Mitschrieb zu Höhere Mathematik II: Fachrichtungen Physik, Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer

Vorlesung Sommersemester 2002

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 4. Januar 2005

Mitschrieb der Vorlesung Höhere Mathematik II
von Herrn Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer im Sommersemester 2002
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Fourierreihen

Wir benötigen

- Komplexe Zahlen
- Funktionenreihen
- Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz.

Gegeben ist eine Funktion. Wir wollen sie durch folgende trigonometrische Reihe approximieren:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

1.1 Periodische Funktionen/Periodische Fortsetzung einer Funktion

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $p \neq 0$, $p \in \mathbb{R}$. f heißt p-periodisch, falls gilt: $f(x+p) = f(x)\ \forall\ x$.

Beispiel:

$f(z) = \mathrm{e}^z$, $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1, f(z + 2\pi\mathrm{i}) = f(z)$

$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, p = 2\pi, \cos x, \sin x$

$f(x) = \cos \dfrac{2\pi}{L} x, p = L$

$f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ist nicht periodisch.

Aussage:

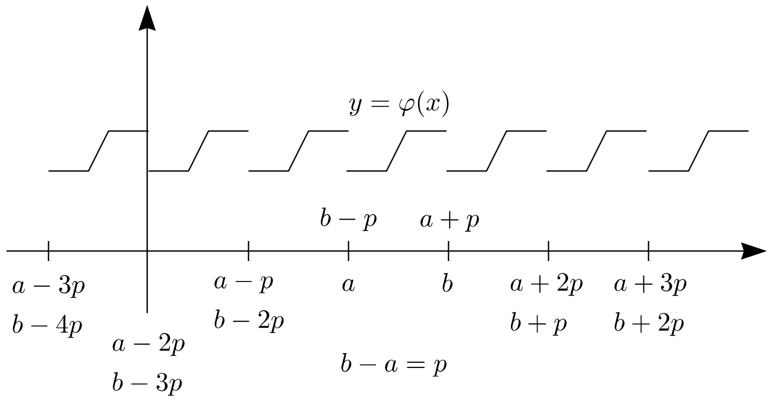
$\boxed{\text{Ist } f\ p\text{-periodisch, so gilt: } f(x+kp) = f(x)\ \forall\ x \text{ für jedes } k \in \mathbb{Z}.}$

Wir rechnen dies nach:

- $k > 0$: $f\big(x+kp\big) = f\big(x+(k-1)p+p\big) = f\big(x+(k-1)p\big) = f\big(x+(k-2)p\big) = \ldots = f(x+p) = f(x)$
- $k < 0$: $f\big(x+kp\big) = f\big(x+kp+p\big)$

Daraus folgt dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p > 0$.

1.1.1 Periodische Fortsetzung einer Funktion



Gegeben ist $y = \varphi(x)$, $a < x \leq b$. Es sei $p := b - a$. Gesucht ist die p-periodische Fortsetzung von φ auf ganz $\mathbb{R}$:

$\phi:\, \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $\phi(x+p) = \phi(x)\,\forall\, x$, $\phi_{[a,b]} = \varphi$

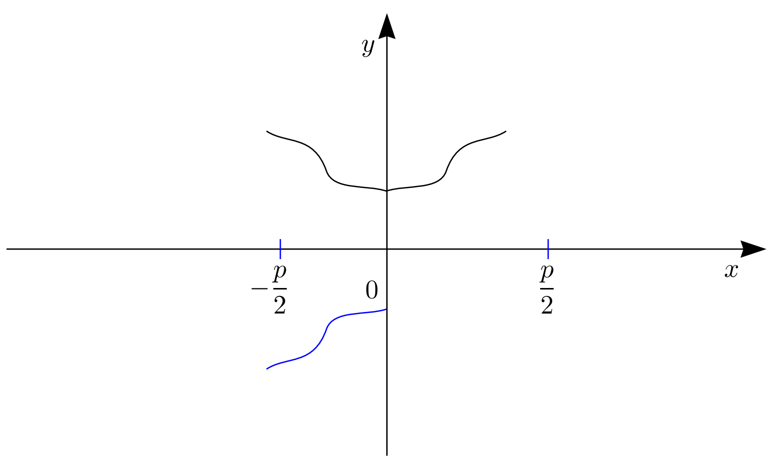
Gegeben ist außerdem $x \in \mathbb{R}$: $\phi(x) = \varphi(x + kp)$.

$\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} (a + kp, b - kp]$

Bestimme k mit $x \in (a - kp, b + kp]$ mit $a - kp \leq x \leq b - kp \Rightarrow a < x + kp \leq b$

a.) Gerade p-periodische Fortsetzung von $y = \varphi(x)$, $0 < x \leq \dfrac{p}{2}$

b.) Ungerade p-periodische Fortsetzung von $y = \varphi(x)$, $0 < x \leq \dfrac{p}{2}$



Aussage:

f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ sei p-periodisch und integrierbar, $a \in \mathbb{R}$ sei beliebig. Dann gelten:

$$\int\limits_{p}^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis:

$$\int\limits_p^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_p^{a+p} f(x-p)\,\mathrm{d}x \underset{\substack{t=x-p,\\ t=x}}{=} \int\limits_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad |+\int\limits_a^{p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{p} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Wir ersetzen 0 durch $a-\frac{p}{2}$ und a durch $-\frac{p}{2}$, womit folgt:

$$\int\limits_{a-\frac{p}{2}}^{a+\frac{p}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aussage:

f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ sei stetig, p-periodisch und integrierbar. Dann gilt:

a.) $\displaystyle\int\limits_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{p} f(x)\,\mathrm{d}x$

b.) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int\limits_a^{a+p} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\cdot f(a+p) - f(a) = 0$

c.) $\displaystyle\int\limits_a^{a+p}$ =const. für jedes a, $\displaystyle\int\limits_a^{a+p} \underset{a=0}{=} \int\limits_0^{p} f(x)\,\mathrm{d}x$

Es sei $y=\phi(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$, p-periodisch, $\xi=\frac{p}{2\pi}x$. Dann ist $F(x)=\phi\left(\frac{p}{2\pi}x\right)$ für $x\in\mathbb{R}$ 2π-periodisch.

$$F(x+2\pi)=\phi\left(\frac{p}{2\pi}(x+2\pi)\right)=\phi\left(\frac{p}{2\pi}x+p\right)=\phi\left(\frac{p}{2\pi}x\right)=F(x)$$

Ist $F=F(x)$ 2π -periodisch, so ist $\phi(\xi)=F\left(\frac{2\pi}{p}\xi\right)$ p-periodisch.

Übung:

ϕ sei p-periodisch. Rechne nun in Periode q. Wir betrachten 2π-periodische Funktionen auf dem Grundintervall $(-\pi,+\pi]$.

1.2 Trigonometrische Reihe

Es sei $n\in\mathbb{N}$: $s_n(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ heißt trigonometrisches Polynom (2π-periodisch). Bemerkung:

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx=\cos kx+\mathrm{i}\sin kx}$ mit $c_k\in\mathbb{C}$

Dies sind die Partialsummen für die trigonometrische Reihe:

$$s(x)=\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} := \lim_{n\mapsto\infty}\sum_{-n}^{n} c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)^k$$

Wir rechnen die in sin- und cos-Polynome um:

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \cos kx + \mathrm{i}\sin kx$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \cos kx - \mathrm{i}\sin kx$

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[(c_k + c_{-k})\cos kx + \mathrm{i}\,(c_k - c_{-k})\sin kx\right] =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$a_0 = 2c_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = \mathrm{i}\,(c_k - c_{-k})$ für $k = 1, 2, \ldots$

$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{1}{2}\left(a_k - \mathrm{i}b_k\right), c_{-k} = \frac{1}{2}\left(a_k + \mathrm{i}b_k\right)$ für $k = 1, 2, \ldots$

Folgerung:

$s_n(x) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_k, b_k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_k = \overline{c_{-k}}$

Aus a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ ergibt sich $c_k = \overline{c_{-k}}$, $c_{-k} = \overline{c_k}$. Mit $c_k = \overline{c_{-k}}$ gilt wiederum:

$$\boxed{a_k = c_k + \overline{c_k} \in \mathbb{R} \text{ und } b_k = \mathrm{i}\,(c_k - \overline{c_k}) = \mathrm{i}\cdot(2\mathrm{i}\mathrm{Im})\, c_k \in \mathbb{R}}$$

Erinnerung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x) \text{ mit } a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$$

Lemma:

Es seien k, $l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}lx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\pi & \text{für } k = l \\ \frac{1}{\mathrm{i}(k-l)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-l)\pi}\right) = 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \quad \mathrm{e}^{2n\mathrm{i}\pi} = 1,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi}$$

Lemma:

Für k, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gelten:

a.) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx\,\mathrm{d}x = 0$

b.) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx\,\mathrm{d}x = \pi\delta_{kl}$

Es sei $k = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} s_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x = \sum_{l=-n}^{n} c_l \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x}_{\delta_{kl}} = \sum_{l=-n}^{n} c_l\delta_{kl} = c_k$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x \, (k = -n, -n+1, \ldots, n)$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \cos kx \, \mathrm{d}x$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$$

Satz:

Jedes trigonometrisches Polynom $s_n(x) = \sum\limits_{l=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ definiert eine auf $\mathbb{R}$ stetige und 2π-periodische Funktion. Es gelten für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

a.) $c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x$

b.) $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \cos kx \, \mathrm{d}x$

c.) $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$

Satz:

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ gleichmäßig auf $[-\pi, +\pi]$ gegen die Funktion f, so gelten:

1.) f ist 2π-periodisch und stetig.

2.) $c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x,\ k \in \mathbb{Z}$

Begründung:

f ist **stetig**: $f(x) = \lim\limits_{n \mapsto \infty} \underbrace{s_n(x)}_{\text{stetig}}$ ist stetig, da **gleichmäßige Konvergenz** vorliegt.

$$f(x + 2\pi) = \lim_{n \mapsto \infty} s_n(x + 2\pi) = \lim_{n \mapsto \infty} s_n(x) = f(x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left(\lim_{n \mapsto \infty} s_n(x) \right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = \lim_{n \mapsto \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} s_n(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = c_k$$

Fourierreihen:

a.) Stückweise stetig:

f heißt **stückweise stetig**, falls es höchstens endlich viele Unstetigkeiten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt, wobei $\lim\limits_{x \mapsto x_j-} f(x) =: f(x_j-)$ und $\lim\limits_{x \mapsto x_j+} f(x) =: f(x_j+)$ existieren. Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 \text{ für } x > 0 \\ \\ \sqrt{-x} - 1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{h \mapsto 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \mapsto \infty} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

Es sei f stückweise 2π-periodisch.

b.) Stückweise glatt:

f heißt **stückweise glatt**, falls es endlich viele Unstetigkeiten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibt mit:

1.) $f(x_j-)$, $f(x_j+)$ existieren.
2.) $f'(x_j-)$, $f'(x_j+)$ existieren.

Dies soll gelten für $j = 1, 2, \ldots, n$.

- FOURIERkoeffizient von f:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x = \hat{f}(k) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

- FOURIERpolynom von f:

$$\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = F_n f(x)$$

- FOURIERreihe von f:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{n \mapsto \infty} F_n f(x) =: \mathcal{F} f(x)$$

Es bestehen nun folgende Zusammenhänge:

$$\alpha_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \beta_k = \mathrm{i}\left(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\right) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x$$

Bemerkung:

1.) Ist f **gerade**, so gelten $f_k = 0 \ \forall \ k$.

$$\mathcal{F} f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \underbrace{f(x) \sin kx}_{\text{gerade}} \, \mathrm{d}x = 0$$

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$$

2.) Ist f **ungerade**, so gelten $\alpha_k = 0 \;\forall\; k$.

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow \hat{f}(k) = -\hat{f}(-k)$

$\mathcal{F}f$ ist eine reine Sinusreihe.

Beispiel:

Es sei $g(x) = x^2$ für $-\pi \leq x \leq \pi$. Wir wollen die Funktion 2π-periodisch fortsetzen zu f: $f[-\pi, \pi] = g$. Wir suchen die zugehörige Fourierreihe:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\hat{f}(k) = (-1)^k \frac{2}{k^2} \text{ mit } k \neq 0$$

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx$$

Hierbei handelt es sich um die Darstellung von $g(x) = x^2$ auf $[-\pi, +\pi]$. Die Reihe ist gleichmäßig konvergent.

Problem:

1.) Für welche f konvergiert $\mathcal{F}f$?

2.) Für welche f gilt $f = \mathcal{F}f$ und für welche x gilt $f(x) = \mathcal{F}f(x)$?

Satz:

Es gelte $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ und die Konvergenz ist gleichmäßig. Dann gilt: $f(x) = \mathcal{F}f(x) \;\forall\; x$. („Eine gleichmäßige konvergente trigonometrische Reihe ist die Fourierreihe der durch sie dargestellten Funktion.“)

Zur Begründung betrachten wir folgendes:

Satz:

$$\boxed{\gamma_k = \hat{f}(k) \Rightarrow f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathcal{F}f(x)}$$

Satz:

f sei 2π-periodisch, stetig und $\mathcal{F}f$ konvergiere gleichmäßig auf $[-\pi, +\pi]$. Dann gilt: $\mathcal{F}f(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

$g(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$

2π-periodische Fortsetzung von f erstellen. Da f stetig ist, ist $\mathcal{F}f$ gleichmäßig konvergent. Damit folgt:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx, -\pi \leq x \leq \pi$$

- Stelle $x = 0$:

  $$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$$

- Stelle $x = \pi$:

  $$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

- $x \mapsto \xi$:

  $x = \xi - \pi, \ -\pi \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \xi \leq 2\pi$

  $$(\xi - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos k(\xi - \pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} (-1)^k \cos k\xi = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos k\xi$$

  Damit erhalten wir beispielsweise:

  $$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kx) = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} \text{ für } 0 \leq x \leq 2\pi}$$

  $$\boxed{\frac{(x - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \text{ für } 0 \leq x \leq 2\pi}$$

Übung:

$g(x) = t(x - \pi)^2, 0 \leq x \leq 2\pi$

1.3 Darstellungssatz

Satz:

f:$\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ sei 2π-periodisch und stückweise glatt auf $[-\pi, +\pi]$. Dann gelten:

1.) Ist f auf $[a, b]$ stetig, so konvergiert $\mathcal{F}f$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f. Es gilt also gleichmäßig auf $[a, b]$:

$$\mathcal{F}f(x) = \lim_{n \mapsto \infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = f(x) \ (x \in [a, b])$$

2.) $\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-))$ für $x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}f(\pi) = 0 = \frac{1}{2} (f(\pi+) + f(\pi-)) = 0$

$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) \underset{\text{stetig}}{=} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot f(x) = f(x)$

$f(x) = x\,[-\pi, +\pi]$

$\mathcal{F}f(x) \neq f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi, +\pi) \\ 0 & x = \pi \end{cases}$$

1.4 Besselsche Ungleichung/Parsevalsche Gleichung/ Konvergenz im quadratischen Mittel

$|z|^2 = z\overline{z}, |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\overline{z}w)$

Oder:

$|z|^2 = z\overline{z}, |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\overline{w}z)$

$\mathrm{Re}(z) \leq |z|$

$2ab \leq a^2 + b^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

f sei wie in $(\star)$, $(c_k)_k$ seien komplexe Zahlen. Dann gilt mit den oben zusammengefaßten Bedingungen:

$$\left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right|^2 = |f(x)|^2 + \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \cdot \sum_{l=-n}^{n} \overline{c}_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}lx}}_{\sum\limits_{k,l=-n}^{n} c_k \overline{c}_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-l)x}} - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=-n}^{n} f(x) \overline{c}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right)$$

Nun führen wie eine Integration von $-\pi$ bis $+\pi$ durch:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \underbrace{\sum_{k,l=-n}^{n} c_k \overline{c}_l \delta_{kl}}_{\sum\limits_{k,l=-n}^{n} |c_k|^2} - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k \hat{f}(k) \right)$$

Somit gilt:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k \hat{f}(k) \right)}$$

a.) Es sei $c_k = \hat{f}(k)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) \right|^2$$

Weiterhin gilt:

$$2\mathrm{Re} \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_k \hat{f}(k) \leq 2 \sum_{k=-n}^{n} \left| \overline{c}_k \right| \left| \hat{f}(k) \right| \leq \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) \right|^2$$

Wir multiplizieren mit -1 und erhalten:

$$\boxed{-2\mathrm{Re}\sum_{k=-n}^{n}\overline{c}_k\hat{f}(k)\geq-\sum_{k=-n}^{n}|c_k|^2-\sum_{k=-n}^{n}\left|\hat{f}(k)\right|^2}\qquad(\star\star)$$

b.) Aus (1) und $(\star\star)$ folgt:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|^2\mathrm{d}x\geq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x-\sum_{k=-n}^{n}\left|\hat{f}(k)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\pi}^{+\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|^2\mathrm{d}x$$

Satz:

Sei f wie in $(\star)$. Dann wird der Ausdruck $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|^2\mathrm{d}x$ genau für $c_k=\hat{f}(k)$ minimal.

