Mitschrieb zu Lie-Gruppen II:

Hochschuldozent Dr. Baues

Vorlesung Sommersemester 2005

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung Lie-Gruppen II
von Herrn Dr. Baues im Sommersemester 2005
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Thema

Wir wollen uns mit komplexen (reellen) **halbeinfachen** LIE-Algebren (und LIE-Gruppen) beschäftigen. LIE-Algebra $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} = (V, [,])$, wobei V ein komplexer (reeller) Vektorraum $K = \mathbb{C}$ (algebraisch abgeschossen, $K \subseteq D$, $K = \mathbb{R}$, nicht algebraisch abgeschlossen). Das Ziel ist, halbeinfache LIE-Algebren $\mathcal{G}$ über $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ zu definieren.

1.1.1 Lie-Produkt

$[,] : V \times V \mapsto V$, k bilinear

$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

$\mathcal{G}$ heisst einfach $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ ist **nicht abelsch und** die einzigen Ideale I von $\mathcal{G}$ sind $\{0\}$. Ein Ideal von $\mathcal{G}$ ist ein Unterraum I von $\mathcal{G}$, so dass $[\mathcal{G}, I] \subseteq I$. Zu jeder komplexen (reellen) LIE-Algebra $\mathcal{G}$ gehört eine zugehörige einfach zusammenhängende, komplexe (reelle) LIE-Gruppe G. Eine LIE-Gruppe G nennen wir einfach, wenn $\mathrm{Lie}(G)$ eine einfache LIE-Algebra ist.

Beispiel:

$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ist die Menge der Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ mit Spur 0.

$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) | \mathrm{Sp}(A) = 0\}$

Der Kommutator $[A, B] := AB - BA$ ist eine komplexe LIE-Algebra.

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{C}) | \det g = 1\}$

$\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Span}(X, Y, H)$

Diese LIE-Algebra wird durch die Gleichungen $[X, Y] = H$, $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ vollständig beschrieben. $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ist einfach (Übung). $G_1 = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist eine einfache (komplexe) LIE-Gruppe.

$G_2 = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) / \{E_2, -E_2\}$

ist auch eine einfache LIE-Gruppe, $\mathrm{Lie}(G_2) = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Definition:

$\mathcal{G}$ heißt halbeinfach $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von einfachen LIE-Algebren.

($\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_K$ mit $\mathcal{G}_i$ einfach)

Diese Definition ist jedoch praktisch sehr schwer anwendbar, weil man einer LIE-Gruppe nicht so einfach ansieht, wie sie sich zerlegt.

Definition:

- Eine LIE-Algebra $\mathcal{G}$ heißt auflösbar $:\Leftrightarrow D^K\mathcal{G} = \{0\}$ (aufsteigende Zentralreihe).

  $D^0G = G$, $D^1G = [G, D^0G]$, ..., $G^{i+1}G = [G, D^iG]$

  $D^0G = G \subseteq D^1G \subseteq \ldots \subseteq D^KG$
- g heißt halbeinfach $\Rightarrow G = D^1G = D^2G = \ldots$.

Bemerkung:

Ist G eine LIE-Algebra, dann besitzt sie ein maximales auflösbares Ideal $\mathrm{rad}_s(G)$ (Radikal).

Satz 1:

G ist halbeinfach $\Leftrightarrow \mathrm{rad}_s(G) = \{0\}$.

1.2 Cartan-Kriterium für Halbeinfachheit

$K_G(X, Y) = \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)$ mit X, $Y \in G$

K_G ist die KILLING-Form (eine symmetrische bilineare Form auf G).

$\mathrm{ad}(X) : Y \leftarrow \mathrm{ad}(X) \in \mathrm{Erd}(G)$, $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$

Satz 2:

G ist halbeinfach $\Leftrightarrow k_G$ nicht ausgeartet ist.

$C \Leftrightarrow \{X \in G | k(X, Y) = 0 \,\forall\, Y \in G\} = \{0\}$

1.2.1 Klassifikationssatz für einfache Lie-Algebren über $\mathbb{C}$

1.) Es gibt vier Familien.

- Familie ①:
  Die erste Familie heißt A_n für $n \geq 1$. Die einzigen LIE-Algebren, die in dieser Familie liegen, sind $\mathrm{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n+1, \mathbb{C})$. Das erste Element dieser Familie ist also $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, welches wir schon kennen.

  $\mathrm{sl}(n + 1, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}((n + 1) \times (n + 1), \mathbb{C}) | \mathrm{Sp}(A) = 0\}$
- Familie ②:
  Die zweite Familie ist B_n mit $n \geq 2$. Hierzu gehören $O(2n + 1, \mathbb{C})$, $O(2n + 1, \mathbb{C})$.

  $o(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n + n, \mathbb{C}) | A + A^\intercal = 0\}$

  $O(n, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{Gl}_n\mathbb{C} | g^\intercal = g^{-1}\}$

  Man spricht von der orthogonalen LIE-Algebra.
- Familie ③:
  Die dritte Familie ist C_n mit $n \geq 3$. Hierzu gehören $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{C})$ und $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$ (symplektische LIE-Algebra).

  $\mathrm{sp}(2n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2n + 2n, \mathbb{C}) | A^\intercal\Omega + \Omega A = 0\}$ mit $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{SP}(n, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{Gl}_n\mathbb{C} | g^\intercal \Omega g = \Omega\}$
- Familie ding"0AF:
  Dies ist die Familie D_n mit $n \geq 4$. Hierzu gehören $o(2n)$ und $O(2n)$.

2.) Es gibt fünft exzeptionelle Beispiele, nämlich G_2, F_4, E_6, E_7 und E_8.
Diese sind sehr schwer zu beschreiben. Die Dimensionen dieser einfachen LIE-Algebren sind 14, 52, 78, 133 und 248.

Hat man eine komplexe einfache LIE-Algebra, so ist diese isomorph entweder zu einer der vier Familien oder einem der fünf exzeptionellen Beispiele.

1.3 Klassifikation im reellen Fall

Sei G eine **reelle** ($k = \mathbb{R}$) einfache LIE-Algebra und $G_\mathbb{C} = G \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ die zugehörige Komplexifizierung. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) $G_\mathbb{C}$ ist eine einfache komplexe LIE-Algebra (G **absolut** einfach).

2.) $G_\mathbb{C}$ ist isomorph zu $S \oplus \overline{S}$ für eine komplexe einfache LIE-Algebra S.
$\overline{S}$ ist das komplex konjugierte von S, ist aber isomorph zu S

Im Falle ① nennt man G eine reelle Form von $G_\mathbb{C}$.

Beispiel:

1. Fall:

a.) $G = \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, $G_\mathbb{C} = \bar{\mathrm{s}}\mathrm{l}(2,\mathbb{C})$

$G = \mathrm{SU}(2)$, $G_\mathbb{C} = \bar{\mathrm{s}}\mathrm{l}(2,\mathbb{C})$

$\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ und $\mathrm{SU}(2)$ sind reelle Formen von $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)$ ist kompakt. Die kann mal algebraisch erklären, da die KILLING-Form von $\mathrm{SU}(2)$ **negativ definit** ist. $\mathrm{SU}(2)$ heißt eine kompakte reelle Form in dieser Eigenschaft.

3.) $G = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) = \{A | A + A^\intercal = 0\}$, $y_\mathbb{C} = \mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$ ist eine kompakte reelle Form.

$G = \mathrm{SO}(p,q,\mathbb{R}) = \{A | A^\intercal E_{p,q} + E_{p,q} A = 0\}$ mit $E_{p,q} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$

2. Fall: $G = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_\mathbb{R}$ ist eine **reelle** sechsdimensionale einfache LIE-Algebra.

$G_\mathbb{C} \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$

Satz 3:

Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, dann ist $\mathrm{sl}(V) = \{\varphi \in \mathrm{Erd}(V) | \mathrm{Sp}(\varphi) = 0\}$ halbeinfach. (Insbesondere also ist $\mathrm{sl}(n,\mathbb{C})$ halbeinfach.)

1.4 Die klassischen (komplexen) Lie-Algebren

Sei V ein komplexer Vektorraum.

$\mathrm{gl}(V)(= \mathrm{End}(V)) = \{\varphi : V \mapsto V, \text{komplex linear}\}$

Der Kommutator sei definiert durch:

$[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$ mit $\varphi,\ \psi \in \mathrm{gl}(V)$

$A_{n-1} : \mathrm{sl}_n(\mathbb{C}) = \{\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) | \mathrm{Sp}(\varphi) = 0\}$

Diese LIE-Algebra ist isomorph zu:

$\mathrm{sl}(V) = \{\varphi \in \mathrm{End}(V) | \mathrm{Sp}(\varphi) = 0\}$

$G \subseteq \mathrm{gl}(V)$

$o_b(V) = \{\varphi \in \mathrm{gl}(V) | b(\varphi x, y) = -b(x, \varphi(y))$ mit $x,\ y \in V$

b ist eine nicht ausgeartete (komplexe lineare) symmetrische Bilinearform auf V.

$\mathrm{sp}(V)$, $\mathrm{dim} V = 2n$

$\mathrm{sp}(V) = \{\varphi \in \mathrm{gl}(V) | \Omega(\varphi x, y) = -\Omega(x, \varphi(y))\}$

Ω ist nicht ausgeartete (komplexe lineare) **schiefe** Bilinearform ($\Omega(x,y) = -\Omega(y,x)$).

Lemma 1:

$\mathrm{sl}(V)$, $o(V)$ und $\mathrm{sp}(V)$ sind LIE-Unteralgebren von $\mathrm{gl}(V)$.

Definition:

G heißt halbeinfach $:\Leftrightarrow \mathrm{rad}_s(G) = \{0\}$ ($\Leftrightarrow G$ hat „kein" auflösbares Ideal.)
G heißt halbeinfach $:\Leftrightarrow G$ halbeinfach und G bricht nur $\{0\}$, G als Ideale

Theorem 1:

Die LIE-Algebren $\mathrm{sl}(V)$ $(\dim V \geq 2)$, $o(V)$ $(\dim V \geq 4)$ und $\mathrm{sp}(V)$ $(\dim V \geq 4)$ sind einfach. Wir nennen diese LIE-Algebren die klassischen komplexen LIE-Algebren.

Definition:

Sei G eine LIE-Algebra, $\varrho : G \mapsto \mathrm{gl}(V)$ ein Homomorphismus von LIE-Algebren. ϱ heißt eine Darstellung von G. ϱ heißt irreduzibel, wenn für alle $U \subseteq V$, wobei U ein Untervektorraum von V mit $\varrho(G)(U) = \{\varrho(X)_u | X \in G, u \in U\} \subseteq U$ (U ist G-invarianter Unterraum von V) gilt $U = \{0\}$ oder $U = V$.

Beispiel:

Wir betrachten $\varrho = \mathrm{ad}$: $g \mapsto \mathrm{gl}(g)$, wobei $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$. Dies ist die „adjungierte Darstellung". ad ist irreduzibel $\Leftrightarrow \dim g = 1$ oder g ist einfach.

Beispiel:

Es sei g auflösbar und ϱ: $g \mapsto \mathrm{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung. Daraus folgt $\dim V = 1$. (Satz von LIE)

Satz 4:

1.) $\mathrm{gl}(V)$ hat die Unteralgebra $D = \{\varphi \in \mathrm{gl}(V) | \varphi(x) = \lambda_\varphi x$ für ein $\lambda_\varphi \in \mathbb{C}$ und alle $x \in V\}$. Dies entspricht der Menge der Diagonalmatrizen:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix} \right\}$$

Diese ist als einziges Ideal verschieden von $\{0\}$, $\mathrm{gl}(V)$.

2.) $\mathrm{sl}(V)$ ist halbeinfach.

Lemma 2:

$\mathrm{gl}(V)$ ist irreduzibel auf V. (V hat keinen Unterraum, der invariant ist unter diesen Matrizen.)

„Beweis":

Es gibt keinen echten Unterraum $U \subseteq V$, so dass $\varphi(U) \subseteq U$ für alle Endomorphismen φ von V. q.e.d.

Satz 6:

Sei $G \subseteq \mathrm{ugl}(V)$ eine irreduzible Unteralgebra (das heißt: V als G-Modul ist irreduzibel) und $J \subseteq G$ ein auflösbares Ideal mit $J \subseteq \{0\}$. Daraus folgt $J = D$. (Dann besteht dieses Ideal aus Diagonalmatrizen.)

Korollar 1:

Es sei $G \subseteq \mathrm{gl}(V)$, G irreduzibel auf V und $D \cap G = \{0\}$. Daraus folgt, dass G halbeinfach ist.

Beweis:

G kann wegen des Satzes kein echtes auflösbares Ideal haben. $\Rightarrow G$ ist halbeinfach. q.e.d.

Korollar 2:

sl(V) ist halbeinfach.

Beweis:

sl(V) ist irreduzibel und außerdem $\forall\ \varphi \in \mathrm{sl}(V)$ gilt $\mathrm{Sp}(\varphi) = 0$. Aber für $\varphi_\lambda \in D$, mit $\varphi_\lambda(x) = \lambda x$ erfüllt $\mathrm{Sp}(\varphi_\lambda) = n \cdot \lambda$, wobei $n = \dim V$. ($\Rightarrow \varphi = \varphi_\lambda \in D \cap \mathrm{sl}(V) \Rightarrow \lambda = 0,\ \varphi = 0) \Rightarrow D \cap \mathrm{sl}(V) = \{0\}$. q.e.d.

Beweis von Satz 6:

Sei $J \subseteq G$ ein auflösbares Ideal; das heißt, J ist auflösbar und für alle $\varphi \in G$, $\psi \in J$, gilt $[\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi \in J$. ($G \subseteq n_{\mathrm{gl}(V)}(J)$) (Die vorherige Gleichung ist Definition des Normalisators n.) Aus dem Satz von Lie folgt, dass es ein $v \in V$, $v \neq 0$, Λ: $J \mapsto \mathbb{C}$, linear gibt, so dass $\psi(v) = \Lambda(\psi)v$ für alle $\psi \in J$. Uns interessiert, was $\psi(\varphi(v))$ ist für $\varphi \in G$.

$$\psi\varphi(v) = [\psi, \varphi](v) + \varphi \circ \psi(v) = [\psi, \varphi](v) + \Lambda(\psi)\varphi(v) \underset{J}{=} \Lambda([\psi, \varphi])v + \Lambda(\psi)\varphi(v)$$

Lemma 3:

$[\psi, \varphi] \in \mathrm{gl}(V)$ ist nilpotent. ($\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von $[\psi, \varphi]$ sind gleich null.)

Weiter im Beweis von Satz 6:

Da $\Lambda([\psi, \varphi])$ ein Eigenwert von $[\psi, \varphi]$ (Eigenvektor $= v \neq 0$), folgt $\Lambda([\psi, \varphi]) = 0$. Hieraus folgt $\psi(\varphi(v)) = \Lambda(\psi)\varphi(v)$. Da g irreduzibel operiert, folgt $G \cdot V = \{\varphi(V) | \varphi \in G\} = V$ (da $G \cdot V$ ein invarianter Unterraum von V ist). Daraus folgt, dass für alle $x \in V$ $\psi(x) = \Lambda(\psi)x$ und damit $\psi = \varphi_{\Lambda(\psi)} \in D$. Damit ist $J \subseteq D$. q.e.d.

Zum Beweis von Lemma 3:

$S \subseteq \mathrm{gl}(V)$ sei eine auflösbare Unteralgebra. Aus dem Satz von Lie folgt, dass die Kommutatorunteralgebra (Menge aller Kommutatoren von Elementen aus S mit sich selber) $[s, s]$ besteht aus nilpotenten Elementen. (Es gibt eine Basis von V, so dass die Elemente, die zu S gehören, in den oberen Dreiecksmatrizen liegen).

$$[s, s] \subseteq \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die von φ und J erzeugte Unteralgebra S von gl(V). S ist auflösbar, denn $[s, s] = [\varphi, s] + [J, J]$. Es ist $S = \mathbb{C}\varphi + J$. Es ist $[\varphi, s] \subseteq [\varphi, J] \subseteq J$ mit $\varphi in G$. Daraus folgt $[s, s] \subseteq J$, wobei J auflösbar ist. Dies impliziert, dass s auflösbar ist und $[\varphi, \psi]$ nilpotent für ale $\psi \in J$ ist. q.e.d.

Theorem 2:

sl(V) ist einfach. Es gilt $\mathrm{sl}(V) \simeq \mathrm{sl}(\mathbb{C}^n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) | \mathrm{Sp}(A) = 0\}$.

$$\mathrm{al}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \middle| \sum_i \lambda_i = 0 \right\}$$

ist eine abelsche Unteralgebra von sl_n ($= \mathrm{sl}(\mathbb{C}^n)$), die aus halbeinfachen Elementen besteht. Weiterhin ist

$$n^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Unteralgebra aus J nilpotenten Elementen mit der Basis E_{ij} mit $j > i$.

$$n^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Unteralgebra mit der Basis E_{ij}, wobei $i > j$. Sei

$$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{C}$$

$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Al}_n$

$[D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$, $[D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}, \mathrm{Al}_n] = 0$

Definition:

Sei $\Lambda_{ij}\colon \mathrm{Al}_n \mapsto \mathbb{C}$, $\Lambda_{ij}(D_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}) = \lambda_i - \lambda_j$ eine Funktion. Λ_{ij} heißt eine **Wurzel** der Lie-Algebra sl_n.

Kapitel 2

Cartan-Unteralgebren

Wir arbeiten immer noch auf dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Definition:

G sei eine Lie-Algebra, $h \subseteq G$ eine Unteralgebra. Dann heißt h eine Cartan-Unteralgebra von G, wenn

i.) h ist nilpotent
Die bedeutet, dass $[h,[h,[h,\dots,[h,h]]]] = 0$ ist.

ii.) Der Normalisator $n_g(h) = \{x \in G | [x,h] \subseteq h\}$ ist gleich h.

Wir erkennen also folgendes:

1.) Wenn G nilpotent ist, so ist G eine Cartan-Unteralgebra von sich selbst.

2.) Schauen wir uns die Lie-Algebra der oberen Dreiecksmatrizen T_n an:

$$T_n = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$$

Dann ist die Algebra der enthaltenen Diagonalmatrizen

$$D_n = \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$$

eine Cartan-Unteralgebra, denn

i.) D_n ist abelsch (und damit nilpotent)

ii.) $x \in N_n = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $[D_n, x] \subseteq x$

Da $x \notin D_n$ folgt, dass $x \notin n_{T_n}(D_n)$ und daraus folgt wiederum $n_{T_n}(D_n) = D_n$.

3.) Wenn G_1 und G_2 Lie-Algebren sind und $h_1 \subseteq G_1$, $h_2 \subseteq G_2$ Cartan-Unteralgebren, so folgt, dass $h_1 \times h_2$ eine Cartan-Unteralgebra von $G = G_1 \times G_2$ ist.

4.) Wir betrachten $g = \mathrm{gl}(V) \simeq \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, dann ist die Unteralgebra D_n eine Cartan-Unteralgebra.
Zum Beweis:

$$\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ * & \ddots & \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \oplus D_n \oplus N_n = N_n^- \oplus D_n \oplus N_n$$

Lemma 4:

D_n ist eine CARTAN-Unteralgebra von $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.

Beweis:

i.) D_n ist abelsch $\Rightarrow D_n$ ist nilpotent

ii.) Zu zeigen: $n_{\mathrm{gl}(n,\mathbb{C})}(D_n) = D_n$
Wir erinnern uns daran, dass $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) = N^- \oplus D_n \oplus N$ $(*)$ ist, wobei $N^- = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(E_{ij}|i > j)$ und $N^+ = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(E_{ij}|i < j)$.

$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $[D, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$

Wir wählen ein $x \in \mathrm{gl}(V)$ mit $[x, D] \subseteq D_n$. Wegen $(*)$ können wir schreiben:

$x = x_0 + \sum \alpha_{ij} E_{ij}$ wobei $x_0 \in D_n$

$[x, D] = -[D, x] = -\sum \alpha_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} \in D_n$

Hieraus folgt, dass $\alpha_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \ \forall\ i, j$ und damit $\alpha_{ij} = 0$ und $x \in D_n$. q.e.d.

2.1 Charakteristische Funktionen und Rang einer Lie-Algebra

Wenn wir ein $x \in G$ haben, dann gehört dazu $\mathrm{ad}(x) : G \mapsto G$, $g \mapsto [x, y]$. Wir definieren:

$$P_x(T) = \det(T \cdot \mathrm{id}_G - \mathrm{ad}(x)) = \prod_{i=1}^{n}(T - \lambda_i) = T^n - \mathrm{Sp}(\mathrm{ad}(x))T^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(\mathrm{ad}(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)T^i$$

λ_i sind die Eigenwerte von $\mathrm{ad}(x)$. Die a_i sind Funktionen $G \mapsto \mathbb{C}$, nämlich Polynome in x aus G. Das heißt, wenn x_i mit $i = 1, \ldots, n$ eine Basis von G ist mit $X = \sum x_i x^i$, dann ist a_i ein Polynom, das homogen vom Grad $(n - i)$ in $(x_1, \ldots, x_n)$ ist.
Es ist $a_n \equiv 1$, $a_n(x) = 1$, $a_{n-1}(x) = -\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}(x))$ und $a_0(x) = 0$. Dies gilt wegen $\det(\mathrm{ad}(x)) = 0$, weil $[x, x] = 0$.

Definition:

Die Funktionen a_i mit $i = 1, \ldots, n$ heißen charakteristische Funktionen von G. Wenn $x \in G$, dann nennen wir den Rang von x die kleinste Zahl $l_x \in \mathbb{N}$, so dass $a_{l_x}(x) \neq 0$. Die kleinste Zahl $l_G = l$, so dass $a_l \not\equiv 0$, heißt der **Rang von G**. $x \in G$ heißt **regulär**, wenn $l_x = l_G$.

