.1.1	Vergangenheit	22
7	Hubble-Gesetz und Entfernungsmessung über große Abstände	23
7.1	Parallaxen-Entfernung	23
7.2	Luminositätsentfernung	24
7.3	Zusammenhang zwischen Rotverschiebung z und Luminositätsentfernung d_L	24
8	Mikrowellen-Hintergrund-Strahlung	27
8.1	Verhalten eines Photonengases mit Planck-Verteilung bei der Hubble-Expansion	27
8.2	Entwicklung bei der Hubble-Expansion	27
8.3	Ursprung der kosmischen Hintergrundstrahlung	28
8.4	Mathematische Analyse	29
9	Das frühe Universum	31
9.1	Allgemeine Überlegungen	31
9.1.1	Die Einstein-Gleichungen für $R \mapsto 0$ bzw. $t \mapsto 0$	31
9.1.2	Beitrag eines relativistischen Fermi-/Bose-Gases	31
9.1.3	Notwendige Bedingung für das thermische Gleichgewicht bei sich ändernder Temperatur	32
9.2	Entwicklung des Universums von $kT = 0,5$ GeV bis zum Ende der strahlungsdominierten Epoche (1 eV)	33
9.2.1	Temperatur der Neutrino-Hintergrund-Strahlung	33

9.2.2	Grenze für die maximale Masse leichter Neutrinos	35
9.3	Neutron/Proton-Verhältnis, Helium-Synthese und Zahl der masselosen (leichten) Neutrinos . . .	36
10	Instabilitäten, Inhomogenitäten und Entstehung von Galaxien	39
10.1	Theorie von Jeans (1902)	39
10.1.1	Modell	39
10.1.2	Adiabatische Auslenkungen	40
10.2	Verallgemeinerung auf den Fall des expandierenden Universums für den Fall $\varrho \gg P$	41
11	Dunkle Materie	43
11.1	Überblick über die Massenverhältnisse im Universum	43
11.2	Kandidaten für dunkle Materie	44
11.3	Verallgemeinerung der Rechnung auf den Fall des expandierenden Universums für $\varrho \gg P$. . .	45
11.3.1	Konsequenzen für die Mikrowellenstrahlung	47
11.4	Variation der Jeans-Länge und -Masse mit der Temperatur vor dem Zeitpunkt der Rekombination	48
11.4.1	Erinnerung an Thermodynamik für Photonen, gekoppelt an Plasma	48
11.5	Atomarer Wasserstoff: $T < 4000$ K	49
11.5.1	Zeitliche Entwicklung der Jeans-Masse	49
11.6	Konzepte zur Erzeugung von Struktur über dunkle Materie sowie Strukturbildung durch Inflation	49

Kapitel 1

Einführung

1.1 Inhalt

- I.) Einleitung, Geschichte
- II.) Entfernungsmessung im flachen Raum: „Cosmic Distance Ladder“
- III.) Einstein-Gleichungen; Friedmann-Universum, Robertson-Walker-Metrik, zeitliche Entwicklung $R(t)$ auf der Basis der Einstein-Gleichungen (materiedominiertes, strahlungsdominiertes Universum)
- IV.) Hubble-Gesetz, Hubble-Konstante H_0 bzw. $H(t)$, Decelerationsparameter (Bremsparameter) q_0 (Aussagen über offenes/geschlossenes Universum)
- V.) „Hot Big Bang“ ($T \lesssim 1 \text{ GeV}$ ($k_B = 1$)), Wasserstoff-Helium-Verhältnis, Zahl der (leichten) Neutrinos und (später) Mikrowellen-Hintergrund-Strahlen (Cosmic Microwave Background, CMB)
- VI.) Dunkle Materie: Evidenz und Kandidaten
- VII.) Inflation, Flachheit (Flatness) und Anisotropie
- VIII.) Materie-Antimaterie-Asymmetrie

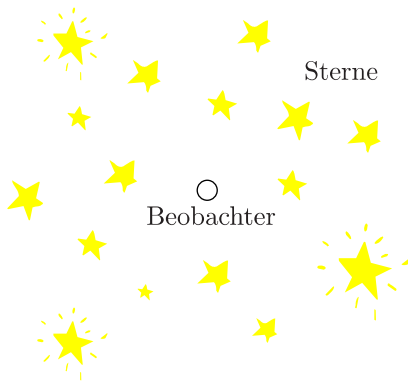
1.2 Literatur

- * WEINBERG: Gravitation and Cosmology
- * Die ersten drei Minuten (Klassiker)
- * BÖRNER: The Early Universe
- * KOLB & TURNER: The Early Universe (Hot Big Bang & Teilchenphysik)
- * PEEBLES: Physical Cosmology; The large Scale Structure of the Universe (anspruchsvolle Diskussion über Anisotropie, Dynamik)
- * LIDDLE: An Introduction to Modern Cosmology (pädagogisch, minimalistischer Einsatz von Formeln)

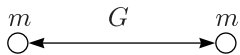
Kapitel 2

Geschichte

- * Bis zum 19. Jahrhundert: Newton-Mechanik, Galilei-Invarianz, euklidischer Raum, statisches Universum
 Olbers Paradoxon: Die Sterne überdecken den Himmel vollständig. Da jede Scheibe so hell ist wie die Sonne, müsste der ganze Himmel so hell wie die Sonne sein.



- * Durch Beobachtung wurde von Hubble (1923) bewiesen, dass es sich bei den Galaxien um Sternnebeln handelt. Hubble-Gesetz: $\Delta\nu/\nu \sim d$ (1929)
- * Fragen: Ist das Universum offen oder geschlossen? Wie groß ist die Materiedichte? Oder: Wie groß ist der Decelerationsparameter, also die Bremswirkung? Dazu lässt sich ein Newtonsches Analogon definieren:



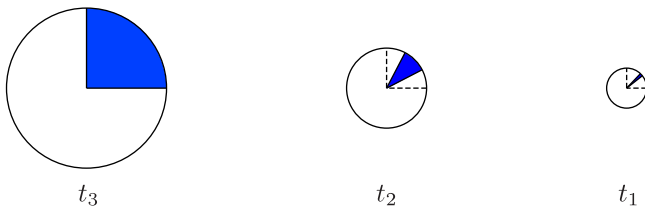
Die Geschwindigkeit v alleine sagt nicht, ob $v > v_{Flucht}$ oder $v < v_{Flucht}$ ist. Eine Aussage darüber kann nur dann gemacht werden, wenn zusätzlich noch die Massen m oder die Beschleunigung \dot{v} bekannt ist. Man benötigt also die beiden Parameter, um zu wissen, ob der Universum offen oder geschlossen ist.

- * Mikrowellen-Hintergrund: Penzias und Wilson (1965), Planck-Verteilung, $\delta T/T \lesssim 10^{-5}$ (Cobe-Satellit), WMAP (Wilson Microwave Anisotropy Probe)

Diese Anisotropie ergibt Aufschluss über die Dichte

$$\rho = \rho_{baryon} + \rho_{dark\ matter} + \rho_{darkenergy}$$

Wird die Raumkrümmung wichtig für die lokale Dynamik? Nein, zumindest nicht beim Hot Big Bang. Beim Hot Big Bang ist die Expansion von der Form $R(t) \sim t^{\frac{1}{2}}$. Andererseits schrumpft für $t \mapsto 0$ das Gebiet, das ein Teilchen beeinflussen kann (Horizont) proportional zu t ; aber $R(t)$ wird nur mit $t^{\frac{1}{2}}$ kleiner.



Die Krümmung des Bereichs mit kausalem Zusammenhang wird immer geringer. Das Universum zerfällt in kausal nicht zusammenhängende Gebiete.

Kapitel 3

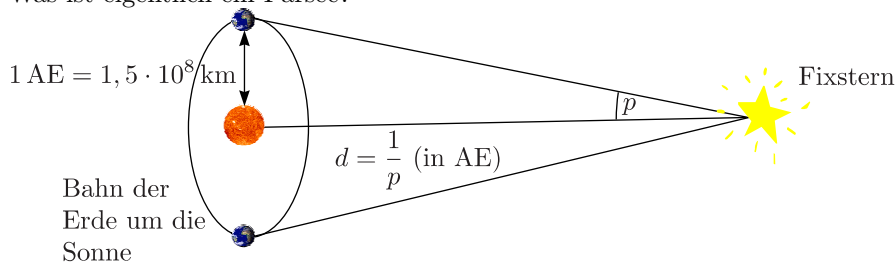
Entfernungsmessung in der nahen Umgebung

Im Augenblick wollen wir Krümmungsaspekte und physikalische Nebeneffekte wie Rotverschiebung vernachlässigen.

3.1 Kinetische Methoden

3.1.1 Parallaxe p bis zu $\lesssim 30$ pc

Was ist eigentlich ein Parsec?



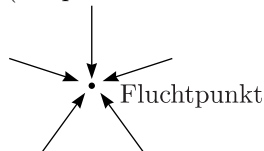
Wenn $p = 1''$ ist, dann ist $d = 1$ pc.

$$1 \text{ pc} = \frac{180 \cdot 60^2}{\pi} \text{ AE} = 3,26 \text{ Lichtjahre}$$

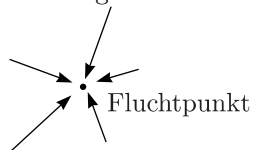
Die technische Grenze liegt bei $p = 0,03''$. Dies entspricht umgekehrt 30 pc und dies wiederum 100 Lichtjahre. Mit dieser Genauigkeit ist es möglich, einige tausend Sterne zu vermessen.

3.1.2 Nahe Sternhaufen (Hyaden mit ungefähr 100 Sternen)

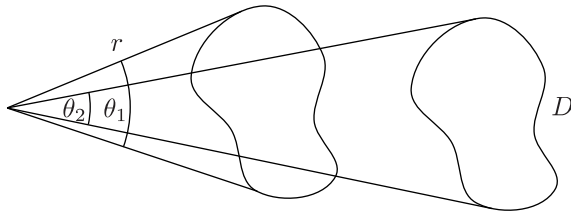
Deren Entfernung geht über 30 pc hinaus. Die Bewegung auf einen gemeinsamen Fluchtpunkt wird beobachtet (über mehrere Dekaden hinweg). Die scheinbaren Geschwindigkeitsvektoren zielen auf **einen** Fluchtpunkt (beispielsweise rein radiale Bewegung):



Mit tangentialer Komponente:



Die radiale Geschwindigkeit kann einerseits über den Dopplereffekt und andererseits über die Schnelligkeit der Annäherung an den Fluchtpunkt gemessen werden.



Aus θ , $\dot{\theta}$ und v_r folgt r , wenn D konstant ist.

$$\theta = \frac{D}{r} \Rightarrow \dot{\theta} = -D \frac{\dot{r}}{r} = -g \frac{v_r}{r} \text{ mit } \dot{r} = v_r \text{ und } \frac{D}{r} = \theta$$

$$\boxed{\frac{\theta_1 - \theta_2}{t_1 - t_2} = \theta \frac{v_r}{r}}$$

Die Hyaden liegen in einer Entfernung von 40,8 pc ($D = 5$ pc).

3.2 Luminositätsmessung

Die absolute Luminosität wird im folgenden als L und die scheinbare als l bezeichnet.

$$\boxed{l \equiv \frac{\text{Gemessene Leistung}}{\text{Spiegelfläche}} = \frac{L}{4\pi d^2}}$$

Zu l äquivalente Definition: logarithmischer Maßstab

3.2.1 Größenklassen

Die scheinbare Größe m (Magnitude) ist definiert über

$$l = 10^{-\frac{2}{5}m} \cdot 2,52 \cdot 10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

Sterne mit $m = 1$ sind um den Faktor $10^{\frac{2}{5}} \approx 2,5$ heller als Sterne mit $m = 2$. Nur Perius, Conopus und Riegel sowie die Planeten Merkur, Venus, Mars und Jupiter haben $m < 0$. Die absolute Magnitude (Größe) M ist die scheinbare Größe des Sterns, wenn seine Entfernung 10 pc wäre. Beispielsweise gilt für die Sonne $M_{\odot} = 4,7$ und damit:

$$\boxed{L = 3,02 \cdot 10^{35} \frac{\text{erg}}{\text{s}} \cdot 10^{-\frac{2}{5}M}}$$

3.3 Hauptsequenz

Durch die Untersuchung des Spektraltyps bzw. Farbindex (O, B, A, F, G, K, M, R, N, S) [Merksatz: O Be A Fine Girl, Kiss Me Right Now, Sweetheart.], welcher der Oberflächentemperatur entspricht. Die Relation zwischen Luminosität und Temperatur wird im Herzprung-Russel-Diagramm veranschaulicht, in dem Linien mit konstanter Steigung gleichen Radien entsprechen: $L = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$, wobei σ die Boltzmann-Konstante ist. Für die Hyaden ist die Entfernung durch kinematische Methoden bekannt (siehe oben); für andere Sternhaufen beobachtet man eine Verschiebung der Hauptsequenz um Δm . Dabei handelt es sich um die konstante Entfernung des Clusters. Es gibt 650 offene Sternhaufen (mit 20 bis 1000 Sternen) und 130 Kugelhaufen (mit 10^5 bis 10^7 Sternen) in unserer Galaxie. Die messbare obere Grenze der Magnitude, bevor das Hubble-Teleskop zum Einsatz kam, war bei Palomar $m = 22,7$. Palomar sieht Sterne der Luminosität der Sonne bis zu

$$d = 10 \text{ pc} \cdot 10^{\frac{22,7-4,7}{5}} = 4 \cdot 10^4 \text{ pc}$$

und eine Kerze auf eine Entfernung bis 20000 km.

3.3.1 Variable Sterne (Cepheiden)

Die meisten Cepheiden sind weniger als $4 \cdot 10^6 \text{ pc} = 4 \text{ Mpc}$ von uns entfernt. Liegt p im Bereich von zwei bis 40 Tagen, so spricht man von δ -Cepheiden. Die Untersuchung von Cepheiden in den Magellanischen Wolken liefert $l \approx f(p) \sim p$.

Zur Zeit befinden sich fünf Cepheiden in offenen Haufen unserer Galaxie. Es gibt inzwischen neue gut kalibrierte Messungen mittels kinematischer Methoden. Die Entfernung zu anderen Galaxien lassen sich mittels Novae und Kugelhaufen (globular clusters) bestimmen. Von einer Nova spricht man, wenn eine plötzliche Änderung von L eines Sterns in vier bis sechs Größenordnungen stattfindet. Es gibt 40 Novae pro Jahr pro Galaxie. Für eine typische Nova ist $M \approx -7,5$. Eine um den Faktor zehn höhere Luminosität L führt zu einem d , welches um den Faktor $\sqrt{10}$ größer ist.

In unserer Galaxie gibt es 130 Kugelhaufen. Deren maximaler Wert M_{max} ist scharf begrenzt; es liegt bei etwa -10 . Also sind diese bis zu $1,5 \cdot 10^7$ pc von uns entfernt. Die Hubble-Expansion liegt in dieser Entfernung erst bei $z = 0,0038$.

Wie bestimmt man die hellste Galaxie in einem Cluster von Galaxien? Annahme: Die Helligkeit von Galaxien ist beschränkt. Kleine Änderungen finden über lange Zeiträume ($\sim 10^9$ Jahre) statt. Die neuesten Messungen funktionieren mittels Supernovae (Supernovae Cosmology Project). Supernovae sind sehr helle Objekte, mit deren Hilfe man in Gebiete bis $z = 1$ vorstoßen kann.