1.4.1 Besselsche Ungleichung

Satz:

Aus (2) folgt, dass für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=-n}^{n}\left|\hat{f}(k)\right|^2\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Des weiteren gilt $\hat{f}(k)\mapsto 0$ für $k\mapsto\infty$.

1.4.2 Parsevalsche Gleichung

Satz:

f sei wie in $(\star)$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$

Satz:

$$\boxed{\underbrace{\lim_{n\mapsto\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left|f(x)-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right|^2\mathrm{d}x}_{\substack{\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mapsto f(x)\text{ für }n\mapsto\infty\\ \text{im quadratischen Mittel}=0}}}$$

Beispiel:

Wir überprüfen den Satz:

$$h(x)=\begin{cases}1 & -\pi\leq x<a-\pi\\ 0 & a-\pi\leq x\leq\pi\end{cases}$$

a ist Zahl aus $(0, 2\pi)$. f sei die 2π-periodische Fortsetzung von h. Unser Ziel ist es nun, zu überprüfen, ob folgendes gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(k) \right|^2$$

Dazu berechnen wir zuerst das benötigte Integral:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{a-\pi} \mathrm{d}x = \frac{a}{2\pi}$$

Weiterhin gilt:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{a-\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x, \hat{f}(0) = \frac{a}{2\pi}, \left| \hat{f}(0) \right|^2 = \frac{a^2}{4\pi}$$

Für $k \neq 0$ haben wir nun:

$$\hat{f}(k) = \frac{(-1)^k \mathrm{i}}{2\pi k} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} - 1 \right)$$

$$\left| \hat{f}(k) \right|^2 = \hat{f}(k) \cdot \overline{\hat{f}(k)} = \frac{1}{4\pi^2 k^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} - 1 \right) \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} - 1 \right) = \boxed{\frac{1}{2\pi^2 k^2} (1 - \cos ka)}$$

Nun folgt schlußendlich durch Einsetzen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(k) \right|^2 = \frac{a^2}{4\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos ka}{\pi^2 k^2} = \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2} =$$

$$= \frac{a^2}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{(a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) = \boxed{\frac{a}{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

Hiermit wurde der Satz also überprüft. Man kann alternativ den Zusammenhang zwischen α_k, β_k und $\hat{f}(k)$ verwenden und in die Parsevalsche Gleichung einsetzen:

$$\frac{|\alpha_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|\alpha_k|^2 + |\beta_k|^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

Kapitel 2

Grundbegriffe der Linearen Algebra

Wir werden folgende mathematische Probleme kennenlernen:

- Vektorraum
- Matrizen
- Dimension
- Basis
- Lineare Gleichungssysteme
- Eigenwertprobleme
- Diagonalisieren von Matrizen

Beispiel: Differentialgleichung

$y'' + 2by' + cy = 0$

Gesucht ist $y = y(x)$; $x \in \mathbb{R}$; c, $b = \text{const.}$

a.) y_1 sei Lösung: $y_1'' + 2by' + cy = 0$

b.) y_2 sei weitere Lösung: $y_2'' + 2by_2' + cy_2 = 0$

Die beiden Gleichungen werden addiert und wir erhalten:

$(y_1 + y_2)'' + 2b\,(y_1 + y_2)' + c\,(y_1 + y_2) = 0$

Wir können auch mit einer Konstante α multiplizieren:

$(\alpha y_1)'' + 2b\,(\alpha y)' + c\alpha y = 0$

2.1 Der Vektorraum

Es gibt eine Vorschrift, die es gestattet, Ausdrücke der Form $\alpha u + \beta v\,(\alpha, \beta \in \mathbb{C}, u, v \in V)$ zu bilden und die gewährleistet, daß $\alpha u + \beta v$ wieder zu V gehören. $(V, +)$ ist eine **abelsche Gruppe**. („0 muß zu V gehören“) Die Verknüpfung $\{\alpha, v\} \mapsto \alpha v$, wobei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $v \in V$, heißt skalare Multiplikation. Folgende Eigenschaften sind dabei kennzeichnend:

- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
- $\alpha(v + w) = \alpha v + \beta w$

- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
- $1v = v$

Der Vektorraum, der uns fast ausschließlich interessiert, ist:

$$\mathbb{C}^n = \{\vec{x} | \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \xi_j \in \mathbb{C}\}$$

Eine Abkürzung dafür ist:

$\vec{x} = (\xi_j)_{j=1,\ldots,n)}, \vec{y} = (\eta_j)_{j=1,\ldots,n}$

$\vec{x} + \vec{y} = (\xi_j + \eta_j)_{j=1,\ldots,n}$

$\alpha\vec{x} = (\alpha\xi_j)_{j=1,\ldots,n}$

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, -\vec{x} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ -\xi_2 \\ \vdots \\ -\xi_n \end{pmatrix}$$

Beispiele:

- Vektorraum der stetigen Funktionen

  $C(0,1) = \{f | f : (0,1) \mapsto \mathbb{C},\ \text{stetig}\}$

- Vektorraum der Polynome

  $P_n = \{p | p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}, p \text{ ist Polynom vom Grad } \leq n\}$

  $p \in P_3 : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\ (a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C})$

V sei Vektorraum: $U \subset V$: $x \in L(U) \Leftrightarrow$ Es gibt $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ mit $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$. $L(U)$ sei die Menge der endlichen Linearkombination von Elementen aus U. $L(U)$ ist selbst ein Vektorraum, da $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j + \sum_{s=1}^{n} \mu_s v_s$ mit $\lambda_j u_j \in L(U)$ und $\mu_s v_s \in L(U)$ wieder eine Linearkombination von Elementen aus U ist. Es ist $L(U) \subset V$.

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 : \vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^3\ (\vec{a}_1 \neq \vec{o}, \vec{a}_2 \neq \vec{o}, \vec{a}_1 \not\parallel \vec{a}_2, U = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \subset \mathbb{R}^3 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) : \underbrace{\vec{x} = \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2}_{\substack{\text{Ebene durch } \vec{o}, \text{ die von} \\ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \\ \text{aufgespannt wird}}} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

2.2 Der Untervektorraum

$W \subset V$, V sei Vektorraum, heißt **Untervektorraum** (**Teilraum**) von V, falls gelten:

1.) $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

2.) $\alpha \in \mathbb{R}, v \in W \Rightarrow \alpha v \in W$

Beispiele:

1.) $L(\vec{a}_1,\, \vec{a}_2)$ ist Teilraum von $\mathbb{R}^3$.

2.) P_3 ist Teilraum von $C(\mathbb{R})$.

3.) g: $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{a}$, $t \in \mathbb{R}$
Ist dies ein Unterraum? Nein, es sei denn $\vec{x}_0 = \vec{o}$.

$\vec{x}(t) = t\vec{a}, L(\vec{a}„ = g“$

4.) $\vec{e}_j = (\delta_{lj})_{l=1,\ldots,n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $j \in \mathbb{C}^n$: $\underbrace{L(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)}_{\text{Vektorraum}} \subset \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{C}^n : \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{e}_j \in L(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$$

$\mathbb{C}^n \subset L(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) \subset \mathbb{C}^n$

$L(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) = \mathbb{C}^n$

2.2.1 Lineare Abhängigkeit/Lineare Unabhängigkeit

V sei Vektorraum: a_1, …, $a_n \subset V$ heißen **linear unabhängig**, falls aus $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots \lambda_n a_n = 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Beispiel:

Folgende Vektoren $\in \mathbb{C}^3$ sind linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

V sei Vektorraum: a_1, …, $a_n \in \mathbb{C}$ heißen linear abhängig, falls die nicht **linear unabhängig** sind, d.h. es gibt:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0 \text{ für } \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda_j\right|^2 \neq 0$$

Beispiel:

Auch sind folgende Vektoren $\in \mathbb{C}^3$ linear unabhängig:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten außerdem $\vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ und $\vec{b}_4$ sind dann linear abhängig:

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \lambda_3\vec{b}_3 + \lambda_4\vec{b}_4 = \vec{o} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{b}_4 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3 \Leftarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = -1$

$L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4) = L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

Übung:

Drücke $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ durch $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ aus. Sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ linear abhängig, so heißt das: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = 0$, wobei mindestens $\lambda_j \neq 0$. Es sei etwa $\lambda_1 \neq 0$. Damit ergibt sich $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}a_3 - \ldots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}a_k$, das heißt: $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$=$L(\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$. $\{a_1, \ldots, a_n\}$ sind linear abhängig, falls ein Vektor der Nullvektor $\vec{o}$ ist.

2.2.2 Basis und Dimension

Eine **Basis** (Koordinatensystem) in einem Vektorraum V ist eine Menge B von Vektoren mit folgenden Eigenschaften:

1.) $L(B) = V$

2.) B ist linear unabhängig.

Der Vektorraum heißt **endlich dimensional**, wenn es eine endliche Basis gibt. Der Vektorraum ist unendlich dimensional, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ n linear unabhängige Vektoren gibt.

Beispiele:

- Beispiel 1:

  $$\left.\begin{array}{l} L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n) = \mathbb{C}^n \\[1em] \vec{e}_1, \vec{e}, \ldots, \vec{e}_n \text{ sind linear unabhängig.} \end{array}\right\} \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n \text{ sind Basis in } \mathbb{C}^n.$$

  Diese nennt man kanonische Basis, natürliche Basis, Standardbasis.

- Beispiel 2:

  $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3 \in \mathbb{C}^3$ sind linear unabhängig.

  $L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) \subseteq L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \subseteq L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

  $\Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ ist Basis von $\mathbb{C}^3$.

- Beispiel 3:

  P_3: $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, $p_3(x) = x^3$ sind Basis in P_3.

  $L(p_0, p_1, p_2, p_3) = P_3$

  $\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 = 0, x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

  Wie kann man das zeigen?

  - 1.Möglichkeit:
    Setze vier x-Werte ein und berechne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$
  - 2.Möglichkeit:
    Man kann auch nacheinander differenzieren und x-Werte einsetzen.

    „Ein Vektorraum hat viele Basen.“

Satz:

Es sei V ein Vektorraum und $v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n$ sei Basis. Es sei $a \in V$. Dann **gibt es eindeutig** Zahlen $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n$ mit $a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. $\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n$ heißen Koordinaten von a bezüglich der Basis B.

$K_B\colon V \mapsto \mathbb{C}^n$ (Koordinatendarstellung bezüglich B): $K_B(a) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, falls $a = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j$

Beweis:

$$a \in L(v_1, \ldots v_n) = V \Rightarrow a = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$$

Zu überprüfen ist, daß aus $a = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$ folgt $\alpha_1 = \beta_1,\, \alpha_2 = \beta_2,\, \ldots,\, \alpha_n = \beta_n$.

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \beta_j)\, v_j \xrightarrow[v_1,\,\ldots,\,v_n \text{ linear unabhängig}]{} \alpha_j - \beta_j = 0 \text{ für } j = 1,\, \ldots,\, n$$

Beispiel:

$x \in L(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k) \Rightarrow x,\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_k$ sind linear abhängig.

$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k \Leftrightarrow \alpha_1 a_1 + \ldots \alpha_k a_k - x = 0$

Beispiel für $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \vec{e}_j = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \vec{b}_i$$

2.2.3 Umrechnung in andere Koordinatensysteme

Beispiel:

- Beispiel ①: Es ist $\vec{a}$ gegeben durch:

  $K_E(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ (also $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$)

  $K_B(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ (das heißt $\vec{a} = \beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \beta_3 \vec{b}_3$)

  β_1, β_2 und β_3 sind gesucht:

  $$\vec{a} = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = 4\left(\vec{b}_3 - \vec{b}_2\right) + 6\left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - \vec{b}_3\right) + 3\left(\vec{b}_3 - \vec{b}_1\right) = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 1\vec{b}_3$$

  $$K_B(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel ②:

$$K_B = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

K_B ist **injektiv** und **surjektiv**.

$K_B\left(a_1 + a_2\right) = K_B\left(a_1\right) + K_B\left(a_2\right),\ K_B\left(\lambda a\right) = \lambda K_B(a)$

Satz:

Es sei $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$ eine Basis des Vektorraums V. $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m \in V$, $m > n$. Dann sind $w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_m$ linear abhängig.

Beweis:

Wir nehmen an, daß $w_1,\ \ldots,\ w_m$ linear unabhängig sind: $w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. Ist etwa $\alpha_1 \neq 0$:

$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=2}^{n} \alpha_j v_j \qquad V = L(v_1, \ldots, v_n) = L(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$$

$$w_2 = \alpha_1 w_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j v_j \qquad V = L(v_1, v_2, \ldots, v_n) = L(w_1, w_2, v_3, \ldots, v_n) = L(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Satz:

Es seien $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n\}$ und $\{w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n\}$ Basen des Vektorraums V. Dann gilt $n = m$. $n := \dim(V)$ (Dimension von V)

Bemerkung:

$n > m$ und $n < m$ wird mit vorhergehendem Satz ausgeschlossen. Daraus ergibt sich $n = m$.

2.2.4 Das Skalarprodukt

Wir erinnern uns:

$$K_E(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, K_E(\vec{b}) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} \circ \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\alpha$

Definition:

Es sei V ein Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** ist eine Zuordnung der Art

$<,>: \begin{array}{l} V \times V \mapsto \mathbb{C} \\ \{u, v\} \end{array}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

1.) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ für $u,\ v,\ w \in \mathbb{V}$

2.) $\langle \alpha u, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle$ für $\alpha \in \mathbb{C};\ u,\ w \in V$

3.) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ für $u,\ v \in V$

4.) $\langle u,\ u\rangle > 0$ für $u \neq 0,\ v \in V$

5.) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

Übung:

Es ist zu zeigen, daß $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle := \vec{a} \cdot \vec{b}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist.

$\langle 0, u\rangle = \langle 0 \cdot v, u\rangle = 0\langle v, u\rangle = 0$

Beispiele:

- Beispiel ①

  $$\mathbb{C}^n : \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta}_k$$

  $$\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_k \vec{e}_j, \vec{b} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \vec{e}_k$$

  $$\langle \vec{b}, \vec{a}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{\beta}_k} \overline{\alpha}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\beta}_k \alpha_k = \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$$

  $$\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l\rangle = \delta_{kl}$$

  $$C[0,1] : \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

  f ist sowohl stetig als auch komplex.

- Beispiel ②

  $$f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}$$

  Betrachten wir die 2π-periodische Funktion aus $C[-\pi, \pi]$:

  $$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x : \langle f, g\rangle = \delta_{kl}$$

Ein komplexer Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle,\rangle$ heißt **unitärer** Raum. Ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt heißt **euklidischer** Raum.