Bemerkung:

1.) Es gilt $1 \leq \mathrm{rang}(G) \leq n$

2.) Sei G eine LIE-Algebra vom Rang l, dann ist $P_x(T)$ von folgender Gestalt:

$$P_x(T) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)T^i = \sum_{i=l}^{n} a_i(x)T^i = T^l \cdot \left(\sum_{i=l}^{n} a_i(x)T^{i-l}\right)$$

Daraus folgt, dass der Eigenwert 0 wenigstens Multiplizität l hat.

Lemma 5:

Die Menge $G_{reg} = \{x \in G | x \text{ ist regulär}\}$ ist offen, dicht und zusammenhängend in G.

Beweis:

Dies liegt daran, dass $G_{reg} = G \setminus \{x \in G | a_l(x) = 0\}$. Das heißt, G_{reg} ist das Komplement der komplexen Nullstellen-Menge $V_{a_l} = \{x \in G | a_l(x) = 0\}$ des Polynoms a_l. Daraus folgt, dass G_{reg} offen und dicht ist. Der Beweis, dass G_{reg} direkt zusammenhängend ist, ergibt sich folgendermaßen. Es sei $x, y \in G_{reg}$. Dann betrachte die komplexe Gerade L, die x und y in G verbindet. So folgt, dass $L \cap V_{a_l}$ eine endliche Menge ist. Daraus folgt, dass die Menge $L \setminus V_{a_l} \subseteq G_{reg}$ ist homöomorph zu $\mathbb{C} \setminus \{P_1, \ldots, P_K\}$ für $P_i \in \mathbb{C}$. Also ist insbesondere $L \setminus V_{a_l}$ zusammenhängend, womit sich x und y in $L \cap G_{reg}$ durch eine Kurve verbinden lassen. Damit ist G_{reg} zusammenhängend. q.e.d.

Beispiel:

Wir betrachten $x \in D_l$, also von der Gestalt $x = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

$x \in \mathrm{gl}(l, \mathbb{C})_{reg} \Leftrightarrow \lambda_i$ mit $i = 1, \ldots, l$ sind paarweise verschieden

(Die Dimension dieser Lie-Algebra ist $n = l^2$.)

Beweis:

1.) $a_l(x) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda_i$ paarweise verschieden

Wenn die Bedingung an die λ_i erfüllt ist, dann folgt, dass $D_l = \mathrm{gl}(l, \mathbb{C})_0^x$, da $[x, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}$. E_{ij} ist Basis von $G = \mathrm{gl}(l, \mathbb{C})$. Das heißt $[x, E_{ij}] = 0$ ist äquivalent zu $\lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow \lambda_i = \lambda_j \Leftrightarrow i = j \Leftrightarrow E_{ij} = E_{ii} \in D_n$. (verallgemeinerter Eigenraum mit Eigenwert 0).

2.) $l = \mathrm{rang}\, \mathrm{gl}(l, \mathbb{C}$

D_n enthält ein reguläres Element x.

$D_n = G_0^x$ mit $G_0^x := \{g \in G | \mathrm{ad}(x)^k g ==, k \text{ groß genug}\}$

Wir betrachten nun für $x \in G$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ den verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert λ, nämlich $G_\lambda = \{y \in G | (\mathrm{ad}(x) - \lambda)^k(y) = 0, \text{ für } k \text{ groß genug und } k \in \mathbb{N}\}$. Es gibt $\lambda_0, \ldots, \lambda \in \mathbb{C}$, so dass $\lambda_0 = 0$, so dass $G = G_{\lambda_0} \oplus G_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus G_{\lambda_n}$ mit $G_{\lambda_i} \neq \{0\}$. (Jordan-Zerlegung). ($\lambda_0 = 0$, erfüllt $G_{\lambda_0} \neq 0$ wegen $x \in G_{\lambda_0} = G_0$)

Lemma 6:

Es sei $x \in G$ und $x \neq 0$:

i.) Ist $y \in G_\lambda$ und $z \in G_\mu$, so impliziert dies, dass $[y, z] \in G_{\lambda+\mu}$ ist.

ii.) G_0 ist eine Unteralgebra von G.

Beweis:

Der zweite Punkt folgt aus dem ersten, denn y, $z \in G_0$ impliziert $[y, z] \in G_{0+0} = G_0$. Zum Beweis des ersten Punktes benötigen wir ein weiteres Lemma.

Lemma 7:

Es seien x, y, $z \in G$ und λ, $\mu \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$(\mathrm{ad}(x) - \lambda - \mu)^n([y, z]) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left[(\mathrm{ad}(x) - \lambda)^p y, (\mathrm{ad}(x) - \mu)^{n-p} z\right]$$

Nun können wir den vorherigen Beweis fortführen. Das Lemma 7 zeigt uns folgendes: Wenn $y \in G_\lambda$ und $z \in G_\mu$, so ist $[y, z] \in G_{\lambda+\mu}$. (Wähle zum Beispiel $n = 2 \cdot \dim G$ in obigem Lemma.)

Beweis von Lemma 7:

Wir beweisen dies zuerst für den Fall $n = 1$. Die Jacobi-Identität besagt, dass $[x, [y, z]] = -[z, [x, y]] - [y, [z, x]]$ ist. Wir formen dies um:

$$[x, [y, z]] = -[z, [x, y]] - [y, [z, x]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [\mathrm{ad}(x)y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z]$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(x) - \lambda - \mu)[y, z] &= [\mathrm{ad}(x)y, z] - \lambda[y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z] - \mu[y, z] = [\mathrm{ad}(x)y, z] + [-\lambda y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z] + [y, -\mu z] = \\ &= [\mathrm{ad}(x)y - \lambda y, z] + [y, \mathrm{ad}(x)z - \mu z] = [(\mathrm{ad}(x) - \lambda)y, z] + [y, (\mathrm{ad}(x) - \mu)z]\end{aligned}$$

Damit ist der Fall $n = 1$ bewiesen. Für den allgemeinen Fall erinnern wir uns an die Formel:

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Diese erlaubt uns mit vollständiger Induktion die Formel des Lemmas zu beweisen.

Satz 7:

Sei $x \in G$ ein reguläres Element, dann ist G_0^x eine CARTAN-Unteralgebra von G.

Korollar 3:

Jede LIE-Algebra besitzt CARTAN-Unteralgebren und jedes reguläre Element ist in einer CARTAN-Unteralgebra von G enthalten.

Beweis:

i.) Wir müssen zeigen, dass G_0^x eine nilpotente Unteralgebra von G ist.

$g \in G_0^x$, $\mathrm{ad}(y)|_{G_0^x} = \mathrm{ad}_{G_0^x}(y)$

$\mathrm{ad}^1(y) = \mathrm{ad}(y)|_{G_0^x}$

Der Satz von ENGEL impliziert, dass G_0^x nilpotent ist, genau dann, wenn die Operatoren $\mathrm{ad}^1(y)$ nilpotent sind für alle $y \in G_0^x$. Wir müssen damit beweisen, dass $\mathrm{ad}^1(y)$ nilpotent ist. Um das zu tun, führen wir den von $\mathrm{ad}(y)$: $g \mapsto G$ induzierte Quotientenoperator $\mathrm{ad}^2(y)$: $G/G_x^0 \mapsto G/G_x^0$ ein. Wir definieren die offene Menge $U = \{y \in G_x^0 | \mathrm{ad}^1(y)$ ist nicht nilpotent$\}$. Außerdem definieren wir:

$V = \{y \in G_0^x | \mathrm{ad}^2(y)$ ist regulär, das heißt, invertierbar$\}$

Es gilt $U \cap V = \varnothing$, was an der Definition des Ranges liegt. Wenn $g \in U \cap V$, dann hat der Eigenwert 0 von $\mathrm{ad}(y)$ eine Multiplizität kleiner als $\dim G_x^0 = l$. Damit folgt $a_j(y) \neq 0$ für ein $y < l$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition des Ranges l. Falls U verschieden von der leeren Menge ist, so ist U offen und dicht. in G_x^0. Da $V \ni \{x\}$ enthält, ist V offen und dicht. Daraus folgt $U \cap V \neq \varnothing$. Damit ist $U = \varnothing$ und ad^1 ist nilpotent. q.e.d.

ii.) Aus $y \in n_G(G_0)$ folgt, dass $[y, G_0] \in G_0$ ist. Das impliziert, dass $[y, x] \in G_0 \Leftrightarrow [x, y] \in G_0$. Damit gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{ad}(x)^k[x, y] = 0$ ist und $\mathrm{ad}(x)^{k+1}(y) = 0$. So ist $y \in G_0$. q.e.d.

Definition:

$h \subseteq \mathrm{gl}(V)$ sei eine nilpotente LIE-Algebra linearer Transformationen. Für eine Funktion Λ: $h \mapsto \mathbb{C}$ definieren wir:

$V_\Lambda = \{v \in V | (x - \Lambda(x))^k v = 0$ für k groß genug und alle $x \in h\}$

Wenn $V_\Lambda \neq \{0\}$, so nennen wir Λ ein Gewicht von h in V.

Satz 8:

Es sei $K = \mathbb{C}$. V zerlegt sich als direkte Summe der Gewichtsräume V_{Λ_i} für $i = 1, \ldots, k$. Das bedeutet: $V = V_{\Lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\Lambda_k}$, wobei Λ_i für $i = 1, \ldots, k$ die Gewichte von h in V sind.

Beweis:

Wenn wir ein $x \in h$ haben, so können wir die JORDAN-Zerlegung von x anschauen. Dann gilt $x = x_s + x_n$, wobei x_s als lineare Abbildung von V in sich selbst halbeinfach ist und x_n nilpotent ist. Es gilt $[x_s, x_n] = 0$. Wenn wir $\mathrm{ad}(x)$: $h \mapsto h$ betrachten, so ist $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$ die JORDAN-Zerlegung von $\mathrm{ad}(x)$. Da h nilpotent ist, folgt $\mathrm{ad}(x_s) = 0$. Dies impliziert, dass $[x_s, H] = 0$ für alle $H = y_s$ oder $H = y_n$ mit $y \in h$. Daraus folgt, dass $\{x_s | x \in h\}$ eine abelsche Unteralgebra von $\mathrm{gl}(V)$ ist, die mit allen Elementen aus h kommutiert. Betrachten wir beispielsweise $A := \{x_s | x \in h\}$. Seien $\overline{\Lambda}_1, \ldots, \overline{\Lambda}_k$ die Gewichte der diagonalisierbaren Unteralgebra A von $\mathrm{gl}(V)$.

$V = V_{\overline{\Lambda}_1} \oplus \ldots \oplus V_{\overline{\Lambda}_k}$ mit $V_{\overline{\Lambda}} = \{v \in V | Av = \overline{\Lambda}(A)v\}$

Dass H mit A kommutiert, folgt $hV_{\overline{\Lambda}} \subseteq V_{\overline{\Lambda}}$ für jedes Gewicht $\overline{\Lambda}$.

$$x \in h,\ x_n = (x - x_s)|_{V_{\overline{\Lambda}}} = (x - \overline{\Lambda}(x_s))|_{V_{\overline{\Lambda}}} \qquad (*)$$

Definiere Λ_i: $h \mapsto \mathbb{C}$ durch $\Lambda_i(x) = \overline{\Lambda}_i(x_s)$. Aus $(*)$ folgt, dass $V_{\overline{\Lambda}_i} \subseteq V_{\Lambda_i}$. V_{Λ_i} ist der Gewichtsraum von h zu Λ_i. Es folgt sogar $V_{\overline{\Lambda}_i} = V_{\Lambda_i}$ und damit sind die Λ_i die Gewichte von h in V und $V = \oplus V_{\Lambda_i}$. q.e.d.
Sei $h \subseteq G$ eine CARTAN-Unteralgebra. Dann wissen wir, dass $G = h \oplus G_{\Lambda_1} \oplus \ldots \oplus G_{\Lambda_k}$ wobei Λ_i mit $i = 1, \ldots,$ k die Gewicht Λ_i der adjungierten Darstellung von h auf G sind ($\{\mathrm{ad}(x) | x \in h\} = \mathrm{ad}(h) \subseteq \mathrm{gl}(G)$) mit $\Lambda_i \neq 0$. Es gilt $h = G_{\Lambda_0}$ mit $\Lambda_0 \equiv 0$. Wir nennen $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ die Wurzeln von G (bezüglich h).

Satz 9:

Sei h eine Cartan-Unteralgebra von G. Dann ist $h = G_0^x$ für ein reguläres Element $x \in G$.

Korollar 4:

Der Rang von G ist die Dimension einer Cartan-Unteralgebra von G.

Beweis:

Sei x_0 ein Element von h mit $\Lambda_i(x_0) \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$. Dann ist x_0 ein reguläres Element von G und außerdem (klar nach der Wahl von x_0) gilt $h = G_0^{x_0}$. q.e.d.

$G_{x_0}^0 = \{x \in G | \mathrm{ad}(x_0)^k(x) = 0 \text{ für } k \text{ groß genug}\}$

$G_{x_0}^0$ bezeichnet man auch als Nil-Raum von x_0 in G. $G_{x_0}^0$ ist eine Cartan-Unteralgebra von G.

$h(x_0) := G_{x_0}^0$ q.e.d.

Theorem 3:

Sei $h \subseteq G$ eine Cartan-Unteralgebra. Dann gibt es ein $x_0 \in G_{reg} \cap h$, so dass $h = h(x_0)$. Betrachte weiter die Gruppe $G = \langle \exp(\mathrm{ad}(y)) | y \in G \rangle \in \mathrm{GL}(G)$.

$$\exp(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} = \mathrm{Id} + \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \ldots \text{ mit } y \in \mathrm{gl}(G)$$

Die Gruppe G operiert durch **Automorphismen** der Lie-Algebra G.

$G = \exp(\mathrm{ad}(y))$, $g[X, Y] = [gX, gY]$ (siehe Lie-Gruppen und Lie-Algebren I)

Wir nennen G die Gruppe der inneren Automorphismen der Lie-Algebra G. Ist $h \subseteq G$ eine Cartan-Unteralgebra und $g \in \mathcal{G}$ ein innerer Automorphismus, so ist $g(h) =: g \cdot h$ eine Cartan-Unteralgebra von G.

Theorem 4:

Die Gruppe $\mathcal{G}$ operiert transitiv auf der Menge der Cartan-Unteralgebren von G. Das heißt: Wenn h und h' Cartan-Unteralgebren sind, dann gibt es ein $g \in \mathcal{G}$ mit $h' = g(h)$.

Bemerkung:

Die Gruppe G ist enthalten in der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ und heißt die Gruppe der inneren Automorphismen. Je zwei Cartan-Unteralgebren sind durch einen inneren Automorphismus zueinander konjugiert und entsprechend ihre Wurzelzerlegungen. (Λ_i sind Elemente aus dem Dualraum $h^\star$.)

Beweis von Theorem 3:

Sei $h \subseteq G$ eine Cartan-Unteralgebra. Wir betrachten die Wurzel-Zerlegung von G bezüglich h:

$G = G_0 \oplus G_{\Lambda_1} \oplus G_{\Lambda_2} \oplus \ldots \oplus G_{\Lambda_k}$ mit $\Lambda_i : h \mapsto \mathbb{C}$, $\Lambda_i \neq 0$ und $i = 1, \ldots, k$

Insbesondere ist G_0 der Nil-Unterraum von h in G. Da h nilpotent ist, gilt $h \subseteq G_0$. q.e.d.

Lemma 8:

Es gilt $h = G_0$.

Beweis von Lemma 8:

Wir betrachten die Darstellung von h auf G/h.

$\mathrm{ad}^2(x) : G/h \mapsto G/h$ mit $x \in h$

Die Lie-Algebra $\mathrm{ad}^2(h) \subseteq \mathrm{gl}(G/h)$ ist nilpotent, da h nilpotent ist. Nach dem Satz von Lie gibt es eine Fahne $0 = D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_m = G/h$, die invariant unter $\mathrm{ad}^2(h)$ ist. Das bedeutet, es gibt Funktionen α_i: $h \mapsto \mathbb{C}$ mit $i = 1, \ldots, m$, so dass $\mathrm{ad}^2(x)w = \alpha_i(x)w + w'$, wobei $w \in D_i$ und $w' = D_{i-1}$. Wir nehmen an, es gibt ein $i \in \{1, \ldots, m\}$, so dass $\alpha_i = 0$ ist. Wir wählen i minimal „mit dieser Eigenschaft“. q.e.d.

Bemerkung:

Die vorherige Annahme ist genau dann erfüllt, wenn $G_0/h \neq \{0\}$. Wir zeigen also, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Dann ist Lemma 8 bewiesen. Insbesondere gibt es wegen der Annahme ein $x_0 \in h$, $\alpha_i(x_0) = 0$ und $\alpha_j(x_0) \not\equiv 0$ für $j < i$. Außerdem gilt $\mathrm{ad}^2(x)D_i \subseteq D_{i-1}$ für alle $x \in h$. Da $\alpha_j(x_0) \neq 0$ für $j < 0$ gilt $D_i = D \oplus D_{i-1}$, wobei D der Nullraum von x_0 ist. Daraus folgt für $z \in D$, $\mathrm{ad}^2(x)z = \{0\}$, weil $\dim D = 1$ ist.

Behauptung:

$\mathrm{ad}^2(h)D \subseteq D \left(\Rightarrow \mathrm{ad}^2(h)\big|_D = 0\right)$

Welche Konsequenz ergibt sich aus der Behauptung? Sei $\overline{z} \in G$ ein Repräsentant der Restklasse $z \in G/h$. Wir können $\overline{z} \in G_0$ wählen. Dann gilt für alle $x \in h$: $[x, \overline{z}] \in h \Leftrightarrow [\overline{z}, x] \in h \Leftrightarrow \overline{z} \in n_G(h)$. h ist also eine Cartan-Unteralgebra. Daraus folgt $h = n_G(h)$ und $\overline{z} \in h$, was ein Widerspruch zur Annahme darstellt. Daraus ergibt sich $h = G_0$.

Beweis der Behauptung:

Für alle $z \in D$ ist $\mathrm{ad}^2(x_0)z = 0$, $[x_0, z] \in h$. Zu zeigen ist, dass aus $x \in h$ folgt, dass $\mathrm{ad}^2(x)z \in D$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{ad}^2(x)z \in$ Nullraum $x_0 (= D_i^0, x_0)$. Dies ist wiederum äquivalent zu $\mathrm{ad}^2(x_0)^k(\mathrm{ad}^2(x)z) = 0$ für k groß genug ($\star$). Formel:

$\mathrm{ad}^2(x_0)^k(\mathrm{ad}^2(x)z) = \mathrm{ad}^2(\mathrm{ad}(x_0)^k x)z$

Wir wissen, dass $\mathrm{ad}(x_0)^k x = 0$ für k groß genug. Das heißt, die Formel impliziert ($\star$). Es bleibt der Beweis der Formel:

$\mathrm{ad}^2(x_0)^{k+1}(\mathrm{ad}^2(x)z) = \mathrm{ad}^2(x_0)\left(\mathrm{ad}^2(x_0)^k(\mathrm{ad}^2(x)z)\right) = \mathrm{ad}^2(x_0)\left(\mathrm{ad}^2(\mathrm{ad}(x_0)^k x)z\right)$

$\overline{z} \in G$ ist ein Repräsentant von $z \in G/h$. Dies ist äquivalent zu:

$\mathrm{ad}(x_0)^{k+1}[z, \overline{z}] = [x_0, [\mathrm{ad}(x_0)^k x, \overline{z}]] + H$ mit $H \in h$

Damit folgt weiter:

$-[\overline{z}, [x_0, \mathrm{ad}(x_0)^k x]] + [\mathrm{ad}(x_0)^k x, [\overline{z}, x_0]] + H = [\mathrm{ad}(x_0)^{k+1} x, \overline{z}] + H + H'$ mit H, $H' \in h$

$\Leftrightarrow$ Formel im Falle $k+1$ q.e.d.

Fortsetzung vom Beweis des Theorem 3:

Wir haben bewiesen, dass $G = h \oplus G_{\Lambda_1} \oplus \ldots \oplus G_{\Lambda_k}$ für $\Lambda_i \neq 0$. Wähle ein $x_0 \in h$ mit $\Lambda_i(x_0) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, h$. Daraus folgt $h = G^0_{x_0}$, das heißt $h = h(x_0)$. Zu zeigen bleibt, dass x_0 ein reguläres Element in G ist. Wir definieren:

$h_r = \{x_0 | \Lambda_i(x_0) \neq 0 \text{ mit } i = 1, \ldots, h\}$

Dies ist eine offene Teilmenge $\neq \varnothing$ in h. Wir betrachten jetzt die Menge $\mathcal{G} \cdot h_r \subseteq G$. q.e.d.

Lemma 9:

$\mathcal{G} \cdot h_r$ ist offen in G.

Beweis:

Wir betrachten die Abbildung $\mathcal{G} \times h_r \mapsto G$, $(g, x_0) \mapsto gx_0$. Diese hat das Bild $\mathcal{G}h_r$. Die Ableitung θ: $G \times h \mapsto G$ dieser Abbildung im Punkte $(1, x_0)$ ist surjektiv auf G, da $\boldsymbol{x_0 \in h_{reg}}$. (Übung oder nächste Stunde) Das Lemma 9 folgt zunächst aus dem Satz über implizite Funktionen. q.e.d.
Mit Lemma 9 folgt, dass $\mathcal{G} \cdot h_r$ einen nicht-leeren Schnitt mit der offenen und dichten Menge $V = G_{reg}$ der regulären Elemente in G hat. Damit gibt es ein $x_0 \in h$ und ein $g \in G$, so dass $g \cdot x_0 \in V = G_{reg}$. $g \cdot x_0$ ist regulär und damit ist x_0 reguläres Element von G. (Der Automorphismus überführt reguläre Elemente in reguläre Elemente.) Damit gilt $h = G^0_{x_0}$ für das reguläre Element $x_0 \in h \cap G_{reg}$. q.e.d.