3.4 Hubble-Gesetz

Das Hubble-Gesetz besagt, dass die Rotverschiebung proportional zum Abstand d ist. Diese Linearität ist bis $z = 1$ gut etabliert. Der Wert der Proportionalitätskonstanten erfordert die absolute Entfernungsmessung. Die Proportionalitätskonstante hat folgende Größenordnung:

$$H_0 = 100 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot h \cdot \text{Mpc}^{-1} \text{ mit } h = 0,72 \pm 0,08$$

Objekte im Abstand von 10 Mpc entfernen sich mit einer Geschwindigkeit von $100 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot h$ von uns. Die Dimension von H_0 ist t^{-1} , also $H_0^{-1} = 9,77 \cdot h^{-1} \cdot 10^9$ Jahre. Vor ungefähr $15 \cdot 10^9$ Jahren war das ganze Universum auf einen einzigen Punkt verdichtet (Linearität vorausgesetzt).

Kapitel 4

Einstein-Gleichungen und Robertson-Walker-Metrik, Friedmann-Universum

Die Interpretation erfolgt über die **Robertson-Walker-Metrik**. Ein Raum wird lokal durch die Metrik charakterisiert.

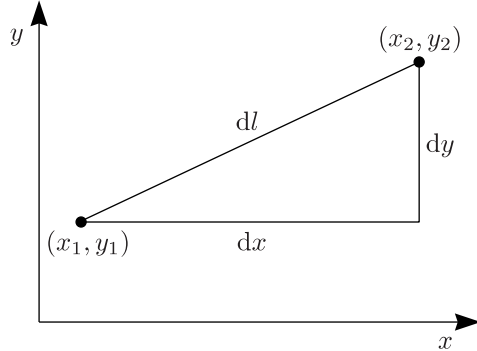
$$d\tau^2 = g_{ik} dx^i dx^k \text{ mit } i, k = 0, 1, 2, 3$$

g_{ik} hängt von den Koordinaten ab. Im Minkowski-Raum hat die Metrik die Signatur $(+, -, -, -)$. Wir setzen im folgenden $c = 1$, messen Entfernungen also in der Einheit, wie lange das Licht benötigt, um eine bestimmte Entfernung zurückzulegen. Die allgemeinste Metrik, welche mit Homogenität und Isotropie des Raumes verträglich ist, kann auf die Form

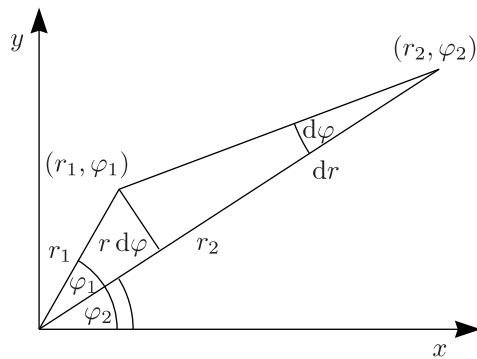
$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right) \text{ mit } k = +1, -1, 0 \text{ und } 0 \leq r \leq 1$$

gebracht werden. $R(t)$ ist eine beliebige Funktion der Zeit.

Aus der Metrik kann der Abstand zwischen infinitesimal benachbarten Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) berechnet werden.



$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$



$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

Wir suchen die allgemeinste Metrik, welche Homogenität und Isotropie des Raums liefert. Der allgemeinste Ansatz ist:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right) \text{ mit } k = 1, -1, 0 \text{ und } 0 \leq r < 1$$

r ist dimensionslos. Die Skala steckt in der Funktion $R(t)$, welche durch die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie, der Materieverteilung und die Anfangsbedingungen festgelegt wird. Die Metrik in der speziellen Relativitätstheorie in Kugelkoordinaten lautet:

$$d\tau^2 = dt^2 - R_0^2(dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

4.1 Kugeloberfläche, Geometrie auf der Kugel

Auf einer Kugel ist kein Punkt ausgezeichnet. Alle Punkte und alle Richtungen sind gleichwertig. Die Metrik erhält man aus folgendem Trick, und zwar gehen wir aus von der Gleichung der Oberfläche:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \tag{1}$$

Das Linienelement in drei Dimensionen ist gegeben durch:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{2}$$

Auf der Kugeloberfläche lassen sich nicht alle drei Koordinaten x_1 , x_2 und x_3 unabhängig voneinander variieren. Wegen (1) gilt nämlich:

$$x_3 dx_3 = -x_1 dx_1 - x_2 dx_2$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Nun wählen wir Polarkoordinaten in der Ebene:

$$x_1 = ar \sin \varphi, \quad x_2 = ar \cos \varphi \quad \text{mit } 0 \leq r < 1$$

$$dx_1 = a \sin \varphi dr - ar \cos \varphi d\varphi$$

$$dx_2 = a \cos \varphi dr + ar \sin \varphi d\varphi$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 = a^2 r \sin^2 \varphi dr - a^2 r \cos^2 \varphi dr = a^2 r dr \quad \text{und} \quad dx_1^2 + dx_2^2 = a^2 dr^2 + a^2 r^2 d\varphi^2$$

und weiter:

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2) + \frac{a^4 r^2 dr^2}{a^2 - a^2 r^2} = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

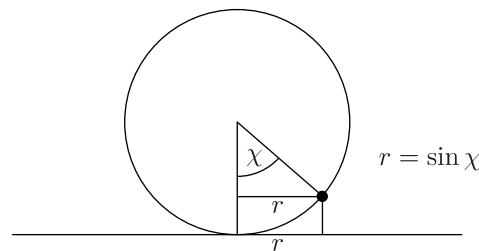
Für kleine r (Pole) ist die Metrik näherungsweise von der Form $dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Für r nahe bei 1 (Äquator) führt eine kleine Änderung in r zu einer großen Änderung im Abstand proportional zu $1/\sqrt{1 - r^2}$.

Ein anderes „natürliches“ Koordinatensystem sind Kugelkoordinaten χ , φ .

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2) \quad \text{wobei} \quad \sin \chi = r$$

Die Bedeutung von φ bleibt ungeändert.

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{\cos^2 \chi} = \frac{dr^2}{1 - \sin^2 \chi} = \frac{dr^2}{1 - r^2}$$



Zeige:

$$\frac{U}{R} = \frac{2\pi ar}{a\chi}$$

Die formale Herleitung funktioniert über

$$l = \int_{\text{Weg}} ds^2$$

Mit negativer Krümmung ist das Quadrat des Wegelements gegeben durch:

$$dl^2 \equiv a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

Auch hier kann als Übung gezeigt werden, dass folgendes gilt:

$$\frac{U}{R} = 2\pi \frac{\sinh(\chi)}{\chi} \quad \text{und} \quad f = 2\pi a^2 (1 + \cosh(\chi))$$

4.2 Hyperkugel

Wir betrachten die dreidimensionale Oberfläche einer Hyperkugel im vierdimensionalen euklidischen Raum. Sie wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 \tag{1}$$

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Aus Gleichung (1) folgt:

$$x_4 dx_4 = -x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3 \Rightarrow dx_4^2 = \frac{(-x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

Aufgrund der Rotationsinvarianz im dreidimensionalen Raum führen wir Kugelkoordinaten ein. (Diese entsprechen den **Polarkoordinaten** von vorher.)

$$x_1 = ar \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x_2 = ar \sin \vartheta \cos \varphi \quad \text{und} \quad x_3 = ar \cos \vartheta$$

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial r} dr + \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} d\varphi$$

Nach einer längeren Rechnung folgt:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = a^2 dr^2 + a^2 r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad \text{und} \quad dx_4^2 = a^2 \frac{r^2 dr^2}{1-r^2}$$

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right)$$

Als Übung kann man das Verhältnis U/R und die Oberfläche und das Volumen einer solchen Hyperkugel mit Radius $a\chi_0$ ausrechnen.

Konstante negative Krümmung:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right)$$

Oder in hyperbolischen Koordinaten:

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (\dots))$$

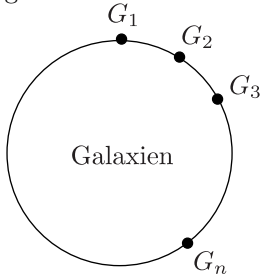
$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (\sin^2 \vartheta d\varphi^2 + d\vartheta^2) \right) \quad \text{mit } k = +1, -1, 0$$

4.3 Zusammenhang zwischen Hubble-Gesetz und Robertson-Walker-Metrik

Galaxien bewegen sich auf Geodäten. $r = r_0 = \text{const.}$, $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$ und $\varphi = \varphi_0 = \text{const.}$ definieren eine Geodäte. Ferner entspricht t gerade der Eigenzeit für einen Beobachter mit konstantem r , ϑ und φ .

$$d\tau^2 = dt^2 - dl^2$$

Das Volumen eines durch konstante r , ϑ und φ beschriebenen Gebietes wächst proportional zu $R(t)^3$. Damit reduziert sich die Dichte der Galaxien mit $R^{-3}(t)$ und deren gegenseitige Entfernung $\sim R(t)$. „Entfernung“ bedeutet hier, dass zur gleichen kosmischen Zeit entlang einer Kette von Galaxien G_1, \dots, G_n die Entfernungen gemessen und addiert werden.



Die Entfernung zwischen G_1 und G_n ist $d_{1n} = d_{12} + d_{23} + d_{34} + \dots + d_{n-1,n}$, wobei alle zu gleichen Zeit die Messung durchführen müssen.

4.3.1 Ausbreitung eines Lichtsignals

Wir gehen aus von der Metrik $d\tau^2 = dt^2 - dr^2$ (für $\vartheta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ und $c = 1$). Speziell für Licht gilt $d\tau^2 = 0$ und damit $dt = \pm dr$. Durch die Lösung $r = t$ wird der Lichtkegel beschrieben. Verallgemeinerung:

$$0 = d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \text{ für konstante } \vartheta, \varphi$$

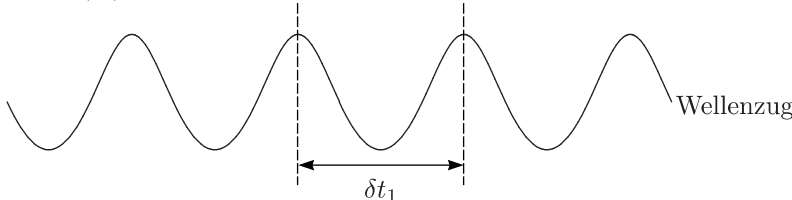
Ein Signal verlässt eine Galaxie am Punkt $r = r_1$ mit $\vartheta = \varphi = 0$. Es trifft bei mir am Punkt $r = 0$ zur Zeit t_0 ein. Die Gleichung für den Lichtkegel ist gegeben durch:

$$dt^2 = R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \Rightarrow \frac{dt}{R(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Durch Integration ergibt sich nun weiter:

$$f(t_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_0) = \begin{cases} \arcsin(r_0) \\ r_0 \\ \text{arsinh}(r_0) \end{cases} \quad (**)$$

Dies legt den Zeitpunkt t_0 fest. Zwei benachbarte Wellenzüge verlassen die Quelle zur Zeit t_1 und $t_1 + \delta t_1$, wobei $(\delta t)^{-1} = \nu$ die Emissionsfrequenz ist.



Die rechte Seite von (**) ist unabhängig von t , womit folgt:

$$0 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} - \frac{\delta t_0}{R(t_0)}$$

Hierbei haben wir angenommen, dass sich die Integranden (also $R(t)$) im Zeitintervall δt_1 bzw. δt_0 nur unwesentlich geändert hat. Mit $\delta t_1 = \nu_1^{-1}$ und $\delta t_0 = \nu_0^{-1}$ resultiert:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$$

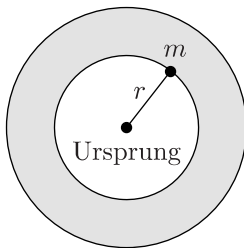
Hierbei ist der Zusammenhang zwischen t_0 und t_1 durch (**) gegeben.

Kapitel 5

Einstein-Gleichungen

5.1 Plausibilitätsbetrachtungen aus der Newtonschen Theorie

- 1.) Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im Gravitationsfeld einer kugelsymmetrischen Materieverteilung mit Dichte ϱ .



Auf m wirkt effektiv nur die Masse innerhalb der Kugelschale mit Radius r , also $M = \frac{4\pi}{3}r^3\varrho$. Die potentielle Energie von m ist:

$$V = -G \frac{Mm}{r} = -G \frac{4\pi}{3} r^2 \varrho m$$

$$U = T + V \text{ mit der kinetischen Energie } T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

Der Ursprung einer unendlich ausgedehnten Verteilung mit konstanter Dichte ϱ wird ad hoc festgelegt. Wir betrachten Expansion und wählen ein mitbewegtes Koordinatensystem mit Ursprung wie oben. $\vec{r}(t)$ charakterisiert die Lage eines Massenpunktes: $\vec{r}(t) = a(t)\vec{x}$. Gesucht sind die Gleichungen für $a(t)$.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{a}^2(t) \vec{x}^2 \text{ und } V = -G \frac{4\pi}{3} \varrho m a^2 \vec{x}^2 \Rightarrow U = T + V = \frac{1}{2} m \vec{x}^2 \left(\dot{a}^2 - G \frac{8\pi}{3} \varrho a^2 \right)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho - \frac{Kc^2}{a^2} \text{ mit } Kc^2 = -\frac{2U}{m\vec{x}^2}$$

K ist dimensionslos und konstant. Für $K \neq 0$ sei $K = k|K|$ und $R^2 \equiv a^2/|K|$.

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho - \frac{k}{R^2}$$

Dies sind die Friedmann-Gleichungen, wobei $c = 1$ und $k = \pm 1, 0$.

- 2.) Materie im Universum

Ideale Flüssigkeit oder Gas („Staub“ und „Strahlung“)

Staub ist nichtrelativistische Materie mit $\varrho \neq 0$ und $p = 0$. Die Energiedichte ist $\varrho \sim mc^2/V$ und der Druck gegeben durch mv^2/V . Wegen $v \ll c$ setzen wir $p = 0$. Für Strahlung gilt $p = \varrho/3$. In der Thermodynamik gibt es einen Zusammenhang zwischen Druck, Volumen, Energie und Entropie:

$$dE + p dV = T dS$$

Wir wollen im folgenden reversible Prozesse betrachten, also mit $dS = 0$. Die Expansion verlaufe außerdem adiabatisch. Die Energie im betrachteten Bereich des Universums ist

$$E = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho c^2$$

und die Änderung

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2$$

$$0 = \frac{dE}{dt} + p \frac{dV}{dt} \Rightarrow \dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} + 3 \frac{p}{c^2} \frac{\dot{a}}{a} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0} \quad (3)$$

Beispiel:

Mit $p = 0$ ergibt sich für Staub:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \ln(\rho) = -3 \ln(a) + C \Rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3}$$

Für Strahlung gilt $p = \rho c^2/3$, also:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -4 \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \boxed{\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4}$$

Die Zahl der Photonen ist $\sim a^{-3}$ und die Rotverschiebung kostet ein weiterer Faktor a^{-1} .

5.2 Bewegungsgleichung, zeitliche Ableitung der Friedmann-Gleichung

$$\boxed{2 \frac{\dot{R}}{R} \frac{\ddot{R}}{R} - \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3} G \dot{\rho} + 2 \frac{k}{R^3} \dot{R}}$$

$\dot{\rho}$ folgt aus Gleichung (3). Anschließend dividieren wir noch durch $2\dot{R}/R$ und erhalten:

$$\frac{\ddot{R}R - \dot{R}^2}{R^2} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{k}{R^2}$$

An dieser Stelle verwenden wir nochmal die Friedmann-Gleichungen für $(\dot{R}/R)^2$:

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3} \pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right)}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für die Expansion des Universums.

Für $R(t) \mapsto 0$ wird der Beitrag der Energiedichte wichtiger als die Berücksichtigung der Krümmung. Damit ist der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2}$$

wichtiger; wir vernachlässigen also k/R^2 .