Definition:

V sei ein unitärer Raum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$: Die Zahl $\|u\| = \sqrt{\langle u, v\rangle}$ heißt **Norm** von $u \in V$. Es gelten:

1.) $\|u\| \geq 0 \ \forall \ u$ und $\|u\| = 0$ nur für $u = 0$

2.) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, $u \in V$

3.) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$ (Schwarzsche Ungleichung)

4.) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung)

$$\mathbb{C}^n : \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overline{\beta}_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C[0,1] : \left|\int\limits_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int\limits_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 |g(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

In einem unitären Raum heißen u, v **orthogonal** zueinander, falls $\langle u, v\rangle = 0$ gilt.

$$C(-\pi, \pi) : \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx}\rangle = \delta_{kl}$

$\mathbb{C}^n : \langle \vec{e}_k, \vec{e}_l\rangle = \delta_{kl}$

Definition:

V sei ein unitärer Raum. Ein System u_1, u_2, u_3, $\ldots \in V$ heißt Orthonormalsystem (ONS), falls gilt:

1.) $\langle u_k, u_l\rangle = \delta_{kl} \ \forall \ k, l$

2.) $\|u_k\| = 1$

Satz:

Es sei u_1, u_2, u_3, $\ldots$ ein Orthonormalsystem im unitären Raum V. Dann sind je endlich viele u_1, u_2, $\ldots$ linear unabhängig.

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\alpha_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle u_j v_k\rangle = \left\langle \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j}_{0}\, u_k \right\rangle = 0$$

Beispiele für Orthonormalsystem in $\mathbb{C}^n$:

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n : \|\vec{e}_j\| = 1, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$ für $j, k = 1, \ldots, n$

$$\vec{a} \in \mathbb{C}^n : \vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{e}_k)}_{\alpha_k} \vec{e}_k$$

In $C[-\pi, \pi] : e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$

$$\langle e_j, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x = \delta_{jk}$$

$$\hat{u}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} U(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \,\mathrm{d}x = \langle u, e_k \rangle$$

$$\mathcal{F}u(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle u, e_k \rangle e_k(x)$$

Aufgaben 2/4: Übergang von einer Basis zu einer Orthonormalbasis

2.2.5 Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Satz:

In einem unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sind linear unabhängige Vektoren a_1, a_2, a_3, … gegeben. Gesucht sind Vektoren b_1, b_2, b_3, … mit:

1.) $\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk} \;\forall\; j, k$

2.) $L(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_j) = L(b_1, b_2, \ldots, b_j) \;\forall\; j = 1, 2, \ldots$

Vorgehen:

$b_1 = \lambda_{11} a_1$

$b_2 = \lambda_{21} a_1 + \lambda_{22} a_2$

$b_3 = \lambda_{31} a_1 + \lambda_{32} a_2 + \lambda_{33} a_3$

$\langle b_3, b_1 \rangle = \langle b_3, b_2 \rangle = 0, \|b_3\| = 1$

2.3 Lineare Abbildungen/Matrizen

1.) $\vec{a} \equiv \mathbb{R}^3, \|\vec{a}\| = 1 : \mathrm{proj}_{\vec{a}} \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\, \vec{a}$

2.) ϑ: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}3$: $\vartheta(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{F}$ ($\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ gegeben („Drehmoment“))

$D : C^1(\mathbb{R}) \mapsto C^0(\mathbb{R}) Df = f'$

$$I : C^0(\mathbb{R}) \mapsto C^1(\mathbb{R})\, (If)\,(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t) \,\mathrm{d}t$$

Dies sind lineare Abbildungen.

Definition:

V, W seien Vektorräume. Eine Abbildung f: $V \mapsto W$ heißt linear, falls gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} 1.) & f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2) & \text{für} \quad v_1,\, v_2 \in V \\ 2.) & f(\alpha v)=\alpha f(v) & \text{für} \quad v \in V,\, \alpha \in \mathbb{C} \end{array}\right\} f(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)$$

Es seien α, $\beta \in \mathbb{C}$ und v_1, $v_2 \in V$.

Schreibweise/Formulierung:

$\mathcal{L}(V,w)=\{f|f \text{ linear, } f: V \mapsto W\}$

A1.) f, $g \in \mathcal{L}(V,W)$, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$f+g \in \mathcal{L}(V,W), \alpha f \in \mathcal{L}(V,W) \; \Big(\mathcal{L}(V,W) \text{ ist Vektorraum.}\Big)$$

A2.) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$; $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(v_k)$$

A3.) Aus $f \in \mathcal{L}(V,W)$ folgt $f^{-1} \in \mathcal{L}(W,V)$.

A4.) U, V, W seien Vektorräume.

$$f \in \mathcal{L}(V,W), g \in \mathcal{L}(W,U) \stackrel{!}{\to} g \circ f \in \mathcal{L}(V,U)$$

Beweis von A2 (Induktion):

Bekannt für $l-1$: Zu zeigen für l.

$$f\left(\sum_{k=1}^{l-1} \lambda_k v_k + \lambda_l v_l\right) = f\left(\sum_{k=1}^{l-1} \lambda_k v_k\right) + f\left(\lambda_l v_l\right)$$

Mit Induktionsvoraussetzung folgt:

$$f\left(\sum_{k=1}^{l-1} \lambda_k v_k\right) + f\left(\lambda_l v_l\right) = \sum_{k=1}^{l-1} \lambda_k f(v_k) \lambda_l f(v_l)$$

Beweis von A3:

$W \ni w_j = f(v_j), v_j \in V$ für $j=1,\, 2,\, \ldots$

$v_j = f^{-1}(w_j)$

$f\left(f^{-1}(w)\right) = w, f^{-1}\left(f(w)\right) = v$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha w_1+\beta w_2) &= f^{-1}\left(\alpha f(v_1)+\beta f(v_2)\right) = f^{-1}\left(f(\alpha v_1)+f(\beta v_2)\right) = f^{-1}\left(f(\alpha v_1+\beta v_2)\right) = \\ &= \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 = \alpha f^{-1}(w_1) + \beta f^{-1}(w_2) \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{L}(V,W):$

- V sei n-dimensional: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sei eine Basis.
- W sei m-dimensional: $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sei eine Basis.

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j$$

ξ_j sei Koordinate bezüglich der Basis $\{v_j\}$.

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j\right) \overset{\text{A2}}{=} \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(v_j)$$

f wird genau durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt.

$$W \ni f(v_j) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{lj} w_l$$

$\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$ ist Koordinatenvektor von $f(v_j)$ bezüglich Basis $\{w_l\}$. $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ $(\in \mathbb{C}^n)$ kennzeichnen eindeutig f.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{lk})_{\substack{l=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$$

l sind die Zeilen und k die Spalten der Matrix. $\mathcal{A}$ heißt (m,n)-Matrix, $\mathbb{C}^{(m,n)}$ ist die Menge der (m,n) -Matrizen. $\mathcal{A} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]$ nennt man die Spaltenform der Matrix.

$$\mathbb{C}^{m,n} \ni \mathcal{A} = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{E}_n.$$

Diese Matrix heißt **Einheitsmatrix**. $\mathcal{A}$ heißt Diagonalmatrix, falls $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $\alpha_{lk} = \lambda_{lk}\delta_{lk}$. Hierfür wird auch geschrieben:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{nn})$$

Die Schreibweise hat folgende Bedeutung:

1.) $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ mit $\alpha_{lk} = 0 \;\forall\; l,\, k$ heißt **Nullmatrix**.

2.) $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(1,1)}$ ist eine komplexe Zahl.

3.) $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,1)}$ ist ein Vektor = Spaltenvektor

4.) $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(1,n)}$: $\mathcal{A} = (\alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \dots\ \alpha_{1n})$ heißt Zeilenvektor.

Satz:

V, W seien Vektorräume mit Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bzw. $\{w_1, \ldots, w_m\}$. **Bezogen auf diese Basen** wird der linearen Abbildung $f : V \mapsto W$ die (m, n)-Matrix $\mathcal{A} = (\alpha_{lk})_{\substack{\beta=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}}$ wie folgt zugeordnet:

$$f(v_j) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj} w_l$$

$\vec{a}_j$ ist der Koordinatenvektor von $f(v_j)$. f wird bezüglich der gewählten Basen durch $\mathcal{A}$ dargestellt. Ist $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ gegeben, so wird durch $f(\vec{x}) := \sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j \xi_j$ (mit $\xi_j \in \mathbb{C}^n$) eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ gegeben. Hierbei ist $\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{e}_j$.

Weitere Beispiele für lineare Abbildungen:

$d_k :$ $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ Drehung der Ebene um einen festen Punkt um den Winkel α
$\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

Beispiel: Kreuzprodukt

Es sei θ: $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ mit $\theta(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{F}$, wobei $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ und konstant ist. Es gilt $V = W = \mathbb{R}^3$: Wähle kanonische Basis im Urbild und Bild. Gesucht ist $\mathbb{R}^{(3,3)} \ni A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2,\ \vec{e}_j \times \vec{e}_j = \vec{o}$$

$$\vec{a}_j = \theta(\vec{e}_j) = \vec{e}_j \times (\phi_1 \vec{e}_1 + \phi_2 \vec{e}_2 + \phi_3 \vec{e}_3) \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{proj}_{\vec{a}} :$ $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ Gesucht ist $(3,3)$-Matrix$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$
$V \mapsto W$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_j = \mathrm{proj}_{\vec{a}}(\vec{e}_j) = (\vec{e}_j \cdot \vec{a})\,\vec{a} = \alpha_j \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_j \\ \alpha_2\alpha_j \\ \alpha_3\alpha_j \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_1 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_2\alpha_1 & \alpha_2\alpha_2 & \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_3\alpha_1 & \alpha_3\alpha_2 & \alpha_3\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir Drehungen:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_3 & -\phi_2 \\ -\phi_3 & 0 & \phi_1 \\ \phi_2 & -\phi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Rechnen mit Matrizen

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(m,n)} : \mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow (A)_{jk} == (B)_{jk} \,\forall\, j, k$

Die Matrix $\mathcal{A}$ gehört zur linearen Abbildung f, $\mathcal{B}$ gehört zu g. Es sei $f(\vec{e}_j) = \vec{a}_j$ und $g(\vec{e}_j) = \vec{b}_j$; dann ist $f = g \Leftrightarrow f(\vec{e}_j) = g(\vec{e}_j) \Leftrightarrow \vec{a}_j = \vec{b}_j$ für $j = 1, 2, \ldots, n$.

1.) $\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(m,n)} \Leftrightarrow (A+B)_{jk} := (A)_{jk} + (B)_{jk}$

2.) Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)} \Leftrightarrow (\lambda A)_{jk} := \lambda(A)_{jk} \;\forall\; j, k$

3.) $\overline{\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{(m,n)} \Leftrightarrow (\overline{A})_{jk} := \overline{(A)_{jk}}$

4.) Für die **transponierte Matrix** ergibt sich $\mathcal{A}^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^{(n,m)} \Leftrightarrow \left(A^\mathsf{T}\right)_{jk} := (A)_{kj}$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}^\star \in \mathbb{C}^{(n,m)} \Leftrightarrow (A^\star)_{jk} := (\overline{A})_{jk} \left(\mathcal{A}^\star = \overline{\mathcal{A}}^\mathsf{T}\right)$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 3\mathrm{i} \end{pmatrix}^\star = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Bemerkungen/Beispiele:

1.) $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \vec{x} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{(m,n)} \Rightarrow \vec{x}^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^{(m,n)},\ \vec{x}^\mathsf{T} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

2.) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\mathsf{T} = \mathcal{A}^\mathsf{T} + \mathcal{B}^\mathsf{T},\ (\lambda\mathcal{A})^\mathsf{T} = \lambda\mathcal{A}^\mathsf{T},\ (\mathcal{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathcal{A}^{TT} = \mathcal{A}$

$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\mathsf{T} = \mathcal{A}^\star + \mathcal{B}^\star, (\lambda\mathcal{A})^\star = \overline{\lambda}\mathcal{A}^\star, \mathcal{A}^{\star\star} = \mathcal{A}$

Beweis:

$\left((\mathcal{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\right)_{jk} = \left(\mathcal{A}^\mathsf{T}\right)_{jk} = (\mathcal{A})_{jk}$

a.) $\mathcal{A}$ heißt **hermitesch**, falls $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\star$, d.h. $(A)_{jk} = \left(\overline{A}\right)_{kj}$ für $m = n$.

b.) $\mathcal{A}$ heißt **symmetrisch**, falls $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\mathsf{T}$: $(\mathcal{A})_{jk} = (\mathcal{A})_{kj}$ für $m = n$.

c.) $\mathcal{A}$ heißt **schiefsymmetrisch**, falls $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^\mathsf{T}$.

Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$. Dann ist $\mathcal{A} + \mathcal{A}^\mathsf{T}$ symmetrisch:

$(\mathcal{A} + \mathcal{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathcal{A}^\mathsf{T} + \mathcal{A}^{TT} = \mathcal{A}^\mathsf{T} + \mathcal{A}$

$\mathcal{A} - \mathcal{A}^\mathsf{T}$ ist schiefsymmetrisch:

$(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathcal{A}^\mathsf{T} - \mathcal{A} = -\left(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\mathsf{T}\right)$

Des weiteren läßt sich $\mathcal{A}$ in einen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil zerlegen:

$$\mathcal{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathcal{A} + \mathcal{A}^\mathsf{T}\right)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\mathsf{T}\right)}_{\text{schiefsymmetrisch}}$$

Diese Vorgehensweise benötigt man bei **quadratischen Formen**.

2.3.2 Multiplikation von Matrizen

$[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = \mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$	$\left[\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_l\right] = \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(n,l)}$	$\mathcal{AB} \in \mathbb{C}^{(m,l)}$ (Matrixprodukt) $\mathcal{AB} = [\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_l]$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$f\colon \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^m$	$g\colon \mathbb{C}^l \mapsto \mathbb{C}^n$	$f \circ g\colon \mathbb{C}^l \mapsto {}^m$

$$f\left(\vec{e}_k^{(m)}\right) = \vec{a}_k = \sum_{j=1}^{n} (A)_{jk} \vec{e}_j^{(m)}$$

$$g\left(\vec{e}_s^{(l)}\right) = \vec{b}_s = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ks} \vec{e}_k^{(n)}$$

$$(f \circ g)\left(\vec{e}_j^{(l)}\right) = \vec{c}_s = \sum_{j=1}^{m} (AB)_{js}\, \vec{e}_j^{(m)}$$

$$f\left(g\left(\vec{e}_s^{(l)}\right)\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} (B)_{ks}\, \vec{e}_k^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((B)_{ks} f\left(\vec{e}_k^{(n)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} (B)_{ks} \left(\sum_{j=1}^{m} (A)_{jk} \vec{e}_j^{(m)}\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} (A)_{jk} (B)_{ks}\right) \vec{e}_j^{(m)}$$

$$(AB)_{js} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk} (B)_{ks} \text{ für } j = 1, \dots, m \text{ und } s = 1, \dots, l$$

Satz:

Ist $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ und $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(n,l)}$, so ist das Matrizenprodukt $\mathcal{AB}$ von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ die (m,l)-Matrix mit den Elementen:
$(AB)_{js} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{jk} (B)_{ks}$ für $j = 1, \dots, n$ und $s = 1, \dots, n$

Beispiele/Bemerkungen:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathcal{O}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathcal{O}$$

$$\mathcal{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$$\mathcal{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$$

Folglich ist das Matrizenprodukt nicht kommutativ.