Korollar 5:

Ist h eine CARTAN-Unteralgebra, so folgt $\dim h = \mathrm{rag} G = l$.

Bemerkung:

Dies zeigt, dass sogar alle Elemente in h_r regulär sind! Das heißt, $h_r \subseteq G_{reg}$.

Beweis von Theorem 4:

Wir betrachten eine Äquivalenzrelation R auf der Menge der regulären Elemente $V_r = G_{reg}$ von G:

$x_0 \underset{R}{\sim} y_0 \Leftrightarrow h(x_0) = G^0_{x_0}$ und $h(y_0) = G^0_{y_0}$ in der Gruppe G zueinander konjugiert sind

Lemma 10:

Die Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$ sind offene Mengen in G.

Beweis:

Wir hatten im Korollar zu Theorem 3 gesehen, dass $x_0 \in h$ mit $\Lambda_i(x_0) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, k$ in G regulär sind.

$h_r := \{x_0 \in h | \Lambda_i(x_0) \neq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k\} \subseteq V_r$

Das Lemma 9 besagt, dass $G{\cdot}h_r$ offen ist in G. Die Elemente der Menge $G{\cdot}h_r$ bilden genau eine Äquivalenzklasse für R. q.e.d.
Mit dem Lemma folgt, dass V_r nur eine einzige Äquivalenzklasse bezüglich R besitzt. Dies ist so, da die Menge der regulären Elemente von G zusammenhängend ist. Daraus ergibt sich Theorem 4. q.e.d.

2.2 Cartan-Unteralgebren von halbeinfachen Lie-Algebren

Satz 10:

Sei G halbeinfach und $h \subseteq G$ eine CARTAN-Unteralgebra. Dann gilt:

i.) h ist abelsch und besteht nur aus **halbeinfachen Elementen**. (In der adjungierten Darstellung können wir diagonalisieren.)

ii.) Der Zentralisator $z_G(h) = \{x \in G | [x, h] = 0\}$ stimmt mit h überein.

iii.) Die Einschränkung der KILLING-Form von G auf h ist nicht ausgeartet.

Bemerkung:

$x \in G$ heißt halbeinfach, wenn $\mathrm{ad}(x)$: $G \mapsto G$, $Y \mapsto [X, Y]$ ein halbeinfacher Operator ist.

Satz 11 (Jordan-Zerlegung in G):

G sei halbeinfach und $x \in G$. Dann gibt es Elemente x_s und $x_n \in G$, so dass

1.) $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$, wobei $x = x_s + x_n$

2.) Die Zerlegung von $\mathrm{ad}(x)$ ist die JORDAN-Zerlegung, mit anderen Worten, $\mathrm{ad}(x_s)$ ist halbeinfach, $\mathrm{ad}(x_n)$ ist nilpotent und $[\mathrm{ad}(x_s), \mathrm{ad}(x_n)] = 0$.

Beispiel:

Sei $x = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ und $G_x = \mathbb{C} \cdot x \subseteq \mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$. Dann haben wir:

$x_s = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ und $x_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $x_s \notin G_x$ und $x_n \in G_x$

Dies ist eine LIE-Algebra von Operatoren, die nicht in die beiden Anteile zerlegt. Wenn G halbeinfach und $G \subseteq \mathrm{gl}(V)$, dann lässt sich zeigen, dass aus $x \in G$ folgt $x_s \in G$ und $x_n \in G$.

Beweis des Satzes 11:

wenn G halbeinfach ist, dann folgt daraus, dass jede Derivation von G eine innere Derivation ist. Wenn also $D \in \mathrm{Der}(G)$, $D([X,Y]) = [X, DY] + [DX, Y]$, dann folgt, dass es ein $X_D \in G$ gibt, so dass $D = \mathrm{ad}(X_D)$. Sei nun $D \in \mathrm{Der}(G)$ und $G = G_0 \oplus G_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus G_{\alpha_k}$ die verallgemeinerte Eigenraumzerlegung von G bezüglich D, wobei $0 = \alpha_0, \ldots, \alpha_k$ die Eigenwerte von G sind. Dann gilt $D_s|y_{\alpha_i} = \alpha_i \cdot \mathrm{Id}$ für den halbeinfachen Teil der Jordan-Zerlegung $D = D_s + D_n$. q.e.d.

Lemma 11:

Es gilt $D_s \in \mathrm{Der}(G)$. (Der Beweis kann als Übung zu Hause durchgeführt werden.)
Daraus folgt, dass $D_n = D - D_s \in \mathrm{Der}(G)$. Wenn G halbeinfach ist, folgt daraus, dass es $x_s \in G$ gibt mit $D_s = \mathrm{ad}(x_s)$ und $x_n \in G$ mit $D_n = \mathrm{ad}(x_n)$. Daraus folgt, dass $\mathrm{ad}(x) = D = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$ für alle $x \in G$. q.e.d.

Beispiel:

Wir betrachten $\mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$.

$$\widetilde{D}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \mid \sum_i \alpha_i = 0 \right\}$$

ist eine Cartan-Unteralgebra.
Jetzt können wir den Satz über die Cartan-Unteralgebren von halbeinfachen Lie-Algebren beweisen:

Beweis:

iii.) Betrachten wir die Wurzel-Zerlegung $G = G_0 \oplus G_{\Lambda_1} \oplus \ldots \oplus G_{\Lambda_k}$. Dann wissen wir, dass $k_G(G_{\Lambda_1}, G_{\Lambda_2}) = 0$ ist, außer wenn $\Lambda_1 + \Lambda_2 = 0$. Damit haben wir eine orthogonale Zerlegung:

$$G = \Lambda_0 \oplus \sum_{\substack{\text{gewisse} \\ i \in \{1,\ldots,k\}}} (G_{\Lambda_i} + G_{-\Lambda_i})$$

Ebenfalls orthogonal ist:

$$G = G_0 \oplus \left(\sum_{i=1}^{k} G_{\Lambda_i} \right)$$

Daraus folgt, dass $k_G|_{G_0 = h}$ nicht ausgeartet ist ebenso wie $k_G|_{\sum_{i=1}^{k} G_{\Lambda_i}}$. Damit ist dieser Punkt gezeigt.

i.) h ist per Definition der Cartan-Unteralgebra nilpotent und insbesondere auflösbar. Ebenso gilt dies für $\mathrm{ad}(h) \subseteq \mathrm{gl}(G)$. Der Satz von Cartan besagt, dass $\mathrm{Sp}(\mathrm{ad}(x) \cdot [\mathrm{ad}(x'), \mathrm{ad}(x'')]) = 0$ sein muss. (Das Kommutatorideal liegt im Kern der Spurform.) Dies ist aber nicht anderes als $k_G(x, [x', x''])$. Daraus folgt für alle $x', x'' \in h$, dass $[x', x''] \in \mathrm{Kern}\ k_G|_h$. (Das Kommutatorideal steht senkrecht auf h.) Wegen Punkt iii.) folgt, dass $[x', x''] = 0$, was impliziert, dass h abelsch ist. Sei nun $x \in h$ und $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$, wobei $x = x_s + x_n$. Da x_s und x_n die Jordan-Komponenten von x sind, so folgt $x_s, x_n \in Z_G(h)$. Die Elemente x_s, x_n zentralisieren h; sie liegen also insbesondere im Normalisator, womit $Z_G(h) \subseteq n_G(h) = h$ gilt und daraus folgt $x_s, x_n \in h$. Da x_n nilpotent ist, folgt, dass $x_n \in \mathrm{Kern}(k_G|_h)$. q.e.d.

Bemerkung:

Für $Y \in h$ ist $\mathrm{ad}(Y)$ von der Gestalt:

$$\mathrm{ad}(Y) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \ \mathrm{ad}(x_n) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{ad}(x) \cdot \mathrm{ad}(y) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 12:

Je zwei CARTAN-Unteralgebren h und h' von G sind konjugiert mit Elementen der Gruppe $G = \langle \exp(\mathrm{ad}(Y)), Y \in G\rangle$.

Beispiel:

Wir betrachten die LIE-Algebra $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$h_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} | \alpha = \mathbb{R} \right\}$$

ist eine CARTAN-Unteralgebra von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$. Außerdem betrachten wir

$$h_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} | a = \mathbb{R} \right\}$$

was ebenfalls eine CARTAN-Unteralgebra von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{R})$ ist. Die Eigenwerte von h_1 sind reell, die von h_2 jedoch rein imaginär, womit h_1 und h_2 nicht zueinander konjugiert sein können.

Beispiel:

$$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}),\ h = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

ist eine CARTAN-Unteralgebra von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Alle CARTAN-Unteralgebren von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ sind von der Gestalt ghg^{-1} für ein $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

EIN ELEMENT $H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ ist regulär $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

2.2.1 Anwendungen auf die Wurzeln

Sei Λ: $G \mapsto \mathbb{C}$ eine Wurzel. Dann ist auch $-\Lambda$ eine Wurzel.

Satz 13:

Die Menge der Wurzeln $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ von G bezüglich h erzeugt den Vektorraum $h^\star$. (Insbesondere gilt $k \geq \mathrm{Rang}(G) = \dim h$.)

Beweis:

Es gilt nach Definition $G = h \oplus G_{\Lambda_1} \oplus \ldots \oplus G_{\Lambda_k}$ mit Λ_i: $h \mapsto \mathbb{C}$, $\Lambda_i \in h^\star$. Falls Λ_i den Vektorraum $h^\star = \{\Lambda : h \mapsto \mathbb{C}\}$ (Dual-Raum des Vektorraums h) nicht erzeugen, gibt es ein $x \in h$ mit $\Lambda_i(x) = 0$, $i = 1, \ldots, k$ und $x \neq 0$. Wegen der obigen Zerlegung von G gilt, dass 0 der einzige Eigenwert von $\mathrm{ad}(x)$ ist. Da $\mathrm{ad}(x)$ diagonalisierbar ist, folgt $\mathrm{ad}(x) = 0$ und daraus folgt $x = 0$ (halbeinfache LIE-Algebra ohne Zentrum). q.e.d.

Bemerkung:

Da h aus halbeinfachen Elementen besteht, ist die LIE-Algebra $\mathrm{ad}(h)$ diagonalisierbar. Das heißt: Für eine Wurzel Λ: $h \mapsto \mathbb{C}$ gilt $G_\Lambda = \{x \in G | \mathrm{ad}(H)(x) = \Lambda(H)x \text{ für alle } H \in h\}$.

Kapitel 3

Die Lie-Algebra $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ und ihre Darstellungen

$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C}) | \mathrm{Sp}(A) = 0\}$

Diese enthält folgende Elemente:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(H_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \right)$$

Die LIEklammer erfüllt hierbei folgende Relationen:

$[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ und $[X, Y] = H$

Eine LIE-Algebra, die durch solche Relationen gegeben ist, bezeichnet man auch als „zerfallende dreidimensionale einfache LIE-Algebra“. Außerdem gilt die Wurzelzerlegung:

$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) = \langle H \rangle \oplus \langle X \rangle \oplus \langle Y \rangle = h \oplus G_2 \oplus G_{-2}$

Wenn G eine LIE-algebra ist, dann heißt ϱ: $G \mapsto \mathrm{gl}(V)$ (LIE-Algebra-Homomorphismus) eine Darstellung von G.

- Das Ziel ist, die Darstellungen von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ auf komplexen Vektorräumen zu verstehen.
- Bemerkung: Für $g = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ist eine Darstellung ϱ entweder injektiv oder gleich Null.

Sei ϱ: $G \mapsto \mathrm{gl}(V)$ eine Darstellung.

i.) Wenn $W \subseteq V$ ein Unterraum ist mit $\varrho(x)W \subseteq W$ für alle $x \in G$, dann heißt W invarianter Unterraum (von ϱ).

ii.) Eine Darstellung ϱ heißt irreduzibel, wenn die einzigen invarianter Unterräume von V genau $\{0\}$ und $\{V\}$ sind.

iii.) Die Darstellung ϱ heißt vollständig reduzibel, wenn es eine Zerlegung $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ in invariante Unterräume $W_i \subseteq V$ gibt, wobei alle W_i für $i = 1, \ldots, k$ irreduzibel sind.

3.1 Lemma von Schur

Es sei $K = \mathbb{C}$. Wenn ϱ: $G \mapsto \mathrm{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung ist, dann gilt, dass der Zentralisator $Z_{\mathrm{gl}(V)}(\varrho) = \{\psi \in \mathrm{gl}(V) | [\psi, \varrho(x)] = 0\ \forall\ x \in G\}$ mit der Menge $\{\psi | \exists\ \alpha \in \mathbb{C}$ mit $\psi(v) = \alpha v$ für alle $v \in V\}$ überein. (Etwas, das irreduzibel operiert, besteht immer aus Diagonalmatrizen.)

Beweis:

Sei α Eigenwert von ψ und $V_\alpha = W$ der Eigenraum zu α. Dann gilt: V_α ist ein invarianter Unterraum für ϱ(!!) (Das folgt aus dem Kommutator.) Da $V_\alpha \neq 0$ und V irreduzibel ist, folgt daraus $V = V_\alpha$. q.e.d.

Beispiel:

Wenn $h \subseteq \mathrm{gl}(V)$ eine abelsche Unteralgebra ist, die aus diagonalisierbaren Matrizen besteht, dann ist die Darstellung von h auf V vollständig reduzibel und alle invarianten Unterräume sind eindimensional.
$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{gl}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{gl}(\mathbb{C}^2)$ ist die „Standard-Darstellung von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$„ (auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^2$). Diese ist irreduzibel.

Beispiel:

Wenn G auflösbar ist, dann folgt, dass jede irreduzible Darstellung von G eindimensional ist. (Dies ist eine Umformung des Satzes von Lie.)

Theorem 5:

Sei G halbeinfach. Dann ist **jede** Darstellung ϱ: $G \mapsto \mathrm{gl}(V)$ **vollständig reduzibel**. (Insbesondere ist jede Darstellung von $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ vollständig reduzibel.

Zum Beweis:

- 1.Beweis:

  Dieser benutzt keine Theorie der Lie-Algebren, sondern Gruppentheorie (transzendenter Beweis) und wurde von Hermann Weyl zum ersten mal durchgeführt. (Man spricht vom „unitären Trick".)

- 2.Beweis: Anwendung der White-Bred-Lemmata

  Dabei handelt es sich um einen algebraischen Beweis.

3.2 Mehr über sl(2, $\mathbb{C}$)

$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2\times 2,\mathbb{C}) | \mathrm{Sp}(A) = 0\}$

$\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ ist eine komplexe Lie-Algebra. Wir betrachten nun die Menge $\mathrm{SU}(2) \subseteq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

$\mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) | A = -\overline{A}^{\mathsf{T}}\}$

Dies ist also die Menge der schiefhermiteschen Matrizen. Seien A, $B \in \mathrm{SU}(2)$, dann ist die Lieklammer $[A,B] = AB - BA \in \mathrm{SU}(2)$. Wir rechnen dies nach:

$$\overline{[A,B]}^{\mathsf{T}} = \overline{(AB-BA)}^{\mathsf{T}} = (\overline{AB} - \overline{BA})^{\mathsf{T}} = \overline{B}^{\mathsf{T}}\overline{A}^{\mathsf{T}} - \overline{A}^{\mathsf{T}}\overline{B}^{\mathsf{T}} = -B(-A) - (-A)(-B) = BA - AB = -[A,B]$$

$\mathrm{SU}(2)$ ist ein reeller Unterraum des zu $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}$ gehörenden reellen Vektorraums. Es ist $\dim \mathrm{SU}(2) = 3$.

$p := \mathrm{iSU}(2)$, $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(2) \oplus p$

$p = \{A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) | A = \overline{A}^{\mathsf{T}}\}$

Jede Matrix $A \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ lässt sich in eine hermitesche und eine schiefhermitesche Matrix zerlegen:

$$A = \frac{(A-\overline{A})^{\mathsf{T}}}{2} \oplus \frac{(A+\overline{A})^{\mathsf{T}}}{2}$$

Es gilt $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SU}(2) \oplus \mathrm{iSU}(2)$, wobei $\mathrm{SU}(2)$ ja eine reelle Unteralgebra ist. Komplexifizierung von $\mathrm{SU}(2)$:

$\mathrm{SU}(2) \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$

Deswegen nennt man $\mathrm{SU}(2) \subseteq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ eine reelle Form von $\mathrm{SU}(2)$. Man bezeichnet $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ auch als „**kompakte** reelle Form". Ein anderes Beispiel für eine reelle Form ist $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ („verfallende Form"). Zu der Unteralgebra $\mathrm{SU}(2) \subseteq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ gehört $\mathrm{SU}(2) \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

3.3 Der unitäre Trick für $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$

Wofür wir uns interessieren, sind die komplexen Lie-Algebra-Homomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}),\mathrm{gl}(V)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{SU}(2),\mathrm{gl}(V)) \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)) \arrow[r, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}),\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Bijektionen, weil $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SU}(2) = S^3$ einfach zusammenhängende Lie-Gruppen sind. Zu jeder Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ gehört eine Darstellung von $\mathrm{sl}(2)$.
Sei ϱ: $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{gl}(V)$ ein Lie-Algebra-Homomorphismus, wobei V ein komplexer (endlich dimensionaler) Vektorraum ist.

Satz 14:

Jede Darstellung ϱ: $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{gl}(V)$ ist vollständig reduzibel. Mit anderen Worten: Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft $\varrho(x)U \subseteq U$, $\forall\ x \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, so gibt es ein Komplement W von U in V, so dass $V = U \oplus W$ und $\varrho(x)W \subseteq W\ \forall\ x \in \mathrm{ls}(2,\mathbb{C})$.

Lemma 12:

Wenn G kompakt ist, dann gibt es ein G-invariantes Integral/Maß μ auf G. Wenn $f \in C^\infty(G)$ ist, dann können wir folgendes Integral bilden:

$$\int_G f\,\mathrm{d}\mu = \int_G L_g^\star f\,\mathrm{d}\mu = \int_G R_g^\star f\,\mathrm{d}\mu \text{ wobei per Definition } L_g^\star f = f(g\cdot x) \text{ und } R_g^\star f(x) = f(x\cdot g)$$

(Man spricht auch von einem Haarschen Maß.

Beweis:

Sei $\mathcal{G}$ die Lie-Algebra von G. Wähle auf $\mathcal{G}$ eine nicht-verschwindende n-Form $\omega_1 \in \Lambda^n\mathcal{G}^\star$ mit $\omega_1 \neq 0$ und $n = \dim\mathcal{G}$. Wenn $\mathrm{Ad}(g)$: $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ die adjungierte Darstellung von $g \in G$ ist ($\mathrm{Ad}(g)$ ist die Ableitung der Abbildung $x \mapsto g \times g^{-1}$ in der Identität), dann gilt, dass $\mathrm{Ad}(g)^\star\omega_1 = \omega_1$ (der Raum der n-Formen ist eine Gerade), weil G kompakt ist. Durch $\omega|_g := L_g^\star\omega_1$, L_g: $x \mapsto gx$ für $x \in G$ wird eine bi-invariante, nicht verschwindende n-Form auf G definiert. Das heißt, es gilt also $L_g^\star\omega = \omega = R_g^\star\omega$. Damit ist das Maß μ konstruiert:

$$\mu(f) = \int_G f\omega$$ q.e.d.

(Mehr über kompakte Lie-Gruppen findet man im Bröcker: „Compact Lie-groups“.)

Lemma 13:

Wenn $G \subseteq \mathrm{GL}(V)$ eine kompakte Lie-Untergruppe ist, dann gibt es ein G-invariantes hermitesches positiv definites Produkt h auf V. Das hermitesche Produkt h: $V \times V \mapsto \mathbb{C}$ lässt G invariant. Daraus folgt für alle $g \in G$, dass $h(gv,gw) = h(v,w)$ ist.

Beweis:

Sei $\widetilde{h}$ ein beliebiges positiv definites hermitesches Produkt. Dann definieren wir:

$$h(v,w) := \int_G \widetilde{h}(gv,gw)\,\mathrm{d}\mu$$

$g \mapsto \widetilde{h}(gv,gu)$ ist eine C^∞-Funktion auf G. Als Übungsaufgabe kann man nun beweisen, dass h invariant und positiv definit ist.

Satz 15:

Sei G eine kompakte Lie-Gruppe (zum Beispiel $G = \mathrm{SU}(2) \subseteq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, dann ist jede Darstellung von G auf V vollständig reduzibel.

Beweis:

Nun lässt sich der Satz 15 mittels des Lemmas beweisen:
Sei $U \subseteq V$ ein G-invarianter Unterraum und h ein G-invariantes, positiv definites, hermitesches Produkt, $W = U^{\perp h} = \{v \in V | h(v, U) = 0\}$. Da h positiv definit ist, folgt, dass $V = U \oplus W$. Es gilt $gW \subseteq W$ für alle $g \in G$. Da h G-invariant ist: $v \in V$, $h(v_1, u) = 0 \ \forall \ u \in U$, impliziert dies, dass $h(gv, u) = h(gv, g(g^{-1}u)) = h(v, g^{-1}u) = h(v, u')$, wobei $g^{-1}v = u' \in U$. q.e.d.
Sei $\mathcal{G}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Wir nennen $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ die zugehörige reelle Lie-Algebra. Wir nennen einen Automorphismus σ von $G_{\mathbb{R}}$ mit $\sigma(\mathrm{i}x) = -\mathrm{i}\sigma(x)$ und $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{G}_{\mathbb{R}}}$ eine **reelle Struktur** von $\mathcal{G}$.