- 1.) $\rho \neq 0$ und $p = 0$:

Hieraus ergibt sich:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right)^2 = \frac{4\pi G \rho_0}{3} \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \left(\frac{4\pi G \rho_0}{3} R_0^3 \right)^{\frac{1}{2}} R^{-\frac{1}{2}}(t)$$

Durch Trennung der Variablen können wir diese Differentialgleichung lösen:

$$R^{\frac{1}{2}} dR = \left(\frac{4\pi G \varrho_0}{3} R_0^3 \right)^{\frac{1}{2}} dt \Rightarrow \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4\pi G \varrho_0}{3} R_0^3 \right)^{\frac{1}{2}} (t + t_0)$$

Für $t \mapsto 0$ gelte $R \mapsto 0$ und damit gilt $t_0 = 0$, also:

$$R(t) = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\pi G \varrho_0}{3} R_0^3 \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$$

Die Phase, welche durch nichtrelativistische Materie dominiert ist, wird durch obiges Skalengesetz beschrieben.

2.) strahlungsdominiertes Universum:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right)^2 = \frac{4\pi G \varrho_0}{3} \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^4 \Rightarrow \frac{dR}{dt} = \left(\frac{4\pi G \varrho_0}{3} R_0^4 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{R}$$

$$R(t) = \sqrt{2} \left(\frac{4\pi G \varrho_0}{3} R_0^4 \right)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}}$$

Erstaunlicherweise wächst das Universum also schneller, wenn kein Druck vorhanden ist.

3.) Kosmologische Konstante:

Hier werden wir diese Konstante ad hoc einführen. Sie wird später über die Einstein-Gleichungen motiviert werden. Wir gehen aus von einem Zusammenhang zwischen ϱ und p der Form

$$p_\Lambda = -\varrho_\Lambda c^2 \text{ mit } \varrho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Aus Gleichung (...) folgt $\dot{\varrho}_\Lambda = 0$. Bewegungsgleichung:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3} G (\varrho_\Lambda + 3(-\varrho_\Lambda)) = \frac{8\pi}{3} G \varrho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow R \sim \exp \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right)$$

Eine kosmologische Konstante führt zu einer exponentiellen Expansion.

Kapitel 6

Einstein-Gleichungen

Vergleiche mit den inhomogenen und homogenen Maxwell-Gleichungen aus der Elektrodynamik:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \text{ und } \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$$

Die Einstein-Gleichungen haben dieselbe Struktur. Es gibt zwei verschiedene äquivalente Varianten:

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \text{ oder } R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi G T_{ik} \text{ mit } c = 1$$

Hierbei ist $R \equiv R_{ik} g^{ik}$, $T = T_{ik} g^{ik}$ und $R_{ik} = g^{l'l} R_{li'l'k}$. R_{ijkl} ist der Einsteinsche Krümmungstensor. Er wird aus bis zu zweiten Ableitungen und Produkten von g_{ik} gewonnen. Christoffel-Symbole:

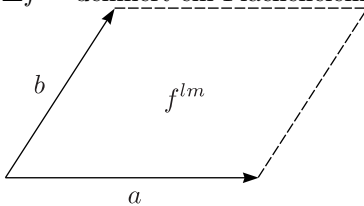
$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right)$$

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial G^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial G^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}$$

R_{ik} ist der sogenannte Ricci-Tensor und R der Krümmungsskalar. Der Feldstärketensor in der Elektrodynamik ist linear in den Potentialen. Hier treten jedoch nichtlineare Terme auf, weil das Gravitationsfeld an Energiedichte ankoppelt und selbst eine Energiedichte hat. Die Tatsache, dass kein Quellterm vorhanden ist, heißt nicht, dass der Raum auch feldfrei ist. Die anschauliche Interpretation ist gegeben durch eine Formel des Typs

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm} \text{ mit } \Delta f^{lm} = a^l b^m - a^m b^l$$

Δf^{lm} definiert ein Flächenelement aufgespannt durch a^l und b^l .



A wird parallel um f verschoben.

Wir führen lokal ein mitbewegtes Minkowski-Bezugssystem ein und diskutieren T_{ik} in diesen Koordination. Wir nehmen Homogenität und Isotropie an.

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{0r} \\ T_{s0} & T_{sr} \end{pmatrix} \text{ mit } s, r = 1, 2, 3$$

T_{00} ist die Energiedichte, T_{0r} und T_{s0} sind Energiestromdichten und T_{rs} der Spannungstensor. Aus der Isotropie folgt, dass der Energiestrom verschwinden muss, also $T_{0r} = T_{s0} = 0$, weil man sonst eine bestimmte Richtung auszeichnen würde. Des weiteren darf der Spannungstensor keine Richtung auszeichnen, also muss $T_{sr} \sim \delta_{sr}$ gelten. Es gilt also lediglich $T_{sr} = p \delta_{sr}$ und es wirken keinerlei Scherkräfte.

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} = (\varrho + p) u_i u_k + p g_{ik} \text{ wobei } U_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \text{ und } g_{ik} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne R_{ik} und R für die Robertson-Walker-Metrik. Die Einstein-Gleichungen (für $i = k = 0$) reduzieren sich (nach längerer Rechnung) auf:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \varrho(t) R^2 \quad (1)$$

Ferner aus den räumlichen Komponenten folgt die Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors. Die entsprechende Rechnung kann als Übung durchgeführt werden; wir geben nur das Ergebnis an:

$$\frac{d}{dR}(\varrho R^3) = -3pR^2 \quad (2)$$

Für $p = 0$ ist ϱR^3 somit eine Erhaltungsgröße. Verschiedene Arten von Materie unterscheiden sich durch die **Zustandsgleichung** für $p = p(\varrho)$ (beispielsweise Strahlung, Staub und dunkle Energie Λ).

6.1 Allgemeine Aussagen über $R(t)$

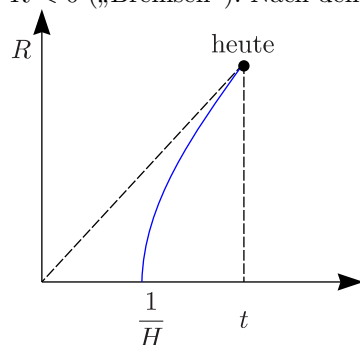
6.1.1 Vergangenheit

Wir betrachten die Ableitung von Gleichung (1) nach t .

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3} \frac{d}{dR} \left(\varrho R^3 \frac{1}{R} \right) \dot{R} = \frac{8\pi G}{3} G \left(\frac{d}{dR}(\varrho R^3) \frac{1}{R} - \varrho R^3 \frac{1}{R^2} \right) \dot{R}$$

$$\ddot{R} = \frac{4\pi G}{3} (-3pR - \varrho R) = \boxed{-4\pi G R \left(\varrho + \frac{p}{3} \right)} \quad (4)$$

Für die gewöhnliche nichtrelativistische Materie ist $p > 0$ und natürlich aus die restlichen Größen. Damit ist $\ddot{R} < 0$ („Bremsen“). Nach dem Hubble-Gesetz ist $\dot{R} > 0$.



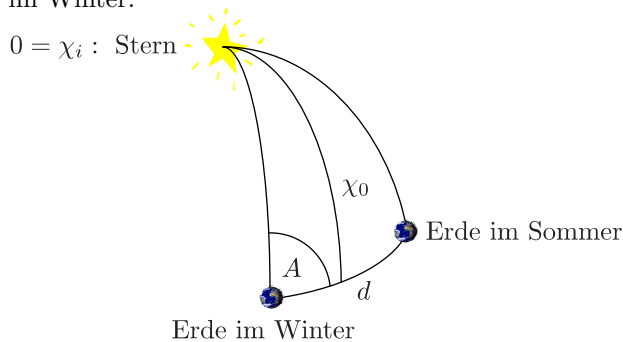
$R(t)$ geht gegen Null für abnehmendes t . Das Alter des Universums ist also $< H^{-1}$.

Kapitel 7

Hubble-Gesetz und Entfernungsmessung über große Abstände

7.1 Parallaxen-Entfernung

Wir betrachten die ganze Situation auf einer Kugeloberfläche. Die Erdbahn verlaufe senkrecht zur Blickachse zum Stern. Man führt ein Triangulationsverfahren durch und misst den Winkel sowohl im Sommer als auch im Winter.

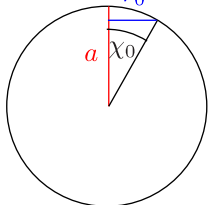


Wir interessieren uns im folgenden für den Parallaxenwinkel $p = 90^\circ - A$. Aufgrund der sphärischen Geometrie gilt:

$$\tan(\chi_0) = \sin(d) \tan(A) = \sin(d) \cot(p)$$

d und alle anderen Abstände werden in Einheiten des Kugelradius a gemessen. Wegen $d \ll 1$ und $p \ll 1$ gilt

$$\tan(\chi_0) = \frac{d}{p}$$



Ausgedrückt durch r : $r_0 = \sin \chi_0$

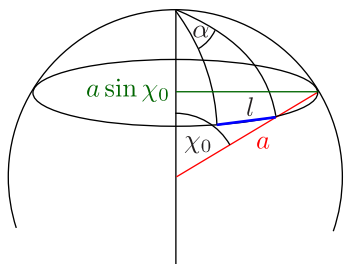
Bei der Entfernungsmessung über Parallaxe erscheint der Stern in einer Entfernung

$$D_{\text{parall}} \equiv \frac{ad}{p} = a \tan \chi_0$$

Die echte Entfernung ist $D_{\text{echt}} = a\chi_0$.

$$\frac{D_{\text{parall}}}{D_{\text{echt}}} = \frac{\tan \chi_0}{\chi_0} > 1$$

- 1.) Unter welchem Winkel α erscheint ein Objekt der Länge l , dessen Entfernung D bekannt ist, bei Kugelgeometrie?



χ_0 charakterisiert den Breitenkreis. Die Entfernung des Objektes ist $D = a\chi_0$. Aus dem Beobachtungswinkel α ergibt sich die wahre Länge $l = a\alpha \sin \chi_0$. Die scheinbare Länge des Objekts ist:

$$l_{schein} \equiv \alpha \cdot \text{Entfernung} = \alpha a \chi_0 \Rightarrow \frac{l_{schein}}{l_{echt}} = \frac{\chi_0}{\sin \chi_0} = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi_0 = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \chi_0 = \pi \\ \infty & \text{für } \chi_0 \mapsto \pi \end{cases}$$

2.) Was ist der Effekt der Expansion?

Wenn l die wahre Länge bei der Emission bezeichnet und D die Entfernung zwischen Sender und Empfänger beim Eintreffen des Signals, so ist die Kugel um den Faktor $a(t_{beob})/a(t_{emiss})$ skaliert. Damit folgt:

$$l_{schein} = l_{echt} \cdot \frac{\chi_0}{\sin \chi_0} \cdot \frac{a(t_{beob})}{a(t_{emiss})}$$

$$\frac{a(t_{beob})}{a(t_{emiss})} = \frac{R(t_{beob})}{R(t_{emiss})} = 1 + z$$

z bezeichnet die Rotverschiebung. Das ganze ist wichtig für die Analyse der Hintergrundstrahlung.

7.2 Luminositätsentfernung

Die scheinbare Luminosität l im euklidischen Raum ist gegeben durch $l \equiv L/(4\pi d^2)$, wobei d der Abstand und L die Leistung der „Kerze“ ist. Im gekrümmten Raum bei Expansion ergibt sich:

$$l = \frac{L}{4\pi r^2 R^2(t_0)} \cdot \frac{R(t_1)}{R(t_0)} \cdot \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$$

r ist so definiert wie bei der Robertson-Walker-Metrik. Der erste Faktor $R(t_1)/R(t_0)$ rührt von der Rotverschiebung her und der zweite von der Zählrate der Photonen. Wir definieren die Luminositätsentfernung d_L :

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{\frac{1}{2}} = r R(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t_1)}$$

Kennt man den Emissionszeitpunkt und den Messzeitpunkt, kann man d_L bestimmen.

7.3 Zusammenhang zwischen Rotverschiebung z und Luminositätsentfernung d_L

Das Ziel ist, Abweichungen vom linearen Hubble-Gesetz und den Decelerationsparameter a_0 zu berechnen. Ein Photon werde am Punkt $(r_1, \vartheta = 0, \varphi = 0)$ zur Zeit t_1 emittiert und erreiche den Punkt $r = r_0 = 0$ zur Zeit t_0 . Es gilt:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1)$$

Weiterhing gelten die folgenden Gleichungen:

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \quad (2)$$

**7.3. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN ROTVERSCHIEBUNG z UND
LUMINOSITÄTSENTFERNUNG D_L**

$$\boxed{d_L = r_1 \frac{R^2(t_0)}{R(t_1)} = r_1 R(t_0)(1+z)} \quad (3)$$

Für kleine Entfernungen gilt die Taylorentwicklung $R(t_0) \approx R(t_1) + \dot{R}(t_0 - t_1)$. Die Laufzeit entspricht der Entfernung $d = t_0 - t_1$. Die Beziehung

$$\boxed{z = \frac{\dot{R}}{R} d}$$

definierte uns die Hubble-Konstante $H \equiv \dot{R}/R$. Die nicht-euklidische Struktur wird erst beim nächsten Term in der Taylorreihe wichtig. Des weiteren gehen wir davon aus, dass r_1 und t_1 unbekannt sind. Jedoch wird natürlich $t_0, r_0 = 0$ und $R(t)$ als bekannt angenommen. Das Ziel ist nun, d_L als Funktion von z bei gegebenem R zu berechnen. Strategie:

- 1.) Berechne t_1 aus z und t_0 über Gleichung (2).
- 2.) Berechne r_1 aus (1) als Funktion von z .
- 3.) eingesetzt in (3)

Wir betrachten nur die niedrigsten zwei Terme der Taylorreihe.

$$R(t_1) = R(t_0) + \dot{R}(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{R}(t_0)(t_1 - t_0)^2 + \dots = R(t_0) \left[1 + H(t_1 - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H^2 (t_1 - t_0)^2 \right] + \dots$$

Aus Gleichung (2) folgt:

$$\frac{R(t_1)}{R(t_0)} = \frac{1}{1+z} = 1 + H\delta - \frac{1}{2}q_0 H^2 \delta^2 + O(\delta^3) \text{ mit } H \equiv \frac{\dot{R}}{R}, q_0 \equiv -\frac{\ddot{R}}{RH^2} \text{ und } \delta \equiv t_1 - t_0$$

Weiterhin benötigen wir:

$$1 - \frac{1}{1+z} = \frac{z}{1+z} = -H\delta + \frac{1}{2}q_0 H^2 \delta^2 + O(\delta^3)$$

Diese Gleichung wollen wir nun bis auf Terme $O(z^3)$ nach δ auflösen:

$$-H\delta = \frac{z}{1+z} - \frac{1}{2}q_0 (H\delta)^2 \approx z(1-z) - \frac{1}{2}q_0 z^2 \Rightarrow \boxed{-H(t_1 - t_0) = z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2}$$

Aus Gleichung (1) folgt dann, indem man die Wurzel auf der rechten Seite entwickelt und dann integriert:

$$\frac{1}{R(t_0)} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H(t_0 - t_1)^2 \right] = r_1 + O(r_1^3) \Rightarrow r_1 = \frac{1}{R(t_0)H} \left[z - \frac{1}{2}(q_0 + 1)z^2 \right]$$

$$d_L = r_1 \frac{R^2(t_0)}{R(t_1)} = r_1 R(t_0) \cdot \frac{R(t_0)}{R(t_1)} = \frac{1}{H} z(1+z) \left(1 - \frac{1}{2}(q_0 + 1)z \right) = \frac{1}{H} z \left(1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z \right)$$

d_L, z und H werden gemessen und hieraus ergibt sich dann q . Zur Erinnerung: Für $k = 0$ und dem materie-dominierten Fall ergab sich $q_0 = \frac{1}{2}$. In der Praxis löst man die Gleichung besser numerisch, da man heute in Gebiete mit $z \approx 1$ vordringen kann, weshalb man bei obiger Taylorreihe sehr viele Terme mitnehmen müsste. Wie weit ist $z = 1$ von uns entfernt?

$$z = H \frac{\Delta d}{c} \Rightarrow \Delta d = \frac{z \cdot c}{H} = \frac{3 \cdot 10^6 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{75 \frac{\text{km}}{\text{s-Mpc}}} = 4000 \text{ Mpc}$$

Kapitel 8

Mikrowellen-Hintergrund-Strahlung

8.1 Verhalten eines Photonengases mit Planck-Verteilung bei der Hubble-Expansion

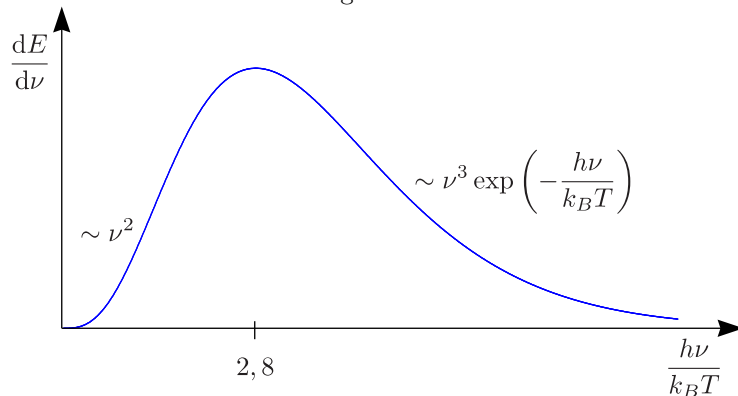
Die Zahl der Photonen in einem Volumenelement dV mit Impulsen zwischen \vec{p} und $\vec{p} + d^3\vec{p}$

$$\frac{dn}{\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} dV = \frac{2}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) - 1} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} dV$$

Der Faktor 2 im Zähler beschreibt die zwei Polarisationszustände der Photonen. Mit $p = \nu \frac{h}{c}$, $E = h\nu$ und $d^3p = p^2 dp d\Omega$ (Isotropie) erhält man die Energiedichte:

$$\frac{dE}{d\nu} = \frac{8\pi h \nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

Dies ist die Planck-Verteilung. Für kleine ν verhält sich die Funktion $\sim \nu^2$ und für große ν exponentiell.