1.) $\mathcal{AB} \not\Rightarrow \mathcal{A} = 0$ oder $\mathcal{B} = 0$

$\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$

2.) $\underbrace{\vec{x}}_{(\xi_j)_j}, \underbrace{\vec{y}}_{(\eta_k)_k} \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{(n,1)}$

$$\vec{x}^{\mathsf{T}}\vec{y} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{j}\eta_j$$

$$\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \begin{pmatrix}\xi_1\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \ldots & \xi_1\eta_n\\ \xi_2\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \ldots & \xi_2\eta_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \xi_n\eta_1 & \xi_n\eta_2 & \ldots & \xi_n\eta_n\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}^{\star}\vec{y} = \sum_{j=1}^{n}\overline{\xi}_j\eta_j = \langle\overline{\vec{x}, \vec{y}}\rangle$$

$$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum \xi_j\overline{\eta}_j \qquad \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum \overline{\xi}_j\eta_j$$

3.) $\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\mathcal{AB})^{\mathsf{T}}}_{(m,n)(n,l)}}_{(m,l)}}_{(l,n)} = \underbrace{\underbrace{\mathcal{B}^{\mathsf{T}}\mathcal{A}^{\mathsf{T}}}_{(l,n)(n,m)}}_{(l,n)}$ Ziel: $((\mathcal{AB})^{\mathsf{T}})_{kl} = (B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}})_{kl}$

$$\sum_{j=1}^{n}(A)_{lj}(B)_{jk} = \sum_{j}(B^{\mathsf{T}})(A^{\mathsf{T}})_{jl} = (B^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}})_{kl}$$

4.) $\underbrace{\mathcal{A}}_{(m,n)}\underbrace{\mathcal{B}}_{(m,l)}\underbrace{\mathcal{C}}_{(l,k)} = (\mathcal{AB})\,\mathcal{C} = \mathcal{A}\,(\mathcal{BC})$

$$[(\mathcal{AB})\,\mathcal{C}]_{rs} = \sum_{j=1}^{l}(AB)_{rj}(C)_{js} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{p=1}^{n}(A)_{rp}(B)_{pj}(C)_{js} = \sum_{p}(A)_{pj}\sum_{j}(B)_{pj}(C)_{js} = [\mathcal{A}\,(\mathcal{BC})]_{rs}$$

$$\left.\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,\mathcal{C} &= \mathcal{AC}+\mathcal{BC}\\ \mathcal{A}\,(\mathcal{B}+\mathcal{C}) &= \mathcal{AB}+\mathcal{AC}\end{aligned}\right\}\text{falls diese Produkte zu bilden sind}$$

5.) $\mathcal{A} \in C^{(m,n)}, \vec{x} \in \mathbb{C}^{(n,m)} \qquad \mathcal{A}\vec{x} \in \mathbb{C}^m, \vec{x} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$

$$(\mathcal{A}\vec{x})_j = \sum_{k=1}^{n}(A)_{jk}(\lambda\xi_{jk}) = \lambda\sum_{k=1}^{n}(A)_{jk}\xi_k \qquad j = 1, \ldots, n)$$

$$\mathcal{A}\,(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}\vec{x} \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \vec{x} \in \mathbb{C}^n, \mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$$

$$\mathcal{A}\,(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x}+\mathcal{A}\vec{x} \qquad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$$

$\begin{array}{ccc}\vec{x} & \mapsto & \mathcal{A}\vec{x}\\ \mathbb{C}^n & \mapsto & \mathbb{C}^{(m,n)}\end{array}$ ist linear.

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{(m,n)} \vec{e}_k^{(n)} = \begin{pmatrix} (A)_{1k} \\ (A)_{2k} \\ \vdots \\ (A)_{nk} \end{pmatrix} = \vec{a}_k \qquad \mathcal{A}\vec{e}_k^{(n)} = \vec{a}_k$$

$$\underbrace{\mathcal{A}^{\mathsf{T}}}_{(n,m)} \vec{e}_k^{(m)} = k\text{-te Zeile von } \mathcal{A} : \left(\mathcal{A}^{\mathsf{T}}\vec{e}_k^{(n)}\right)^{\mathsf{T}} = \vec{e}_k^{(n\,T)} = ((A)_{k1}, (A)_{k2}, \ldots, (A)_{kn})$$

6.) $\mathcal{A} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{e}_j \qquad \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathcal{A}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{a}_j = f(\vec{x})$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha & -y\sin\alpha \\ x\sin\alpha & y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{a}_j$$

$$E_n = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

7.) $\underbrace{\mathcal{A}}_{(m,n)} = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n], \underbrace{\mathcal{B}}_{(n,l)} = \left[\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_l\right] \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{C} = [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_l]$

$$\vec{c}_k = (\mathcal{A}\mathcal{B})\,\vec{e}_k^{(l)} = \mathcal{A}\left(\mathcal{B}\vec{e}_k^{(n)}\right) = \mathcal{A}\vec{b}_k$$

Es kann $\mathcal{A}\mathcal{E}_n = \mathcal{A} = \mathcal{E}_n\mathcal{A}$ als Übung gezeigt werden.

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)} : \mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{A}$

2.3.3 Lineare Gleichungssysteme: Gaußscher Algorithmus

$$\begin{array}{ccccccccccc}
I_1 & + & I_2 & + & & & & & & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
I_1 & & & + & I_3 & & & - & I_5 & = & 0 \\
R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & & & & & = & 0 \\
 & & & - & R_3 I_3 & + & R_4 I_4 & - & R_5 I_5 & = & 0
\end{array}$$

$$I_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ R_1 \\ 0 \end{pmatrix} + I_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ R_2 \\ 0 \end{pmatrix} + I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -R_3 \\ -R_3 \end{pmatrix} + I_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ R_4 \end{pmatrix} + I_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -R_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 & -R_5 \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}(5,5)} \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem.

Problem:

Gegeben ist (m,n)-Matrix $\mathcal{A}$ und $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$. Gesucht sind $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$:

$\mathcal{A} = (\alpha_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}}$

$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$

$\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n = \eta_1$

$\alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n = \eta_2$

$\vdots$

$\alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{mn}\xi_n = \eta_n$

$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{x}$ heißt die zugehörige homogene Gleichung. $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}(\neq \vec{o})$ ist die inhomogene Gleichung.

Was kann passieren?

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 = \eta_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 = \eta_2 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 = \eta_3 \end{array}\right\} \text{Anschaulich: Schnitt von 3 Ebenen}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\xi_1 + 2\xi_2 = 1 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 = 2 \end{array}\right\} \text{keine Lösung}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3\xi_1 + 2\xi_2 = 1 \\ 3\xi_1 + \xi_2 = 5 \end{array}\right\} \text{genau eine Lösung}$$

$$3\xi_1 + 2\xi_2 = 1 \;\Big\}\; \text{unendlich viele Lösungen}$$

$(\mathcal{A}, \vec{y}) = \underbrace{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{y}]}_{(m,n+1)}$ beinhaltet die Informationen, die gegeben sind.

Satz:

$\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist linear. $\Leftrightarrow \vec{y} \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$

$$\mathcal{A}\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{a}_j = \vec{y}$$

Daraus folgt:

1.) Sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$, $\vec{y}$ linear unabhängig. $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist **nicht** lösbar.

2.) Das homogene Problem ist stets lösbar.

Achtung: Daraus, daß $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$, $\vec{y}$ linear abhängig sind, folgt nicht, daß $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ lösbar ist.

Unter dem **Rang** einer Matrix versteht man:

- Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilen
- Maximalzahl linear unabhängiger Spalten

Durch elementare Zeilenumformungen werden der Rang einer Matrix $\mathcal{A}$ und die Lösungsgesamtheit des Gleichungssystems $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ nicht verändert.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 12 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -4 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & -2 & -4 & -3 \\ 4 & 12 & -6 & -8 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & -14 & -2 \end{array}\right)
\qquad
\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \dim R(\mathcal{A}) = \dim R(\mathcal{A}^\intercal)$

Wir betrachten $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$. Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\vec{y} = \mathbb{C}^m$ und $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ gesucht. Nimm $(\mathcal{A}, \vec{y})$:

1.) $(\mathcal{A}\vec{y}) \Rightarrow (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\vec{y}})$ Zeilennormalform

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
\xi_1 & & & \xi_{k1} & & \xi_{k2} & & \xi_{k3} & & & \xi_{kr} & & \xi_n & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 5 & \dots & 0 & 5 & 4 & \tilde{\eta}_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & \ddots & 0 & 7 & 3 & \tilde{\eta}_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & \ddots & 0 & 8 & 6 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 9 & 7 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 2 & 8 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 3 & 9 & \tilde{\eta}_r \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 9 & \tilde{\eta}_{r+1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 2 & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

1.) $\operatorname{Rang}(\mathcal{A}) = r$

2.) $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist **nicht** lösbar, falls $\tilde{\eta}_k \neq 0$

$$
(\text{ZN}) \begin{cases}
\xi_{k1} = \tilde{\eta}_1 - \displaystyle\sum_{\substack{l > k_1 \\ l \neq k_2, \dots, k_r}} \tilde{\alpha}_{1l}\xi_l \\
\xi_{k2} = \tilde{\eta}_2 - \displaystyle\sum_{\substack{l > k_2 \\ l \neq k_3, \dots, k_r}} \tilde{\alpha}_{2l}\xi_k \\
\vdots \\
\xi_{k3} = \tilde{\eta}_3 - \displaystyle\sum_{l > k_r} \tilde{\alpha}_{rl}\xi_l
\end{cases}
$$

$\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\alpha}_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m \\ k=1,\dots,n}}$

Jeder Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, für den $\xi_1, \dots, \xi_n$ Lösung von $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$.

Satz:

> Gegeben sind $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^m$. Das System $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ sei lösbar. Es sei $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = r$. Dann hat das homogene Problem $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}$ $n-r$ linear unabhängige Lösungen $\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(n-r)}$ und die allgemeine Lösung von $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ lautet dann:
>
> $\vec{x}_{allg} = \vec{x}_p + \sum\limits_{j=1}^{n-r} \lambda_j \vec{x}^{(j)}$, wobei die $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$ beliebige komplexe Zahlen sind und $\vec{x}_p$ eine Lösung von $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist.

1.) $\vec{x}_p$=? $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots\ \xi_n \end{pmatrix}$ erfüllt man wie folgt: Setze $\xi_l = 0$, wobei $l \neq k_1, k_2, \ldots, k_n$ und berechne $\xi_{k1}, \ldots, \xi_{kr}$ aus der Zeilennormalform.

$\xi_{k1} = \tilde{\eta}_{(1)}, \xi_{k2} = \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\xi}_k = \tilde{\eta}_r$

2.) $\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(n-r)}$ werden wie folgt bestimmt. Setze in (ZN) $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 = \ldots = \tilde{\eta}_r = 0$.
Die $n-r$ Koordinaten jedes Lösungsvektors, die auf der rechten Seite von (ZN) stehen, können beliebig gewählt werden; die $\xi_{k1}, \ldots, \xi_{kr}$ sind dann durch (ZN) festgelegt. Setze der Reihe nach eine der frei wählbaren Koordinaten gleich 1 und alle anderen gleich Null und berechne jeweils $\xi_{k1}, \ldots, \xi_{kr}$ aus (ZN). Auf diese Weise erhält man $n-r$ linear unabhängige Lösungen des homogenen Problems.

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \vec{x}_{allg} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\xi_1 = -3 - 3\xi_2 + 5\xi_4$

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{allg} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz:

> $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ seien gegeben. $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ sei lösbar. Aus $r = \operatorname{rang}(\mathcal{A}) = n$ folgt, daß $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar ist. Das homogene Problem besitzt wegen $n - r = 0$ nur die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{o}$.

$r = n \leq \min(n, m)$

Die Voraussetzung des Satzes sind nur möglich, falls $m = n$ oder $m > n$ ist.

Satz:

> Ein homogenes Problem mit mehr Unbekannten als Gleichungen ($n > m$) besitzt stets nichttriviale Lösungen. (Negation von vorhergehendem Satz)

Folgerung:

Es sei $n > m$ und $\vec{a}_1 \in \mathbb{C}^n$, $\vec{a}_2 \in \mathbb{C}^n$, …, $\vec{a}_n \in \mathbb{C}^n$: $\xi_i\vec{a}_1 + \ldots + \xi_n\vec{a}_n = \mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}$. Daraus folgt $|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots + |\xi_n| \neq 0$, das heißt: $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_n$ sind linear abhängig.

Satz:

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$. Dann gelten:

1.) $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist für jedes $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ eindeutig lösbar.

2.) $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}$ besitzt nur die triviale Lösung.

3.) $\mathrm{rang}(\mathcal{A}) = n$

4.) $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$

5.) $\vec{x} \mapsto \mathcal{A}\vec{x}$ ist surjektiv und injektiv.

- (1) $\mapsto$ (2)
  Setze in (1) $\vec{y} = \vec{o}$
- (2) $\mapsto$ (3)
  a.) Voraussetzung: $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{o} \Rightarrow \vec{x} = 0$
  b.) Ziel: $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_n$ sind linear unabhängig:

$$\overbrace{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{o}}^{\mathcal{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \vec{o}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$$

- (3) $\mapsto$ (1)
  Die Voraussetzung ist, daß $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_n$ linear unabhängig sind. Daraus folgt, daß $\vec{a}_1$, …, $\vec{a}_n$ Basen in $\mathbb{C}^n$ sind. Jedes $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ besitzt **eine** eindeutige Darstellung $\vec{y} = \xi_1\vec{a}_1 + \ldots + \xi_n\vec{a}_n = \mathcal{A}\vec{x}$. Ziel: $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ besitzt genau eine Lösung für jedes $\vec{y}$.

2.4 Reguläre Matrizen. Die inverse Matrix zu einer regulären Matrix

Definition:

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(n,m)}$ heißt **regulär**, falls $\mathrm{rang}(\mathcal{A}) = n$ gilt.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E}_n, \mathcal{A} = [\vec{e}_{10}, \vec{e}_8, \ldots, \vec{e}_2]$$

$N(\mathcal{A}) = \{\vec{x} | \mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}\}, \mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$

$\mathrm{rang}(\mathcal{A}) = r, \mathrm{dim} N(\mathcal{A}) = n - r$

Angenommen, es gibt nur die triviale Lösung:

$\dim N(\mathcal{A}) = 0 = n - r : n = r \leq m$

Ein homogenes Gleichungssystem mit mehr Unbekannten hat außer der trivialen Lösung immer zusätzliche Lösungen.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{id}:\mathbb{C}^n & \mapsto \quad \mathbb{C}^n & \mathrm{id}(\vec{x} = \vec{x}\,\forall\, x \\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n & \quad\ \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n & \end{array}$$

$$\mathrm{id}(\vec{x}) = \underbrace{\mathcal{A}}_{(m,n)} \vec{x} = \mathrm{id}(\vec{v}_j) = \sum_k \xi_{kj} \vec{v}_k = \vec{v}_j$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftarrow j = \vec{e}_j$$

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)} : \mathrm{id}(\vec{x}) = \mathcal{E}\vec{x}$

$\mathcal{E}\mathcal{A} = [\mathcal{E}\vec{a}_1, \mathcal{E}\vec{a}_2, \ldots, \mathcal{E}\vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] = \mathcal{A}$

$\mathcal{A}\mathcal{E} = [\mathcal{A}\vec{a}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{e}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] = \mathcal{A}$

Eine (m, n)-Matrix $\mathcal{A}$ sei **regulär**, falls $\mathrm{rang}(\mathcal{A}) = n$.

Beispiele: Matrizen, die Zeilenumformungen bewerkstelligen

$\mathcal{A}$ regulär $\Leftrightarrow \mathcal{A}^\intercal$ regulär

Wo werden reguläre Matrizen benötigt?

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ sei regulär und } (\mathcal{A} \in {}^{(m,n)} \\ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n \text{ sei eine Basis. Damit ist } \mathcal{A}\vec{b}_1, \mathcal{A}\vec{b}_2, \ldots, \mathcal{A}\vec{b}_n \text{ Basis.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda_1 \mathcal{A}\vec{b}_1 + \lambda_2 \mathcal{A}\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}\vec{b}_n = \vec{o} \\ \text{Daraus folgt: } \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \end{array}$$

$$\mathcal{A}(\lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{b}_n) = \vec{o} \xrightarrow{\mathcal{A} \text{ regulär}} \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{b}_n = \vec{o}$$

Satz:

> Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$. Dann gilt:
> $\mathcal{A}$ ist regulär. $\Leftrightarrow (\mathcal{A}\vec{x} = \vec{o} \Rightarrow \vec{x} = \vec{o}) \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ ist für jedes $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ eindeutig lösbar.

Satz:

> $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ ist regulär. Dann ist auch $\mathcal{A}\mathcal{B}$ regulär.