Bemerkung:

Der Unterraum $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}^0 = \{x \in \mathcal{G} | \sigma(x) = x\} \subseteq \mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ ist eine reelle Unteralgebra von G. Die Abbildung $G_0 \otimes \mathbb{C}$, $x_0 \otimes \alpha \mapsto \alpha \cdot x_0 \in \mathcal{G}$ definiert einen Isomorphismus der Komplexifizierung $\mathcal{G}_{0,\mathbb{C}} := \mathcal{G}_0 \times \mathbb{C}$ mit der Lie-Algebra $\mathcal{G}$ (Isomorphismus komplexer Lie-Algebren). Insbesondere gilt dann $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \oplus \mathrm{i}\mathcal{G}_0$, $[\mathrm{i}\mathcal{G}_0, \mathrm{i}\mathcal{G}_0] \subseteq \mathcal{G}_0$. $\mathrm{i}\mathcal{G}_0$ ist deshalb keine Unteralgebra.
Der Beweis kann als Übungsaufgabe durchgeführt werden.

Beispiel:

Wir betrachten $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ als Lie-Algebra. Dann schauen wir uns die Abbildung $A \mapsto \overline{A}$, $(\alpha_{ij}) \mapsto \overline{\alpha}_{ij}$) an, wobei „$\overline{A}$“ das komplex Konjugierte bedeuten soll. $\sigma_0(A) = \overline{A}$ erfüllt die Eigenschaften $\sigma(\mathrm{i}A) = -\mathrm{i}\sigma(A)$ und $\overline{[A, B]} = [\overline{A}, \overline{B}]$.

$\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})^{\sigma_0} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{R}) = \{(\alpha_{ij}) \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) | \alpha_{ij} \in \mathbb{R}\}$

Beispiel:

Wieder betrachten wir die Lie-Algebra $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Wir definieren $\sigma_1(A) = -\overline{A}^{\mathsf{T}}$. Auch hier gilt $\sigma_1(\mathrm{i}A) = -\mathrm{i}\}\sigma_1(A)$ und $\sigma_1([A, B]) = [\sigma_1(A), \sigma_1(B)]$, womit auch σ_1 eine reelle Struktur ist.

$\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})^{\sigma_1} = \mathrm{SU}(2) = \{A \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) | A = -\overline{A}^{\mathsf{T}}\}$

Die Darstellungen von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ sind vollständig reduzibel.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{SU}(2), \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}), \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)) \arrow[r, "d"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{su}(2), \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V))
\end{tikzcd}$$

Wir wissen, dass $\mathrm{SU}(2)$ topologisch eine einfach zusammenhängende und kompakte Sphäre S^3 ist.
Wir wollen nun beweisen, dass die Darstellungen von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ (und damit auch $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$) vollständig reduzibel sind. Wir wissen, dass die $\mathrm{SU}(2)$-Darstellungen vollständig reduzibel sind. Deswegen sind auch alle $\mathrm{su}(2)$-Darstellungen vollständig reduzibel. Sei nun ϱ: $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathrm{gl}(V)$ eine Darstellung und $U \subseteq V$ ein $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$-invarianter Unterraum. Betrachte die Darstellung $\varrho_0 = d(\varrho)$, das heißt, ϱ eingeschränkt auf $\mathrm{su}(2)$, nämlich ϱ_0: $\mathrm{su}(2) \mapsto \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$, wobei $x \in \mathrm{SU}(2) \mapsto \varrho(x) \in \mathrm{gl}_{\mathbb{C}}(V)$. ϱ_0 ist ein **reell-linearer Homomorphismus** und $\varrho_0(\mathrm{su}(2))U \subseteq U$. Wegen der vollständigen Reduzibilität von ϱ_0 gibt es einen komplexen Unterraum $W \subseteq V$, so dass $\varrho_0(\mathrm{SU}(2))W \subseteq W$ und $U \oplus W = V$. Wir zeigen nun noch, dass $\varrho(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}))W \subseteq W$ ist. Das folgt, da $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{isu}(2)$. Für ein $x \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \mathrm{su}(2)$ und $x_1 \in \mathrm{isu}(2)$, $\mathrm{i}x_1 \in \mathrm{su}(2)$ folgt:

$$\varrho(x)w = \varrho(x_0)w + \varrho(x_1)w = \varrho_0(x_0)w + \varrho(-\mathrm{i}(\mathrm{i}x_1))w = \underbrace{w'}_{\in W} - \underbrace{\mathrm{i}\varrho(\mathrm{i}x)w}_{\varrho_0(\mathrm{i}x_1)w = w'' \in W} = w' - \mathrm{i}w''$$

Da W ein komplexer Unterraum von V ist, folgt $\varrho(x)W \subseteq W$. q.e.d.
(Als Übungsaufgabe kann nun noch gezeigt werden, dass die Abbildung b eine Bijektion ist.) Um die Darstellungen von $\mathrm{sl}_2(\mathbb{C})$ zu studieren, genügt es damit, die irreduziblen Darstellungen anzuschauen.

Definition:

ϱ: $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C}) \mapsto \mathrm{gl}(V)$ heißt eine irreduzible Darstellung, falls $\forall \ U \subseteq V$ mit $\varrho(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})) \subseteq U$ folgt, dass $U = \{0\}$ ist oder $U = V$.

Beispiele:

1.) Wir betrachten die Standard-Darstellung $V = \mathbb{C}^2$, $\varrho_1(x) = xv$ mit $v \in \mathbb{C}^2$.

2.) Adjungierte Darstellung auf $V = \mathbb{C}^3 = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, $\varrho_1(X)(A) = X \cdot A - A \cdot X$ für $A \in V = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$
Es gibt nämlich keinen Unterraum der fest bleibt unter allen Elementen.

$$\varrho_1(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \varrho_2(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ bezüglich der Basis } X,\ H,\ Y \text{ von } \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$$

In beiden Fällen ist das Bild von H ein halbeinfaches Element.

Tatsächlich gilt folgender Satz:

Satz 16:

Sei ϱ: $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{gl}(V)$ eine irreduzible Darstellung, dann folgt, dass $\varrho(H)$ ein halbeinfaches Element ist.

Beweis:

Wir gehen von der JORDAN-Zerlegung $\varrho(H) = \varrho(H)_s + \varrho(H)_n$. $\varrho(H)_s$ ist halbeinfach und $\varrho(H)_n$ ist nilpotent. Weiterhin gilt $[\varrho(H)_s, \varrho(H)_n] = 0$. Es gilt $S \equiv \varrho(\mathrm{sl}_2(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{gl}(V)$, $s \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$, $\varrho \neq 0$.

$\mathrm{ad}(\varrho(H)) : S \mapsto S$, $S \ni X \mapsto [\varrho(H), X] = \varrho(H)X - X\varrho(H)$

Wenn man einen Operator in seine JORDAN-Komponenten zerlegt, dann hat man die Beziehung

$\mathrm{ad}(\varrho(H)) = \mathrm{ad}(\varrho(H)_s) + \mathrm{ad}(\varrho(H)_n) = \mathrm{ad}(\varrho(H))_s + \mathrm{ad}(\varrho(H))_n$

was der JORDAN-Zerlegung entspricht. Da S halbeinfach ist und $H \in$ CARTAN-Unteralgebra von S, folgt, dass $\mathrm{ad}(\varrho(H))$ ein halbeinfacher Operator ist, in anderen Worten: $\mathrm{ad}(\varrho(H))_n = 0 = \mathrm{ad}(\varrho(H)_n)$. Daraus folgt $[\varrho(H)_n, X] = 0\ \forall\ X \in S = \varrho(\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}))$. Da ϱ irreduzibel ist, können wir das SCHURsche Lemma anwenden. Es gilt $\varrho(H)_n = \alpha \cdot \mathrm{Id}_V$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Da $\varrho(H)_n$ nilpotent ist, folgt $\varrho(H)_n = 0$ und damit ist $\varrho(H) = \varrho(H_s)$ halbeinfach. q.e.d.

Korollar 6:

$\varrho = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \mapsto \mathrm{gl}(V)$ sei eine Darstellung. $\varrho(H)$ ist dann ein halbeinfaches Element für jede Darstellung.

Beweis:

Benutze die vollständige Reduzibilität, also dass V in irreduzible Summanden zerlegt werden kann. q.e.d.

Lemma 14:

Sei ϱ eine Darstellung und $v \in H$ mit $\varrho(H)v = \lambda v$ ($v \neq 0$). Dann gilt $\varrho(H)[\varrho(X)v] = (\lambda+2)(\varrho(X)v)$ und $\varrho(H)[\varrho(Y)v] = (\lambda-2)(\varrho(Y)v)$. Sei $X \cdot v = \varrho(X)v\ \forall\ v \in V$ und $X \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Dann gilt $H \cdot (X \cdot v) = (\lambda+2)X \cdot v$ und $H(Y \cdot v) = (\lambda-2)Y \cdot v$. Mit anderen Worten:
Ist v_λ der Eigenraum von H zum Eigenwert λ mit $V_\lambda \subseteq V$, so folgt

$x \cdot V_\lambda \subseteq V_{\lambda+2}$ und $Y \cdot V_\lambda \subseteq V_{\lambda-2}$

Wir haben also die Zerlegung $V = \oplus V_\lambda$, wobei λ Eigenwert von H ist.

Beweis:

$H \cdot (X \cdot v) = [H, X] \cdot v + X(H \cdot v) = (2X) \cdot v + X \cdot \lambda v = (2+\lambda)X \cdot v$

Für Y gilt dies analog, was als Übungsaufgabe zu empfehlen ist. q.e.d.

Definition:

Ein Element $e \in V$ heißt primitives Element, falls $\varrho(H)e = \lambda \cdot e$, $\varrho(X)e = 0$ für $e \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Bemerkung:

e ist ein primitives Element genau dann, wenn $\mathbb{C} \cdot e$ invariant unter der Borel-Unteralgebra b von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ ist. Hier ist

$$b = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} | \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}H + \mathbb{C}X$$

eine auflösbare Unteralgebra von $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.

Zum Beweis der Bemerkung:

Sei $b \cdot e \subseteq \mathbb{C} \cdot e$. Insbesondere ist $Xe = \mu \cdot e$, $He = \lambda \cdot e$.

$$2\mu \cdot e = 2X \cdot e = [HX - XH] \cdot e = HX \cdot e - XH \cdot e = \lambda \cdot \mu \cdot e - \mu \cdot \lambda \cdot e = 0$$

Hieraus folgt für $e \neq 0$ $2\mu = 0$. q.e.d.

Korollar 7:

V besitzt ein primitives Element e.

Beweis:

Wegen des Satzes von Lie gibt es $e \neq 0$ mit $b \cdot e \subseteq \mathbb{C}e$. (Es gibt einen eindimensionalen invarianten Unterraum). q.e.d.

Satz 17:

Sei e ein primitives Element von V. Definiere $e_n := Y^n \frac{e}{n!}$, außerdem sei $He = \lambda e$. Dann gilt:

1.) $H \cdot e_n = (\lambda - 2n)e_n$

2.) $Y \cdot e_n = (n+1)e_{n+1}$

3.) $X \cdot e_n = (\lambda - n + 1)e_{n-1}$

Beweis:

Den ersten Punkt haben wir schon bewiesen; der zweite Punkt folgt direkt aus der Definition von Y^n. Kommen wir also zum Punkt 3: Dies soll als Übungsaufgabe mit vollständiger Induktion durchgeführt werden. q.e.d.
Die Situation ist nun folgende:

$$V_\lambda = \mathbb{C} \cdot e \xrightarrow{Y} V_{\lambda-2} \xrightarrow{Y} V_{\lambda-4} \xrightarrow{Y} V_{\lambda-6}$$

$$V_n = \mathbb{C} \cdot e_n$$

Korollar 8:

Sei V ein $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$-Modul. Dann gilt:

i.) Der von e_n (mit $n \in \mathbb{N}$) erzeugte Unterraum von V ist ein $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$-Unterraum von V.

ii.) Es ist $e_{n_0} = 0$ für $n_0 \in \mathbb{N}$.

iii.) λ ist eine positive ganze Zahl, also $\in \mathbb{N}$.

Beweis:

i.) Dies folgt aus dem vorherigen Satz. q.e.d.

ii.) Die Vektoren e_i sind Eigenvektoren von H zum Eigenwert $\lambda - 2i$, sie sind also alle linear unabhängig, falls die $\neq 0$. Für ein minimales n_0 ist e_{n_0} linear abhängig von den e_i, $i < n_0$. Daraus folgt $e_{n_0} = 0$. q.e.d.

iii.) Nach dem dritten Punkt aus dem vorherigen Satz gilt:

$$0 = X \cdot e_{n_0} = (\lambda - n_0 + 1)e_{n_0 - 1}$$

Da $e_{n_0-1} \neq 0$ folgt $\lambda - n_0 + 1 = 0$, was äquivalent zu $\lambda = n_0 - 1 \geq 1$ ist. q.e.d.

Der von e erzeugte $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$-Untermodul V_n ist bis auf Isomorphie eindeutig durch seine Dimension $\dim V_n = n + 1$ bestimmt und hat folgende Eigenschaften:

* Die Matrix $\varrho(H)$ hat als Eigenwerte ganze Zahlen n, $n-2$, …, $-n+2$, $-n$.
* V_n hat eine Basis e_0, …, e_n, so dass $H \cdot e_i = (n - 2i)e_i$, $X \cdot e_i = e_{i-1}$ und $Ye_i = (i+1)e_{i+1}$.

Korollar 9:

Sei V ein irreduzibler Modul für $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ mit $\dim V = n + 1$. Dann gilt $V \simeq V_n$.

Beispiel:

Betrachten wir $\mathbb{C}^2$, also den Standard-Modul für $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. $e_1 = (1,0)^\intercal$ ist ein primitiver Vektor mit $He_1 = e_1$, $Ye_1 = e_2$ $He_2 = -e_2$ und $Xe_2 = e_2$, wobei

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Modul ist also isomorph zu V_1.

Beispiel:

Die adjungierte Darstellung $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ ist irreduzibel isomorph zu V_2. Es ist $[H,X] = 2X$, $[Y,X] = -H$, $[Y,-H] = -[Y,H] = [H,Y] = -2Y$ und X ist ein primitives Element.

Korollar 10:

Die Lie-Gruppe $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ hat in jeder Dimension eine eindeutige irreduzible Darstellung. Jede irreduzible Darstellung ist ein solches V_n.

1.) $\mathbb{C}^2$, der Standardmodul für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ist isomorph zu V_1.

2.) Die Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ auf $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ durch Konjugation ist isomorph zu V_2.

3.) Sei P_n der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$-Modul der homogenen Polynome in zwei Variablen vom Grad n. Ist $P \in P_n$, $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, dann gilt $(g \cdot P)(x,y) = P(g^t(x,y))$. Der Modul P_n ist isomorph zu V_n mit $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

Der Beweis sei als Übungsaufgabe gedacht. (Man muss in dem Modul $\mathbb{C}^2$ eine Basis finden, welche die Eigenschaften erfüllt.)

Korollar 11:

Sei V ein $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$-Modul. Dann gilt:

a.) Die Anzahl der irreduziblen Summanden in V ist gleich der Dimension des Kerns von $\varrho(x)$, also des Unterraums aller primitives Vektoren.

b.) Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$Y^n : V_n \xrightarrow{\simeq} V_{-n}$$

$$X^n : V_{-n} \xrightarrow{\simeq} V_n$$

und insbesondere $\dim V_n = \dim V_{-n}$.

Kapitel 4

Die Struktur der halbeinfachen Lie-Algebren

Sei $\mathcal{G}$ eine halbeinfache LIE-Algebra und $h \subseteq \mathcal{G}$ eine CARTAN-Unteralgebra. Die Wurzel-Zerlegung hatten wir folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{G} = h \oplus \sum_{\alpha \in k} \mathcal{G}_\alpha$$

Ist $R \subseteq h^\star$ (also des dualen Unterraums) und $\alpha \in R$, so folgt:

$\alpha \neq 0$ und $\mathcal{G}_\alpha = \{X \in \mathcal{G} | [H, X] = \alpha(H)X \text{ für alle } H \in h\} \neq \{0\}$

Weiter wissen wir:

- $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$.
- R enthält eine Basis von $h^\star$.
- $\langle , \rangle$ sei eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform (KILLING-Form) auf $\mathcal{G}$, die invariant ist; das heißt, es gilt $\langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle = 0$ für alle X, Y, $Z \in \mathcal{G}$.
- $\dim \mathcal{G}_\alpha = \dim \mathcal{G}_{-\alpha}$
  Dies ist eine Konsequenz aus dem nachfolgendem Lemma 15.
- $\dim[G_\alpha, G_{-\alpha}] = 1$
  Dies folgt aus Korollar 12. Beachte, dass $\mathcal{G}_\alpha$, $\mathcal{G}_{-\alpha}$ und $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}] = h_\alpha$ eine Unteralgebra $S_\alpha = \mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{-\alpha} \oplus h_\alpha$ von $\mathcal{G}$ erzeugen.

Lemma 15:

i.) $\mathcal{G}^\alpha \perp_{\langle,\rangle} \mathcal{G}^\beta \Leftrightarrow \alpha + \beta \neq 0$.

ii.) $\langle , \rangle$ ist nicht ausgeartet auf h und den Unterräumen $\mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{-\alpha}$. Außerdem sind $\mathcal{G}_\alpha$ und $\mathcal{G}_{-\alpha}$ dual zueinander bezüglich $\langle , \rangle$.

iii.) $\mathcal{G} = h \oplus \sum (\mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{-\alpha})$ ist eine orthogonale Zerlegung.

Beweis:

i.) Sei $X \in \mathcal{G}^\alpha$ und $Y \in \mathcal{G}^\beta$.

$$\langle [H, X], Y\rangle + \langle X, [H, Y]\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha(H)\langle X, Y\rangle + \beta(H)\langle X, Y\rangle = 0$$

Also gilt $(\alpha + \beta)(H)\langle X, Y\rangle = 0$. Wähle $H_0 \in h$, so dass $(\alpha + \beta)(H) \neq 0$. Daraus folgt dann $\langle X, Y\rangle = 0$. (Dies ist möglich, falls $\alpha + \beta \neq 0$. q.e.d.

iii.) Dies folgt aus dem ersten Punkt. q.e.d.

ii.) Dies ergibt sich wiederum aus dem dritten Punkt, da $\langle , \rangle$ nicht ausgeartet ist. q.e.d.

Lemma 16:

i.) Sei $X \in \mathcal{G}^{\alpha}$, $Y \in \mathcal{G}^{-\alpha}$ und $H \in h$, dann gilt $\langle H, [X,Y]\rangle = \alpha(H)\langle X, Y\rangle$.

ii.) $[X,Y] = \langle X,Y\rangle \hat{H}_\alpha$, wobei $\hat{H}_\alpha \in h$ definiert ist durch $\alpha(H) = \langle \hat{H}_\alpha, H\rangle$.

Beweis:

i.) $\langle H, [X,Y]\rangle = -\langle [X,H], Y\rangle = \langle [H,X], Y\rangle = \alpha(H)\langle X,Y\rangle$
Dies gilt, da der Operator schief ist. q.e.d.

ii.) Mit $\alpha(H)\langle X,Y\rangle = \langle \hat{H}_\alpha, H\rangle\langle X,Y\rangle$ folgt:
$\langle H, [X,Y]\rangle = \langle \hat{H}_\alpha, H\rangle\langle X,Y\rangle = \langle \hat{H}_\alpha \langle X,Y\rangle, H\rangle$
Daraus folgt also $[X,Y] = \hat{H}_\alpha \cdot \langle X,Y\rangle$. q.e.d.

Korollar 12:

$[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_{-\alpha}] =: h_\alpha$ ist eindimensional.

Satz 18:

Die Unteralgebra $S_\alpha = \mathbb{C}\cdot X_2 + \mathbb{C}\cdot Y_2 + \mathbb{C}\cdot H_\alpha$ ist isomorph zu $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Lemma 17:

i.) Es gibt (genau) ein $H_\alpha \in h_\alpha$, so dass $\alpha(H_\alpha) = 2$.

ii.) Es gibt X_α, Y_α mit $X_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$ und $Y_\alpha \in \mathcal{G}_{-\alpha}$, wobei $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$.

iii.) Die Abbildung $X \mapsto X_\alpha$, $Y \mapsto Y_\alpha$, $H \mapsto H_\alpha$ definiert einen Isomorphismus von $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ auf die von X_α, Y_α, H_α erzeugte Unteralgebra von $\mathcal{G}$. (Insbesondere ist $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$.)

Beweis:

i.) Es ist $X \in \mathcal{G}_\alpha$, $[H,X] = \alpha(H)X$, $H \in \mathbb{C}\cdot H_\alpha$ und $[H_\alpha, X] = \alpha(H_\alpha)X$. Wir zeigen, dass $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ ist. (Dann können wir $H_\alpha = 2\alpha(H_\alpha)^{-1}\cdot H_\alpha$ wählen.) Falls $\alpha(H_\alpha) = 0$, dann können wir folgende Lie-Algebra betrachten: $S_\alpha = \mathcal{G}_\alpha + \mathcal{G}_{-\alpha} + \mathbb{C}\cdot H_\alpha$ mit $[S_\alpha, S_\alpha] = \mathbb{C}\cdot H_\alpha$.