Unter der Annahme einer Planck-Verteilung genügt die Messung der Energiedichte bei einer Frequenz zur Bestimmung der Temperatur T .

8.2 Entwicklung bei der Hubble-Expansion

- 1.) Die Zahl der Photonen in einem durch festes r , ϑ und φ beschriebenem Gebiet bleibt konstant. Wir nehmen also an, dass Photonen weder emittiert noch absorbiert werden. Wegen $dV \sim R^3(t)$ nimmt die Dichte wie R^{-3} ab. Die Energie nimmt ab mit $E_1 = E_0 \cdot R(t_0)/R(t_1)$ und auch entsprechend das Impulsintervall $d^3p \sim R^{-3}(t)$. Damit bleibt die Größe $d^3p dV$ (Phasenraum) konstant.

$$\frac{dn}{\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}}(E_0, T_0) \frac{d^3p_0}{(2\pi\hbar)^3} dV_0 = \frac{dn}{\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}}\left(E_1 \frac{R(t_1)}{R(t_0)}, T_0\right) \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} dV_1$$

Weil dn/d^3p nur von $E/(k_B T)$ abhängt, gilt:

$$\frac{dn}{\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}}\left(E_1, T_0 \frac{R(t_0)}{R(t_1)}\right) \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} dV_1$$

Die Expansion führt also zu einer neuen Planck-Verteilung mit $T_1 = T_0 \cdot R(t_0)/R(t_1)$.

2.) Photon-Gas für einen bewegten Beobachter:

Das Gas sei isotrop für einen ruhenden Beobachter. Für einen in Richtung \vec{n} mit Geschwindigkeit β bewegten Beobachter ist ein Teil der Photonen rotverschoben und der andere Teil blauverschoben. Für einen ruhenden Beobachter seien Impuls und Energie des Photons \vec{p} , E und im bewegten System \vec{p}' , E' .

$$E' = E \left(1 - \beta \vec{n} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) = E(1 - \beta \cos \theta)$$

Das Ergebnis folgt aus der speziellen Relativitätstheorie.

$$\frac{dn}{\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}} = \frac{2}{\exp\left(\frac{E'}{(1-\beta \cos \theta)k_B T}\right) - 1}$$

Es resultiert also eine Planck-Verteilung mit richtungsabhängiger Temperatur:

$$T_{eff} = (1 - \beta \cos \theta)T = T(1 - \beta) + T\beta(1 - \cos \theta) \text{ mit } T\beta = T_{Dipol}$$

Dies stellen die ersten beiden Terme in einer Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen dar. Die Anisotropie wird beobachtet mit $\beta \cdot c \approx 300 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Sie definiert uns eine Bewegung bezüglich des kosmologischen Ruhesystems. Die Dipol-Anisotropie wird in allen Analysen subtrahiert. Der aktuelle experimentelle Stand ist $T \approx 2,725 \pm 0001$ ($\hat{=} \lambda = 0,5 \text{ cm}$ und $\hat{=} \nu = 60,4 \text{ GHz}$). Fluktuationen werden mit einer viel größeren Genauigkeit gemessen.

8.3 Ursprung der kosmischen Hintergrundstrahlung

Bei hoher Temperatur sind Wasserstoff und Helium ionisiert (Plasma). Dies führt dazu, dass sich elektromagnetische Strahlung nicht ausbreiten kann. Sie befindet sich im thermischen Gleichgewicht mit Materie. Das Maximum der Planck-Verteilung liegt bei $E_{max} = 2,8 \cdot kT$. Die Ionisationsenergie E_I von Wasserstoff beträgt $13,6 \text{ eV}$.

$$T_I \equiv \frac{E_I}{2,8k_B} = 50\,000 \text{ K}$$

Forderung: Für jedes Wasserstoffatom soll es wenigstens ein Photon geben mit $E_\gamma > E_I$. Es gilt $n_\gamma = 1,7 \cdot 10^9 n_{Proton}$. Wir fordern außerdem, dass im Schwanz der Verteilung noch genügend Photonen mit $E_\gamma > E_I$ vorhanden sind. Eine grobe Abschätzung liefert:

$$n_\gamma \exp\left(-\frac{E_I}{k_B T}\right) \geq n_p \Rightarrow 1,7 \cdot 10^9 \exp\left(-\frac{E_I}{k_B T}\right) \geq 1 \Rightarrow \ln(1,7 \cdot 10^9) - \frac{E_I}{k_B T} \geq 0$$

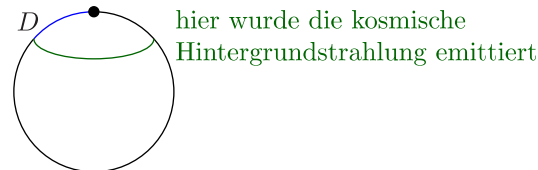
$$T = \frac{13,6 \text{ eV}}{k_B \ln(1,7 \cdot 10^9)} = 7400 \text{ K}$$

Eine genauere Rechnung mit den Wirkungsquerschnitten ergibt $T_{dec} = 3000 \text{ K}$.

$$1 + z = \frac{3000}{2,72} \approx 1000 \text{ und } \frac{R_0}{R_{dec}} \approx 1000$$

Photonen, welche wir heute beobachten, stammen von einer Kugeloberfläche mit Abstand $D \approx 6000h^{-1} \text{ Mpc}$, wobei $H_0 = h \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ mit $h = 0,72$.

Beobachter B



Um den Beweis durchführen zu können, betrachten wir den Fall $k = 0$ (flaches Universum, materiedominiert). Dann gilt:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{3}{2} t_0 = H_0^{-1}$$

Für die Ausbreitung des Lichts gilt:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = r_1 \text{ für } k = 0$$

t_1 und r_1 entsprechen der Emission, t_0 und $r_0 = 0$ entsprechen der Beobachtung.

$$r_1 = \frac{2}{R_0 H_0} \text{ für } t_0 \gg t_1 \text{ und } c = 1$$

Damit erhalten wir für die Entfernung:

$$D = R_0 \cdot r_1 = \frac{2}{H_0} \cdot c = \frac{2}{h \cdot 100 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}} \cdot 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 6000 \text{ Mpc} \cdot h^{-1} \approx 8000 \text{ Mpc}$$

Das Alter des Universums damals folgt aus der Gleichung

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{1000} = \left(\frac{3}{2} H_0 t_{dec} \right)^{\frac{2}{3}}$$

und zwar gilt $t_{dec} = 350\,000$ Jahre. Wir interessieren uns nun für die Größe eines kausal zusammenhängenden Gebietes bei $T = 3000 \text{ K}$ ($z = 1000$)

- a.) Auch im frühen Universum, also vor $T = 3000 \text{ K}$ war bis $10\,000 \text{ K}$ das Universum noch materiedominiert. Dann gilt also $R \sim t^{\frac{2}{3}}$ oder:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{R_{dec}}{R_0} = \left(\frac{3}{2} H_0 t_{dec} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t_{dec} = \frac{2}{3} H_0^{-1} (1+z)^{-\frac{3}{2}} = \boxed{t_0 (1+z)^{-\frac{3}{2}}}$$

Aus $t = 6,5 \cdot 10^9$ Jahre $\cdot h^{-1}$, $z = 1000$ und $h = 0,72$ ergibt sich $t_{dec} = 300\,000$ Jahre. Das ist eigentlich nur gültig bis $z = 3000 \hat{=} 60\,000$ Jahre. Also war zur Zeit t_{dec} maximal ein Gebiet der Größe $t_{dec} \cdot c$ kausal zusammenhängend. Der Durchmesser l_{wahr} dieses Gebietes war

$$l_{wahr} = \frac{2}{3} H_0^{-1} (1+z)^{-\frac{3}{2}} \cdot c$$

Wir erinnern uns an Kapitel IV:

$$l_{scheinbar} = l_{wahr} \cdot \frac{\chi_0}{\sin(\chi_0)} \cdot \frac{R(t_0)}{R(t_{dec})} \stackrel{k=0}{=} l_{wahr} \cdot \frac{R(t_0)}{R(t_{dec})} = l_{wahr} \cdot (1+z) = \frac{2}{3} H^{-1} (1+z)^{-\frac{1}{2}}$$

$\alpha \equiv l_{scheinbar}/D$ ist der Öffnungswinkel, wobei $D = \chi_0 R(t_0) = 2c/H_0$ gilt.

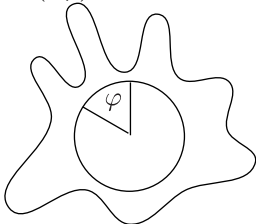
$$\alpha = \frac{\frac{2}{3} H_0^{-1} (1+z)^{-\frac{1}{2}}}{2H_0} = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{1+z}} \approx 0,6^\circ}$$

8.4 Mathematische Analyse

Wir betrachten:

$$\frac{\Delta T}{\bar{T}}(\vartheta, \varphi) = \frac{T(\vartheta, \varphi) - \bar{T}}{\bar{T}} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_m^l(\vartheta, \varphi)$$

Die Summation beginnt erst bei $l = 2$, weil wir den Dipolterm, der keine kosmologische Bedeutung hat, subtrahiert haben. Wir erinnern uns, dass eine periodische Funktion im Intervall $[0, 2\pi]$ nach $\sin(n\varphi)$ und $\cos(n\varphi)$ entwickelt wird.



Betrachte

$$c_l \equiv \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2$$

l charakterisiert die Winkelaufösung; große l entsprechen kleinen Winkeln (Winkel $\sim 180^\circ/l$).

Kapitel 9

Das frühe Universum

9.1 Allgemeine Überlegungen

9.1.1 Die Einstein-Gleichungen für $R \mapsto 0$ bzw. $t \mapsto 0$

Für kleine Zeiten können wir die Krümmung vernachlässigen ($k = +1, 0, -1$ verhält sich gleich).

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho$$

Für $R \mapsto 0$ wächst ρ mindestens wie R^{-3} ($\rho_{mat} \sim R^{-3}$, $\rho_{rad} \sim R^{-4}$ und $\rho_\Lambda \sim \text{const.}$). Daraus folgt, dass der Term k/R^2 für kleine R vernachlässigt werden. Außerdem verwenden wir das Resultat, dass der Raum flach ist aus Kapitel IV. Damit können wir die Einstein-Gleichungen ohne den Krümmungsterm diskutieren. Für genügend kleine Zeiten (hohe Temperaturen) dominiert die Strahlung ρ_{rad} gegenüber ρ_{mat} . Wir können sehr gut ρ_γ^0 aus der Planck-Verteilung mit $T = 2,72\text{ K}$ und ρ_c^0 aus der Hubble-Konstante H_0 miteinander vergleichen. Heute gilt:

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_c} = \frac{2,5 \cdot 10^{-9}}{h^2} \text{ mit } h = 0,72$$

Bei einer Temperatur von $10\,000\text{ K}$ ($\hat{=} 1\text{ eV}$) ist der Beitrag der Strahlung (Photonen γ und Neutrinos ν) gleich dem von ρ_{mat} . Dies folgt aus $\rho_\nu \approx 0,7\rho_\gamma$ (Herleitung später) und $\rho_{mat} \approx 0,3\rho_c$. Aus $\rho_{mat} \sim R^{-3} \sim (1+z)^3$ und $\rho_{rad} = \rho_\gamma + \rho_\nu \sim R^{-4} \sim (1+z)^4$ folgt $z = 3000$. Oberhalb von 1 eV gilt mit $\rho = a/R^4$:

$$\sqrt{\dot{R}^2} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}Ga} \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2}} \Rightarrow R dR = \sqrt{\frac{8\pi}{3}Ga} dt \Rightarrow R^2 = \sqrt{\frac{32\pi}{3}Ga} t \Rightarrow \boxed{1 = \frac{32\pi G}{3} \rho t^2}$$

Bei der Integration der Differentialgleichung darf sich die Zahl der Freiheitsgrade nicht ändern. Zahlenwerte:

$$\left[\frac{32\pi G}{3}\right]^{-1} = 0,45 \cdot 10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \text{s}^2$$

Das Gewicht der Photonen in einem Kubikzentimeter bei einer Sekunde nach dem Urknall beträgt somit etwa eine Tonne.

9.1.2 Beitrag eines relativistischen Fermi-/Bose-Gases

Wir setzen im folgenden $\hbar = c = 1$ und messen T in Energie-Einheiten, also $k_B = 1$. Damit ist die Planck-Verteilung gegeben durch:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = 2 \frac{4\pi\omega^3}{\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1} \text{ und } \rho_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{30} T^4$$

Die Fermi-Verteilung hat eine ähnliche Form:

$$\frac{d\rho}{d\omega} = N_F \frac{4\pi\omega^3}{\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) + 1} \text{ und } \rho_F = N_F \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T^4$$

N_F ist die Anzahl der Fermion-Freiheitsgrade. Für eine Sorte von Neutrinos gilt $N_F = 2$. Neutrinos haben einen Polarisationszustand. Es gibt linkshändige Neutrinos und rechtshändige Antineutrinos. Bei Elektronen gilt $N_F = 4$, was davon herrührt, dass es sowohl linkshändige als auch rechtshändige Elektronen und sowohl linkshändige als auch rechtshändige Positronen gibt. Wo kommt der Faktor $7/8$ her?