Beweis:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\vec{x} = \vec{o} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{A} \text{ regulär}} \mathcal{B}\vec{x} = \vec{o} \xrightarrow{\mathcal{B} \text{ regulär}} \vec{x} = \vec{o}$$

Satz:

> $\mathcal{A}\mathcal{B}$ sei regulär. Dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ regulär.

Beweis:

$(\mathcal{A}\mathcal{B})\vec{x} = \mathcal{A}\vec{o} = \vec{o} \xrightarrow{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ regulär $\vec{x} = \vec{o}$, also ist $\mathcal{B}$ **regulär**. Wenn $\mathcal{C}\mathcal{D}$ regulär ist, dann folgt daraus, daß der zweite Faktor $\mathcal{D}$ regulär ist.

$\mathcal{A}\mathcal{B}$ regulär $\Leftrightarrow (\mathcal{A}\mathcal{B})^\mathsf{T} = \mathcal{B}^\mathsf{T}\mathcal{A}^\mathsf{T}$ regulär $\Rightarrow \mathcal{A}^\mathsf{T}$ regulär $\Rightarrow \mathcal{A}$ regulär

Satz:

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ seien reguläre (m,n)-Matrizen. Dann gibt es genau eine reguläre (m,n)-Matrix $\mathcal{X}$ mit $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B}$. Sei $\mathcal{X} = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n]$.
$\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x}_j = \vec{b}_j$ für $j = 1, \ldots, n$
Da $\mathcal{A}$ regulär ist, ist $\vec{x}_j$ durch $\vec{b}_r$ eindeutig bestimmt. Setze $\mathcal{B} = \mathcal{E}$, dann heißt die durch $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{E}$ eindeutig festgelegte **reguläre** die **inverse Matrix** zu $\mathcal{A}$. Sie wird mit $\mathcal{A}^{-1}$ bezeichnet. Es gilt nun: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$.

Es gilt auch: $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$

$\mathcal{A}^{-1}$ ist regulär: $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{X} = \mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{A}$

$\mathcal{E}\mathcal{X} = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{X} = \mathcal{A}$

Satz:

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ seien reguläre Matrizen. Dann gelten:

1.) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$, $(\mathcal{A}^{-1})^{-1}$, $(\mathcal{A}^{-1})^\mathsf{T} = (\mathcal{A}^\mathsf{T})^{-1}$

2.) $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{X} = \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{X} = (\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1}$, $\mathcal{A}\left(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}\right) = \mathcal{A}\mathcal{E}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$

3.) $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{X} = \mathcal{E}$, $\mathcal{A}^\mathsf{T}\mathcal{X} = \mathcal{E}$: $\mathcal{X} = (\mathcal{A}^\mathsf{T})^{-1}$

4.) $\mathcal{A}^\mathsf{T}(\mathcal{A}^{-1})^\mathsf{T} = \left(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\right)^\mathsf{T} = \mathcal{E}^\mathsf{T} = \mathcal{E}$

Es sei $\mathcal{A} = \mathbb{C}^{(m,n)}$ regulär. Gesucht ist $\mathcal{A}^{-1}$. $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$ seien die reguläre Matrizen, die elementare Zeilenumformungen durchführen.

$$\underbrace{\tilde{\mathcal{Z}}_3 \ldots \mathcal{Z}_2\mathcal{Z}_1}_{\mathcal{Z}}\mathcal{A} = \mathcal{E}$$

$$\mathcal{Z}\mathcal{A} = \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}\mathcal{A}^{-1} \Rightarrow \mathcal{Z}\mathcal{E} = \mathcal{A}^{-1}$$

Beispiel:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}$$

Nach einigen Umformungen folgt:

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten die Abbildung $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$. Es seien $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^n$ gegeben. $\mathcal{C}$ sei regulär und $\vec{x} \mapsto \mathcal{C}\vec{x}$ eine bijektive Abbildung $\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$. Darüber hinaus gilt $\vec{x} = \mathcal{C}\vec{x}' \ \forall \ \vec{x} \in \mathbb{C}^n$.

$\mathcal{A}\mathcal{C}\vec{x}' = \mathcal{C}\vec{y}'$

$\underbrace{\vec{c}'\mathcal{A}\mathcal{C}}_{\mathcal{A}'}\vec{x}' = \vec{y}' \Rightarrow \mathcal{A}'\vec{x}' = \vec{y}$

Falls $\vec{x}$ eine Lösung ist, dann ist auch $\vec{x} = \mathcal{C}\vec{x}$ eine Lösung.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

2.5 Determinanten

$\mathcal{A}$ sei (n,n)-Matrix. $\Rightarrow \det(\mathcal{A}) \in \mathbb{C}$

1. Permutationen σ heißt Permutation der Zahlen 1, 2, …, n, falls folgendes gilt:
   σ ist eine bijektive Abbildung: $\{1, 2, \dots, n\}$ nach $\{1, 2, \dots, n\}$.

   Schreibweise:

   $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$

   Beispiel:

   $S_\sigma = \varphi = (2, 3, 5, 1, 4)$
   $\varphi(1) = 2$
   $\varphi(2) = 3$
   $\varphi(3) = 5$
   $\varphi(4) = 1$
   $\varphi(5) = 4$
   S_n bezeichnet alle Permutationen der Zahlen 1, …, n.

   $\psi \in S_5 : \psi = (1, 3, 4, 5, 2)$

   $$\begin{aligned}\psi \circ \psi &= (\varphi \circ \psi(1), \varphi \circ Psi(2), \varphi \circ \psi(3), \varphi \circ \psi(4), \varphi \circ \psi(5)) = \\ &= (\varphi(1), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(2)) = \\ &= (2, 5, 1, 4, 3)\end{aligned}$$

   $\mathrm{id} = (1, 2, \dots, n)$
   $\varphi = (2, 3, 5, 1, 4)$
   $\varphi^{-1} = (4, 1, 2, 5, 3)$
   $\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}$

   Permutationen, die zwei Elemente vertauschen, alle anderen festlassen, heißen **Transpositionen**.

   $S_n \ni \tau = (jk)$

   Es gilt $\tau(l) = l$, $\tau(j) = k$ und $\tau(k) = j$ für $l \neq j$, k.

   $\tau \in S_4 : \tau = (23) \qquad \tau = (1, 2, 3, 4) = (1, 3, 2, 4)$

   $\tau \circ \tau = \mathrm{id} \qquad \tau \circ \tau \circ (1, 2, 3, 4) = \tau \circ (1, 3, 2, 4) = (1, 2, 3, 4)$

   $\tau = \tau^{-1}$

   Jede Permutation kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden und zwar auf viele Arten.

   $(5, 3, 4, 1, 2) = (15) \circ (23) \circ (34) \circ (45)$

Beispiel:

Es seien $\varphi,\ \psi \in S_n$.

$\varphi \circ \psi = (\varphi(\psi(1)), \varphi(\psi(2)), \ldots, \varphi(\psi(n)))$

$\varphi = (1,3,2,4), \psi = (2,4,1,3) \qquad \varphi \circ \psi = (3,4,1,2)$

$\mathrm{id} \in S_n, \psi^{-1} = (3,1,4,2)$

$\varphi = (1,3,2,4) = (23) \circ \mathrm{id} = (23)$

Satz:

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden:
$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k$ ($\tau_j \in S_n$ sind Transpositionen.)

Es sei $S_5 \ni \sigma = (5,3,4,1,2)$.

$$\begin{aligned}&(12) \circ (24) \circ (23) \circ (15) \circ (1,2,3,4,5) = (12) \circ (24) \circ (23) \circ (5,2,3,4,1) = (12) \circ (24) \circ (5,3,2,4,1) = \\ &= (12) \circ (5,3,4,2,1) = (5,3,4,1,2) = \sigma = (12) \circ (24) \circ (23) \circ (15) = (25) \circ (14) \circ (13) \circ (12) = \\ &= (15) \circ (23) \circ (34) \circ (45) \circ (23) \circ (12) \circ (13) \circ (12)\end{aligned}$$

Satz:

Jede Darstellung von $\mathrm{id} \in S_n$ als Produkt von Transpositionen besteht aus einer **geraden** Anzahl von Transpositionen.

Der Beweis kann beispielsweise mit Vollständiger Induktion erfolgen.

Satz:

Eine Permutation $\sigma \in S_n$ kann nicht gleichzeitig als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen und als Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden.

Beweis:

$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k = \tilde{\tau}_1 \circ \tilde{\tau}_2 \circ \ldots \circ \tilde{\tau}_l$

Zu zeigen: Entweder k **und** l sind gerade, oder k **und** l sind ungerade. $\Leftrightarrow$ $k + l$ ist **gerade**.

$$\mathrm{id} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k \circ (\tilde{\tau}_1 \circ \tilde{\tau}_2 \circ \ldots \circ \tilde{\tau}_l)^{-1} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k \circ \tilde{\tau}_l^{-1} \circ \tilde{\tau}_{l-1}^{-1} \ldots \circ \tilde{\tau}_2^{-1} \circ \tilde{\tau}_1^{-1}$$

$$\mathrm{id} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k \circ \tilde{\tau}_l \circ \tilde{\tau}_{l-1} \circ \ldots \circ \tilde{\tau}_1 \xrightarrow{\text{Satz}} k + l \text{ gerade}$$

Definition:

Vorzeichen von $\sigma \ni S_n$: $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^k$, wenn $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \tau_k$.

1.) Ist $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$, so heißt σ **gerade**.

2.) Ist $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$, so heißt σ **ungerade**.

Folgerungen:

a.) $\text{sign}(\tau) = -1$, wenn τ eine Transposition ist.

b.) $\text{sign}(\sigma \circ \varphi) = \text{sign}(\sigma)\text{sign}(\varphi)$ für $\sigma,\ \varphi \in S_n$

$\varphi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k \qquad \text{sign}(\varphi) = (-1)^k \qquad \sigma \circ \varphi = \tilde{\tau}_1 \circ \ldots \circ \tilde{\tau}_l \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$

$\sigma = \tilde{\tau}_1 \circ \ldots \circ \tilde{\tau}_k \qquad \text{sign}(\sigma) = (-1)^l \qquad \text{sign}(\sigma \circ \varphi) = (-1)^{k+l}$

c.) $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}\left(\sigma^{-1}\right)$, $\sigma \in S_n$ (Beweis als Übung)

Definition:

$j,\ k \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma \in S_n$. Das Zahlenpaar $\{j, k\}$ heißt **Fehlstand** von σ, falls $j < k$ und $\sigma(j) > \sigma(k)$ ist. $f(\sigma)$ bezeichnet die Anzahl der Fehlstände von σ.

Beispiel:

$\sigma = (2, 4, 1, 3)$ besitze die Fehlstände $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ und $\{2, 4\}$.

$(23) \circ \sigma_k(3, 4, 1, 2) \qquad f(23) \circ \sigma = 4$

Satz:

Ist $\varphi \in S_n$ und $\tau \in S_n$ eine Transposition, so ist $f(\tau \circ \sigma) - f(\sigma)$ eine **ungerade** Zahl.

Folgerung:

Für $\sigma \in S_n$ definieren wir $\text{sign}(\sigma) = (-1)^{f(\sigma)}$.

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \ldots \circ \underbrace{\tau_{k-1} \circ \underbrace{\tau_k \circ \text{id}}_{2l_k+1}}_{2l_k+1+2l_{k-1}+1} \qquad \text{sign}(\sigma) = (-1)^k$$

$f(\sigma) = 2l_1 + 1 + 2l_2 + 1 + \ldots + 2l_k + 1 = 2(l_1 + \ldots + l_k) + k$

$(-1)^{f(\sigma)} = (-1)^k$

2.6 Determinanten (Volumenberechnung)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \vec{e}_3 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} (= \det(\mathcal{A}))$$

$\mathcal{A} = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right)$

Das **Spatprodukt** ist definiert durch $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 (= \det(\mathcal{A}))$.

$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23}$

2.6.1 Die Sarrus-Regel

$$\begin{aligned}(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} = \\ &= \sum_{\sigma \in S_3} (\text{sign}(\sigma))\alpha_{(\sigma(1)1)}\alpha_{(\sigma(2)2)}\alpha_{(\sigma(3)3)}\end{aligned}$$

2.6.2 Die Determinantenfunktion

Wir definieren eine Funktion det: $\mathbb{C}^{(m,n)} \mapsto \mathbb{C}$, die einer Matrix eine Determinante zuordnet: $\det(\mathcal{A}) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$. Diese Funktion hat die folgenden Eigenschaften:

a.) Forderung 1:
$\det \mathcal{E}_n = 1$

b.) Forderung 2:
$f_j \colon \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$

$f_j\left(\vec{x}\right) := \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \underbrace{\vec{x}}_{j}, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n\right)$, f_j ist linear für jedes j. Dies bedeutet:

- $f_j(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f_j(\vec{x}_1) + f_j(\vec{x}_2)$
- $f_j(\lambda\vec{x}) = \lambda f_j(\vec{x})$

c.) Forderung 3:

$\det(\ldots, \underbrace{a_j}_{j}, \ldots, \underbrace{\vec{a}_k}_{k}, \ldots) = -\det(\ldots, \underbrace{\vec{a}_k}_{j}, \ldots, \underbrace{a_j}_{k}, \ldots)$

$\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = \operatorname{sign}(\tau) \det(\vec{a}_{(\sigma(1))}, \vec{a}_{(\sigma(2))} \ldots, \vec{a}_{(\sigma(n))}, \tau = (j \ldots k)$

Folgerungen hieraus (Rechnen mit Determinanten):

- Aussage 1:

  $\det(\lambda\mathcal{A}) = \lambda^n \det(\mathcal{A}), \lambda \in \mathbb{C}$

- Aussage 2:
  $\det(\mathcal{A}) = 0$, falls zwei Spalten gleich sind.
  $\det(\mathcal{A}) = -\det(\mathcal{A})$, wenn die gleichen Spalten vertauscht werden.

- Aussage 3:

$$\det\left(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{\nu}_l, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n\right) = \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \det\left(\vec{a}_1, \ldots, \underbrace{\vec{\nu}_l}_{j}, \ldots, \vec{a}_n\right) \left(= f_j \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \vec{\nu}_l\right)$$

- Aussage 4:

  $\mathcal{A} = \left[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\right], \mathcal{B} = \left[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j + \lambda\vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n\right] \qquad (l \neq j)$

  $\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{A})$, $\det(\mathcal{A})$ verändert sich nicht, wenn zu einer Spalte das Vielfache einer anderen addiert wird. Aus den Aussagen 2 und 3 folgt: $\det(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{A}) + \det\left(\ldots, \vec{a}_l, \ldots, \vec{a}_n\right)$

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 0$$

2.6.3 Die Sarrussche Regel

$$\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{matrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{matrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} =$$

$$= \sum \operatorname{sign}(\sigma)\alpha_{(1\sigma(1))}\alpha_{(2\sigma(2))}\alpha_{(3\sigma(3))}$$

$\tau \in S_n$ sei Transposition:

$\det(\vec{a}_{\tau 1}, \alpha_{\tau 2}, \dots, \alpha_{\tau n} = \operatorname{sign}(\tau)\det(\mathcal{A})$

Beispiel:

Es sei $\mathcal{A}$ eine $(3,3)$-Matrix.