$[S_\alpha, [S_\alpha, S_\alpha]] = [S_\alpha, \mathbb{C}\cdot H_\alpha] = 0$

Das heißt, S_α ist auflösbar (sogar nilpotent). $\mathcal{G}$ ist damit ein Modul für S_α (adjungierte Darstellung der Unteralgebra S_α auf $\mathcal{G}$). Es gilt $H_\alpha \subseteq [S_\alpha, S_\alpha]$. Daraus folgt nach dem Satz von Lie, dass $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathcal{G}$ ist. Da $H_\alpha \in H$ (Cartan-Unteralgebra von $\mathcal{G}$), ist $\mathrm{ad}(H_\alpha)$ halbeinfach und damit $\mathrm{ad}(H_\alpha) = 0$, woraus wiederum $H_\alpha = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur vorherigen Aussage ist. (Die Unteralgebra S_α kann nicht auflösbar sein.) q.e.d.

ii.) Es reicht zu zeigen, dass es $\widetilde{X}_\alpha$ und $\widetilde{Y}_\alpha$ gibt mit $[\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{Y}_\alpha] \neq 0$, was äquivalent zu $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_{-\alpha}] \neq 0$ ist. Wähle $\widetilde{X}_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$ und $\widetilde{Y}_\alpha \in \mathcal{G}_{-\alpha}$ mit $\langle \widetilde{X}_\alpha, \widetilde{Y}_\alpha\rangle \neq 0$. Daraus folgt also, dass

$[\widetilde{X}_\alpha, \widetilde{Y}_\alpha] = \langle \widetilde{X}_\alpha, \widetilde{Y}_\alpha\rangle H_\alpha \neq 0$

Die Tatsache, dass die Killing-Form nicht ausgeartet ist, impliziert, dass die Lie-Klammer nicht verschwinden kann. q.e.d.

iii.) $\widetilde{S}_\alpha = \mathbb{C}\cdot X_\alpha \oplus \mathbb{C}\cdot Y_\alpha \oplus \mathbb{C}\cdot H_\alpha$ bildet eine Unteralgebra von $\mathcal{G}$, die isomorph ist zu $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) = \langle X, Y, H\rangle : X \mapsto X_\alpha$, $Y \mapsto Y_\alpha$, $H \mapsto H_\alpha$. Zu zeigen ist, dass $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$, was äquivalent zu $\widetilde{S}_\alpha = S_\alpha$ ist. (Insbesondere ist dann $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$.) Wir nehmen nun an, dass $\dim \mathcal{G}_\alpha > 1$. Dann gibt es ein $Y \in \mathcal{G}_{-\alpha}$, so dass $[X_\alpha, Y] = 0$ ist für $y \neq 0$. (Dies gilt nach Lemma 16 Punkt ii.), wenn man $Y \neq 0$ mit $\langle X_\alpha, Y\rangle = 0$ (senkrecht auf X_α) wählt.) Weiter gilt:

$[H_\alpha, Y] = -\alpha(H_\alpha)Y = -2Y$

Y ist aber ein primitives Element für die Darstellung von $\widetilde{S}_\alpha$ auf $\mathcal{G}$. Die Darstellungstheorie von $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ und die Endlichkeit des Moduls impliziert, dass die höchsten Gewichte positive ganze Zahlen sind. Es ist also ein Widerspruch zur Tatsache, dass die primitiven Elemente der Darstellungen von $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ nur **positives** ganzes Gewicht haben. Damit ist $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$. q.e.d.

4.0.1 Definition des (abstrakten) Wurzelsystems

Sei V ein (komplexer) Vektorraum und sei $\alpha \in V$ mit $\alpha \neq 0$. Die Spiegelung von α heißt ein Element $S_\alpha \in \mathrm{GL}(V)$ mit der Eigenschaft $S_\alpha(v) = v - \alpha^*(v)\alpha$, wobei $\alpha^* \in V^*$ (dualer Raum) und $\alpha^*(\alpha) = 2$. (Der Kern von α^* ist eine Hyperebene.)

Definition:

$R \subseteq V$ heißt Wurzelsystem in V, wenn

i.) R endlich, $0 \notin R$ und R als Vektorraum V erzeugt.

ii.) Für jedes $\alpha \in R$ gibt es eine Spiegelung S_α mit der Eigenschaft, dass sie das Wurzelsystem in sich selbst überführt, dass also $S_\alpha R \subseteq R$ ist.

iii.) Für α, $\beta \in R$ gilt $S_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$. (Ganzzahligkeitsbedingung)

Bemerkung:

a.) Wenn $S_\alpha(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$ ist, dann ist Punkt iii.) äquivalent zu $\alpha^*(\beta) \in \mathbb{Z}$.

b.) Zu einem Wurzelsystem R ist die Spiegelung S_α mit $S_\alpha R \subseteq R$ eindeutig bestimmt.

c.) Wenn V ein reeller Vektorraum ist, so sprechen wir von einem **reellen** Wurzelsystem. Ist V komplex, so liegt ein **komplexes** Wurzelsystem vor.

d.) Der **Rang** eines Wurzelsystems ist gegeben durch $\dim V$.

Beweis:

$S^1_\alpha(X) = x - \alpha^*_1(x)\alpha$ und $S^2_\alpha(x) = x - \alpha^*_2(x)\alpha$ seien Spiegelungen von α mit $S^i_\alpha(R) \subseteq R$. Wir betrachten eine Kombination dieser beiden Spiegelungen: $U = S^1_\alpha \circ S^2_\alpha$ mit $U(R) \subseteq R$. Hier gilt $U(\alpha) = \alpha$.

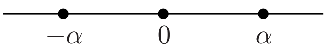
$S^i_\alpha : V/\alpha \cdot \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Id}} V/2\mathbb{C}$

$S^i_\alpha|_{V/\alpha\cdot\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{V/\alpha\cdot\mathbb{C}}$

Daraus folgt $U|_{V/\alpha\cdot\mathbb{C}} = \mathrm{Id}_{V/\alpha\cdot\mathbb{C}}$, womit U nur Eigenwerte eins hat (unipotentes Element). Da R endlich ist, folgt, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt (zum Beispiel $n =$ (Anzahl R)!), so dass $U^n(\beta) = \beta \ \forall\ \beta \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $U^n = \mathrm{Id}_V$ und damit $U = \mathrm{id}_V$. Somit ist S^1_α das Inverse von S^2_α und damit wieder selbst S^2_α, womit $S^1_\alpha = S^2_\alpha$ gilt.

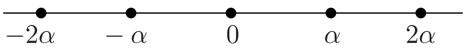
Beispiel:

a.) Wir betrachten V mit $\dim V = 1$, $R = \{\alpha, -\alpha\}$.



Dies ist ein Wurzelsystem. R bezeichnet man als A_1.

b.) Auch ist $R = \{\alpha, 2\alpha, -\alpha, -2\alpha\}$ ein Wurzelsystem.



Bemerkung:

Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind α, $-\alpha$, 2α, -2α oder α, $-\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$, $-\frac{1}{2}\alpha$ die einzigen zu α proportionalen Wurzeln. Wenn α, $-\alpha$ die einzigen zu α proportionalen Wurzeln sind (für alle $\alpha \in \mathbb{R}$), nennen wir das Wurzelsystem **reduziert**. Nur solche werden im folgenden für uns wichtig sein.

Beweis:

α sein eine Wurzel und $\beta = t\alpha$ ebenfalls.

$\mathbb{Z} \ni \alpha^*(\beta) = \alpha^*(t\alpha) = t\alpha^*(\alpha) = 2t$

Wir können annehmen, dass $t \in (0,1)$, woraus sich $t = \frac{1}{2}$ ergibt. Eine andere Möglichkeit gibt es nicht. q.e.d.
Kommen wir nun zurück zu halbeinfachen LIE-Algebren (über $\mathbb{C}$).

$\mathcal{G} = h \oplus \sum_{\alpha \in R} \mathcal{G}_\alpha$ mit $\alpha \in h^{(*)}$ und $R \subseteq h^{(*)} \setminus \{0\}$

Sei $\alpha \in R$. Wir definieren $\mathcal{S}_\alpha(\beta) := \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$ mit $\beta \in h^*$ $(*)$. (Dies ist eine Spiegelung an α. Welche Eigenschaft hat H_α? Wir erinnern uns, dass $\alpha(H_\alpha) = 2$ und $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$ mit $X_\alpha \in \mathcal{G}_\alpha$ und $Y_\alpha \in \mathcal{G}_{-\alpha}$ (H_α, X_α und Y_α sind sl(2)-Tripel.)

Theorem 6

Es sei $V := h^*$ und R ein Wurzelsystem von $\mathcal{G}$. Dann ist $R \subseteq V \setminus \{0\}$ ein komplexes Wurzelsystem und R ist reduziert.

Beweis:

i.) R ist endlich und erzeugt V, was bereits (oft) gezeigt wurde.

ii.) Behauptung: $\mathcal{S}_\alpha$ wie in $(*)$ definiert, sind Spiegelungen eines Wurzelsystems.

$\mathcal{S}_\alpha$ ist nach Definition $\langle X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \rangle \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$. Wir wissen, dass $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$ ist. Sei $\beta \in R$. Dann gilt $[H_\alpha, y] = \beta(H_\alpha)y$ für $y \in \mathcal{G}_\beta \setminus \{0\}$. Wir wissen, dass $\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}$ ist werden der Darstellungstheorie von $\mathcal{S}_\alpha$, da $\beta(H_\alpha)$ ein Gewicht für die Darstellung von $\mathcal{S}_\alpha$ ist. Setze nun $\mathbb{Z} \ni p = \beta(H_\alpha)$. Zu zeigen ist, dass $\mathcal{S}_\alpha(\beta) = \beta - p\alpha \in R$. Wir wissen aus der Darstellungstheorie von $\mathcal{S}_\alpha \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$, dass mit p auch $-p$ ein Gewicht ist und genauer: $Y_\alpha^p y$ ist ein Gewichtsvektor zum Gewicht $-p$ von H_α. Dann ist $Y_\alpha^p y \neq 0$. Es gilt $0 \neq Y_\alpha^p \in \mathcal{G}_{\beta - p\alpha}$. Hieraus folgt $\beta - p\alpha \in R$. Falls $p \leq 0$, ist $X_\alpha^{-p} y$ Gewichtsvektor zum Gewicht $-p$ von H_α und daraus folgt $0 \neq X_\alpha^{-p} y \in \mathcal{G}_{\beta - p\alpha}$. Daraus folgt, dass $\beta - p\alpha$ eine Wurzel $\in R$ ist. Somit ist $R \subseteq h^* = V$ ein komplexes Wurzelsystem. q.e.d.

iii.) Wir beweisen nun die Reduziertheit: Mit $\alpha \in R$ ist auch $2\alpha \in R$.

Es ist $0 \neq y \in \mathcal{G}^{2\alpha}$. Dann ist $(2\alpha)(H_\alpha) = 2 \cdot \alpha(H_\alpha) = 4$. R ist ein Wurzelsystem, woraus folgt, dass 3α keine Wurzel ist. Es ist $[X_\alpha, y] \in \mathcal{G}_{2\alpha+\alpha} = \{0\}$, also $X_\alpha \cdot y = 0$. Dies bedeutet mit $H_\alpha = [X_\alpha, Y_\alpha]$:

$H_\alpha y = (X_\alpha Y_\alpha - Y_\alpha X_\alpha) y = X_\alpha \cdot (Y_\alpha y)$

Es ist $Y_\alpha y \in \mathcal{G}$, da $y \in \mathcal{G}_{2\alpha}$ und $Y_\alpha \in \mathcal{G}_{-\alpha}$. Wegen $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$ und $\mathcal{G}_\alpha = {}_{\mathbb{C}}\langle X_\alpha \rangle$ folgt $X_\alpha(Y_\alpha g) = 0$. Außerdem gilt werden $y \in \mathcal{G}_{2\alpha}$: $H_\alpha \cdot y = 2\alpha(H_\alpha) = 4y$, woraus $y = 0$ resultiert, was ein Widerspruch ist. q.e.d.

Satz 19 (Ergänzung):

Sei $\alpha \in R$, $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$ und $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] \subseteq \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$.

1.) $\dim \mathcal{G}_\alpha = 1$ für alle $\alpha \in R$

2.) $[\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_\beta] = \mathcal{G}_{\alpha+\beta}$, falls $\alpha + \beta \neq 0$

Lemma 18:

α, $\beta \in R$ seien nicht proportional. Wähle nun p, $q \in \mathbb{N}$, so dass $\beta - p\alpha \in R$ und $\beta + q\alpha \in R$. Betrachte $E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_{\beta + k\alpha}$. Dann ist E ein irreduzibler S_α-Modul mit $\dim E = p + q + 1$. Weiterhin ist $\mathrm{ad}(X_\alpha)$: $\mathcal{G}^{\beta + k\alpha} \mapsto \mathcal{G}^{\beta + (k-1)\alpha}$ ein Isomorphismus für alle $-p \leq k \leq q - 1$ und weiterhin $\beta(H_\alpha) = p - q$.

Beweis:

E ist ein S_α-Modul, da $Y_\alpha \mathcal{G}_{\beta+k\alpha} \subseteq \mathcal{G}_{\beta+(k-1)\alpha}$, $X_\alpha \mathcal{G}_{\beta+k\alpha} \subseteq \mathcal{G}_{\beta+(k+1)\alpha}$ und $H_\alpha \mathcal{G}_{\beta+k\alpha} \subseteq \mathcal{G}_{\beta+k\alpha}$. H_α hat auf $\mathcal{G}_\beta$ das Gewicht $\beta(H_\alpha)$. Alle Gewicht auf E sind von der Gestalt $\beta(H_\alpha) + 2K$ mit $K \in \mathbb{Z}$ und $\beta(H_\alpha) + 2q$ ist das maximale Gewicht. Der Gewichtsraum zu $\beta(H_\alpha) + 2K$ ist $\mathcal{G}_{\beta+K\alpha}$ und ist eindimensional. Daraus folgt, dass der Modul E irreduzibel ist mit maximalem Gewicht $\beta(H_\alpha) + 2q$ und minimalem Gewicht $-\beta(H_\alpha) - 2q = \beta(H_\alpha) - 2p$, was äquivalent ist zu $2p - 2q = 2\beta(H_\alpha)$. q.e.d.

Bemerkung:

Der zweite Teil von Satz 19 ist erhalten im Lemma 18 für $k = 0$.

4.0.2 Wurzelsystem von $\mathcal{G} = \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$

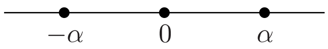
Wir betrachten folgende Menge von Matrizen:

$h = \left\{ H = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \right\}$ mit $\alpha(H) = 2a$ und $\alpha \in h^*$

$\mathcal{G}_\alpha = \left\langle X_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\mathcal{G}_{-\alpha} = \left\langle Y_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$H_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $(\alpha(H_\alpha) = 2)$

$R(\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})) = \{\alpha, -\alpha\} \subseteq h^* \setminus \{0\}$



A_1

$S_\alpha(\alpha) = -\alpha$, $S_\alpha(-\alpha) = \alpha$

Betrachten wir außerdem $\mathcal{G} = \mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$:

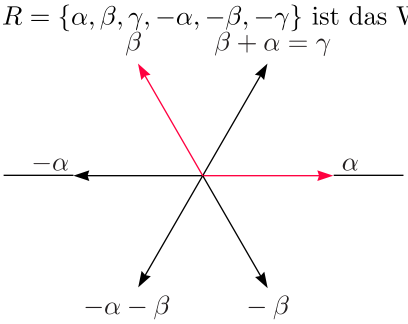
$$h = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_3 \end{pmatrix} \middle| a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$$

$\alpha(H) = a_1 - a_2 (= \alpha_{12})$

$\beta(H) = a_2 - a_3 (= \alpha_{23})$

$\gamma(H) = a_1 - a_3 = \alpha + \beta (= \alpha_{13})$

$R = \{\alpha, \beta, \gamma, -\alpha, -\beta, -\gamma\}$ ist das Wurzelsystem von $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$.



A_2

Gespiegelt wird an den Seitenhalbierenden dieses regulären Sechsecks. Die Weylgruppe ist die Symmetriegruppe des regulären Sechsecks (Dieder-Gruppe): $W(A_2) \simeq D_6$.

Definition:

$R^* = \{\alpha^* | \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq V^*$ heißt die Menge der inversen Wurzeln.

4.1 Hauptsatz

$\mathcal{G}$ sei eine halbeinfache LIE-Algebra und $h \subseteq \mathcal{G}$ eine CARTAN-Unteralgebra. Es sei $h \oplus \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{G}_\alpha$ die Wurzelzerlegung von $\mathcal{G}$ bezüglich h. $R \subseteq h^*$ sei ein komplexes Wurzelsystem mit $S_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha)\alpha$.

$H_\alpha \in [\mathcal{G}_\alpha, \mathcal{G}_{-\alpha}]$, $S_\alpha = \mathcal{G}_\alpha \oplus \mathcal{G}_{-\alpha} + \mathbb{C}H_\alpha \simeq \mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$

$\alpha(H_\alpha) = 2$, $R^* = \{H_\alpha | \alpha \in \mathbb{R}\} \subseteq h$

4.2 Komplexe und reelle Wurzelsysteme

Sei $R \subseteq V$ ein reelles Wurzelsystem und $W(r) = \{S_\alpha | \alpha \in R\}$ (Spiegelungen an diesen Wurzeln) die WEYLgruppe von R. Wähle ein positiv definites Skalarprodukt $\langle , \rangle$ auf V, so dass die Elemente von $W(R)$ Isometrien des Skalarproduktes $\langle , \rangle$ sind. Insbesondere ist $S_\alpha(x) = x - \langle \alpha', x \rangle \alpha$ mit $\alpha^*(x) = \langle \alpha', x \rangle$. Aus $\alpha^*(\alpha) = 2$ folgt $\langle \alpha', \alpha \rangle = 2$ und damit $\alpha^* = \frac{2\alpha}{|\alpha|^2} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. Die Konsequenz ist, dass R^* V^* erzeugt.

Satz 20:

$R^* \subseteq V^*$ ist ein Wurzelsystem und $(R^*)^* = R$.

Beweis:

Wir wissen, dass R^* V^* erzeugt. Es ist $S_{\alpha^*}(x) = x - \alpha(x)\alpha^*$. Für $x \in V^*$ und $\beta^* \in R^*$ gilt $\alpha(\beta^*) = \alpha^*(\beta) \in \mathbb{Z}$. q.e.d.
Sei $R \subseteq V$ ein reelles Wurzelsystem. Dann ist $R \subseteq V_\mathbb{C} = V \otimes \mathbb{C}$ ein komplexes Wurzelsystem.

Satz 21:

Wenn $R \subseteq V$ ein komplexes Wurzelsystem ist, dann ist dieses Wurzelsystem die Komplexifizierung eines reellen Wurzelsystem $R \subseteq V_0$, wobei V_0 ein reeller Vektorraum ist und $V \simeq V_0 \otimes \mathbb{C} = V_{0,\mathbb{C}}$.

Beweis:

Wir betrachten $R \subseteq V$ und $V_0 = \langle R \rangle_\mathbb{R}$, was ein reeller Untervektorraum von V ist. Außerdem betrachten wir die Abbildung V mit $V_0 \otimes \mathbb{C} \mapsto V$, $x \otimes \alpha \mapsto \alpha \cdot x$. Diese Abbildung ist surjektiv, da R und somit V_0 V über $\mathbb{C}$ erzeugt. Sei $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}) \mapsto \mathrm{Hom}(V_0 \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C})$ die duale Abbildung.

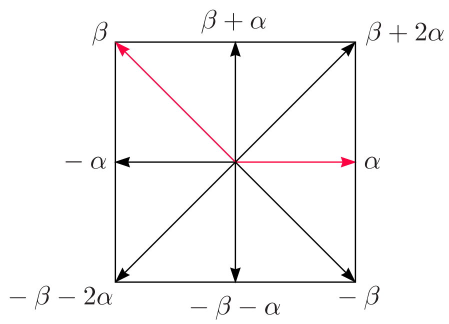
$R^* \ni \alpha^* \mapsto \alpha_0^*$

Was passiert mit den Spiegelungen $S_\alpha(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$? Haben wir $\beta \in R$ und $S_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha$, wobei $\alpha^*(\beta) \in \mathbb{Z}$. Damit induziert S_α eine Abbildung von V_0 nach V_0, die reell linear ist. Es gibt ein $\alpha_0^* \in V_0^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V_0, \mathbb{R})$, so dass $S_\alpha(x) = x - \alpha_0^*(x)\alpha$ für $x \in V_0$. Außerdem stimmt $\alpha^*|_{V_0}$ überein mit α_0^*. So folgt, dass $R \subseteq V_0$ ein reelles Wurzelsystem ist. Dies impliziert, dass die Abbildung $R^* \nu \alpha^* \mapsto \alpha_0^*$ surjektiv ist, also handelt es sich um eine Isomorphismus. q.e.d.

Anmerkung:

Man kann aus verschiedenen Wurzelsystemen auch ein Produkt-Wurzelsystem bilden.

Beispiel:



B_2

Hier taucht die Spiegelungsgruppe eines regulären Vierecks auf. Es stellt sich die Frage, welche Lie-Algebra dieses Wurzelsystem haben (Rang 2). In Frage kommen $so(5, \mathbb{C})$ oder auch $sp(4, \mathbb{C})$.

Kapitel 5

Wurzelsysteme und Basen

Definition:

$R \subseteq V$ sei en reelles Wurzelsystem. $S \subseteq R$ heißt eine Basis des Wurzelsystems, wenn folgendes gilt:

1.) S ist eine Basis von V.

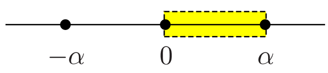
2.) Jedes $\alpha \in R$ schreibt sich

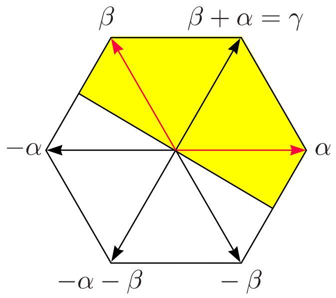
a.) $\alpha = \sum\limits_{\gamma \in S} n_\gamma \gamma$ mit $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ und $n_\gamma \geq 0$ für alle $\gamma \in S$ oder

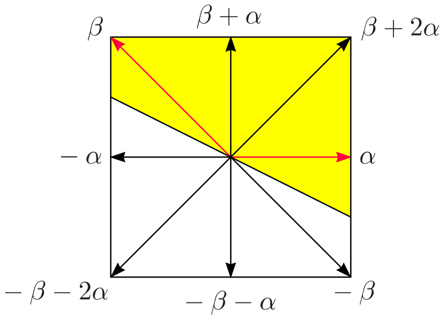
b.) $\alpha = \sum\limits_{\gamma \in S} n_\gamma \gamma$ mit $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ und $n_\gamma \leq 0$ für alle $\gamma \in S$.