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n}{\exp(x) - 1} - \int_0^\infty dx \frac{x^n}{\exp(x) + 1} = \int_0^\infty dx \frac{2x^n}{\exp(2x) - 1} \stackrel{y=2x}{=} 2^{-n} \int_0^\infty dy \frac{y^n}{\exp(y) - 1}$$

Damit folgt weiter:

$$(1 - 2^{-n}) \int_0^\infty dx \frac{x^n}{\exp(x) - 1} = \int_0^\infty dx \frac{x^n}{\exp(x) + 1}$$

Für die Energiedichte im Falle $n = 3$ ergibt sich:

$$\frac{n_F}{n_B} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Die Energie-Dichte insgesamt ist:

$$\rho = \kappa \frac{\pi^2}{15} \text{ mit } \kappa = 1 + \frac{7}{8}N_\nu + \frac{7}{4}N_e$$

Im frühen Universum gilt:

$$1 = \frac{32\pi G}{3} \frac{\pi^2}{15} \kappa T^4 t^2 \Rightarrow t \sim \frac{1 \text{ s}}{\left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^2}$$

9.1.3 Notwendige Bedingung für das thermische Gleichgewicht bei sich ändernder Temperatur

Ist die Reaktionsrate größer also $H(t) = \dot{R}(t)/R(t)$, so gilt:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{d}{dt} \ln(R) = \frac{1}{2t} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \rho = \sqrt{\kappa \frac{8\pi^3 G}{45}} T^2$$

Die Reaktionsrate hängt von der Dichte, Temperatur und dem jeweiligen Prozess ab.

Überblick:

t	T	Prozess
$10^{-42} - 10^{-32 \pm 6} \text{ s}$	$10^{13 \pm 3} \text{ GeV}$	Inflation
10^{-10} s	100 GeV	elektroschwacher Phasenübergang
10^{-4} s	100 MeV	Übergang von Quarks zu Hadronen
10^{-2} s	10 MeV	$\gamma, \nu, e^+, e^-, n, p$ im thermischen Gleichgewicht
1 s	1 MeV	ν entkoppeln, e^+e^- -Vernichtung
100 s	$0,1 \text{ MeV}$	Nukleo-Synthese
10^4 Jahre	1 eV	$\rho_{mat} = \rho_{rad}$
10^5 Jahre	$0,1 \text{ eV}$	Atome, Entkopplung der Strahlung
$\sim 10^9 \text{ Jahre}$	10^{-4} eV	Sternentstehung

* Der Beitrag der Krümmung (und Λ) ist vernachlässigbar.

* Bei etwa 1 eV wird das Universum strahlungsdominiert.

* Strahlungsdominanz

$$\rho = \frac{a}{R^4} \Rightarrow 1 = \frac{32\pi G}{3} \rho t^2$$

Dies gilt für eine konstante Zahl der Freiheitsgrade.

* Planck- und Fermiverteilung

$$\rho = \kappa \frac{\pi^2}{15} T^4 \text{ mit } \kappa = 1 + \frac{7}{8}N_\nu + \frac{7}{4}N_e + \dots \quad t \sim \frac{1 \text{ s}}{\left(\frac{T}{\text{MeV}}\right)^2}$$

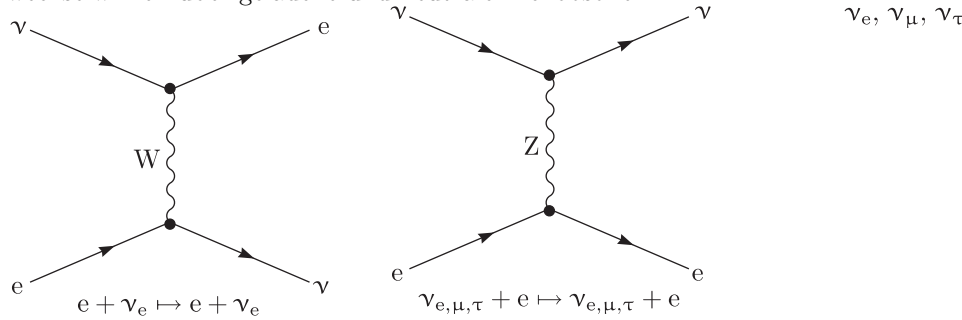
Von Gleichgewicht spricht man dann, wenn die Reaktionsrate größer ist als $H(t)$. Die Reaktionsrate hängt ab von den Parametern des Systems; sie ist eine Funktion von Dichte, Temperatur und Prozess.

9.2 Entwicklung des Universums von $kT = 0,5 \text{ GeV}$ bis zum Ende der strahlungsdominierten Epoche (1 eV)

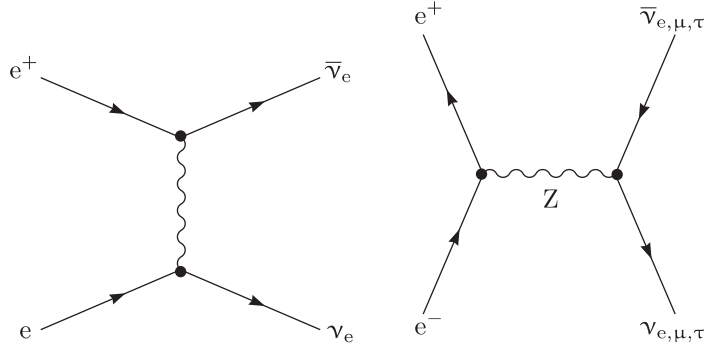
9.2.1 Temperatur der Neutrino-Hintergrund-Strahlung

Bei $kT = 0,2 \text{ GeV}$ befindet man sich unterhalb der Produktionsschwelle von Baryonen. Elektronen, Photonen, Myonen und alle Neutrinos sind im thermischen Gleichgewicht. Es gibt sehr wenige Protonen ($N_p/N_\gamma \sim 10^{-9}$) und für $k_B T > 1 \text{ eV}$ kann ihr Beitrag zur Dynamik vernachlässigt werden. Das Universum ist strahlungsdominiert.

Elektronen, Neutrinos, Protonen, Neutronen und Photonen sind im Gleichgewicht. Elektronen und Neutrinos wechselwirken über geladene und neutrale Eichbosonen



und können beliebig erzeugt und vernichtet werden.



Vergleiche Reaktionsrate mit $H(t)$. Ein typischer Wirkungsquerschnitt liegt bei $\sigma \approx G_F^2 E^2$. Effektiv handelt es sich um Vier-Fermion-Wechselwirkungen.

$$G_F \sim \frac{1}{M^2} \quad [\sigma] \sim \frac{1}{M^2}$$

Die Teilchendichte ist $n(T) \approx T^3$ mit $T \hat{=} E$. Die Reaktionsrate ist die Zahl der Stöße eines Neutrinos pro Zeiteinheit. Sie ist gegeben durch

$$v \cdot \sigma \cdot n = c \cdot G_F^2 E^2 \cdot E^3 = G_F^2 \cdot E^5 \text{ mit } c = 1$$

Die Expansionsrate ist

$$H(t) = \frac{1}{2t} = G_{Newton}^{\frac{1}{2}} T^2$$

Ein Vergleich dieser beiden Raten liefert mit $G_F \approx 10^{-5} m_p^{-2} \approx 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$:

$$\frac{\text{Reaktionsrate}}{\text{Expansionsrate}} = G_F^2 \cdot G_{Newton}^{-\frac{1}{2}} E^3 \approx 10^{-10} \text{ GeV}^{-4} \cdot 10^{19} \text{ GeV} \cdot E^3 = \left(\frac{E}{1 \text{ MeV}} \right)^3$$

Das Resultat gilt auch bei genauerer Rechnung.

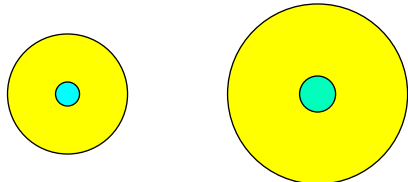
Bei etwa 1 MeV entkoppeln die Neutrinos. Ihre Temperatur folgt nun dem Skalenparameter $T_\nu \sim R^{-1}(t)$. Bei etwa 0,1 MeV annihilieren die e^+ und e^- in Photonen bis auf einen Rest $\sim 10^{-9}$.

$$N_\gamma \sim N_{e^+} \sim N_{e^-} \text{ wobei } \frac{N_{e^-} - N_{e^+}}{T} \sim 10^{-9}$$

Die latente Energie der Positronen und Elektronen erhöht die Photon-Temperatur **relativ** zu der Neutrino-Temperatur. Der Relativ-Faktor wird bestimmt, ohne die Einzelheiten des Übergangs zu berechnen. Bei einer adiabatischen Expansion bleibt die Entropie S konstant. (Dies gilt, wenn die Expansionsgeschwindigkeit viel langsamer als die Geschwindigkeit der Atome bzw. Moleküle ist.) Für homogene Systeme gilt (Gibbs-Duhem Relation: $E = TS - PV + \mu N$)

$$E = TS - PV \Rightarrow S = \frac{1}{T}(E + PV)$$

Betrachte eine Region mit festen Grenzen in mitbewegten Koordinaten, das heißt mit einem Volumen $\sim R^3(t)$.



$$0 = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{T(t)} R^3(t) (\rho(t) + p(t)) \right] = 0 \Rightarrow \frac{1}{T(t)} R^3(t) (\rho(t) + p(t)) = \text{const.} \quad (*)$$

Die Aussage, dass der Ausdruck in der Klammer konstant ist, gilt auch, wenn bei sich ändernder Temperatur die Zahl der Freiheitsgrade kleiner oder größer wird, aber natürlich nur für die im thermischen Gleichgewicht stehenden Bestandteile (γ , e^\pm). Wir werten Gleichung (*) aus für $T \gg 1$ MeV und für $T \ll 1$ MeV. Dort gilt jeweils $p = \rho/3$, also

$$\frac{R^3(t)}{T(t)} \rho(t) = \text{const.}$$

in beiden Fällen. Verwende außerdem

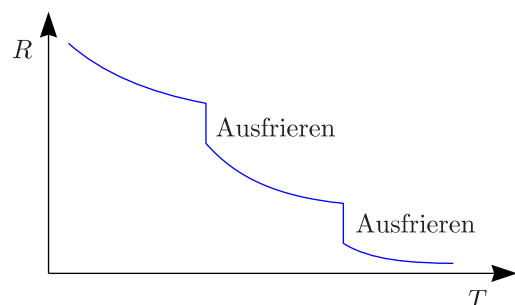
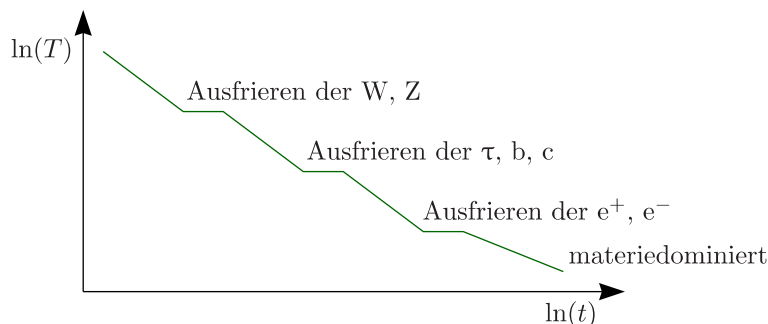
$$\rho = \text{const.}' \cdot \kappa(t) \cdot T^4(t) \text{ mit } \kappa = \begin{cases} 1 + \frac{7}{4} = \frac{11}{4} & \text{für } T \gg 1 \text{ MeV} \\ 1 & \text{für } T \ll 1 \text{ MeV} \end{cases} \Rightarrow R^3(t) \kappa(t) T^3(t) = \frac{\text{const.}}{\text{const.}'} = \text{const.}''$$

Dies bezieht sich nur auf das System (γ , e). Für Neutrinos ändert sich κ_ν nicht im Bereich $T \sim O(\text{MeV})$.

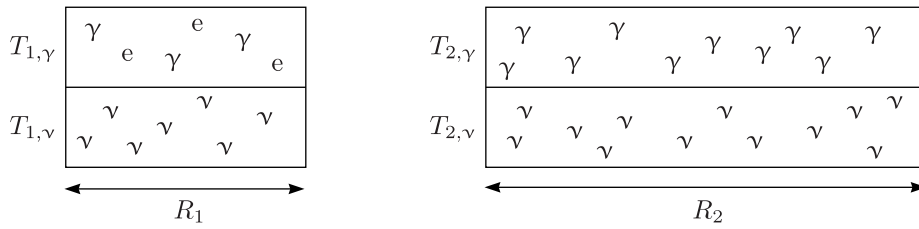
$$\Rightarrow \boxed{R(t) T_\gamma(t) = \frac{\text{const.}''}{\kappa(t)^{\frac{1}{3}}}}$$

Andererseits gilt auch $R(t) T_\nu(t) = \text{const.}'''$ und somit:

$$\frac{T_\nu(t)}{T_\gamma(t)} = \frac{\kappa(t)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} = \begin{cases} 1 & \text{für } T \gg 1 \text{ MeV} \\ \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} & \text{für } T \ll 1 \text{ MeV} \end{cases} \quad (\text{per Konstruktion})$$



9.2. ENTWICKLUNG DES UNIVERSUMS VON $KT = 0,5 \text{ GEV}$ BIS ZUM ENDE DER STRAHLUNGSDOMINIERTEN EPOCHE (1EV)



Für Neutrinos gilt $T_\nu \cdot R = \text{const.}$ und damit folgt:

$$\frac{T_{2,\nu}}{T_{1,\nu}} = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Streng gilt dies nicht mehr bis heute, weil die Neutrinos eine Ruhemasse haben. Deshalb sind die Neutrinos heute nichtrelativistisch. Die Neutrino-Hintergrundstrahlung lässt sich zur Zeit experimentell noch nicht beobachten.

9.2.2 Grenze für die maximale Masse leichter Neutrinos

Wir gehen aus von $n_\nu = 3/4 n_\gamma$ für $T_\nu = T_\gamma$. (Der Faktor 3/4 kommt Fermi - Bose.) Bei $T \sim 1 \text{ MeV}$ erhöht sich T_γ relativ zu T_ν um einen Faktor $(11/4)^{\frac{1}{3}}$. Damit erhöht sich die Zahl der Photonen relativ zu n_ν um den Faktor $(T_\gamma/T_\nu)^3$.

$$n_\nu = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{11} \cdot n_\gamma = \frac{3}{11} n_\gamma \approx 100 \frac{1}{\text{cm}^3} \text{ pro Sorte}$$

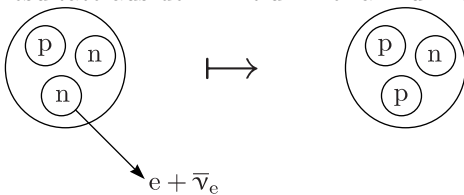
Für die Materiedichte gilt

$$\rho \lesssim \rho_c \approx 3 \frac{\text{keV}}{\text{cm}^3} \left(\frac{H}{50 \frac{\text{km}}{\text{s}}}\right)^2$$

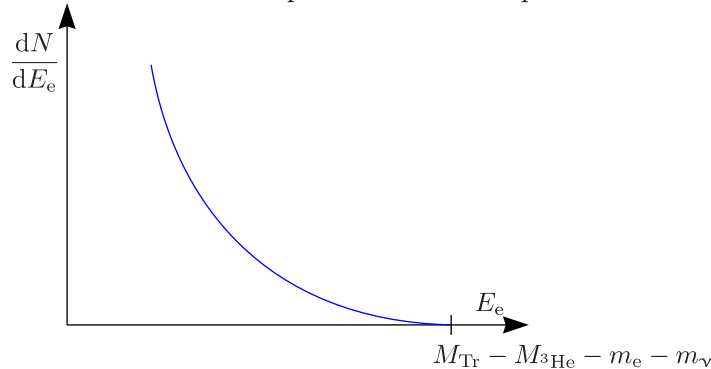
ρ_c ist die Dichte, die man benötigt, um das Universum in den Grenzbereich zwischen offen und geschlossen zu bringen unter Vernachlässigung der dunklen Energie.

$$\rho_\nu = 100 \sum_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} \frac{m_\nu}{\text{cm}^3} < \rho < \rho_c < 3 \frac{\text{keV}}{\text{cm}^3} \rightarrow \sum_{\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau} \lesssim 30 \text{ eV}$$

Das war lange Zeit eine der besten Schranken für die Summe der Neutrinomassen. Inzwischen hat man Laborresultate aus dem Tritium-Zerfall zum Vergleich.