$S_3 \ni \tau = (23) \qquad \det(\vec{a}_{\tau(1)}, \vec{a}_{\tau(2)}\vec{a}_{\tau(3)} = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_2) = -\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

$S_3 \ni \sigma = (2,3,1) = \tau_1 \circ \tau_2$

$\tau_1 = (12)$

$\tau_2 = (13)$

$(12) \circ (1,2,3) = (2,1,3)$

$(13) \circ (2,1,3) = (2,3,1)$

$\underbrace{(13)}_{\tau_1} \circ \underbrace{(12)}_{\tau_2} \circ (1,2,3) = (2,3,1)$

Es gilt $f(\sigma) = 2$, damit liegt folglich eine gerade Permutation vor.

$$\det(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_1) = \det(\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(2)}, \vec{a}_{\sigma(3)}) = \det(\vec{a}_{\tau_1\circ\tau_2(1)}, \vec{a}_{\tau_1\circ\tau_2(2)}, \vec{a}_{\tau_1\circ\tau_2(3)}) = -\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3) =$$
$$= \operatorname{sign}\tau_1 \det(\vec{a}_{\tau_2(1)}, \vec{a}_{\tau_2(2)}, \vec{a}_{\tau_2(3)}) = -(1)\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \underbrace{\operatorname{sign}\tau_1 \operatorname{sign}\tau_2}_{\operatorname{sign}\underbrace{(\tau_1\circ\tau_2)}_{\sigma}} \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \det(\mathcal{A})$$

Aussagen:

1.) $\sigma \in S_n$: $\det(\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(2)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$

2.) $\det(\vec{e}_{\sigma(1)}, \vec{e}_{\sigma(2)}, \dots, \vec{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)$

3.) $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $r = \operatorname{rang}(\mathcal{A}) < n$. Dann gilt $\det(\mathcal{A}) = 0$.

Beweis:

$$\det(\mathcal{A}) = \pm\det\underbrace{(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r, \vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_n)}_{\substack{\text{linear unabhängige}\\ \text{Spalten von } \mathcal{A}}} = \sum_{j=1}^{r}\lambda_j \vec{b}_j = \sum_{j=1}^{r}\lambda_j \underbrace{\det(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r, \dots, \vec{b}_j)}_{=0} = 0$$

2.6.4 Der Laplacesche Entwicklungssatz

Satz:

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$, $\mathcal{A} = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ $\quad \vec{a}_x = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \vec{e}_j$

Es gilt:

$$\det(\mathcal{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \alpha_{\sigma(2),2} \alpha_{\sigma(3),3} \alpha_{\sigma(4),4} \dots \alpha_{\sigma(n),n}$$

$$\det(\mathcal{A}) = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \det\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j1} \vec{e}_{j1}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j2} \vec{e}_{j2}, \dots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \vec{e}_{jn}\right)$$

In Summanden läßt sich dies schreiben als:

$$\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{m} \dots \sum_{j_n=1}^{n} \alpha_{j1} \alpha_{j2} \dots \alpha_{jn} \det(\vec{e}_{j1}, \dots, \vec{e}_{jn})$$

Es ist $\det(\vec{e}_{j1}, \dots, \vec{e}_{jn}) \neq 0$ nur dann, wenn $(j_1, \dots, j_n)$ eine Permutation aus S_n ist.

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2}, \dots, \alpha_{\sigma(n)n} \mathrm{sign}(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_{\sigma(j),j}$$

Beispiel:

Es sei $\mathcal{A} = [\vec{e}_l, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \dots, \vec{a}_n]$ mit $\vec{e}_l = (\delta_{kl})_k$, $\vec{a}_2 = (\alpha_{k2})_k$, ..., $\vec{a}_n = (\alpha_{kn})_n$. Der LAPLACEsche Entwicklungssatz besagt:

$$\det(\mathcal{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \delta_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \dots \alpha_{\sigma(n)n} = \text{Permutation der Zahlen } 2, \dots, n$$

$$\det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \underbrace{\vec{e}_l}_{k\text{-te Spalte}}, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n\right) = (-1)^{k-1} \det\left(\vec{e}_l, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \dots, \vec{a}_n\right) =$$

$$= (-1)^{l-1}(-1)^{k-1} \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k-1} & \alpha_{1k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k-1} & \alpha_{2k+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nk-1} & \alpha_{nk} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Die l-te Zeile und k-te Spalte von $\mathcal{A}$ fehlt. In $\mathcal{A} = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]$ streiche l-te Zeile, k-te Spalte. $\mathcal{A}_{lk}$ ist $(n-1, n-1)$-Matrix.

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_l, \vec{a}_{k-1}, \dots, \vec{a}_n) = (-1)^{k+l} \det(\mathcal{A}_{lk})$$

Betrachten wir folgende konkrete Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$$

Satz:

$$\boxed{\det(\mathcal{A}) = \det\left(\mathcal{A}^{\mathsf{T}}\right)}$$

Übung:

Rechne explizit für $n = 2,\, 3,\, 4,\, 5$ nach.

2.6.5 Der Determinanten-Multiplikationssatz

Satz:

$$\boxed{\det(\mathcal{AB}) = \det(\mathcal{A})\det(\mathcal{B}) \text{ mit } \mathcal{A},\, \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{(n,n)}}$$

Beweis:

Es sei $\mathcal{A} = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$,$\mathcal{B} = [\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n]$ und $\mathcal{AB} = [\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n]$. Die Spalten $\vec{c}_k$ der multiplizierten Matrix $\mathcal{AB}$ ergeben sich durch Multiplikation der Spalten der Matrix $\mathcal{B}$ mit der Matrix $\mathcal{A}$:

$$\vec{c}_k = \mathcal{A}\vec{b}_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\vec{a}_j$$

Dann können wir die Determinante berechnen:

$$\det(\mathcal{AB}) = \det\left(\sum_{j_1=1}^{n}\beta_{j_1 1}\vec{a}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n}\beta_{j_2 2}\vec{a}_{j_2}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n}\beta_{j_n n}\vec{a}_{j_n}\right) = \sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_n=1}^{n}\beta_{j_1 1}\ldots\beta_{j_n n}\det(\vec{a}_{j_1}, \ldots, \vec{a}_{j_n}) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n}\beta_{\sigma(1)1}\ldots\beta_{\sigma(n)n}\underbrace{\det(\vec{a}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{a}_{\sigma(n)})}_{\operatorname{sign}(\sigma)\det(\mathcal{A})} = \boxed{\det(\mathcal{B})\det(\mathcal{A})}$$

Folgerung:

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ sei regulär. Dann gilt:

- $1 = \det(\mathcal{E}) = \det(\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = \det(\mathcal{A})\det(\mathcal{A}^{-1})$
- $\det(\mathcal{A}^{-1}) = (\det(\mathcal{A}))^{-1}$
- $\mathcal{A}$ sei singulär. $\Rightarrow \det(\mathcal{A}) = 0 \Leftrightarrow \det(\mathcal{A}) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}$ sei regulär.
- $\mathcal{A}$ sei regulär. $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A}) \neq 0$
- $\mathcal{A}$ sei singulär. $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A}) = 0$
- $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}$ besitzt nichttriviale Lösungen. $\Leftrightarrow \det(\mathcal{A}) = 0$ (Eigenwertproblem)

2.6.6 Der Entwicklungssatz

Definition:

$\mathcal{A}$ sei (n,n)-Matrix. Mit $\mathcal{A}_{jk}$ wird die $(n-1, n-1)$-Matrix bezeichnet, die aus $\mathcal{A}$ durch Streichen der j-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht.

Satz:

Entwicklungssatz der k-ten Spalte und Entwicklungssatz der k-ten Zeile mit $k = 1, 2, \ldots, n$:

a.) $\det(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk}(-1)^{j+k} \det(\mathcal{A}_{jk})$

b.) $\det(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}(-1)^{j+k} \det(\mathcal{A}_{kj})$

$\mathbb{C}^{(m,n)}$ ist **unitär**, falls $\mathcal{A}^\star \mathcal{A} = \mathcal{E}$. $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ heißt **orthogonal**, falls $\mathcal{A}^\intercal \mathcal{A} = \mathcal{E}$ gilt.

Satz:

Es sei $\mathcal{A} = \mathbb{R}^{(m,n)}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.) $\mathcal{A}$ ist orthogonal.

2.) $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^\intercal$

3.) $\mathcal{A}^{-1}$ ist orthogonal.

4.) $\mathcal{A}^T$ ist orthogonal.

5.) Die Spalten von $\mathcal{A}$ bilden ein Orthonormalsystem.

6.) Die Zeilen von $\mathcal{A}$ bilden ein Orthonormalsystem.

7.) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sind orthogonal. Dann ist auch $\mathcal{A}\mathcal{B}$ orthogonal.
Die Menge der orthogonalen Matrizen mit der Matrixmultiplikation bildet eine Gruppe.

8.) $\mathcal{A}\mathcal{B}$ ist orthogonal, wie auch $\mathcal{B}$. Dann ist $\mathcal{A}$ orthogonal.

Beweis von 7.):

$(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}^\intercal \mathcal{A}^\intercal = (\mathcal{A}\mathcal{B})^\intercal$

Beweis von 8.):

Da $\mathcal{B}^{-1}$ und $\mathcal{A}\mathcal{B}$ nach Voraussetzung orthogonal sind, ist auch $\mathcal{A} = (\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{B}^{-1}$ ist orthogonal. Die restlichen Beweise können als Übung selbst durchgeführt werden.

Für unitäre Matrizen gilt:

1.) $\mathcal{A}$ ist unitär.

2.) $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^\star$

3.) $\mathcal{A}^{-1}$ ist orthogonal.

4.) $\mathcal{A}^\star$ ist orthogonal.

5.) Die Spalten von $\mathcal{A}$ bilden ein Orthonormalsystem.

6.) Die Zeilen von $\mathcal{A}$ bilden ein Orthonormalsystem.

Beweis:

$\mathcal{A}$ ist **orthogonal**. Damit ist $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ ein Orthonormalsystem, womit $B = [\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n]$ orthogonal ist. Das Produkt der beiden ergibt sich durch $\mathcal{A}\mathcal{B} = [\mathcal{A}\vec{b}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{b}_n]$. $\mathcal{A}$ ist außerdem **unitär**. Daraus folgt der erste Punkt. Ist $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ ein Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^n$, so ist $\mathcal{A}\vec{b}_1, \ldots, \mathcal{A}\vec{b}_n$ ein Orthonormalsystem.

1.) $\vec{x}^T\vec{y} = (\mathcal{A}\vec{x})^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{y}\ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle\mathcal{A}\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y}\rangle,\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$

2.) $\|\vec{x}\| = \|\mathcal{A}\vec{x}\|$

3.) $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\mathcal{A}\vec{x} - \mathcal{A}\vec{y}\|\ \forall\ \vec{x}, \vec{y}$

$\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle \stackrel{!}{=} \langle\mathcal{A}\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y}\rangle$ wobei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$

$$\langle\mathcal{A}\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y}\rangle = (\mathcal{A}\vec{x})^\mathsf{T}\overline{\mathcal{A}\vec{y}} = \vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}^T\overline{\mathcal{A}\vec{y}} = \vec{x}^\mathsf{T}\underbrace{\overline{\overline{\mathcal{A}}^\mathsf{T}\mathcal{A}}}_{\mathcal{E}} = \vec{x}^\mathsf{T}\overline{\vec{y}} = \langle\vec{x}, \vec{y}\rangle$$

Der dritte Punkt folgt aus dem ersten:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\mathcal{A}\vec{x} - \mathcal{A}\vec{y}\|^2$$

$$\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x}^\mathsf{T}\vec{y} = \|\mathcal{A}\vec{x}\|^2 + \|\mathcal{A}\vec{y}\|^2 - 2\mathcal{A}\vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{y}$$

2.6.7 Drehungen

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ orthogonal

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

2.7 Eigenwertprobleme/Diagonalisierung von Matrizen

Wir schauen uns die Bewegungsgleichungen zweier Pendel der Masse m und Länge l an. Diese folgen aus den **Newtonschen Gesetzen**:

$$ml\ddot{\varphi}_1 = -mg\varphi_1 + k(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$ml\ddot{\varphi}_2 = -mg\varphi_2 - k(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$\varphi_1 = \varphi_1(t)$ und $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ sind gesucht. Dies ist ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen. Es handelt sich um gekoppelte Pendel. Setze nun $x_1 = ml\varphi_1$, $x_2 = ml\varphi_2$, $\alpha = \frac{g}{l}$ und $\beta = \frac{k}{m}l$. Damit erhalten wir dann folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\ddot{x}_1 = -\alpha x_1 + \beta(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = -\alpha x_2 - \beta(x_2 - x_1)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta & \beta \\ +\beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \mathcal{A}\vec{x}(t)$$

Wir wollen dies entkoppeln mit einer konstanten regulären (2,2)-Matrix $\mathcal{C}$ wie folgt:

$$\vec{y}(t) = \mathcal{C}^{-1}\vec{x}(t), \vec{x}(t) = \mathcal{C}\vec{y}(t)$$

$$\mathcal{C}\vec{y}(t) = \mathcal{A}\mathcal{C}\vec{y}(t) \Rightarrow \ddot{\vec{y}}(t) = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y}_1(t) = \lambda_1 y_1(t)$$

$$\ddot{y}_2(t) = \lambda_2 y_2(t)$$

Definition:

$\mathcal{A} \in {}^{(m,n)}$ heißt **diagonalisierbar**, falls es eine reguläre Matrix $\mathcal{C}$ so gibt, daß $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C}$ Diagonalgestalt hat.

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Angenommen, $\mathcal{A}$ ist diagonalisierbar: $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, …, $\vec{c}_n$ seien die Spalten von $\mathcal{C}$.

$\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{D} = [\mathcal{C}\lambda_1\vec{e}_1, \mathcal{C}\lambda_2\vec{e}_2, \ldots, \mathcal{C}\lambda_n\vec{e}_n] = [\lambda_1\vec{c}_1, \lambda_2\vec{c}_2, \ldots, \lambda_n\vec{c}_n]$

$\mathcal{A}\mathcal{C} = [\mathcal{A}\vec{c}_1, \mathcal{A}\vec{c}_2, \ldots, \mathcal{A}\vec{c}_n]$

$\mathcal{A}\vec{c}_k = \lambda_k$

$\mathcal{A}\vec{c}_k = \lambda_k\vec{c}_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$

2.7.1 Eigenwertproblem

Suche Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{v} \neq \vec{o}$, und Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}$ $(\star)$.

Definition:

Jede Lösung $\vec{v} \neq \vec{o}$ von $(\star)$ heißt Eigenvektor (EV) von $\mathcal{A}$ zum Eigenwert λ.

Satz:

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ ist **diagonalisierbar**. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ besitzt n linear unabhängige Eigenvektoren.

Beweis:

- „$\Rightarrow$“:
  Die Spalten von $\mathcal{C}$ sind n linear unabhängige Eigenvektoren und die Diagonalelemente sind die zugehörigen Eigenwerte.

- „$\Leftarrow$“:
  $\vec{c}_1$, …, $\vec{c}_n$ seinen die linear unabhängigen Eigenvektoren mit den Eigenwerten λ_1, …, λ_n: $\mathcal{A}\vec{c}_k = \lambda_k\vec{c}_k$ für $k = 1$, 2, …, n

Definition:

Es sei $\mathcal{C} = [\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n]$ und $\mathcal{C}\vec{e}_k = \vec{c}_k, \vec{e}_k = \mathcal{C}^{-1}\vec{c}_k$.

$$\mathcal{C}^{-1}(\mathcal{A}\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{-1}[\mathcal{A}\vec{c}_1, \mathcal{A}\vec{c}_2, \ldots, \mathcal{A}\vec{c}_n] = \mathcal{C}^{-1}[\lambda_1\vec{c}_1, \lambda_2\vec{c}_2, \ldots, \lambda_n\vec{c}_n] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2.7.2 Bestimmen von Eigenwerten und Eigenvektoren

Gegeben ist $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$. Gesucht sind $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, daß das lineare Gleichungssystem $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = \vec{o}$ nichttriviale Lösungen hat.