Es gilt $R = R^+ \cup R^-$ und $R^- = -R^+$.

Wenn R eine Basis S besitzt, so schreiben wir $R^+ = \{\alpha \in R | \text{die a.) erfüllen}\}$ oder $R^- = \{\alpha \in R | \text{die b.) erfüllen}\}$. Der Menge der positiven/negativen Wurzeln erzeugt also einen Halbraum, so dass alle positiven/negativen Wurzeln innerhalb dieses Halbraums liegen.







Satz 22:

Eine Basis S existiert und jede Basis lässt sich folgendermaßen konstruieren: Es gibt ein $t \in V^* \setminus \{0\}$ (nichtverschwindende lineare Form), so dass $t(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in R$ und $R_S^+ = \{\alpha \in R | t(\alpha) > 0\} = R_t^+$ und die Basis S stimmt überein mit der Menge S_t der unzerlegbaren Elemente von R_t^+.

Satz 23:

Sei $t \in V^*$ eine Linearform mit $\langle t, \alpha \rangle \neq 0$ für alle $\alpha \in R$. Dann bildet die Menge $S_t = \{\alpha \in R_t^+ | \alpha \text{ ist unzerlegbar}\}$ eine Basis von R.

Bemerkung:

Für $t \in V^*$ ist $R_t^+ = \{\alpha \in R | \langle t, \alpha \rangle > 0\}$. $\alpha \in R^+$ heißt unzerlegbar, wenn α nicht als Linearkombination $\alpha = \beta + \gamma$ mit $\beta, \gamma \in R_t^+$ geschrieben werden kann.

Lemma 19:

Wenn $\alpha \in R_t^+$, dann gilt $\alpha = \sum_{\gamma \in S_t^+} n_\gamma \gamma$ mit $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ und $n_\gamma \geq 0$. Jedes Element von R_t^+ schreibt sich als „nicht-negative“ Linearkombination von Elementen aus S_t.

Beweis:

Wir betrachten $I = \{\alpha \in R_t^+ | \text{schreiben sich nicht als positive Kombination von Elementen aus } S_t\}$. Wenn $I \neq \varnothing$, so gibt es ein $\alpha \in I$ mit $\langle t, \alpha \rangle > 0$ und $\langle t, \alpha \rangle$ minimal unter den $\beta \in I$. Darüber hinaus wissen wir, dass α zerlegbar ist. (Sonst wäre $\alpha \in S_t$.) Wir können also schreiben $\alpha = \beta + \gamma$ mit β, $\gamma \in R_t^+$. Aus $\langle t, \alpha \rangle = \langle t, \beta \rangle + \langle t, \gamma \rangle > 0$ mit $\langle t, \beta \rangle > 0$ und $\langle t, \gamma \rangle > 0$ folgt $\langle t, \beta \rangle < \langle t, \alpha \rangle$ bzw. $\langle t, \gamma \rangle < \langle t, \alpha \rangle$, womit sich $\beta \notin I$ bzw. $\gamma \notin I$ ergibt. Somit schreibt sich α als positive Linearkombination, was ein Widerspruch ist. Damit ist $I = \varnothing$. q.e.d.

Aus dem Lemma 19 folgt $R_t^+ \subseteq R_S^+$, $-R_t^+ \subseteq -R_S^+ = R_S^-$, $R = R_t^+ \cup R_t^- = R_S^+ \cup R_S^-$ und $R_S^+ = R_r^+$. $S = S_t$ erfüllt die zweite Bedingung aus obiger Definition für die Basis.

Satz 24:

Sei S eine Basis von R. Dann ist jede Basis S von R von der Gestalt S_t für ein $t \in V^*$. (Es gilt $R = R^+ \cup R^-$.)

Beweis:

Wähle $t \in V^*$ mit $t(\gamma) > 0$ für alle $\gamma \in S$. Dann gilt $S = S_t$. Wichtig ist $S \subseteq R_t^+$, $R_S^+ \subseteq R_t^+$. Da $R = R_S^+ \cup R_S^-$ gilt $R_S^+ = R_t^+$. Daraus folgt, dass die Menge S unzerlegbar ist und damit $S \subseteq S_t$. Da S_t eine Basis ist, folgt $S = S_t$. q.e.d.

5.1 Winkel zwischen Wurzeln

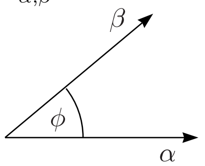
Lemma 20:

Wenn α, $\beta \in S_t$, so schließen α und β einen stumpfen Winkel ein; es gilt also $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$. Es gilt:

$$S_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha = \beta - n_{\alpha,\beta}\alpha = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|^2}\alpha \text{ mit } n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = (\cos\phi)|\alpha||\beta|$$

$n_{\alpha,\beta}$ ist ein Winkel:



$$n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = \frac{4\langle \alpha, \beta \rangle^2}{|\alpha|^2|\beta|^2} = 4\cos^2\phi \in \{0; 1; 2; 3; 4\} \text{ da } \cos^2\phi \in [0,1] \text{ und } n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$$

- 1.Fall: α, β sind proportional. Damit ist $\cos^2\phi = 1$.

  Wenn $\alpha = \pm\beta$ ist, dann ist $n_{\alpha\beta} = \pm 2$ und $n_{\beta\alpha} = \pm 2$. (In allen reduzierten Wurzelsystemen spielt nur dieser Teil eine Rolle.) Wenn $\alpha = \pm 2\beta$ ist, gilt $n_{\alpha\beta} = \pm 1$ und $n_{\beta\alpha} = \pm 4$.

- Weitere Fälle: nichtproportionale Wurzeln α, $\beta \in R$

$\cos\phi$	ϕ	$n_{\alpha\beta}$	$n_{\beta\alpha}$	
0	$\frac{\pi}{2}$	0	0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	1	1	$\|\alpha\| = \|\beta\|$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	-1	-1	$\|\alpha\| = \|\beta\|$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2	$\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$
$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1	-2	$\|\beta\| = \sqrt{2}\|\alpha\|$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	1	3	$\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	-1	-3	$\|\beta\| = \sqrt{3}\|\alpha\|$

$$n_{\alpha\beta} = \frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha|^2} = 1 = \frac{2\langle\alpha,\beta\rangle}{|\beta|^2} = n_{\beta\alpha}$$

Das Verhältnis der Wurzellängen hängt ab vom Verhältnis $n_{\alpha\beta}$ zu $n_{\beta\alpha}$.

Korollar 13:

Seien α, β Wurzeln mit $\langle\alpha,\beta\rangle > 0$. Dann ist $\alpha - \beta$ eine Wurzel.

Beweis:

Die Tatsache, dass $\langle\alpha,\beta\rangle > 0$ ist, ist äquivalent zu $n_{\alpha\beta} > 0$.

a.) Ist $n_{\alpha\beta} = 1$, dann folgt $S_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha\beta}\alpha = \beta - \alpha \in R$. Daraus folgt, dass $\alpha - \beta \in R$ ist.

b.) Wenn $n_{\beta\alpha} = 1$, dann gilt $S_\beta(\alpha) = \alpha - n_{\beta\alpha}) = \alpha - \beta \in R$.

Nach der Tabelle impliziert $n_{\alpha\beta} > 0$ die Bedingung a.) oder b.).

Korollar 14:

Sei $S \subset R_t^+$ eine unzerlegbaren Elemente. Dann gilt für α, $\beta \in S$, dass $\langle\alpha,\beta\rangle \leq 0$.

Beweis:

Wir nehmen an, dass $\langle\alpha,\beta\rangle > 0$ ist. Nach Korollar 13 gilt $\gamma = \alpha - \beta \in R$, also $\alpha = \gamma + \beta$. α ist zerlegbar, falls $\gamma \in R_t^+$. Wenn $\gamma \in R_t^-$, schreiben wir $\beta = \alpha - \gamma$. Falls $\gamma \in R_t^-$, ist β zerlegbar. q.e.d.

Lemma 21:

Sei $t \in V^*$ und $A \subseteq R_t^+$ und gilt für alle α, $\beta \in A$, dass $\langle\alpha,\beta\rangle \leq 0$ und $\alpha \neq \beta$ ist, dann sind die Elemente von A linear unabhängig.

Korollar 15:

Sei $t \in V^*$. Dann ist die Menge S_t linear unabhängig (und also eine Basis des Wurzelsystems). (Die erste Bedingung wird von S_t erfüllt.)
Damit ist der Satz über Basen bewiesen.

Beweis:

Wir nehmen an, es gibt eine Relation zwischen den Elementen von A.

$$\sum_{\gamma\in A} m_\gamma \gamma = 0$$

$$\lambda = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha \alpha = \sum_{\beta\in A} z_\beta \beta \text{ für } y_\alpha \geq 0 \text{ und } z_\beta \geq 0$$

Es ist $y_\alpha = m_\alpha$ und $z_\beta = -m_\beta$.

$$0 \leq \langle\lambda,\lambda\rangle = \sum_{\alpha,\beta\in A} y_\alpha z_\alpha \langle\alpha,\beta\rangle$$

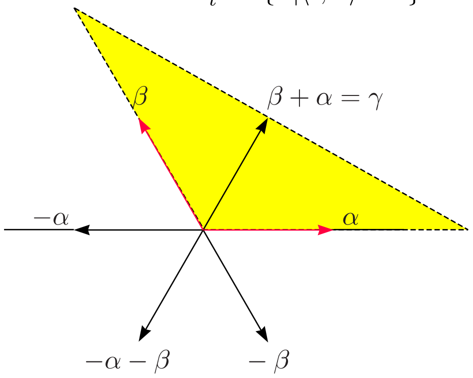
Aus $\langle\alpha,\beta\rangle \leq 0$ folgt $\langle\lambda,\lambda\rangle = 0$ und damit $\lambda = 0$.

$$0 = \langle t,\lambda\rangle = \sum_{\alpha\in A} y_\alpha \langle t,\alpha\rangle$$

Aus $\langle t,\alpha\rangle > 0$ folgt $y_\alpha = 0$. Ebenso ist $z_\beta = 0$, woraus sich $m_\gamma = 0$ ergibt. Damit ist A linear unabhängig. q.e.d.
Jedes Wurzelsystem hat eine Basis! Unsere erste Aufgabe ist nun, Wurzelsysteme vom Rang 2 zu bestimmen, also Wurzelsysteme, deren Basis aus zwei Vektoren besteht.
Es sei $R \subset V$ und $\widetilde{R} \subset \widetilde{V}$. Die Wurzelsysteme R und $\widetilde{R}$ sind isomorph genau dann, wenn g: $V \mapsto \widetilde{V}$ hom mit $gR = \widetilde{R}$. Dann folgt $S_{g(\beta)} = gS_\beta g^{-1}$ (wegen der Eindeutigkeit der Spiegelungen).

5.1.1 Geometrische Interpretation

Wir betrachten $R_t^+ = \{\alpha | \langle t, \alpha\rangle > 0\}$. Sei C ein konvexer Kegel erzeugt von R_t^+, dann gilt:



A_2

Die Basiselemente sind die Wurzeln, die sich auf dem Rand dieses Kegels befinden.

5.2 Inverse Wurzelsysteme und ihre Basen

Es sei $R \subset V$ und $R^* \subset V^*$. Dann ist $R^* = \{\alpha^* | S_\alpha(x) = x - \alpha^*(x)\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein inverses Wurzelsystem. Diese inversen Wurzelsysteme können wir gut veranschaulichen. Wir können nämlich ein invariantes Skalarprodukt $\langle , \rangle$ auf V wählen, zu dem es ein Homomorphismus $V \mapsto V^*$ gibt, so dass

$$\alpha^*(x) = \langle \alpha', x\rangle \text{ mit } \alpha' = \frac{2\alpha}{|\alpha|^2} \in V \text{ mit } R' = \{\alpha' | \alpha \in R\} \subseteq V$$

gilt und R' ein Wurzelsystem ist.

Satz 25:

Wenn S eine Basis von R ist, so ist $S^* = \{\alpha^* | \alpha \in S\}$ eine Basis von R^*.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass $S' = \{\alpha' | \alpha \in S\}$ eine Basis von R' ist, da R' und R^* ja isomorph sind. Wenn $t \in V^*$ eine lineare Form mit $\langle t, \alpha\rangle > 0$ für $\alpha \in S$, das heißt $S = S_t$, dann erzeugt R_t^+ den gleichen konvexen Kegel $C = C(R_t^+)$ wie die Menge $R_t'^+$. (Die Elemente von R' sind nur Vielfache von den Elementen von R. Zu jedem positiven Element α gehört ein positives Element α' und umgekehrt.) Die Basis $S' = S_t'$ von R' sind die Wurzeln α', die auf dem Rand von C liegen und dies sind die Vielfachen von den Elementen aus S. Damit ist $S' = \{\alpha' | \alpha \in S\}$. q.e.d.

5.3 Struktur der Weyl-Gruppe und Erzeugendensystem der Weyl-Gruppe

Wenn R ein Wurzelsystem ist, dann ist $W(r) = \langle S_\alpha | \alpha \in R\rangle$.

Satz 26:

Wenn S eine Basis von R ist, so folgt $W(R) = W_S =: \langle S_\gamma | \gamma \in S\rangle$. (Dies ist das Erzeugnis der Spiegelungen, die aus der Basis stammen.)

Satz 27:

Wenn $\beta \in R_S^+$, wobei S eine Basis von R ist, dann lässt sich eine Darstellung $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$ mit $\alpha_i \in S$ finden, so dass $R\nu\alpha_1 + \ldots + \alpha_l$ gilt für alle $l \leq k$.

Beweis:

Sei $t \in V^*$ und $\langle t, \alpha \rangle = 1$ für alle $\alpha \in S$ und $\langle t, \beta \rangle = k > 0$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir führen nun eine Induktion nach k durch. Behauptung: Es gibt ein $\alpha \in S$ mit $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$.

- 1.Fall: Aus $\beta \in S$ folgt der Satz.
- 2.Fall: $\gamma = \alpha - \beta$ ist eine Wurzel.

  $\langle t, \gamma \rangle = \langle t, \alpha \rangle - \langle t, \beta \rangle = 1 - k$

  Aus $\beta = \alpha - \gamma$ folgt $\langle t, -\gamma \rangle = k - 1$. q.e.d.

Lemma 22:

Sei $\alpha \in S$ und R reduziert. Dann ist $S_\alpha(R_S^+ \setminus \{\alpha\}) \subseteq R_S^+ \setminus \{\alpha\}$.

Beweis:

Wenn $\beta \in R_S^+ \backslash \{\alpha\}$, so ist $\beta = \sum\limits_{\gamma \in S} m_\gamma \gamma$ mit $m_\gamma \geq 0$. Es gibt ein $\gamma_0 \neq \alpha$, so dass $m_{\gamma_0} \neq 0$. Da $S_\alpha(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha$, ist S_α von folgender Gestalt:

$$S_\alpha(\beta) = \sum_{\gamma \in S} \widetilde{m}_\gamma \gamma \text{ mit } \widetilde{m}_{\gamma_0} = m_{\gamma_0} > 0$$

Daraus folgt $S_\alpha(\beta) \in R_S^+$.

Lemma 23:

Sei $\varrho_S := \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \in R^+} \alpha$ und R reduziert. Dann gilt $\alpha(\varrho_S) = \varrho_S - \alpha$ für $\alpha \in S$.

Beweis:

Wir betrachten:

$$\widetilde{\varrho}_S = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in R_S^+ \backslash \{\alpha\}} \gamma$$

Dann gilt $\varrho_S = \varrho_\alpha + \frac{1}{2}\alpha$. Aus $S_\alpha(\widetilde{\varrho}_\alpha) = \widetilde{\varrho}_\alpha$ und $S(\alpha) = -\alpha$ folgt $S_\alpha(\varrho_S) = \varrho_\alpha - \frac{1}{2}\alpha$. q.e.d.

Lemma 24:

Sei $t \in V^*$. Dann gibt es ein $w \in W_S$, so dass $\langle w(t), \alpha \rangle \geq 0$ für alle $\alpha \in S$.

Bemerkung:

Sei $w \subseteq \mathrm{GL}(V)$ mit $t \in V^*$. Dann ist $\langle w(t), x \rangle = \langle t, w^{-1}(x) \rangle$ für $t \in V^*$ und $x \in V$.

Beweis:

Wir betrachten $\langle w(t), \varrho_S \rangle$ für $w \in W_S$. Wir wählen w_0 so, dass $\langle w_0(t), \varrho_S \rangle$ maximal ist. Dieses w_0 hat die behauptete Eigenschaft.

$$\langle w_0(t), \varrho_S \rangle \geq \langle S_\alpha w_0(t), \varrho_S \rangle = \langle w_0(t), S_\alpha \varrho_S \rangle = \langle w_0(t), \varrho_S \rangle - \langle w_0(t), \alpha \rangle$$

Daraus folgt, dass $\langle w_0(t), \alpha \rangle \geq 0$ (wegen der Maximalität in w_0). q.e.d.

Satz 28:

Seien S und $\widetilde{S}$ Basen von R. Dann gibt es ein $w \in W_S$, so dass $w(\widetilde{S}) = S$. (Die Untergruppe der Weyl-Gruppe operiert transitiv auf den Basen. Damit sind alle Basen aus dem Wurzelsystem gleichberechtigt. Dies ist nicht selbstverständlich, da die Basen verschiedene Gestalt haben könnten.)

Beweis:

Zu $\widetilde{S}$ gehört ein $\widetilde{t} \in V^*$ mit $\widetilde{t}(\alpha) > 0$ für alle $\alpha \in \widetilde{S}$. Insbesondere gilt dann $R^+_{\widetilde{S}} = R^+_{\widetilde{t}}$. Nach dem Lemma 24 gibt es ein $w_0 \in W_S$, so dass $\langle w_0(\widetilde{t}), \alpha\rangle = \langle \widetilde{t}, w_0^{-1}\alpha\rangle \geq 0$ für alle $\alpha \in S$. Insbesondere gilt also $\langle w_0(\widetilde{t}), \alpha\rangle > 0$ für alle $\alpha \in S$. Somit ist $t := w_0(\widetilde{t})$ und es gilt $S = S_t$ und $\widetilde{S} = S_{\widetilde{t}}$. Andererseits ist $w_0(S)$ eine Basis des Wurzelsystems und $\widetilde{t} > 0$ auf $w_0(S)$. Damit gilt $w_0(S) = S_{\widetilde{t}} = \widetilde{S}$. q.e.d.

Lemma 25:

Sei $\beta \in R$. Dann gibt es eine Basis S von R mit $\beta \in S$.

Beweis:

Sei $L_\beta \subseteq V^*$ die Hyperebene $\beta^\perp$ (die senkrecht auf β steht). Es gibt endlich viele weitere Hyperebenen $L_\gamma = \gamma^\perp$ mit $\gamma \neq \beta$ und $\gamma \in R$. Es gibt ein $t_1 \in L_\beta$ mit $t_1(\gamma) \neq 0$, da R endlich ist. Es sei $\varepsilon = \min\{|t_1(\gamma)| \gamma \in R, \gamma \neq \beta\} > 0$. Es gibt $t_0 \in V^*$ mit $t_0(\beta) = \varepsilon_0 > 0$ und $|t_0(\gamma)| > \varepsilon_0$ für $\gamma \neq \beta$ und $\gamma \in R$. Daraus folgt $\beta \in S_{t_0}$. q.e.d.

Lemma 26:

Sei $\beta \in R$. Dann gibt es ein $w \in W_S$, so dass $S_\beta = w$.

Beweis:

Sei $\widetilde{S}$ eine Basis, die β enthält und $w \in W_S$, so dass $w\widetilde{S} = S$. Daraus folgt $w\beta = \alpha \in S$ und damit folgt, dass $S_\alpha = S_{w\beta} = wS_\beta w^{-1}$ und daraus folgt, dass $S_\beta = w^{-1}S_\alpha \in W_S$. q.e.d.

5.4 Weyl-Kammer

Die Weyl-Gruppe ist eine Spiegelungsgruppe. Die Frage ist nun, woran gespiegelt wird.

Bemerkung:

Die Abbildung $S \mapsto C(S)$ ist eine Bijektion. (Aus der Umkehrabbildung $t \in C(S)$ folgt $S = S_t$.) Aus $t \in C(s)$ folgt, dass $S = S_t$ ist.

Definition:

Sei S eine Basis und $C(S) = \{t \in V^* | t(\alpha) > 0 \,\forall\, \alpha \in S\}$. Wir nennen $C(S)$ die Weyl-Kammer von S. $C(s) \subseteq V^*$ ist ein offener konvexer Kegel.

5.4.1 Andere Betrachtungsweise

Es sei $\alpha \in R$ und $H_\alpha = \{u \in V^* | u(\alpha) = 0\} \subseteq V^*$.

Satz 29:

Die Menge der Weyl-Klammern stimmt überein mit den Zusammenhangskomponenten von $V^* \setminus \cup_{\alpha\in R} H_\alpha$ (ohne die singulären Hyperebenen).
Eine Weyl-Kammer ist ein symplizialer Kegel.

Beweis:

Sei C eine Komponente in $V^* \setminus \cup_{\alpha\in R} H_\alpha$. Für $t \in C$ gilt nach Konstruktion $C(\alpha) \neq 0$ für alle $\alpha \in R$. Daraus folgt, dass es eine Basis S gibt (die durch t eindeutig bestimmt ist) mit $t(\gamma) > 0 \;\forall\; \gamma \in S$, $S = S_t$. Nach Definition ist also $t \in C(S)$. Für alle $t \in C$ ist $t'(\gamma) > 0 \;\forall\; \gamma \in S$ (nach Konstruktion von C). (Es müsste aus der Menge C herauslaufen und einmal die Hyperebene treffen, was jedoch nicht sein kann.) Wegen der Eindeutigkeit einer Basis ist $S = S_{t'}$ und somit $t' \in C(S)$. Damit haben wir bewiesen, dass $C \subseteq C(S)$. Umgekehrt ist klar, dass alle $C(S)$ (wobei S eine Basis von R ist) in einer Komponente von $V^* \setminus \cup_{\alpha\in R} H_\alpha$ liegen. (Die Mengen $C(S)$ treffen nie eine dieser Hyperebenen H_α.) q.e.d.