Betrachten wir den Endpunkt des Elektronspektrums:



Aus derartigen Messungen ergibt sich ein Wert von 2,8 eV. Das Ziel von KATRIN ist, Neutrinomassen von 0,3 bis 0,5 eV nachzuweisen.

Aus Experimenten zu Neutrino-Oszillationen erhält man für skalare Neutrinos $\Delta m^2 = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$ beziehungsweise $|\Delta m| = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$. Für atmosphärische Neutrinos erhält man entsprechend $\Delta m^2 = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ beziehungsweise $|\Delta m| = 0,05 \text{ eV}$.

9.3 Neutron/Proton-Verhältnis, Helium-Synthese und Zahl der masselosen (leichten) Neutrinos

Bis zu Temperaturen $\gtrsim 1 \text{ eV}$ ist das Universum strahlungsdominiert (Photonen, Neutrinos und Elektronen/Positronen für Energien $> 1 \text{ MeV}$). Protonen und Neutronen sind irrelevant für die Dynamik:

$$\frac{N_\nu}{N_p} \gtrsim 10^9$$

Temperatur und Dichte als Funktion der Zeit werden völlig von Photonen, Elektronen und Neutrinos bestimmt. Die Temperatur wird den Protonen und Neutronen quasi aufgeprägt. Aber zwischen 1 MeV und $0,01 \text{ MeV}$ spielt sich die Helium-Synthese ab, welche sehr sensitiv von der Temperatur abhängt. Die Neutron-Proton-Massendifferenz beträgt $1,293 \text{ MeV}$. Die Entkopplungstemperatur der Neutrinos ist von der Größenordnung 1 MeV und die Elektronmasse $0,5 \text{ MeV}$. Das System ist gekoppelt, womit eine quantitative Analyse nur numerisch möglich ist. Insbesondere sind die Häufigkeiten der Protonen und Neutronen unterhalb 3 MeV nicht durch Gleichgewichtsverteilungen gegeben. (Die sich abspielenden Prozesse sind nicht adiabatisch.) Wir machen den Ansatz, dass Neutronen und Protonen praktisch in Ruhe sind. Die Reaktionsraten pro Nukleon sind dann gegeben durch:

$$\lambda(n + \nu \mapsto p + e^-) = \int dp_\nu \sigma(n + \nu \mapsto p + e^-; p_\nu) \times \text{Dichte der } \nu \times \text{Dichte der freien Elektronenzustände}$$

Die Rate hängt ab von den Neutrinoimpulsen (über die man integrieren muss), vom Wirkungsquerschnitt (welcher eine Funktion der Neutrinoenergie ist), von der Dichte der Neutrinos im Phasenraum (je mehr Neutrinos vorhanden sind, umso häufiger findet die Reaktion statt) und schließlich von der Dichte der freien Elektronenzustände (eine Reaktion kann aufgrund des Pauliprinzips nur ablaufen, wenn die Elektronen in einen nichtbesetzten Zustand gelangen können). Der Wirkungsquerschnitt selbst ist gegeben durch:

$$\sigma = \frac{G_F^2}{\pi} (g_V^2 + 3g_A^2) E_\nu^2 v_e \text{ mit } G_F \approx 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}, g_V = 1 \text{ und } g_A = 1, 18$$

Die Neutrinodichte im Impulsraum ist eine Fermiverteilung (isotrop in drei Dimensionen). Dividiert wird durch die Phasenraumdichte $(2\pi)^3$ (mit $\hbar = 1$).

$$n_\nu dp_\nu = \frac{4\pi p_\nu^2}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_\nu}{T}\right)} \right) dp_\nu \text{ mit } k_B = 1$$

Entsprechend ist die Zahl der freien Elektron-Zustände:

$$1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_e}{T}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{E_e}{T}\right)}$$

$$\lambda(n + \nu \mapsto p + e) = 4\pi \frac{G_F^2 (g_V^2 + 3g_A^2)}{\pi \cdot (2\pi)^3} \int dp_\nu E_\nu^2 p_\nu^2 v_e \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_\nu}{T}\right)} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{E_e}{T}\right)} \right)$$

Es gilt außerdem $E_e = E_\nu - Q$ mit $Q = m_n - m_p - m_e$. Q ist die maximal zur Verfügung stehende Energie. Analoges gilt für die Reaktionen $n + e^+ \mapsto p + \bar{\nu}$ und $n \mapsto p + e^- + \bar{\nu}$. Die Gesamtheit der eben genannten Reaktionen sind Verlustreaktionen für die Neutronen. Es laufen jedoch auch Reaktionen des Typs $p + e \mapsto n + \nu$ und $p + \bar{\nu} \mapsto n + e^+$ ab.

Wir definieren nun:

$$\lambda(n \mapsto p) \equiv \lambda(n + e^- \mapsto p + \bar{\nu}) + \lambda(n + \nu \mapsto p + e^-) + \lambda(n \mapsto p + e^- + \bar{\nu})$$

$$\lambda(p \mapsto n) \equiv \lambda(p + e \mapsto n + \nu) + \lambda(p + \bar{\nu} \mapsto n + e^-)$$

$$X_n \equiv \frac{\text{Neutrongdichte}}{\text{Nukleondichte}}, X_p \equiv \frac{\text{Protongdichte}}{\text{Nukleondichte}}$$

Hierbei gilt natürlich $X_p + X_n = 1$. Es gilt nun folgende Differentialgleichung:

$$\boxed{-\frac{dX_n}{dt} = \lambda(n \mapsto p)X_n - \lambda(p \mapsto n)(1 - X_n) \text{ mit } X_{n,p} = X_{n,p}(t)}$$

Die Reaktionsraten λ hängen über $T(t)$ von der Zeit ab, wobei $T(t)$ durch die Lepton-Photon-Dynamik aufgeprägt wird.

9.3. NEUTRON/PROTON-VERHÄLTNIS, HELIUM-SYNTHESE UND ZAHL DER MASSELOSEN (LEICHTEN) NEUTRINOS

Falls $\lambda \gg H$ (bei $T \geq 3 \text{ MeV}$) – also $1/H \gg 1/\lambda$ – verläuft die Expansion langsam gegenüber der Stoßzeit. dX_n/dt kann gegen λX_n vernachlässigt werden. Die Änderung verläuft adiabatisch, also langsam gegenüber der inneren Zeitskalen. Die daraus resultierende Gleichgewichtslösung besitzt folgende Form:

$$X_n = \frac{\lambda(n \mapsto p)}{\lambda(n \mapsto p) + \lambda(p + n)}$$

Im thermischen Gleichgewicht wird die Neutronendichte im wesentlichen durch den Boltzmannfaktor festgelegt.

$$X_n = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{Q}{T}\right)} \quad \text{mit } Q = m_n - m_p - m_e$$

Es gilt $X_n = 0,38$ bei 3 MeV . Unterhalb von $T = 0,13 \text{ MeV}$ finden praktisch nur noch Zerfälle des Neutrons statt, also $n \mapsto p + e + \bar{\nu}$. Dann liegt kein thermisches Gleichgewicht mehr vor und die zeitliche Entwicklung ist gegeben durch $X_n = N \exp(-t/\tau)$, wobei τ die Lebensdauer des Neutrons ist, welche bei 925 s liegt. N muss numerisch berechnet werden und liegt bei etwa $0,164$. Ab $0,08 \text{ MeV}$ ist eine sehr schnelle Bildung von He über die Reaktionskette $n + p \mapsto \text{De} + \gamma$, $\text{De} + \text{De} \mapsto {}^3\text{H} + p \mapsto {}^3\text{He} + n$, $\text{De} + {}^3\text{H} \mapsto \text{He} + n$, $\text{De} + {}^3\text{He} \mapsto \text{He} + p$. Helium ist sehr fest gebunden. Bei $0,08 \text{ MeV}$ ist X_n auf etwa 13% abgesunken. Hieraus folgt $X_{\text{He}} \approx 26\%$. Der Zusammenhang zwischen T und t war

$$t^{-1} = \sqrt{\frac{32\pi^3}{45} G \kappa(t) T^2} \quad \text{mit } \kappa = 1 + \frac{7}{4} N_e + \frac{7}{8} N_\nu$$

Der zeitliche Ablauf als Funktion der Temperatur ist umso schneller, je mehr Neutrinosorten vorhanden sind. Falls N_ν zu groß ist, dann können zu wenige Neutronen in Protonen zerfallen. Es gilt $N_\nu < 4$.

Kapitel 10

Instabilitäten, Inhomogenitäten und Entstehung von Galaxien

Bisher war die Materie einerseits homogen. Andererseits gibt es Galaxien von der Größenordnung $10^{11}M_{\odot}$ und Cluster von Galaxien mit $10^{15}M_{\odot}$. Zunächst möchten wir eine allgemeine vereinfachte Diskussion durchführen.

10.1 Theorie von Jeans (1902)

Wir ignorieren Konsequenzen der allgemeinen und speziellen Relativitätstheorie; die Materie bewege sich nicht-relativistisch. Außerdem nehmen wir an, dass keine Hubble-Expansion stattfindet. Damit wird das exponentielle Wachstum durch ein Potenzgesetz ersetzt. Insgesamt wollen wir auf einfache Begriffe und Methoden zurückgreifen.

10.1.1 Modell

Wir betrachten eine homogene, ideale, nichtrelativistische Flüssigkeit unter Berücksichtigung der Gravitation und untersuchen kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage. Sei $\rho(\vec{r}, t)$ die Dichte, $\vec{v}(\vec{r}, t)$ die Geschwindigkeitsverteilung (Geschwindigkeitsfeld), $P(\vec{r}, t)$ der Druck, $\vec{g}(\vec{r}, t)$ das Gravitationsfeld ($\vec{F} = m\vec{g}$). Mit diesen Größen lassen sich Gleichungen aufstellen, welche die Materie beschreiben. Eine der wichtigen Gleichungen ist die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad (1)$$

Darüber hinaus unterliegt das System einer Kraft:

$$\rho(\vec{r}, t)\frac{d\vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \rho(\vec{r}, t)\vec{g} - \vec{\nabla}P(\vec{r}, t) \quad (2)$$

Gleichung (2) können wir weiter umformen:

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(\vec{r}, t) + \rho\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P \Rightarrow \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P = 0 \quad (2')$$

Die Gleichung des Gravitationsfeldes lautet

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{g} = 0 \quad (3)$$

und die Zustandsgleichung für $P(\rho)$ hat folgende Form:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S=\text{const.}} = v_s^2$$

S ist hierbei die Entropie und v_s die Schallgeschwindigkeit.

10.1.2 Adiabatische Auslenkungen

Zunächst wollen wir Effekte wie Reibung und Wärmeleitung vernachlässigen. Wir betrachten einen Gleichgewichtszustand. Das Medium sei homogen, unendlich ausgedehnt. Es sei also $P = P_0 = \text{const.}$, $\varrho = \varrho_0 = \text{const.}$, $\vec{v}_0 = 0$ und $\vec{g}_0 = 0$. Wir interessieren uns insbesondere für das Verhalten unter kleinen Störungen.

$$\varrho \mapsto \varrho_0 + \varrho_1(\vec{r}, t), P \mapsto P_0 + P_1(\vec{r}, t), \vec{v} \mapsto \vec{v}_1(\vec{r}, t) \text{ und } \vec{g} \mapsto \vec{g}_1(\vec{r}, t)$$

ϱ_0, P_0 sind orts- und zeitunabhängig. Wir verwenden, dass $p(\varrho)$ eine Funktion von ϱ ist.

$$P \mapsto P_0 + P_1 = P(\varrho_0) + \frac{\partial P}{\partial \varrho} \varrho_1(\vec{r}, t) \Rightarrow \boxed{P_1 = v_s^2 \varrho_1}$$

Somit landen wir bei einem linearisierten Gleichungssystem:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_1 + \varrho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \tag{1_L}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_1 - \vec{g}_1 + \frac{v_s^2}{\varrho_0} \vec{\nabla} \varrho_1 = 0 \tag{2'_L}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 = -4\pi G \varrho_1 \tag{3_L}$$

Um diesen System aus linearen Gleichungen zu lösen, betrachten wir zunächst die zeitliche Ableitung von Gleichung (1_L) und setzen (2'_L) danach ein:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho_1 + \varrho_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{g}_1 - \frac{v_s^2}{\varrho_0} \vec{\nabla} \varrho_1 \right) = 0$$

Nun eliminieren wir noch $\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1$ mittels der Gleichung (3_L) und erhalten schlussendlich:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varrho_1 - 4\pi G \varrho_0 \varrho_1 - v_s^2 \vec{\nabla}^2 \varrho_1 = 0}$$

Dies ist eine lineare partielle Differentialgleichung für ϱ_1 . Für $g = 0$ reduziert sich das auf

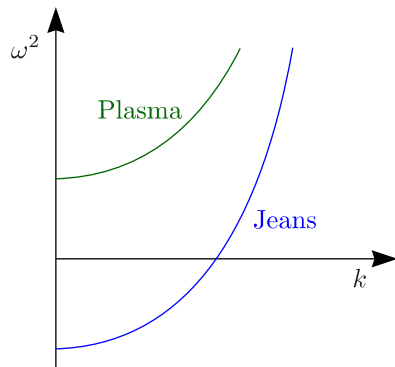
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \Delta \right) \varrho_1 = 0$$

was die wohlbekannte Wellengleichung ist, welche die Schallausbreitung beschreibt. Zur Lösung machen wir den Ansatz einer ebenen Welle $\varrho_1 \sim \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t)$ und erhalten:

$$\boxed{\omega^2 = -4\pi G \varrho_0 + \vec{k}^2 v_s^2}$$

Das Resultat ähnelt stark dem für Plasmaschwingungen bis auf ein entgegengesetztes Vorzeichen (Abstoßung gleicher Ladungen):

$$\omega_{pl}^2 = 4\pi n_e \frac{e^2}{m_e} + \vec{k}^2 v_s^2$$



ω^2 wird negativ für

$$\boxed{k < k_J \equiv \sqrt{\frac{4\pi G \varrho_0}{v_s^2}}}$$

10.2. VERALLGEMEINERUNG AUF DEN FALL DES EXPANDIERENDEN UNIVERSUMS FÜR DEN FALL $\rho \gg P$

Dann wird ω rein imaginär, was dann zu exponentiell wachsenden bzw. gedämpften Lösungen führt. Schwankungen mit $\lambda_J \geq 2\pi/k_J$ sind instabil. Die Wachstumsrate ist gegeben durch:

$$\text{Im}(\omega) = v_s(k_J^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} < v_s k_J = \sqrt{4\pi G \rho} \text{ für } k < k_J$$

Diese Wachstumsrate ist jedoch mit der für die Expansion des Universums charakteristischen Zeitskala vergleichbar.