Satz:

> λ ist Eigenwert von $\mathcal{A}$. $\Leftrightarrow$ rang$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) < n \Leftrightarrow \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$
> Dies ist die sogenannte charakteristische Gleichung. λ ist Nullstelle des charakteristischen Polynoms. $0 = \det(\mathcal{A} - \lambda\vec{E})$

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{nn} & \dots & \dots & \alpha_{nn-1} & \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\alpha_{11} - \lambda)(\alpha_{22} - \lambda)\dots(\alpha_{nn} - \lambda + \{\text{vom Grad } \leq \lambda^{n-2}\} =$$

$$= (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}}_{\text{Spur }(\mathcal{A})} + \dots + \lambda^0 \det(\mathcal{A})$$

Satz:

> $$\chi_A(\lambda) = \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \sum_{k=0}^{n} c_k\lambda^k \text{ mit } c_n = (-1)^n,\ c_{n-1} = (-1)^{n-1}\text{Spur}(\mathcal{A}),\ c_0 = \det(\mathcal{A})$$

Beispiel:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = (-\lambda)^5 = 0$

$\lambda = 0$ ist einziger Eigenwert der Vielfachheit $n = 5$.

rang$(\mathcal{A} - 0\mathcal{E}) = 4$

Damit ergibt sich also:

$\dim N(\mathcal{A} - 0\mathcal{E}) = n - \text{rang}(\mathcal{A} - 0\mathcal{E}) = 5 - 4 = 1$

Das heißt, es gibt einen linear unabhängigen Eigenvektor. Die Matrix ist somit nicht diagonalisierbar, weil wir zur Diagonalisierung nämlich 5 Eigenvektoren benötigten.

Beispiel:

Betrachten wir folgende Matrix:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zuerst berechnen wir die Eigenwerte:

$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 7) = 0$

Diese Gleichung hat die einfache Lösung $\lambda_1 = 2$ und die zweifache Lösung $\lambda_2 = 7$. Hierzu bestimmen wir die Eigenvektoren:

- Eigenvektor zu $\lambda_1 = 2$:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $n = 3 : \boxed{\operatorname{rang}(\mathcal{A} - 2\mathcal{E}) = 1}$

  Somit gibt es 2 linear unabhängige Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2$:

  $$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Eigenvektor zu $\lambda_2 = 7$:

  $$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $n = 3 : \boxed{\operatorname{rang}(\mathcal{A} - 7\mathcal{E}) = 2}$

  Somit gibt es einen linear unabhängigen Eigenvektor zu $\lambda_2 = 7$:

  $$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben nun 3 linear unabhängige Eigenvektoren. Folglich ist die Matrix $\mathcal{A}$ diagonalisierbar.

Beispiel:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Eine reelle Matrix kann komplexe Eigenwerte haben.

$$\boxed{\lambda_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \text{ und } \lambda_2 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}$$

Auch können dann die Eigenvektoren komplex sein:

$$\boxed{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}}$$

$\mathcal{A}$ ist Diagonalisierbar zum Beispiel mit $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = (\mathrm{i}, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = 0 : \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ ist unitär: } \mathcal{C}^\star = \overline{\mathcal{C}}^\mathsf{T} = \mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{C}^\star \mathcal{A} \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \end{pmatrix}}$$

Vorbemerkungen:

$B(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) = \{\vec{x}|\vec{x}$ ist Eigenvektor von $\mathcal{A}$ zu $\lambda\} \cup \{\vec{o}\}$ ist komplexer Vektorraum. Er hat die Dimension $n - \mathrm{rang}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) = \dim = \dim\mathcal{E}(\lambda)$ (geometrische Vielfachheit von λ). $\overbrace{\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})}^{X_A(\lambda)} = 0$ hat genau n Lösungen.

$\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_n = (-1)^n(\lambda-\tilde{\lambda}_1)(\lambda-\tilde{\lambda}_2)\ldots(\lambda-\tilde{\lambda}_n) = (-1)^n(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$

Hiervon sind λ_1, …, λ_k $(1 \leq k \leq n)$ verschieden mit den Vielfachheiten. m_1, m_2, …, m_k sind die **algebraischen** Vielfachheiten, womit gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} m_j = n$$

Daraus ergibt sich also:

- $\underline{\lambda^{n-1}:}$

$$(-1)^n\left(-\tilde{\lambda}_n - \tilde{\lambda}_{n-1} - \tilde{\lambda}_{n-2} - \ldots - \tilde{\lambda}_1\right) = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\lambda}_j = (-1)^{n-1}\sum_{j=1}^{k} m_j\lambda_j$$

- $\underline{\lambda^0:}$

$$\left((-1)^n(-1)^n\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2\ldots\tilde{\lambda}_n\right) = \lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\ldots\lambda_k^{m_k}$$

Satz:

$\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ habe die k $(1 \leq k \leq n)$ verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit den algebraischen Vielfachheiten m_1, m_2, …, m_k $\left(\sum_{j=1}^{k} m_j = n\right)$. Dann gelten:

$$X_A(\lambda) = \det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) = (-1)^n\prod_{j=1}^{k}(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$$

Man hat außerdem:

1.) $\det(\mathcal{A}) = \prod_{j=1}^{k}\lambda_j^{m_j}$

2.) $\mathrm{Spur}(\mathcal{A}) = \sum_{j=1}^{k} m_j\lambda_j$

Es gilt $1 \leq \dim E(\lambda_j) \leq m_j$ (m_j ist algebraische Vielfachheit von λ_j.)

Folgerung:

- $\mathcal{A}$ ist singulär. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ besitzt den Eigenwert 0.
- $\mathcal{A}$ ist regulär. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte sind von Null verschieden.

Satz:

Hat $\mathcal{A}$ die verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit den Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Dann sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig.

Unser Ziel ist:

Aus $\sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = \vec{o}$ muß auf $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ geschlossen werden. Wir führen eine vollständige Induktion durch:

- Induktionsanfang $k = 1$:

  $\alpha_1 \vec{v}_1 = \vec{o} \Rightarrow \alpha_1 = 0$

  Dies ist trivial!

- Induktionsschluß $k - 1 \mapsto k$:

  $$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_j \vec{v}_j = & \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \mathcal{A} \vec{v}_j = \vec{o} \\ & \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \lambda_k \vec{v}_j = \vec{o} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_k) \vec{v}_j = \vec{o}$$

  $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_k) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, k-1$

  Mit der **Induktionsvoraussetzung** ergibt sich dann:

  $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$

Folgerung:

Hat die Matrix $\mathcal{A}$ n verschiedene Eigenwerte, so ist sie diagonalisierbar.

Satz:

Die Matrix $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ hat genau dann linear unabhängige Eigenvektoren, wenn für jeden Eigenwerte die algebraische Vielfachheit und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

Satz:

Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{(m,n)}$ **hermitesch** ($\mathcal{A} = \mathcal{A}^\star$). Dann gelten:

1.) Alle Eigenwerte sind reell.

2.) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

3.) $\mathcal{A}$ hat n orthogonale Eigenvektoren, das heißt, $\mathcal{A}$ läßt sich in einer unitären Matrix diagonalisieren.

Satz:

$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ sei symmetrisch ($\mathcal{A} = \mathcal{A}^\mathsf{T}$). Dann gibt es ein Orthonormalsystem $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ von Eigenvektoren, das heißt:

$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathcal{C}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{C} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ mit $\mathcal{C} = [\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n]$

Auswertung zu vorhergehendem Satz:

Diagonalisiere die symmetrische Matrix $\mathcal{A}$: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_p$ seien verschiedene Eigenwerte.

λ_1	λ_2	λ_3	$\ldots$	λ_p
(m_1)	(m_2)	(m_3)	$\ldots$	(m_p)
dim $E(\lambda_1)$	dim $E(\lambda_2)$	dim $E(\lambda_3)$	$\ldots$	dim $E(\lambda_p)$
Basis:				
$\vec{v}_1^{(1)}, \ldots, \vec{v}_{m_1}^{(1)}$	$\vec{v}_1^{(2)}, \ldots, \vec{v}_{m_2}^{(2)}$	$\vec{v}_1^{(3)}, \ldots, \vec{v}_{m_3}^{(3)}$	$\ldots$	$\vec{v}_1^{(p)}, \ldots, \vec{v}_{m_p}^{(p)}$
SCHMIDTsches Orthonormalisierungsverfahren:				
$\vec{y}_1^{(1)}, \ldots, \vec{y}_{m_1}^{(1)}$	$\vec{y}_1^{(2)}, \ldots, \vec{y}_{m_2}^{(2)}$	$\vec{y}_1^{(3)}, \ldots, \vec{y}_{m_3}^{(3)}$	$\ldots$	$\vec{y}_1^{(p)}, \ldots, \vec{y}_{m_p}^{(p)}$
Umbenennung:				
$\vec{x}_1$	$\vec{x}_2$	$\vec{x}_3$	$\ldots$	$\vec{x}_p$

Vorbereitung zu nächstem Satz:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u}^t \overline{\vec{v}}$

$\langle \mathcal{A}\vec{x}, \vec{y} \rangle = (\mathcal{A}\vec{x})^\mathsf{T} \overline{\vec{y}} = \vec{x}^\mathsf{T} \overline{\mathcal{A}}^\mathsf{T} \overline{\vec{y}} = \vec{x}^\mathsf{T} \overline{\mathcal{A}^\star \vec{y}} = \vec{x}^\mathsf{T} \overline{\mathcal{A}^\star \vec{y}} = \langle \vec{x}, \mathcal{A}^\star \vec{y} \rangle$

Ist $\mathcal{A}$ hermitesch, so gilt $\langle \mathcal{A}\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mathcal{A}\vec{y} \rangle \ \forall \ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}$.

Satz 7, 1.):

$\langle \mathcal{A}\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mathcal{A}\vec{y} \rangle \, \forall \, \vec{x}, \vec{y}$

Sei λ Eigenwert, $\vec{x}_0$ sei Eigenvektor, also gelte $\mathcal{A}\vec{x}_0 = \lambda \vec{x}_0$. Setze $\vec{x} = \vec{y} = \vec{x}_0$:

$\langle \lambda \vec{x}_0, \vec{x}_0 \rangle = \langle \vec{x}_0, \lambda \vec{x}_0 \rangle$

$\lambda \|\vec{x}_0\|^2 = \overline{\lambda} \|\vec{x}_0\|^2 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}, \text{ das heißt } \lambda \in \mathbb{R}$

Satz 7, 2.):

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt:

$\mathcal{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1, \mathcal{A}\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2$

Unser Ziel ist $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$:

$\langle \lambda_1 \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle \vec{x}_1, \lambda_2 \vec{x}_2 \rangle \Rightarrow \lambda_1 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 = \lambda_2 \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$

2.7.3 Definitheit reeller Matrizen

Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\mathsf{T}$. Ordne $\mathcal{A}$ die Funktionen Q: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T} \mathcal{A} \vec{x}$ zu. Im Falle $n = 3$ gilt:

$$\mathcal{A} = (\alpha_{jk}), \vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} : Q(\xi_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \alpha_{11}\xi_1^2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{33}\xi_3^2 + \underbrace{(\alpha_{12} + \alpha_{21})}_{2\alpha_{12}} \xi_1 \xi_2 + \underbrace{(\alpha_{13} + \alpha_{31})}_{2\alpha_{13}} \xi_1 \xi_3 + \underbrace{(\alpha_{23} + \alpha_{32})}_{2\alpha_{23}} \xi_2 \xi_3$$

Definition:

1.) $\mathcal{A}$ heißt **positiv definit** $\Leftrightarrow \vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x} > 0 \;\forall\; \vec{x} \neq \vec{o}$

2.) $\mathcal{A}$ heißt **positiv semidefinit** $\Leftrightarrow \vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x} \geq 0 \;\forall\; \vec{x}$

3.) $\mathcal{A}$ heißt **indefinit** $\Leftrightarrow$ Es gibt $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ mit $\vec{x}_1^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x}_1 > 0, \vec{x}_2^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x}_2 < 0$

4.) $\mathcal{A}$ heißt **negativ (semi)definit** $\Leftrightarrow -\mathcal{A}$ ist **positiv (semi)definit**.

Satz:

$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\mathsf{T}$. Dann gelten:

1.) $\mathcal{A}$ **positiv definit** $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte sind > 0.

2.) $\mathcal{A}$ positiv **semidefinit** $\Leftrightarrow$ Eigenwerte sind ≥ 0, mindestens einer ist $= 0$.

3.) $\mathcal{A}$ **indefinit** $\Leftrightarrow$ Es gibt Eigenwerte λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

Nachrechnen:

$\mathcal{A}$ besitzt ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\underbrace{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n}_{\text{Basis in } \mathbb{R}^n} : \mathcal{A}\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \vec{v}_j^\mathsf{T}\vec{v}_k = \delta_{jk}$.

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{v}_j : Q(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x} = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{v}_j\right)^\mathsf{T} \mathcal{A} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \vec{v}_k\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{v}_j\right)^\mathsf{T} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k \vec{v}_k\right) =$$

$$= \sum_{j}^{n}\sum_{k}^{n} \xi_j \xi_k \lambda_k \underbrace{\vec{v}_j^\mathsf{T}\vec{v}_k}_{\delta_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \lambda_j$$

- Positive Definitheit:

  Ist $\mathcal{A}$ positiv definit, also $Q(\vec{x}) > 0 \;\forall\; \vec{x} \neq \vec{o}$, dann gilt $Q(\vec{v}_k) = \lambda_k > 0$. Also sind alle Eigenwerte > 0. Sind umgekehrt alle Eigenwerte > 0, so gilt:

  $$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \lambda_j > 0 \,\forall\, \vec{x} \neq \vec{o}$$

  Dann ist $\mathcal{A}$ positiv definit.

- Indefinitheit:

  $\mathcal{A}$ ist **indefinit**, wenn $Q(\vec{x}_1) > 0, Q(\vec{x}_2) < 0$. Es gibt einen positiven und einen negativen Eigenwert (mit Widerspruch zu vorher).

  $Q < Q(v_1) = \lambda_1, Q(v_2) = \lambda_2 < 0 \Leftarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

Im Falle $n = 2$ kann man dies folgendermaßen feststellen:

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ ist

- Positiv definit $\Leftrightarrow a > 0$ und $ac - b^2 > 0$
- Negativ definit $\Leftrightarrow a < 0$ und $ac - b^2 > 0$
- Positiv semidefinit $\Leftrightarrow a + c > 0$ und $ac - b^2 = 0$
- Indefinit $\Leftrightarrow ac - b^2 < 0$

Beweis (als Übung):

λ_1, λ_2 sind die Eigenwerte von $\mathcal{A}$:

$a + c = \lambda_1 + \lambda_2$

$ac - b^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

Es ist $\mathbb{R}^{(m,n)} \ni \mathcal{A} = (\alpha_{jk})_{j,\,k=1,\,\dots,\,n}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\mathsf{T}$.

$$D_k \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} \text{ wobei } k = 1,\, 2,\, \dots,\, n$$

Satz:

$\mathcal{A}$ sei positiv definit. $\Leftrightarrow D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \dots,\ D_n > 0$ (=Satz 2 für $n = 2$)

2.7.4 Quadriken (Kegelschnitte, Flächen 2.Grades)/Hauptachsentransformation

In der Schule:

- Gerade (im $\mathbb{R}^2$): $ax + by + c = 0$
- Ebene (im $\mathbb{R}^3$): $ax + by + cz + d = 0$

Jetzt in der Universität:

- Kegelschnitt (im $\mathbb{R}^2$): $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$
- Flächen (im $\mathbb{R}^3$): $ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + jz + k = 0$

Zylinder, Kugel, Ellipsoide usw. können so dargestellt werden. Diese Formen kann man folgendermaßen schreiben:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + k = 0$$

Definition:

Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$, h: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $h(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x} + 2\vec{b}^\mathsf{T}\vec{x} + c$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $c \in \mathbb{R}$. Die Menge $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | h(\vec{x}) = 0\}$ heißt **Quadrik**, im Fall $n = 2$ **Kegelschnitt** und im Fall $n = 3$ **Fläche 2.Grades.**

Beispiel:

Wir betrachten $\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0$.

1.) Schnitt mit (ξ_2, ξ_3)-Ebene: $\xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0 \Rightarrow$ 1. und 2.Winkelhablierenden in Ebene

2.) Schnitt parallel zur (ξ_1, ξ_2)-Ebene: $\xi_3 = c \Rightarrow$ Kreise

Bei dieser Figur handelt es sich somit um einen Doppelkegel.