5.4.2 Geometrisches Bild der Aktion der Weyl-Gruppe

$w(R)$ operiert auf V und auch auf V^*. Für $t \in V^*$ ist $w(t)(x) := \langle t, w^{-1}x\rangle$ für $w \in W$ und $x \in V$. S_α sind bekanntlich die Spiegelungen an der Wurzel α, S_α: $V \mapsto V$. Die duale Abbildung S_α: $V^* \mapsto V^*$ ist eine Spiegelung an der Hyperebene $H_\alpha \subseteq V^*$. Für $t \in H_\alpha$ gilt:

$$S_\alpha(t)(x) = \langle t, S_\alpha(x)\rangle = \langle t, x - \alpha^*(x)\alpha\rangle = \langle t, x\rangle \text{ da } t(\alpha) = 0$$

Damit gilt $S_\alpha t = t$ für $t \in H_\alpha$. Die Spiegelungen S_α lassen also die Elemente der Hyperebene fest. S_α ist damit eine Spiegelung an der Hyperebene.
W ist Teilmenge der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(R) = \{\varphi : V \mapsto V | \varphi(R) \subseteq R\}$ mit $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$.

Zusammenfassung:

Die Weyl-Kammer $C(S)$ ist eine Komponente von $V^* \setminus \cup_{\alpha\in R} H_\alpha$ und ihr Rand ist durch die Hyperebene H_α mit $\alpha \in S$ gegeben. (Die H_α heißen auch „**Mauern**“.) Die Aktion der Weyl-Gruppe auf V^* wird also erzeugt von den Spiegelungen S_α an den Mauern einer Kammer. Weiterhin operiert die Weyl-Gruppe W transitiv auf der Menge der Kammern (da sie auch transitiv auf der Menge der zugehörigen Basen operiert) (Simplexe Spiegelungsgruppen, Gruppe die erzeugt wird von den Spiegelungen an diesem Kegel).

Satz 30:

Sei $w \in W$ mit $wC = \mathcal{C}$ für eine Weyl-Kammer $\mathcal{C}$. Hieraus folgt dann $w = 1$. (Die Weyl-Gruppe operiert einfach transitiv auf der Menge der Kammern.)

Beweis:

Sei S eine Basis und $\mathcal{C} = \mathcal{C}(S)$ die zugehörige Kammer. Für $w \in W$ mit $w = S_1, \ldots, S_d$ $(*)$, wobei die S_i Spiegelungen an den Mauern von $\mathcal{C}$ sind. S_i sei die Spiegelung an der Mauer $H_i = H_{\alpha_i}$ für $\alpha_i \in S$. Wir betrachten $W \subseteq \mathrm{GL}(V^*)$ und nehmen an, dass d die minimale Länge einer solchen Darstellung $(*)$ ist. Sei $w_i = S_1, \ldots, S_i$ eine Folge von Kammern $C_i = w_i\mathcal{C}$. Die Folge C_i bildet eine sogenannte **Gallerie**.

- ➢ Zwei Kammern $\mathcal{C}$ und $\widetilde{\mathcal{C}}$ heißen **benachbart**, wenn sie eine gemeinsame Mauer in ihrem Rand haben.
- ➢ C_i und C_{i+1} sind benachbarte Kammern.
  Wir betrachten die Kammern $C_i = s_1 \ldots S_i(\mathcal{C})$ und $C_{i+1} = S_1 \ldots S_{i+1}(\mathcal{C})$. $\mathcal{C}$ hat eine Mauer H_{i+1}, an der S_{i+1} die Spiegelung ist.

  $$C \underset{H_{i+1}}{|} S_{i+1}\mathcal{C} \underset{w_i}{\longrightarrow} w_i(C) \underset{w_i(H_{i+1})}{|} w_{i+1}(C)$$

Wir nehmen an, dass $w(C) = \mathcal{C}$ ist. (Eine Gallerie ist ein geschlossener Weg. Es muss deswegen einen Index j geben, so dass $w_j(H_{j+1}) = H_1$ ist. Die Mauer H_1 muss also noch einmal durchlaufen werden.) Dies bedeutet, dass $w_jS_{j+1}w_j^{-1} = S_1$ ist. Daraus ergibt sich $w_jS_{j+1} = S_1w_j$ und somit $S_1 \ldots S_jS_{j+1} = S_1S_1 \ldots S_j = S_2 \ldots S_j$, wobei $S_1 = w_{j+1}$. Der Wert w_{j+1} lässt sich durch j Spiegelungen ausdrücken.

Bemerkung:

Man kann zeigen, dass die Weyl-Gruppe eine sogenannte **Coseter-Gruppe** ist.

1.) W wird erzeugt von Spiegelungen S_i mit $i = 1, \ldots, n$ mit $S_i^2 = 1$.

2.) Das Produkt zweier Spiegelungen S_iS_j ist eine Drehung, wobei der Winkel zwischen den Hyperebenen der zugehörige Drehwinkel ist. Es gibt ganze Zahlen m_{ij}, so dass $(S_iS_j)^{m_{ij}} = 1$ für $i \neq j$ ist. (Es handelt sich ja um eine endliche Gruppe.)

Das heißt, als abstrakte Gruppe ist W durch 1.) und 2.) bis auf Isomorphien bestimmt.
Wir wissen schon, dass $S_\alpha(\beta) = \beta - \beta^*(\alpha)\alpha$ ist für $\beta^*(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $\alpha, \beta \in S$. Die Matrix $(n_{\alpha\beta})$ mit $n_{\alpha\beta} := \beta^*(\alpha)$ (wobei α, $\beta \in S$) heißt Cartan-Matrix des Wurzelsystems. Diese hat folgende Gestalt:

$$(n_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 2 & a & \ldots \\ b & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & 2 \end{pmatrix}$$

G_2 hat beispielsweise die CARTAN-Matrix:

$$(n_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Invariante der Wurzelsysteme (hängt also nicht von der Basis ab). Das Wurzelsystem ist eindeutig durch eine solche Matrix festgelegt.

Beobachtung:

Sei S eine Basis und $n_{\alpha\beta}$ für α, $\beta \in S$, wobei $S_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha\beta}\alpha$ ist. Ist $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$, so gilt $n_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)} = n_{\alpha\beta}$. Das heißt: Ist S eine Basis von R, so ist $S' = \varphi(S)$ wieder eine Basis von R. Für $\varphi(\alpha) \in S'$ gilt wegen der Eindeutigkeit $S_{\varphi(\alpha)} = \varphi S_\alpha \varphi^{-1}$. Dann erhalten wir nach Definition:

$$S_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - n_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}\varphi(\alpha) = \varphi(\beta - n_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}\alpha) = \varphi(S_\alpha(\beta)) = \varphi(\beta - n_{\alpha\beta}\alpha)$$

Dies folgt aus $S_{\varphi(\alpha)} = \varphi S_\alpha \varphi^{-1}$. Daraus ergibt sich also $n_{\alpha\beta} = n_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)}$.

Definition:

Sei $S \subseteq R$ eine Basis, so heißt $C(R) = (n_{\alpha\beta})$, wobei α und $\beta \in S$ sind, die CARTAN-Matrix von R (bezüglich S).

Bemerkung:

Es gilt $n = \mathrm{Rang}(R)$ =Anzahl der $s \in S$. Damit ist $C(R)$ eine $n \times n$-Matrix mit Elementen $\in \mathbb{Z}$, also $C(R) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$. Wir erinnern uns an die Definition von $n_{\alpha\beta}$ zurück:

$$S_\alpha(\beta) = \beta - n_{\alpha\beta}\alpha = \beta - \frac{2\langle\alpha, \beta\rangle}{|\alpha|^2}\alpha$$

Dann hatten wir folgendes festgestellt:

1.) $n_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$

2.) $n_{\alpha\beta} \cdot n_{\beta\alpha} = 4\cos^2\phi$, wobei ϕ der Winkel zwischen α und β ist

3.) Falls $\alpha \neq \beta$, so folgt $n_{\alpha\beta} \leq 0$ und $n_{\alpha\alpha} = 2$.

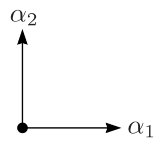
Aus diesen drei Bedingungen folgt für $\alpha \neq \beta$: $n_{\alpha\beta} \in \{0; -1; -2; -3\}$.

Beispiele:

Betrachten wir das Wurzelsystem A_1, dann ist $C(A_1) = 2$.

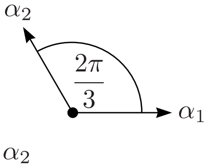
Das Produkt mit sich selbst $A_1 \times A_1$:

$A_1 \times A_1$:



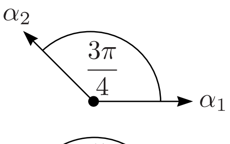
$$C(A_1 \times A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A_2 :



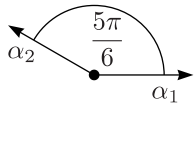
$$C(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

B_2 :



$$C(B_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

G_2 :



$$C(G_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Satz 31:

Seien S und S' Basen der (reduzierten) Wurzelsysteme $R \subseteq V$ und $R' \subseteq V'$. Außerdem sei $f\colon S \mapsto S'$ eine Bijektion mit $n_{f(\alpha)f(\beta)} = n_{\alpha\beta}$. Dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi\colon V \mapsto V'$ von Wurzelsystemen (das heißt $\varphi(R) = R'$) mit $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ für alle $\alpha \in S$.

Beweis:

Wir definieren $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ für $\alpha \in S$. Dann ist dadurch ein eindeutiger Vektorraumisomorphismus $\varphi\colon V \mapsto V'$ bestimmt. Zu zeigen bleibt $\varphi(R) = R'$.

$$
\begin{aligned}
(\varphi S_\alpha \varphi^{-1})\varphi(\beta) &= \varphi S_\alpha(\beta) = \varphi(\beta - n_{\alpha\beta}\alpha) = \varphi(\beta) - n_{\alpha\beta}\varphi(\alpha) = f(\beta) - n_{f(\alpha)f(\beta)}f(\alpha) = \\
&= S_{f(\alpha)}(f(\beta)) \text{ mit } \varphi(\beta) = f(\beta)
\end{aligned}
$$

Damit gilt $S_{f(\alpha)} = \varphi S_\alpha \varphi^{-1}$ für $\alpha \in S$. Daraus ergibt sich $W' = W(R') = \varphi W(R)\varphi^{-1}$, da Weyl-Gruppen aus den Spiegelungen $S_{\alpha'}$ mit $\alpha' \in S'$ bzw. S_α mit $\alpha \in S$ erzeugt werden.

$R' = W(R') \cdot S' = \varphi W(R)\varphi^{-1}S' = \varphi W(R)S = \varphi(R)$ q.e.d.

Korollar 16:

Die Cartan-Matrix legt das Wurzelsystem bis auf Isomorphie fest.

Beweis:

R und R' seien isomorphe Wurzelsysteme und S eine Basis von R. $\varphi(S) = S'$ ist also eine Basis von R'. Aus $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ folgt $C(R,S) = (n_{\alpha_i\alpha_j}) = C(R,S') = (n_{\alpha'_i\alpha'_j})$, wobei $S' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n\}$ mit $\alpha'_i = \varphi(\alpha_i)$. Wenn S und S' verschiedene Basen von R sind, so existiert ein $w \in W$ mit $wS = \widetilde{S}$. Daraus folgt $C(R,S) = C(R,\widetilde{S})$ mit $w \in \mathrm{Aut}(R)$. Somit ist $C(R)$ wohlbestimmt (bis auf eine Permutation der Basis).
Seien R und R' Wurzelsysteme, so dass $C(R)$ und $C(R')$ durch Permutation der Basis auseinander hervorgehen, dann folgt nach Satz 31, dass R und R' isomorph sind. q.e.d.

Korollar 17:

Wir betrachten die Gruppe $\mathrm{Aut}(R) = W(R)E$, wobei $W(R)$ die Weyl-Gruppe von R und $E = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(R) | \varphi(S) = S\}$ ist. Dann gilt:

i.) $W(R)$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(R)$.

ii.) $W(R) \cap E = \{1\}$

iii.) $\mathrm{Aut}(R)/W(R) = E$

Weiterhin ist E isomorph zur Menge $\{f\colon S \mapsto S,\ f \in \mathrm{Perm}(S),\ f(n_{\alpha\beta}) = n_{f(\alpha)f(\beta)}\}$. Aus i.) und ii.) folgt, dass $\mathrm{Aut}(R)$ ein **semidirektes** Produkt ist.

Beweis:

i.) Dies folgt, da $W(R) = \langle S_\alpha | \alpha \in R \rangle$ und $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$, $\varphi S_\alpha \varphi^{-1} = S_{\varphi(\alpha)} \in W(R)$. Damit ist $\varphi W(R)\varphi^{-1} \subseteq W(R)$ für alle $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$ (Normalteiler).

ii.) Dies ist bereits bewiesen (**einfache** Transitivität von $W(R)$ auf der Menge der Basen).

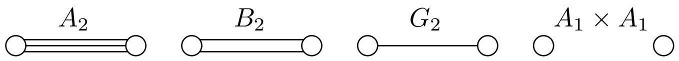
iii.) Hier ist zu zeigen, dass $\mathrm{Aut}(R) = W \cdot E$ ist. Dies folgt aus der **Transitivität** von W auf der Menge der Basen. Ist S eine Basis von R mit $\varphi \in \mathrm{Aut}(R)$, so existiert $w_\varphi \in W(R)$ mit $w_\varphi S = \varphi(S)$. Daraus ergibt sich $e = \varphi w_\varphi^{-1} \in E$ und damit $\varphi = e w_\varphi$.

5.5 Coseter-Graphen

Definition:

Ein Coseter-Graph ist ein endlicher Graph, so dass je zwei Ecken durch 0, 1, 2 oder 3 Kanten verbunden ist.

Beispiel:



Jeder CARTAN-Matrix lässt sich ein Coseter-Graph zuordnen. Als Ecken wählen wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$ und zwei Ecken α_i, α_j sind durch $n_{\alpha_i\alpha_j} \cdot n_{\alpha_j\alpha_i}$ Kanten verbunden.

5.5.1 Irreduzibilität von Wurzelsystemen

Definition:

Wir nenne $R \subset V$ reduzibel, wenn $V = V_1 \oplus V_2$ und $R = (R \cap V_1) \cup (R \cap V_2)$, wobei wir die Schnitte $R \cap V_i$ mit R_i bezeichnen wollen und $V_i \neq \{0\}$ sei. Das Wurzelsystem R heißt die (direkte) Summe von R_1 und R_2. R heißt irreduzibel genau dann, wenn eine Zerlegung mit $V_i \neq \{0\}$ nicht möglich ist.

Bemerkungen:

- Jedes Wurzelsystem ist eine direkte Summe von irreduziblen Wurzelsystemen.
- Die Zerlegung ist eindeutig.

Satz 32:

Sei $R = R_1 \cup R_2$ ein reduzibles Wurzelsystem. Dann gilt:

1.) V_1 ist senkrecht zu V_2.

2.) $R_1 \subseteq V_1$ und $R_2 \subseteq V_2$ sind Wurzelsysteme.

Beweis:

Sei S eine Basis des Wurzelsystems R. Dann ist insbesondere S eine Basis von V. Mit $S = (S \cap R_1) \cup (S \cap R_2)$ gilt $S \subseteq R_1 \cup R_2 = S_1 \cup S_2$; damit ist S_i eine Basis von V_i. Mit $\alpha \in S_1$ und $\beta \in S_2$ folgt $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ (weil S eine Basis ist) und außerdem $\langle \alpha, -\beta \rangle \leq 0$. Damit ist $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Falls $\langle \alpha, -\beta \rangle > 0$ für $\alpha \neq \pm\beta$ ist, folgt, dass $\alpha + \beta \in R$ eine Wurzel ist. $\alpha + \beta$ ist damit $\notin V_1$ und $\notin V_2$, was ein Widerspruch zu $R = R_1 \cup R_2$ darstellt. Damit ist $\langle \alpha, -\beta \rangle \leq 0$ und α, β stehen senkrecht aufeinander.
Für $\alpha \in R_1$ gilt $S_\alpha(v) = v$ für $v \in V_2$, da $V_2 \perp \alpha$. Aus $S_\alpha(R_2) = R_2$ und $S_\alpha(R) = R$ folgt $S_\alpha(R_1) = R_1$, woraus 2.) folgt. q.e.d.

Satz 33:

Ein Wurzelsystem R ist irreduzibel genau dann, wenn der Coseter-Graph CG(R) zusammenhängend ist. (Die irreduziblen Summanden entsprechen den Zusammenhangskomponenten des Coseter-Graphs.)

Beweis:

Wenn zwei Wurzeln senkrecht aufeinander stehen, sind sie im Coseter-Graph nicht miteinander verbunden. q.e.d.

Bemerkung:

Dies zeigt auch, dass die Zerlegung in irreduzible Summanden (bis auf Permutationen) „eindeutig“ ist. Wir werden sehen, dass eine halbeinfache LIE-Algebra $\mathcal{G}$ mit Wurzelsystem R genau dann einfach ist, wenn R irreduzibel ist. Mann kann also am Wurzelsystem erkennen, ob die LIE-Algebra einfach ist.

Beispiel:

Der Coseter-Graph von $A_1 \times A_2$ ist Punkt-Punkt und damit nicht zusammenhängend. Deshalb ist $A_1 \times A_2$ reduzibel. A_2, G_2 und B_2 sind jedoch irreduzibel, da ihre Coseter-Graphen zusammenhängend sind.

Kapitel 6

Realisierung der Lie-Algebra G_2

Es stellen sich folgende Fragen:

1.) Gibt es eine LIE-Algebra zum Wurzelsystem G_2?

2.) Wie finden wir eine Darstellung?

6.1 Die Cayley-Zahlen (Algebra der Oktonomen)

$\mathbb{O} = \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ ist eine Algebra der Dimension 8 über $\mathbb{C}$. Eine „Algebra“ ist ein Vektorraum V mit einem $\mathbb{C}$-bilinearen Produkt $V \times V \mapsto V$. (Wir verlangen keine Assoziativität oder Kommutativität!)
Wir betrachten jetzt die Quaternionen-Algebra $\mathbb{H} = \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$, welche eine vierdimensionale $\mathbb{C}$-Algebra ist.

$\mathbb{H} = \mathbb{C} \cdot E \oplus \mathbb{C} \cdot I \oplus \mathbb{C} \cdot Y \oplus \mathbb{C} \cdot K$

Außerdem verlangt man, dass $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E$ ($\Rightarrow IJ = -JI = K$) ist und, dass $\mathbb{H}$ eine **assoziative** Algebra ist: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Dies legt ein eindeutiges Algebraprodukt auf diesem vierdimensionalen Vektorraum fest. Es gibt eine Konjugationsabbildung:

$u = \alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K \Rightarrow \alpha E - \beta I - \gamma J - \delta K =: \overline{u} =: \tau(u)$

Es gilt $\tau(u \cdot v) = \tau(v) \cdot \tau(u)$ (Antihomomorphismus). Auf $\mathbb{H}$ existiert eine Norm $N(u) \cdot E = \mu \cdot \tau(u)$ ($N\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$). Dies ist eine nicht ausgeartete quadratische Form auf $\mathbb{H}$.

$$B(u,v)E = \frac{\mu \cdot \tau(v) + v \cdot \tau(u)}{2}$$

ist die zugehörige symmetrische Bilinear-Form. Es gilt $N(u \cdot v) = N(u) \cdot N(v)$ (Vier-Quadrate-Satz). Die Spurfunktion ist gegeben durch $t\colon \mathbb{H} \mapsto \mathbb{C}$ ($\alpha E + \beta I + \gamma J + \delta K \mapsto \alpha$).

$$t(u) \cdot E = \frac{\mu + \tau(u)}{2}$$

Die CAYLEY-Algebra $\mathbb{O}$ über $\mathbb{C}$ definieren wir als $V_{\mathbb{O}} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \cdot e$. (Dieser Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{C}^8$.)

$(x_1 + x_2 e) \cdot (y_1 + y_2 e) := x_1 y_1 - \overline{y}_2 x_2 + (x_2 \overline{y}_1 + y_2 x_1) e$

$\mathbb{O} = (V_{\mathbb{O}},)$ ist eine Algebra und $\mathbb{H}$ ist eine Unteralgebra.

- Die Algebra ist nicht assoziativ.

  $e(I \cdot J) = e(-K) = K \cdot e$

  $(e \cdot I) \cdot J = (-I \cdot e) \cdot J = (J \cdot I) \cdot e = -K \cdot e$

- Natürliche Konjunktion:

  $\tau : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{O}$, $\tau(x_1 + x_2 \cdot e) := \overline{x}_1 - x_2 \cdot e$

  $\tau(u \cdot v) = \tau(v) \cdot \tau(u)$

* $N(u)E = u\tau(u)$ (N: $\mathbb{O} \mapsto \mathbb{C}$)

  Dies ist eine nicht ausgeartete quadratische Form. Es gilt $N(u \cdot v) = N(u) \cdot N(v)$ für alle u, $v \in \mathbb{O}$. (Acht-Quadrate-Satz, „Zahlen“ (Springer-Verlag)). (Es gibt keinen 16-, 32-, ...-Quadrate-Satz! Bei 8 ist Schluss.)

* Spurfunktion: $t(u) = \dfrac{u + \tau(u)}{2}$

Lemma 27:

Für alle $x \in \mathbb{O}$ gilt $x^2 = -N(x)E + 2t(x) \cdot x \in \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C} \cdot x$. (Algebren, welche diese Eigenschaft aufweisen, bezeichnet man als **quadratische Algebren**. In quadratischen Algebren sind also Normfunktion N und Spurfunktion t automatisch vordefiniert.)