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \approx \left(\frac{8\pi G \rho}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} v_s k_J$$

Also ist die maximale Wachstumsrate einer Instabilität (bis auf $(3/2)^{\frac{1}{2}}$) gleich der Expansionsrate und man muss beides gleichzeitig behandeln. Dennoch behält die Jeans-Länge ($2\pi/k_J$) auch in der allgemeinen Behandlung ihre Bedeutung als Grenze zwischen Stabilität und Instabilität. Wie lässt sich dieses Resultat allgemein interpretieren? Schallausbreitung ohne Wachstum der Dichteverteilung ist genau dann möglich, wenn die thermische Energie im Volumen $4\pi/3(2\pi/k_J)^3$ (Kugel mit Jeans-Länge als Radius) viel größer ist als die Energie durch gravitative Anziehung.

$$v_s^2 \rho k^{-3} \gg G \frac{(\rho k^{-3})(\rho k^{-3})}{k^{-1}} \Rightarrow \boxed{v_s^2 k^2 \gg G \rho}$$

(Erinnerung: Für ein ideales Gas ist die Schallgeschwindigkeit gegeben durch

$$v_s^2 = \frac{C_P}{C_V} \frac{\langle u^2 \rangle}{3}$$

$\langle u^2 \rangle$ ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Gasmoleküle.) Der Effekt der Expansion kann vernachlässigt werden, wenn $\omega \gg$ Expansionsrate $\approx (\rho G)^{\frac{1}{2}}$. Beide Bedingungen sind erfüllt für $k \gg k_J$ (kleine Volumina).

10.2 Verallgemeinerung auf den Fall des expandierenden Universums für den Fall $\rho \gg P$

Wir betrachten die Schwankungsphänomene als lokale nichtrelativistische Phänomene.

Kapitel 11

Dunkle Materie

11.1 Überblick über die Massenverhältnisse im Universum

1.) Zählung von Sternen:

Man misst die Luminosität in einem Gebiet im All und die Entfernung der Sterne. Dann wird der Quotient L/M ausgenutzt und man erhält $\Omega_{stars} = 0,005 - 0,01$. Es gibt im Universum somit weniger als 1% leuchtende Materie. Diese Beobachtung ist von der Hubble-Konstante unabhängig, da sowohl die Luminosität als auch die Entfernung beide mit der Hubble-Konstanten skalieren. Es gibt jedoch darüber hinaus viele nicht leuchtende Kandidaten für baryonische Materie.

2.) Nukleosynthese:

Ein weiterer wichtiger Punkt, wenn man sich die Massenverhältnisse im Universum anschaut, ist die Nukleosynthese. Im frühen Universum ($t \approx 1$ min) haben sich aus Protonen und Neutronen leichte Elemente gebildet wie ^4He , ^3He , D, T, ^7Be , ^7Li . Der Grund, warum diese Prozesse im frühen Universum sensitiv von der Baryondichte abhängen, sind folgende ablaufende Reaktionen: $n + p \mapsto \text{D}$ und $\text{D} + \gamma \mapsto n + p$. Die Reaktion $\text{D} + \gamma \mapsto n + p$ verläuft proportional zur Photondichte.

$$\frac{n_p}{n_\gamma} = \eta_{10} = 10^{-10}$$

Aus der Häufigkeit der leichten Elemente ergibt sich eine Einschränkung für Ω_B und zwar $0,016 \leq \Omega_B h^2 \leq 0,024$. Die Gleichgewichtsreaktionen hängen von der Teilchendichte und damit auch von der Ausdehnung des Universums ab, was sich in der obigen Beziehung widerspiegelt. Es gilt außerdem $\Omega_B = 0,04$ für mittlere h ($h = 0,7$).

3.) Rotationskurven von Galaxien:

Nach dem dritten Keplerschen Gesetz erwartet man folgendes Verhalten:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

Durch Messungen wird dies jedoch nicht bestätigt. Man schließt darauf, dass es mehr Masse geben muss, als man sehen kann. Man macht also einen Fit mit einer isothermen Sphäre. Daraus resultiert eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Verteilung der Materie innerhalb dieser Sphäre (Halo) im äußeren Bereich ist $\rho(r) = \rho(0)/r^2$. Man findet außerdem $\Omega_{halo} = 0,1$ Aus Analyse der Rotationskurven.

Das zweite Problem ist, dass die Rotationsgeschwindigkeit an sich zu hoch ist. Diesen Effekt kann man sogar schon in der Milchstraße beobachten. Es ist bekannt, dass die Sonne im Abstand von etwa 8 kpc mit einer Geschwindigkeit $v = 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ um das Zentrum der Galaxie kreist. Die Flächendichte der Milchstraße beträgt ungefähr $60 M_\odot \text{pc}^{-2}$. Aus dem Keplerschen Gesetz würde jedoch eine Flächendichte von $360 M_\odot \text{pc}^{-2}$ folgen. Also ist auch hier die Abweichung zwischen Theorie und Experiment sehr groß.

4.) Zusammensetzung von Clustern von Galaxien:

Die zwei Hauptbestandteile von Clustern sind

- a.) die Galaxien selbst und
- b.) heißes Gas, welches im Gravitationsfeld komprimiert und somit erhitzt wird.

Es wird angenommen, dass sich das Gas in einem Cluster im hydrodynamischen Gleichgewicht befindet. Man findet dann für die gesamte gravitative Masse, die sich innerhalb eines Gebietes mit dem Radius $< r$ befindet:

$$\frac{GM(< r)}{r} = \frac{k_B T(r)}{\mu m_p} \left(\frac{d \ln T}{d \ln r} + \frac{d \ln \rho(r)}{d \ln r} \right)$$

Des weiteren besteht die Vermutung, dass das Gas eine isotherme Sphäre bildet, womit der erste der beiden Terme auf der rechten Seite der Gleichung wegfällt. Für die Dichteverteilung macht man einen gewissen Ansatz und die mittlere Temperatur wird aus dem Spektrum der gemessenen Strahlung bestimmt. Dann findet man:

$$\frac{\Omega_B}{\Omega_0} = 0,01 + 0,05h^{-\frac{3}{2}}$$

Ω_0 ist die gesamte Massendichte. Mit $\Omega_{stars} = 0,005 - 0,01$ erhält man $\Omega_B = 0,04$, was dem obigen Wert für $\Omega_0 = 1$ widerspricht. Andererseits folgt mit diesem Ω_B der Wert $\Omega_0 \approx 0,3h^{-\frac{1}{2}} \approx 0,35$ in Clustern.

5.) Bewegung der Galaxien in Clustern selbst:

Die Untersuchung der Bewegung der Galaxien in den Clustern lieferte den ersten Hinweis auf dunkle Materie (Zwicky, 1933). Man verwendet den Virialsatz, der besagt, dass sich für ein homogenes Potential vom Grad k , also $U(\alpha x) = \alpha^k u(x)$, $T = k/2U$ folgt. Wird dies auf Galaxien in Clustern angewendet, dann findet man:

$$M_{cluster} = \frac{2\langle v^2 \rangle}{G\langle r^{-1} \rangle}$$

$\langle v^2 \rangle$ ist die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Galaxien und $\langle r^{-1} \rangle$ deren mittlere inverse Abstand. Hieraus folgt:

$$\Omega_M = 0,2-0,3$$

6.) WMAP und Beobachtung von Supernovae von Typ Ia:

WMAP selbst liefert einen Wert von $\Omega_M h^2 = 0,1268^{+0,0072}_{-0,0095}$ bzw. $100\Omega_B h^2 = 2,233^{+0,042}_{-0,091}$.

11.2 Kandidaten für dunkle Materie

1.) Nicht in Sternen befindliche Baryonen:

Dazu gehören beispielsweise Staub- und Gaswolken. Gibt es auch nicht leuchtende sternähnliche Objekte? Aus thermodynamischen Überlegungen ergibt sich, dass die Bedingung $M \leq (0,08 \pm 0,01)M_\odot$ nötig ist, damit keine Kernfusion stattfindet. Außerdem ist die minimale Masse eines Sternes, die benötigt wird, um diesen überhaupt zu formen, gegeben durch $M \geq 0,01M_\odot$. Das Fenster für braune Zwerge ist also sehr stark eingeschränkt.

2.) Neutrinos:

Neutrinos zählen zur sogenannten heißen dunklen Materie (HDM). Wenn die Neutrinos eine kleine Masse haben, was mittlerweile geglaubt wird, gilt:

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum_i m_i}{93,5 \text{ eV}}$$

Aus $\Omega_\nu \leq 1$ folgt $m_\nu < O(100 \text{ eV})$. Für schwere Neutrinos erwartet man einen experimentellen Abfall $\Omega(m) \propto m^{-2}$. Man findet ein zweites Fenster bei $3 \text{ GeV} \approx m_\nu$. Problem: Aus Experimenten folgt $n_\nu = 3$ und $m_\nu \approx 1 \text{ eV}$. Im Bestfall gilt $\Omega_\nu = 0,01$.

3.) Supersymmetrie:

Supersymmetrie sagt voraus, dass zu jedem Teilchen des Standardmodell ein supersymmetrischer Partner existiert, welcher die gleichen Eigenschaften besitzt wie die Masse und die Quantenzahlen. Bisher wurden jedoch keine supersymmetrischen Teilchen gefunden. Daher ist die Supersymmetrie gebrochen und die Massen der supersymmetrischen Teilchen unterscheiden sich von denen des Standardmodells.

Spin	Standardmodell	Minimales supersymmetrisches Standardmodell	Spin
$\frac{1}{2}$	e, μ , τ	$\tilde{e}, \tilde{\mu}, \tilde{\tau}$	0
$\frac{1}{2}$	quarks	squarks	0
1	$\gamma, g, (h)$	Photinos, Gluinos, (Higgsinos) [Neutralinos]	$\frac{1}{2}$
1	W, Z	Winos, Zinos [Charginos]	$\frac{1}{2}$

Die R-Parität besagt zusätzlich, dass supersymmetrische Teilchen nur paarweise erzeugt und vernichtet werden können. (Phänomenologisch benötigt man sie, weil sonst das Proton zerfallen würde.) Daraus folgt, dass ein leichtestes supersymmetrisches Teilchen (LSP) mit Masse $m_{LSP} \geq 100$ GeV geben muss, welches nicht zerfallen kann! Das LSP kann ein Kandidat für die kalte dunkle Materie (CDM) sein.

11.3 Verallgemeinerung der Rechnung auf den Fall des expandierenden Universums für $\varrho \gg P$

Im wesentlichen betreiben wir hier Newtonsche Theorie. Das ganze soll ich aber auf einer expandierenden Basis abspielen. Der entsprechende Ansatz für die Skalierung der Dichte beim homogenen Hintergrund war gegeben durch:

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3$$

Die Hubble-Expansion steckt in folgender Gleichung:

$$\vec{v} = \vec{r} \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right)$$

Die beschleunigte Bewegung, welche durch die Gravitationsbeschleunigung induziert wird, ist gegeben durch:

$$\vec{g} = -\vec{r} \left(\frac{4\pi G \varrho}{3} \right)$$

„Energie-Erhaltung“:

$$\dot{R}(t)^2 + k = \frac{8\pi \varrho G R^2}{3}$$

k steht für die erhaltene Gesamtenergie. $k = 0$ beschreibt den Fall, in welchem die kinetische und die potentielle Energie gleich groß sind. „Newton-Bewegungsgleichung“:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi \varrho G}{3}$$

Wir gehen nun davon aus, dass die Störungen klein sind:

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)} \right)^3 + \varrho_1(\vec{r}, t), \quad \vec{v} = \vec{r} \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right) + \vec{v}_1(\vec{r}, t) \quad \text{und} \quad \vec{g} = -\vec{r} \left(\frac{4\pi G \varrho}{3} \right) + g_1$$

An dieser Stelle benötigen wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) = 0$$

und extrahieren die Terme erster Ordnung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\varrho_0 \frac{R_0}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \varrho_1$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\varrho \vec{v}) &= \vec{\nabla} \cdot \left[\varrho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \vec{r} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\varrho_1 \vec{r} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[\varrho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \vec{v}_1 \right] + \text{quadratische Terme} = \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left[\varrho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \vec{r} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) \right] + (\vec{\nabla} \varrho_1) \vec{r} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) + 3\varrho_1 \frac{\dot{R}}{R} + \varrho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 + \text{quadratische Terme} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \varrho_1 + \frac{\dot{R}}{R} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \varrho_1) + \varrho_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad (A)$$

Mittels der Euler-Gleichungen folgt:

$$\dot{\vec{v}}_1 + \frac{\dot{R}}{R} \vec{v}_1 + \frac{\dot{R}}{R} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 = -\frac{1}{\varrho} \vec{\nabla} P_1 + \vec{g}_1 \quad (B)$$

Dies ist der Anteil, welcher die Änderung der Geschwindigkeit und Effekte, die dadurch zustande kommen, dass sich die Flüssigkeit in verschiedenen Ausdehnungen befindet. Ansonsten gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{g}_1 = 0 \quad (C)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}_1 = -4\pi \varrho_1 G \quad (D)$$

Außerdem gilt $P_1 = v_s^2 \varrho_1$. Wir machen nun einen Fourieransatz mit Wellenlängen, die mit $R(t)$ mitskalieren. Wir nehmen also an, dass sich die Dichteschwankungen mit der Expansion selbst ausdehnen.

$$\varrho_1(\vec{r}, t) = \varrho_1(t) \exp\left(\frac{i\vec{r} \cdot \vec{q}}{R(t)}\right)$$

\vec{k} skaliert wie $R^{-1}(t)$, weshalb wir $\vec{k} = \vec{q}/R(t)$ setzen. Einen analogen Ansatz verwenden wir für \vec{v}_1 , \vec{g}_1 und erhalten:

$$\dot{\varrho}_1(t) + 3 \frac{\dot{R}}{R} \varrho_1(t) + \varrho_1 i \vec{q} \cdot \vec{v}_1(t) = 0 \quad (A')$$

$$\dot{\vec{v}}_1(t) + \frac{\dot{R}}{R} \vec{v}_1(t) = -i \frac{v_s^2}{\varrho} \frac{\vec{q}}{R} \varrho_1 + \vec{g}_1$$

$$\vec{q} \times \vec{g}_1(t) = 0 \text{ und } i \vec{q} \cdot \vec{g}_1 = -4\pi G R \varrho_1 \quad (C') \text{ und } (D')$$

Durch Addition von C' und D' folgt:

$$\vec{g}_1 = \frac{4\pi i G \varrho_1 R \vec{q}}{\vec{q}^2}$$

Hier machen wir nun weiter mit dem Ansatz $\vec{g}_1 \sim \vec{q}$. Zerlege \vec{v}_1 in einen Anteil parallel zu \vec{q} und einen Anteil senkrecht zu \vec{q} .

$$\vec{v}_{\parallel} = i \vec{q} \epsilon(t) \text{ und } \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_{\perp}(t) + i \vec{q} \epsilon(t)$$

Die Dichteschwankung als relative Größe ist gegeben durch:

$$\varrho_1(t) = \varrho(t) \delta(t) = \varrho_0 \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^3 \delta(t)$$

Gleichung B' zerfällt dann in einen senkrechten und parallelen Anteil.

$$\boxed{\ddot{v}_{1,\perp} + \frac{\dot{R}}{R} \dot{v}_{1,\perp} = 0} \quad (a)$$

Die rechte Seite von B' ist $\sim \vec{q}$ und trägt bei v_{\perp} nicht bei.

$$\dot{\epsilon} + \frac{\dot{R}}{R} \epsilon = \left(-\frac{v_s^2}{R} + \frac{4\pi G \varrho R}{\vec{q}^2}\right) \delta(t) \quad (b)$$

Gleichung A' liefert $\dot{\delta} = \vec{q}^2/R\epsilon$ (c), was durch Nachrechnen gezeigt werden kann. Gleichung (a) charakterisiert die senkrechten Moden:

$$\vec{v}_{1,\perp}(t) \sim R^{-1}(t) = \vec{v}_{1,\perp}(t_0) \cdot \left(\frac{R(t_0)}{R(t)}\right)$$