Beweis als Übung

Definition:

Eine Algebra A heißt alternativ, wenn für alle x, $y \in A$ gilt: $x \cdot (x \cdot y) = (x \cdot x) \cdot y = x^2 \cdot y$ und $y \cdot x^2 = y \cdot (x \cdot x) = (y \cdot x) \cdot x$. (Der Assoziator mit einem gleichen Objekt ist symmetrisch. Die Unteralgebren, die von zwei Elementen erzeugt werden, sind assoziativ.)

Satz 34:

Die Cayley-Algebra $\mathbb{O}$ ist alternativ.

Bemerkung:

Es gilt „Potenz-Assoziativität“, nämlich $(x^m) \cdot (x^n) = x^{m+n}$. (Den Beweis wollen wir an dieser Stelle nicht durchführen.)
Wir betrachten $D \in \mathrm{End}(A) = \mathrm{gl}(A)$, wobei A eine Algebra ist. $D \in \mathrm{Der}(A)$ heißt Derivation von A genau dann, wenn $D(u \cdot v) = (Du) \cdot v + v \cdot (Du)$ gilt.

Lemma 28:

$\mathrm{Der}(A)$ ist eine Unter-Lie-Algebra von $\mathrm{gl}(A)$. Das bedeutet, dass aus D_1, $D_2 \in \mathrm{Der}(A)$ folgt, dass $[D_1, D_2] = D_1 \cdot D_2 - D_2 \cdot D_1 \in \mathrm{Der}(A)$ ist.

Theorem 7:

Sei $\mathcal{G} = \mathrm{Der}(\mathbb{O}) \subseteq \mathrm{gl}(\mathbb{O})$. Dann gilt:

i.) $\mathcal{G}$ ist eine Unteralgebra von $\mathrm{SO}(8, \mathbb{C}) \subseteq \mathrm{gl}(\mathbb{O})$.

ii.) $\mathcal{G}$ ist halbeinfach mit Wurzelsystem G_2 und $\mathrm{Rang}(\mathcal{G}) = 2$.

iii.) $\mathcal{G}$ ist einfach und es gilt $\dim \mathcal{G} = 14$.

(Dies bedeutet also $\mathrm{Der}(\mathbb{P}) = \mathcal{G}_2$.)

Die Cayley-Algebra über den komplexen Zahlen $\mathbb{O} = \mathbb{O}_\mathbb{C}$ (achtdimensionale komplexe Algebra) ist **nicht** assoziativ und **nicht** kommutativ.

* Die Algebra ist **alternativ**. Die von je zwei Elementen erzeugte Unteralgebra ist assoziativ.

* Quadratisch: $x^2 \in \mathbb{C}E + \mathbb{C} \cdot x$, $x^2 = -N(x)E + 2t(x)x$

t: $\mathbb{O} \mapsto \mathbb{C}$ ist eine lineare Abbildung. Man bezeichnet sie als Spur. N: $\mathbb{O} \mapsto \mathbb{C}$ ist eine quadratische Form, nämlich die sogenannte Norm. Man definiert die Konjugation als τ: $\mathbb{O} \mapsto \mathbb{O}$ mit $\tau(xy) = \tau(y)\tau(x)$ und $\tau^2 = \mathrm{id}$. Die Normfunktion ist von der Gestalt $N(x) = x\tau(x)$ mit $t(x)(x + \tau(x))/2$. Elemente mit Spur 0 sind also die Elemente, für die $x = -\tau(x)/2$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{Im}(O) = \mathrm{Kern}(t)$.

$EN(x) = x\tau(x)$ und $\mathbb{C} \cdot E + \mathrm{Im}(O)$, $E\langle x, y\rangle = \dfrac{x\tau(y) + y\tau(x)}{2}$

$\mathbb{O}$ hatten wir zusammengesetzt als $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}e$ mit $\mathbb{H} = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}I \oplus \mathbb{C}J \oplus \mathbb{C}]K$. Es ist $v \in \mathbb{O}$ und $v = x_1 + x_2 e$ mit $x_i \in \mathbb{H}$.

$\mathrm{Der}(\mathbb{O}) = \{D | Da \cdot b = (Da) \cdot b + b \cdot D(a), \forall\, a, b \in \mathbb{O}\} \subseteq \mathrm{gl}(\mathbb{O}) = \mathrm{gl}_8(\mathbb{C})$

Satz 35:

$\mathrm{Der}(\mathbb{O})$ ist eine einfache komplexe LIE-Algebra mit Wurzel-System G_2. (Aus der Theorie der Wurzelsysteme wissen wir insbesondere $\dim(\mathrm{Der}(\mathbb{O})) = 14$.)

Korollar 18:

Die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ ist eine komplexe LIE-Gruppe vom „Typ" G_2 (nach FREUDENTHAL, JACOBSON, TITS).

Satz 36:

Es gilt $\mathrm{Der}(\mathbb{O}) \subseteq \vartheta(\langle,\rangle)$ (LIE-Algebra der orthogonalen Gruppe von N)

Bemerkung:

Für jede Derivation D gilt $DE = 0$.

$$Dx = (D(Ex)) = (DE)x + EDx = (DE)x + Dx$$

Es ist damit $(DE)x = 0$ für alle $x \in \mathbb{O}$ und daraus folgt $DE = 0$. Die Konsequenz hieraus ist, dass $\mathrm{Der}(\mathbb{O})$ identifiziert werden kann mit einer Unteralgebra $O(\mathrm{Im}(\mathbb{O}), \langle,\rangle) \simeq \mathrm{SO}(7, \mathbb{C})$.

Beweis:

Es seien x, $y \in \mathrm{Im}(O)$ mit $x \circ y = (x \cdot y + y \cdot x)/2$. Dies ist eine sogenannte JORDAN-Algebra. Die meisten exzeptionellen LIE-Algebren (auch G_2) stehen in direktem Zusammenhang mit solchen JORDAN-Algebren.

$$x \circ y = \frac{x \cdot y + y \cdot x}{2} = -\langle x, y\rangle E$$

Die zeigen wir durch:

$$(x+y)^2 = x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2$$

$$-N(x+y)E = -N(x)E + \frac{x \cdot y + y \cdot x}{2} - N(y)E$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. Aus $(*)$ folgt

$$D(x \cdot y + y \cdot x) = Dx \cdot y + xDy + Dy \cdot x + y \cdot Dx == 0$$

und hieraus resultiert:

$$\langle y, Dx\rangle = y \cdot \tau Dx + \tau y Dx$$

$$\langle Dy, x\rangle = Dy \cdot \tau(x) + y \cdot D\tau(x)$$

Da x, $y \in \mathrm{Im}(\mathbb{O})$ folgt, dass $\langle y, Dx\rangle + \langle Dy, x\rangle = 0$. (Orthogonalitätsbedingung). Es bleibt noch zu zeigen, dass D: $\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \mapsto \mathrm{Im}(\mathbb{O})$. (Dies wollen wir jedoch aus Zeitgründen nicht tun.) q.e.d.
Für $(x, y, z) \in O$ wollen wir nun den Assoziator A bezüglich des JORDAN-Produkts studieren:

$$A(x, y, z) = x \circ (y \circ z) - (x \circ y) \circ z)$$

Für beliebige Elemente $\in O$ gilt $A(x, y, z) \in \mathrm{Im}(O)$. Daraus folgt $\mathrm{Im}(O) = \{A(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{O}\}$ (Charakterisierung des Imaginärteils durch das Produkt). Wenn $D \in \mathrm{Der}(O)$, dann ist D eine Derivation des JORDAN-Produkts.

$$A(Dx, y, z) + A(x, Dy, z) + A(x, y, Dz) = DA(x, y, z)$$

Dies ist die Formel, die der Assoziator unter einer Derivation annimmt. Daraus folgt $D\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \subseteq \mathrm{Im}(\mathbb{O})$. q.e.d.

6.2 Pierce-Zerlegung in $\mathbb{O}$

Wir definieren:

$f_1 = \frac{E + \mathrm{i}e}{2}$ und $f:2 := \frac{E - \mathrm{i}e}{2}$

Hieraus ist sofort ersichtlich:

$\tau(f_1) = \frac{E + \mathrm{i}\tau(e)}{2} = \frac{E - \mathrm{i}e}{2} = f_2$

Dies sind also Elemente, die zueinander konjugiert sind. Außerdem ist $E = f_1 + f_2$ sofort klar und:

$f_1^2 = \frac{E + \mathrm{i}e + \mathrm{i}e + (\mathrm{i}e)^2}{4} = \frac{2E + 2\mathrm{i}e}{4} = f_1$ da $e^2 = -E$

(1) Darüber hinaus gilt $f_1 \cdot f_2 = 0(3)$ und $f_2^2 = f_2$. (2)

- f_1, f_2 bezeichnet man auch als orthogonale idempotente Elemente in $\mathbb{O}$.
- Für $a \in \mathbb{O}$ gilt $a = f_1 \cdot a + f_2 \cdot a$.

Satz 37 (Pierce-Zerlegung in $\mathbb{O}$):

$\mathbb{O} = \mathbb{C} \cdot f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus f_1\mathbb{O}f_2 \oplus f_2\mathbb{O}f_1 = \mathbb{C}f_1 \oplus \mathbb{C}f_2 \oplus J_{12} \oplus J_{23}$ wobei $\tau(J_{12}) = J_{21}$ und $\dim(J_{ij}) = 3$

Beweis:

Es gilt $\mathbb{O} = \mathbb{O} \cdot \mathbb{O}$.

$(f_1 \cdot a + f_2 \cdot a)(b \cdot f_1 + b \cdot f_2) = f_1 \cdot a \cdot f_1 + f_1 \cdot a \cdot b \cdot f_2 + f_2 \cdot a \cdot b \cdot f_1 + f_2 \cdot b \cdot f_2$

Lemma 29:

Es gilt $f_1\mathbb{O}f_2 = \mathbb{C}f_1$ und $f_2\mathbb{O}f_2 = Cf_2$. Dies folgt aus der Pierce-Zerlegung.

Lemma 30:

Aus $D \in \mathrm{Der}(O)$ folgt $Df_1 = a - b$ mit $a \in J_{12}$ und $b \in J_{21}$. Entsprechend gilt $Df_2 = -a + b$. Dies folgt aus den Derivationseigenschaften.

Definition:

Sei $D_0 \subseteq \mathrm{De}(O)$ die Unteralgebra von $\mathrm{Der}(O)$ mit $Df_1 = Df_2 = 0$ für alle $D \in D_0$.

Satz 38:

D_0 operiert auf J_{12} und J_{21}. Die Darstellung von D_0 auf J_{12} ist die Standard-Darstellung von $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$. Die Darstellung auf J_{21} ist die duale Darstellung. Die Folgerung hieraus ist, dass $D_0 \simeq \mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$.

Definition:

Es sei L_x: $\mathbb{O} \mapsto \mathbb{OP}$ mit $v \mapsto x \cdot v$ und $R_x : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{O}$ mit $v \mapsto v \cdot x$. (Links- und Rechtsmultiplikation).

$D_{x,y} := [L_x, L_y] + [L_x, R_y] + [R_x, R_y] \in \mathrm{Der}(\mathbb{O})$

Dies ist richtig für jede alternative Algebra. Aus $a \in J_{12}$ gilt $D_{f_1,a}f_1 = a$. Dies folgt durch Einsetzen und mit $f_1^2 = 1$. Außerdem gilt analog für $b \in J_{21}$: $D_{f_2,b}f_2 = b$. Auf diese Art und Weise erhalten wir Untervektorräume von Derivationen:

$D_{12} = \{D_{f_1,a} | a \in J_{12}\} \subseteq \mathrm{Der}(O)$

$D_{21} = \{D_{f_2,b} | b \in J_{21}\} \subseteq \mathrm{Der}(O)$

Satz 39:

Es gilt $\mathrm{Der}(O) = D_0 + D_{12} + D_{21}$. Jede Derivation zerfällt in Derivationen vom obigen Typ. (Der Beweis folgt elementar aus der Definition heraus.) Die Unterräume D_{12} und D_{21} sind invariant unter der adjungierten Darstellung von D_0 und die Darstellungen sind isomorph zu J_{12} und J_{21} (als D_0).

$[D_0, D_{l_1,a}] = D_{l_1,D_0(a)}$

Kapitel 7

Struktur halbeinfacher Lie-Algebren und ihre Klassifikation durch die Wurzelsysteme

Wir haben halbeinfache Lie-Algebren und Cartan-Unteralgebren untersucht. Danach sind wir auf die Wurzelsysteme gekommen, haben und mit Basen und Weyl-Gruppen beschäftigt. Jetzt schlagen wir den Bogen zurück und versuchen, halbeinfache Lie-Algebren mittels ihrer Wurzelsysteme zu klassifizieren.

7.1 Borel-Unteralgebren

Sei $\mathcal{G}$ eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ und $h \subseteq \mathcal{G}$ eine Cartan-Unteralgebra. $R = R(\mathcal{G}, h)$ sei das Wurzelsystem zu $\mathcal{G}$ und h. In diesem Wurzelsystem S können wir eine Basis wählen und die Wurzeln nach $R = R^+ \cup R^-$ in positive und negative Wurzeln zerlegen. Dies führt zu einer neuen Anwendung, nämlich zu den Borel-Unteralgebren. Wir definieren:

$$n = \sum_{\substack{\alpha \in R \\ \alpha > 0}} \mathcal{G}_\alpha \text{ und } n^- := \sum_{\substack{\alpha \in R \\ \alpha < 0}} \mathcal{G}_\alpha$$

<u>**Satz 39:**</u>

Es gilt $\mathcal{G} = n \oplus h \oplus n^-$, wobei:

1.) n ist eine Unteralgebra von $\mathcal{G}$. Alle Elemente von n sind nilpotent, also ist n eine nilpotente Unteralgebra. Die gleiche Aussage gilt für n^-.

2.) $b := h \oplus n$ ist eine auflösbare Unteralgebra von $\mathcal{G}$ und heißt Borel-Unteralgebra. Für deren Kommutatorunteralgebra gilt $[b, b] = n$.

<u>**Beispiel:**</u>

$$\mathrm{sl}_n(\mathbb{C});\ h = \begin{pmatrix} \star & & \\ & \star & \\ & & \star \end{pmatrix} \cap \mathrm{sl}(n, \mathbb{C}),\ n = \begin{pmatrix} 0 & & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} \star & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \star \end{pmatrix} \cap \mathrm{sl}(n, \mathbb{C})$$

<u>**Beispiel:**</u>

$$o(2n, \mathbb{C}) = \left\{ A \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) | AJ + JA^\intercal = 0 \text{ mit } J = \begin{pmatrix} & I_n \\ I_n & \end{pmatrix} \right\}$$

$$b = o(2n, \mathbb{C}) \cap \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}$$

Als Übung:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \text{ und } h = \begin{pmatrix} D_n & \\ & -D_n \end{pmatrix}$$

Beweis:

i.) Die Zerlegung $\mathcal{G} = n \oplus h \oplus n^-$ ist klar.

ii.) n ist eine Unteralgebra.

Aus $X \in \mathcal{G}^\alpha$, $\alpha \in R^+$, $Y \in \mathcal{G}^\beta$ und $\beta \in R^+$ folgt

$[X,Y] \in \mathcal{G}^{\alpha+\beta}$ mit $\alpha+\beta \in R^+$

und daraus ergibt sich wiederum $\mathcal{G}^{\alpha+\beta} \subseteq n$ und $[X,Y] \in n$.

iii.) $\mathrm{ad}(X)$ mit $X \in n$ ist nilpotent.

Es gilt $\mathrm{ad}(X)^k(Y) = 0$ für alle $Y \in \mathcal{G}$ und k groß genug. Es reicht anzunehmen, dass $Y \in \mathcal{G}^\beta$ und $\beta \in h^\star$.

$$\mathrm{ad}(X)^k(Y) \in \sum_{\substack{\alpha_1 \dots \alpha_k \\ \alpha_i > 0}} \mathcal{G}^{\beta+\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k} \text{ für } X \in n$$

Da R endlich ist, folgt $\beta + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \notin R$ für k groß genug. Damit ist $\mathrm{ad}(X)^k(Y) = 0$. q.e.d.

Bemerkung (Borel-Mirnov):

Alle Borel-Unteralgebren von $\mathcal{G}$, sogar **jede regulär auflösbare Unteralgebra** ist durch einen inneren Automorphismus zu b konjugiert.

Weyl-Basen von $\mathcal{G}$

Sei S eine Basis von R mit $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ mit $n = \mathrm{rang}(\mathcal{G}) = \dim(h)$. Es sei $H_i \in h$, $\alpha_i(H_i) = 2$, $S_{\alpha_i}(\beta) = \beta - \beta(H_i)\alpha_i$ und $X_i \in \mathcal{G}_{\alpha_i}$, $Y_i \in \mathcal{G}_{-\alpha_i}$. Außerdem ist $[X_i, Y_i] = H_i$ und $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \simeq \langle X_i, Y_i, H_i \rangle$ und $n_{ij} = \alpha_i(H_j) \in \mathbb{Z}$, wobei (n_{ij}) die Cartan-Matrix von R ist.

Satz 40:

a.) Die Lie-Algebra $\mathcal{G}$ wird von den Elementen X_i, Y_i und H_i für $i = 1, \ldots, n$ erzeugt (als Lie-Algebra). Man spricht von der Weyl-Basis, wobei „Basis“ nicht im Sinne von einer „Vektorraumbasis“ zu verstehen ist.

b.) Es gelten die Weyl-Relationen $[X_i, Y_i] = H_i$ und $[X_i, Y_j] = 0$ für $i \neq j$, $[H_i, H_j] = 0$, $[H_i, X_j] = n_{ij} X_j$ und $[H_i, Y_j] = -n_{ij} Y_j$ (Spezialfall: $[H_i, X_i] = 2X_i$, $[H_i, Y_i] = -2Y_i$).

c.) Ferner gelten die Relationen (für n und n^-) $\mathrm{ad}(X_i)^{-n_{ij}+1}(X_j) = 0$ und $\mathrm{ad}(Y_i)^{-n_{ij}+1}(Y_j) = 0$ jeweils für $i \neq j$.

Beweis:

a.) Es reicht zu zeigen, dass n von den X_i erzeugt wird und analog n^- von den Y_i. Sei $X \in \mathcal{G}^\alpha$ für $\alpha \in R^+$. Wir zeigen, dass X im Erzeugnis der X_i liegt. Es sei dazu $\alpha = \gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ für $\gamma_i \in S$ und $i = 1$, $\ldots$, k. Es gilt für $j \leq k$, dass $\gamma_1 + \ldots + \gamma_j \in R^+$ ist. γ_j ist von der Form $\gamma_j = \alpha_{i(j)}$ mit $\alpha_{i(j)} \in S$ und $x(j) := x_{i(\alpha(j))}$.

$[X_{(k)}, [X_{(k-1)}, [\ldots [X_{(2)}, X_{(1)}] \ldots]]] \in \mathcal{G}^\alpha$

Der Fakt ist, dass $Y \neq 0$! Für $\alpha \in R$, $\beta \in R$ und $\alpha + \beta \in R$ gilt $\mathrm{ad}(X_\alpha)$: $\mathcal{G}_\beta \xrightarrow{\simeq} \mathcal{G}_{\beta+\alpha}$. (Dies war eine Konsequenz aus der Darstellungstheorie, $S_\alpha \simeq \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$).

b.) Außer $[X_i, Y_j] = 0$ für $i \neq j$ folgen alle Weyl-Relationen auf der Definition der Basis. Es gilt $[X_i, Y_j] \in \mathcal{G}^{\alpha_i - \alpha_j} = \{0\}$, da $R = R_S^+ \cup R_S^-$. Es ist $\alpha_i - \alpha_j \notin R$.

c.) Es ist $\mathrm{ad}(X_i)^{-n_{ij}+1}(Y_j) \in \mathcal{G}^{-n_{ij}\alpha_i + \alpha_i + \alpha_j} \equiv \mathcal{G}^\delta$.

Der Trick ist, δ als Spiegelung einer gemischten Kombination darzustellen, nämlich durch $\delta = S_{\alpha_i}(\alpha_j - \alpha_i)$. Es ist jedoch $\alpha_j - \alpha_i \notin R$ und damit ist $\delta \notin R$, da eine Spiegelung eine Wurzel in eine Wurzel überführen muss.

Theorem 8:

Die WEYL-Relationen und die Relationen c.) für n und n^- legen die LIE-Algebra $\mathcal{G}$ bis auf Isomorphie fest. Das heißt, $\mathcal{G}$ ist ein Quotient der freien LIE-Algebra von W_B erzeugt dividiert durch das Ideal J in $Q(W_b)$ erzeugt von den WEYL-Relationen b.) und den Relationen c.), also $\mathcal{G} = Q(W_b)/J(b,c)$.

7.2 Hauptsätze

Theorem 9:

Die LIE-Algebra $\mathcal{G}$ ist durch das Wurzel-System R bis auf Isomorphie bestimmt. (Wenn wir $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ mit den Wurzelsystemen R und R' haben und $R \simeq R'$ gilt, dann ist $\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathcal{G}'$.
Die beiden Systeme von WEYL-Relationen werden ineinander überführt, da diese nur von den Wurzelsystemen abhängen.

Theorem 10:

Zu jedem Wurzelsystem R existiert eine halbeinfache LIE-Algebra $\mathcal{G}$, so dass $R = R(\mathcal{G}, h)$. Es gilt $\dim(\mathcal{G}) = n + |R|$, wobei $n = \mathrm{Rang}(\mathcal{G}) = \dim(h)$ und $|R|$ die Anzahl der Wurzeln ist.
Dies sind die beiden Hauptresultate, welche unsere Theorie abschließen.