11.3. VERALLGEMEINERUNG DER RECHNUNG AUF DEN FALL DES EXPANDIERENDEN UNIVERSUMS FÜR $\varrho \gg P$

Eine Störung senkrecht zur Wellenfront wird wegskaliert; es ist kein Wachstum feststellbar. Aus Gleichung (c) ergibt sich

$$\epsilon(t) = \frac{R\dot{\delta}}{q^2} \text{ und damit } \dot{\epsilon}(t) = \frac{\dot{R}\dot{\delta} + R\ddot{\delta}}{q^2}$$

was wir in Gleichung (b) einsetzen:

$$R\frac{\ddot{\delta}}{q^2} + \dot{R}\frac{\dot{\delta}}{q^2} + \frac{\dot{R}}{R} \cdot R\frac{\dot{\delta}}{q^2} + \left(\frac{v_s^2}{R} - \frac{4\pi G\varrho R}{q^2} \right) \delta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\delta} + \frac{2\dot{R}}{R}\dot{\delta} + \left(\frac{v_s^2 q^2}{R^2} - 4\pi G\varrho \right) \delta = 0}$$

Dies ist eine Gleichung, welche die relative Dichteschwankung der Mode in \vec{q} -Richtung beschreibt. $R(t)$ ist für materiedominierte Expansion charakterisiert durch folgendes Potenzgesetz:

$$\frac{R(t)}{R_0} = x(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \equiv H_0 \text{ und } R_0 = R(t_0)$$

H_0 ist die Hubble-Konstante zum Zeitpunkt t_0 . Zum Zeitpunkt der Rekombination und für alle späteren Zeiten können Druck- und Schallausbreitung vernachlässigt werden; es gilt also $v_s^2 \approx 0$. Die Lösung für \dot{R}/R , eingesetzt in obige Differentialgleichung für δ , liefert:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3} \frac{\dot{\delta}}{t} - \frac{2}{3} t^{-2} \delta = 0$$

Für diese gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung machen wir den Ansatz $\delta(t) \sim t^\nu$, woraus folgt:

$$\boxed{\nu_1 = \frac{2}{3} \text{ oder } \nu_2 = -1}$$

Anstelle des exponentiellen Wachstums bei Jeans genügt das Wachstum beim expandierenden Universum einem Potenzgesetz. Die primordialen Fluktuationen verstärken sich um

$$\left(\frac{t}{t_R} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{R(t)}{R(t_R)} = \frac{T_R}{T_0} = 10^3$$

Für die heute relevanten Dichteschwankungen gilt:

$$\frac{\varrho_{\text{Cluster von Galaxien}}}{\varrho} \approx 10$$

Aber wenigstens sollte δ von der Größenordnung 1 sein. Damit lagen die Temperaturschwankungen bei t_R von 10^{-3} bis $3 \cdot 10^{-4}$ relativ.

11.3.1 Konsequenzen für die Mikrowellenstrahlung

Die Forderung ist, dass der Dichtekontrast $\delta n/n$ bei t_R von der Größenordnung $3 \cdot 10^{-4}$ bis 10^{-3} ist. Vorwegnahme:

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)_R = \frac{1}{3} \left(\frac{\delta n}{n} \right)_R \approx 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-4}$$

Zum Zeitpunkt der Rekombination hat eine Kugel der Masse $M = 4\pi/3 r_R^3 n_R m_H$ (n_R ist die Baryondichte zum Zeitpunkt der Rekombination und m_H die Baryonmasse) den Radius

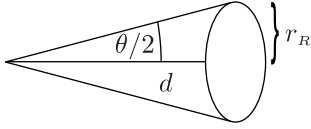
$$r_R = \left(\frac{3}{4\pi} \frac{M}{n_R m_H} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Aufgrund der Hubble-Expansion erscheint dieser Radius um einen Faktor

$$\frac{R(t_0)}{R(t_R)} = (1+z) = \left(1 + \frac{4000^\circ}{2,7^\circ} \right)$$

Die Entfernung d ist gegeben durch

$$d = c \cdot \text{Laufzeit der Photonen} \approx c \cdot \text{Hubble-Zeit} = c \cdot H_0^{-\frac{1}{2}}(\cdot q_0)$$



$$\frac{\theta}{2} = \frac{1}{d} \cdot r_R = q_0 \cdot \frac{H_0}{c} \cdot (1+z) \left(\frac{3}{4\pi n_R m_H} M \right)^{\frac{1}{3}}$$

Speziell mit $q_0 = 1/2$ (flaches Universum) gilt:

$$n_0^{\frac{1}{3}} = \left[n_R \left(\frac{R(t_R)}{R(t_0)} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{n_R^{\frac{1}{3}}}{1+z}$$

$$\theta = \frac{H_0}{c} \left(\frac{3}{4\pi n_0 m_H} M \right)^{\frac{1}{3}}$$

Mit $H_0^{-1} = 1,3 \cdot 10^{10}$ Jahre, $M = 10^{11} M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 1,9 \cdot 10^{33}$ g), $n_0 \cdot m_H = \Omega_B \rho_c = \Omega_B \cdot 1,9 \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ folgt $\theta \approx 1'$. Auf dieser Skala wurden bei 10^{-4} keine Fluktuationen der Strahlung beobachtet.

11.4 Variation der Jeans-Länge und -Masse mit der Temperatur vor dem Zeitpunkt der Rekombination

Um triviale Variationen der Skalen mit $R(t)$ zu vermeiden, betrachten wir die im Volumen $4\pi/3(2\pi/k)^3$ enthaltene Materie $M(k)$ und die Jeans-Masse M_J :

$$M(k) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2\pi}{k} \right)^3 n m_H \text{ mit } M_J \equiv M(k_J)$$

n ist wieder die Baryondichte und m_H die Protonmasse. Es wachsen nur Schwankungen, deren Masse M größer als M_J ist. Zur Berechnung von M_J müssen wir v_s^2 als Funktion von Dichte und Temperatur berechnen. Wir betrachten $T < 0,1$ MeV (oder $T < 10^9$ K). Bei dieser Temperatur hat die e^+e^- -Vernichtung schon stattgefunden. Das vorhandene Plasma besteht aus Protonen, Elektronen und Photonen mit $n_{\gamma}/n \approx 10^9$, wobei n die Baryondichte ist. $n \cdot m_H$ ist die baryonische Materiedichte.

11.4.1 Erinnerung an Thermodynamik für Photonen, gekoppelt an Plasma

Photonen unterliegen als Bosonen der Planck-Verteilung:

$$\frac{d\rho(\nu)}{d\nu} = 2 \frac{4\pi\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} h\nu \text{ und } \frac{dn}{d\nu} = 2 \frac{4\pi\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

Die gesamte Dichte ergibt sich durch Integration:

$$\rho_{\gamma} = \int \frac{d\rho(\nu)}{d\nu} d\nu = aT^4 \text{ mit } a = \frac{\pi^2}{15} \frac{k_B^4}{(\hbar c)^3} \text{ und } n_{\gamma} = \frac{30}{\pi^4} \zeta(3) \frac{aT^3}{k_B} = 0,37 \frac{aT^3}{k_B} \text{ mit } \zeta(3) = 1,203$$

Die Entropie für homogene Systeme ist $ST = E + pV$, wobei für ein Photongas $p_{\gamma} = 1/3\rho_{\gamma} \equiv 1/3E_{\gamma}/V$.

$$\frac{S}{V} = \frac{4}{3} \frac{\rho_{\gamma}}{T} = \frac{4}{3} aT^3 = \frac{4}{3} \frac{k_B}{0,37} n_{\gamma} \approx 3,7 k_B n_{\gamma}$$

$$\sigma = \frac{\text{Entropie des Photons}}{\text{Nukleon}} = \frac{4}{3} \frac{1}{0,37} \cdot k_B \frac{n_{\gamma}}{n_0} \approx 10^9 k_B$$

Hierbei sei n_0 die Nukleondichte. Die Entropiedichte der Nukleonen ist gegeben durch:

$$\frac{ST}{V} = \frac{E_{kin} + pV}{V} \text{ mit } \frac{E_{kin}}{\text{Nukleon}} = \frac{3}{2} k_B T$$

Die Entropie der Photonen ist viel, viel größer als die Energie der Nukleonen. Wir betrachten nun im folgenden, wie sich Dichtefluktuationen auf die Temperatur auswirken.

$$0 = \delta\sigma = \frac{4}{3} a \frac{3T^3}{n} \frac{\delta T}{T} + \frac{4}{3} a T^3 \left(-\frac{1}{n} \right) \frac{\delta n}{n} \Leftrightarrow \boxed{0 = \frac{\delta\sigma}{\sigma} = 3 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta n}{n}}$$

Schauen wir uns nun die Schallgeschwindigkeit an. Mit

$$\delta p = \frac{1}{3} a T^3 \cdot 4 \delta T = \sigma k_B n \delta T \quad \text{und} \quad \delta \rho = (\delta n) m_H + 4 a T^3 \delta T = 3 \frac{n}{T} m_H \delta T + 4 a T^3 \delta T$$

ergibt sich:

$$v_s^2 = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_{\sigma=\text{const.}} = \frac{\sigma k_B n}{\frac{3 \frac{n}{T} m_H + 4 a T^3}{= \frac{1}{3 m_H} \frac{\sigma k_B T}{1 + \frac{4}{3} \frac{a T^4}{n \cdot m_H}}} = \frac{\sigma k_B T}{3(m_H + \sigma k_B T)}$$

Für ein strahlungsdominiertes Universum gilt $v_s^2 = 1/3$. Geringfügige Modifikation der Jeans-Masse:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} n m_H \left(\frac{\pi v_s^2}{G(\rho + p)} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \frac{\pi^{\frac{5}{2}} k_B^2 \sigma^2}{G^{\frac{3}{2}} m_H^2 a^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{k \sigma T}{m_H}\right)^3} \approx \frac{9 M_{\odot} \sigma^2}{\left(1 + \frac{\sigma k_B T}{m_H}\right)^3}$$

1.) σ bleibt konstant bei der Expansion.

2.) Es gilt $\frac{\sigma k_B T}{m_H} \gg 1$ für ein strahlungsdominiertes Universum und $M_J \sim T^{-3}$.

11.5 Atomarer Wasserstoff: $T < 4000$ K

Ist die Strahlung entkoppelt, so folgt, dass die mittlere freie Weglänge der Photonen viel größer ist als $H^{-1}(t) \cdot c$ für alle t . Für ein ideales einatomiges Gas gilt:

$$v_s^2 = \frac{5 k_B T}{3 m_H} \ll c^2$$

$$M_J = 4 \left(\frac{\pi}{3} \right)^{\frac{5}{2}} \left(\frac{5 k_B T}{G} \right)^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} m_H^{-2}$$

T ist die Temperatur der Materie. Ab dem Entkopplungszeitpunkt haben das Photogas und die Materie verschiedene Temperaturen. Die interessante Frage ist, wie sich die Temperatur eines einatomigen nichtrelativistischen idealen Gases bei der Expansion ändert. Die Behauptung ist $T \sim R^{-2}$ für eine adiabatische Expansion.

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const. mit } \kappa = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$$

$$M_J \sim T^{\frac{3}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} = (R^{-2})^{\frac{3}{2}} \cdot (R^{-3})^{-\frac{1}{2}} = R^{-\frac{3}{2}}$$

Bei 4000 K ($T_{\gamma} = T_{mat}$) ist $M_J = 100 M_{\odot} \sigma^{\frac{1}{2}}$.

11.5.1 Zeitliche Entwicklung der Jeans-Masse

Wann können Fluktuationen anwachsen und welche Galaxien ($10^{11} M_{\odot}$) oder Cluster von Galaxien umfassen? Bei $k_B T = 0,1$ MeV ($\hat{=} 10^9$ K) gilt $M_J = 10^4 M_{\odot}$. Alle Massen $> M_J$ wachsen. Der Wert von M_J wächst proportional zu T^{-3} . Bei $T = 3 \cdot 10^6$ K übersteigt M_J den Wert von $10^{11} M_{\odot}$, wächst weit über den Wert $M_{Cluster}$ und fällt abrupt bei $T = 4000$ K auf $\sim 10^5 M_{\odot}$. Dann ist $M_J \sim R^{-\frac{3}{2}} \sim T_{\gamma}^{\frac{3}{2}}$.

11.6 Konzepte zur Erzeugung von Struktur über dunkle Materie sowie Strukturbildung durch Inflation

Es existiert noch keine abgeschlossene Theorie, weshalb wir im folgenden nur eine qualitative Beschreibung durchführen werden.

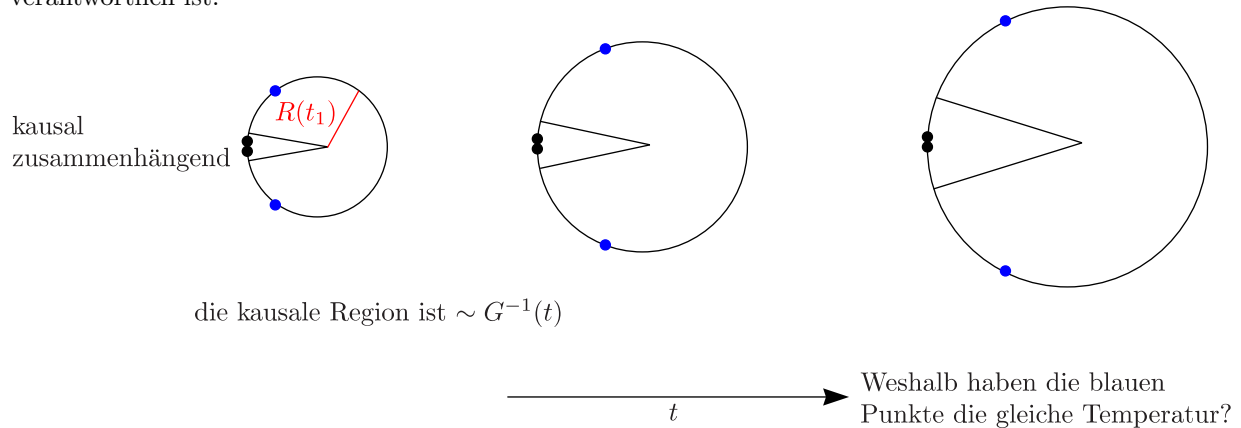
1.) Kalte dunkle Materie (Cold Dark Matter):

Cold Dark Matter (CDM) ist die schlichte Bezeichnung für „kalte“ Materie. Für diese gilt $k_B T \ll m_{Teilchen}$ zum Zeitpunkt der Strukturbildung. Beispiele für CDM sind hypothetische Teilchen, beispielsweise supersymmetrische Teilchen (Neutralinos).

2.) Heiße dunkle Materie (Hot Dark Matter):

Hot Dark Matter (HDM) ist relativistisch zum Zeitpunkt der Strukturbildung. Beispielsweise zählen Neutrinos ν zur HDM, da $m_\nu \lesssim 1 \text{ eV}$. Zur Strukturbildung haben Neutrinos Energien, die vergleichbar sind mit deren Ruhemasse.

Der Ansatz beruht auf der Annahme, dass die Inhomogenitäten durch die Nullpunktsfluktuationen (oder Quantenfluktuationen) eines **hypthetischen** skalaren Feldes hervorgehen, welches eventuell auch für Inflation verantwortlich ist.



Vergleiche Wachstum von H^{-1} mit Wachstum von $R(t)$. Betrachte:

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1} \cdot c}{R(t)}$$

wächst für die bisherigen Annahmen. Bei der Inflation nimmt

$$\frac{d}{dt} \frac{H^{-1} \cdot c}{R(t)}$$

ab. Diese Gleichung ist äquivalent zu $\ddot{R}(t) > 0$ wegen $H(t) = \dot{R}/R$. Also ist die Beschleunigung positiv. Normalerweise wird die Expansion verlangsamt durch die Wirkung der Materie. Für $\rho > 0$ und $p \geq 0$ ist das obige Verhalten also nicht möglich. Wir benötigen also einen **kosmologischen Term** (oder etwas entsprechendes). Dies funktioniert in der Quantenfeldtheorie mit einem Skalarfeld „Inflaton“. Dieses Feld treibt die Inflation an.