Satz:

Normalformen für $h(x)$: Es sei $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ symmetrisch. $h(\vec{x}) = \vec{x}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{x} + 2\vec{b}^\mathsf{T}\vec{x} + c$ läßt sich durch die Transformation $\vec{x} \mapsto \vec{y} = V^\mathsf{T}(\vec{x} - \vec{p})$, $\boxed{\vec{x} = V\vec{y} + \vec{p}}$ mit einer orthogonalen Matrix $\mathcal{V}$ ($\det \mathcal{V} = +1$) und einem Vektor $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ überführen in eine der folgenden Normalformen:

1.) $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \eta_j^2 + \beta = h(V\vec{y} + \vec{p})$, $r = \operatorname{rang}(\mathcal{A})$

2.) $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \eta_j^2 + 2\gamma\eta_n = h(V\vec{y} + \vec{p})$, $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) < n$ mit $p > 0$

$\vec{x} \mapsto \vec{y}$ heißt Hauptachsentransformation.

Einige Bemerkungen zur Hauptachsentransformation:

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sei Orthonormalsystem von Eigenvektoren von $\mathcal{A}$: $V = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$. $\vec{y} = \vec{o} \Rightarrow \vec{x} = \vec{p}$ wird der neue Koordinatenursprung.

$V\vec{e}_j = \vec{v}_j \Rightarrow \vec{x} = \vec{v}_j + \vec{p}$

Durch $\vec{x} = V\vec{y} + \vec{p}$ wird der Übergang vom Koordinatensystem $\vec{o}$, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ zum System $\vec{p}$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ beschrieben. $\vec{x}$ hat in dem neuen System die Darstellung $\vec{x} = \vec{p} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \eta_j \vec{v}_j$. Die $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$-Achsen sind die Hauptachsen der Quadrik.

$\mathcal{V}\vec{y} \mapsto \mathcal{V}\vec{x} \qquad \underbrace{\text{Drehung} + \text{Translation}}_{\text{Bewegung}}$

1.Schritt:

$$
\begin{aligned}
\hat{h}(\vec{y}) &= h(\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}) = (\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p})^\mathsf{T}\mathcal{A}(\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}) + 2\vec{b}^\mathsf{T}(\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}) + c \\
&= (\vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T} + \vec{p}^\mathsf{T})(\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} + \mathcal{A}\vec{p}) + 2\vec{b}^\mathsf{T}(\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}) + c = \\
&= \vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} + \vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{p} + \vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{p} + 2\vec{b}^\mathsf{T}(\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}) + c
\end{aligned}
$$

Außerdem gilt:

$$\vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{p} = (\vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{p})^\mathsf{T} = \vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}^\mathsf{T}\mathcal{V}\vec{y} = \vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y}$$

Damit können wir also schreiben:

$$\hat{h}(\vec{y}) = \vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} + 2\vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{p} + 2\vec{b}^\mathsf{T}(\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}) + c = \vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} + 2\left(\vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A} + \vec{b}^\mathsf{T}\right)\mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}^\mathsf{T}\mathcal{A}\vec{p} + 2\vec{b}^\mathsf{T}\vec{p} + c$$

Wir schreiben $\mathcal{V} = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$, wobei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sei. Es gibt $\vec{y}^\mathsf{T}\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}\vec{y} = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \eta_j^2$ verschiedene Fälle, je nachdem ob $\mathcal{A}$ regulär oder singulär ist. Gilt $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = n - k$ für $k \in \mathbb{N}$, dann sind k Eigenvektoren Null.

$$\underbrace{\mathcal{V}^\mathsf{T}\mathcal{A}\mathcal{V}}_{n-k} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\text{rang}=n-k}$$

Beispiel:

Wir behandeln den Fall $n = 2$:

$h(\vec{x}) = -17\xi_1^2 + 18\xi_1\xi_2 + 7\xi_2^2 + 16\xi_1 - 32\xi_2 + 28 = 0$

Wir lesen direkt ab:

$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix}$, $c = 28$

Jetzt können wir die Eigenwerte von $\mathcal{A}$ berechnen:

$\det \begin{pmatrix} -17-\lambda & 9 \\ 9 & 7-\lambda \end{pmatrix} = 0$

Damit folgt dann:

$(-17-\lambda)(7-\lambda) - 81 = -119 + 17\lambda - 7\lambda + \lambda^2 - 81 = \lambda^2 + 10\lambda - 200 \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda_{1/2} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{(10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-200)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-10 \pm 30}{2} = -5 \pm 15$

$\boxed{\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -20}$

Die Matrix ist regulär. Es existiert somit ein Mittelpunkt der Fläche. Für die Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 ergibt sich:

- Zu $\lambda_1 = 10$:

  $-27v_{11} + 9\vec{v}_{12} = 0$

  Daraus ergibt sich:

  $\boxed{\vec{v}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

- Zu $\lambda_2 = 20$:

  $\boxed{\vec{v}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Damit erhalten wir als Drehmatrix:

$\boxed{\mathcal{V} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$

Außerdem gilt:

$\vec{p} = \mathcal{A}^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{200}\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 9 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{h(1,1) = 20}$

Damit resultiert schließlich für die Normalform der Quadrik:

$\boxed{\hat{h}(\eta_1, \eta_2) = 10\eta_1^2 - 20\eta_2^2 + 20 = 0}$

$$\boxed{\eta_2^2 - \left(\frac{\eta_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1}$$

Es handelt sich um eine **Hyperbel**. Wir haben also folgende Transformation verwendet:

$$\vec{x} = \mathcal{V}\vec{y} + \vec{p}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\eta_1 - \frac{3}{\sqrt{10}}\eta_2 + 1$$

$$\xi_2 = \frac{3}{\sqrt{10}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\eta_2 + 1$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 = 1 \\ \eta_2 = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 = 0 \\ \eta_2 = 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Wir betrachten folgende Quadrik:

$$\xi_1^2 - 2\sqrt{3}\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 + 8\sqrt{3}\xi_1 - 8\xi_2 - 4 = 0$$

Auch hier können wir $\mathcal{A}$, $\vec{b}$ und c direkt ablesen:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} \\ -4 \end{pmatrix}, c = -4$$

Wir berechnen nun die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}$:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \lambda - 3 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 3 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 0}$$

Hieraus ergibt sich dann folgende Drehmatrix:

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}}$$

Mit der Transformation $\vec{x} \mapsto \vec{y}$, also $\vec{x} \mapsto \vec{z}$ und anschließend $\vec{z} \mapsto \vec{y}$ bringen wir die Quadrik auf Normalform. Zuerst führen wir also neue Koordinaten ein über:

$$\vec{x} = \mathcal{V}\vec{z} \text{ mit } \vec{z} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathcal{A}$ ist singulär, kann somit nicht invertiert werden. Dann ergibt sich durch Einsetzen der neuen Koordinaten und mittels anschließender quadratischen Ergänzung:

$$h(\mathcal{V}\vec{z}) = 4\xi_1^2 + 2\vec{b}^\intercal\mathcal{V}\vec{z} - 4 = 4\xi_1^2 + 8\sqrt{3}\xi_1 + 8\xi_2 - 4 = 4\left(\xi_1 + \sqrt{3}\right)^2 + 8(\xi_2 - 2)$$

$$\eta_1 = \xi_1 + \sqrt{3}$$

$$\eta_2 = \xi_2 - 2$$

Nun führen wir noch eine Verschiebung des Koordinatensystems durch:

$$\vec{y} = \vec{z} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} = \mathcal{V}^{\mathsf{T}} \vec{x} + \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} = 4\eta_1^2 + 8\eta_2 = 0$$

Damit ergibt sich also schlußendlich folgende Normalform:

$$\boxed{\eta_2 = -\frac{1}{2}\eta_1^2}$$

Es handelt sich also um eine **Parabel**.

Kapitel 3

Funktionen mehrerer Variablen

Motivation:

Es sei $\vec{f}$: $D \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ und $\mathcal{A}$ eine (m, n)-Matrix.

a.) $\vec{f}(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x}$.

b.) Komponentenfunktion, Koordinatenfunktion

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \qquad f_j : D \mapsto \mathbb{R}$$

c.) m skalare Gleichungen $y_j = f_j(\vec{x})$, wobei $j = 1, 2, \ldots, m$

$\vec{y} = f(\vec{x})$ ist stetig in $\vec{x}_0 \in D$, falls aus $\lim\limits_{k \mapsto \infty} \vec{x}^k = \vec{x}_0$ ($\vec{x}^k$ ist eine Folge $\subset D$) folgt: $\lim\limits_{k \mapsto \infty} \vec{f}(\vec{x}^k) = \vec{f}(\vec{x}_0)$. $(\vec{a}^k)_k$ sei eine Folge von Vektoren:

$$\vec{a}^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k \\ \alpha_2^k \\ \vdots \\ \alpha_n^k \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Definition:

$\lim_{k \mapsto \infty} \vec{a}^k = \vec{a}$ heißt: $\lim\limits_{k \mapsto \infty} \|\vec{a}^k - \vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \alpha_j^k \mapsto \alpha_j$ für $k \mapsto \infty$, $j = 1, 2, \ldots, n$

Beweis:

$$\|\vec{a}^k - \vec{a}\| = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_j^k - \alpha_j\right)^2$$

Beispiel:

$$\vec{a}^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \sin k \\ k^3 \mathrm{e}^{-k} \\ \sqrt[k]{k} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \mapsto \infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sätzchen:

$\vec{f} : D \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist stetig in $\vec{x}_0 \in D \Leftrightarrow$ Jede Koordinatenfunktion f_j ist in $\vec{x}_0$ stetig.

Satz:

$\vec{f} : D \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist in $\vec{x}_0 \in D$ stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß aus $\vec{x} \in D$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ folgt: $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| < \epsilon$.

Übung:

Was heißt, daß $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ unstetig ist?

1.) $\mathcal{A}$ sei (m, n)-Matrix, $\vec{f}(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{f}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^n$

$$f_j(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\xi_l$$

Es gelte $\vec{x}^k \mapsto x$ für $k \mapsto \infty$: Gilt dann $f_j(\vec{x}^k) \mapsto f_j(\vec{x})$ für $j = 1, 2, \ldots, n$?

$$f_j(\vec{x}^k) = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}\xi_l^k = \alpha_{j1}\xi_1^k + \alpha_{j2}\xi_2^k + \ldots + \alpha_{jn}\xi_n^k \mapsto \alpha_{j1}\xi_1 + \alpha_{j2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{jn}\xi_n = f_j(\vec{x})$$

2.) $\vec{f}: \mapsto \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f ist in $(0, 0)$ **unstetig**. Falls stetig: $\lim\limits_{(x_k, y_k) \mapsto (0,0)} f(x_k, y_k) = 0$ für jedes Folge $(x_k, y_k) \mapsto (0, 0)$

Übung:

1.) Falls $(x_k, y_k) \in$ Gerade durch $(0, 0)$, dann gilt $f(x_k, y_k) \mapsto 0$ für $k \mapsto \infty$

2.) $(x_k, y_k) = \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$: $f\left(k, \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) \mapsto \dfrac{1}{2}$

Beispiel:

$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Übung:

$\vec{f}$ ist stetig für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Existiert $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} \vec{f}(x,y)$? Wenn ja, wird dieser Wert als Wert für $\vec{f}(0,0)$ gewählt. Wir untersuchen die Funktion komponentenweise:

$$0 \leq f_1(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_1(x,y) = 0$$

$$0 \leq |f_2(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_2(x,y) = 0 \qquad |xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

$$0 \leq f_3(x,y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f_3(x,y) = 0 \qquad \vec{f}(0,0)$$

$$\vec{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hiermit ist $\vec{f}$ in $\mathbb{R}^2$ stetig.

Beispiel:

$f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist **stetig**. $\qquad f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ Es handelt sich hierbei um ein Paraboloid.

Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diese Funktion ist unstetig, da $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$ nicht existiert.

3.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Für $n = 2$ handelt es sich um ebene Kurven, für $n = 3$ sind es sogenannte Raumkurven.

Definition:

Es sei $\vec{r} = \vec{f}\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ und $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a,b]$. Eine **stetige** Abbildung $\vec{r}\colon I \mapsto \mathbb{R}^n$, $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}$, heißt **Kurve**. t heißt **Parameter**, $\vec{r}$ heißt **Parameterdarstellung** von $\vec{r}(I) = \{\vec{r}(t) | t \in I\} = K$. K heißt **Trajektorie** (**Spur**) von $\vec{r}$.

Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad -1 \leq t \leq +1$$

Es handelt sich um einen Halbkreis auf der rechten Halbebene.

Beispiel:

$a, b > 0 = \text{const.}$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$ für $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Dies ist eine Ellipse auf der rechten Halbebene.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ für $a \leq t \leq b$

Dies ist eine andere Darstellung für $y = f(x)$.

Übung:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $c \leq t \leq d$

Die Umkehrfunktion $x = g(y)$ wird damit dargestellt.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \varrho(t)\cos\varphi(t) \\ \varrho(t)\sin\varphi(t) \end{pmatrix} \qquad \varrho(t) \geq 0$ und stetig, φ ist stetig

$\vec{r}(t) = \frac{t}{2\pi}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ für $2\pi \leq t \leq 4\pi$

Es handelt sich hier um eine sogenannte ARCHIMEDESsche Spirale.

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$

Die Kurve stellt eine Schraubenlinie mit gleichbleibender Ganghöhe dar.

Im $\mathbb{R}^2$ wird durch $z = z(t), a \leq t \leq b$ eine Kurve beschrieben:
$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ „identisch " $r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

Beispiel:

$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0 \leq t \leq 2\pi : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Durch eine Parameterdarstellung wird K eine **Orientierung** durch ein Wachsen der Parameterwerte gegeben. $\vec{r}(a)$ ist Anfangspunkt, $\vec{r}(b)$ der Endpunkt der Kurve. Ist die Kurve $\vec{r} : I \mapsto \mathbb{R}^n$ **injektiv** (d.h. aus $t_1 \neq t_2$ folgt $F(t_1) \neq F(t_2)$), so heißt sie **Jordankurve**. Sie besitzt dann keine **Doppelpunkte**. Der Punkt P habe den Ortsvektor $\vec{r}(t_1)$. P ist Doppelpunkt, wenn $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\vec{r}(1) = \vec{r}(-1) = \vec{o}$: $\vec{o}$ ist Doppelpunkt.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t(2\cos t - 1) \\ \sin t(2\cos t - 1) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$

$\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \vec{r}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \vec{o}$

$\vec{o}$ ist Doppelpunkt.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 1$

Es ist der obere Halbkreis.

$\vec{r}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}, 0 \leq \tau \leq \pi$

Auch hiermit wird der obere Halbkreis dargestellt.

3.1.1 Parametertransformation

$\vec{r} : I = [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ sei Kurve. $\vec{r} = \vec{r}(t), \vec{\varrho}(J) = \vec{r}(I)$ $\vec{\varrho} : J = [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}^n$ sei Kurve $\vec{\varrho} = \vec{\varrho}(\tau)$. Eine bijektive stetige Abbildung $g : [\alpha, \beta] \mapsto [a,b], t = g(\tau)$ mit $\vec{r}(g(\tau)) = \vec{\varrho}(\tau)$ bzw. $\vec{\varrho}(g^{-1}(t)) = \vec{r}(t))$ heißt **Parametertransformation**.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 1$

$\vec{r}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}, 0 \leq \tau \leq \pi$

Durch Koordinatentransformation erhält man:

$\vec{r}(-\cos\tau) = \vec{\varrho}(\tau)$

$\vec{\varrho}(-\arccos(t)) = \vec{r}(t)$

Beispiel:

Eine Raumdiagonale wird dargestellt durch:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 1$

$t = \tau^2 = g(\tau):$

$\vec{r\varrho}(t) = \begin{pmatrix} \tau^2 \\ \tau^2 \\ \tau^2 \end{pmatrix}, -1 \leq \tau \leq 1$

Dies ist dieselbe Raumdiagonale.

3.2 Differentiation von Kurven $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m$

$\vec{r} = \vec{f} : I\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ heißt in x_0 differenzierbar, falls es einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ und eine in x_0 stetige Funktion $\vec{\varphi} : I \mapsto \mathbb{R}^m$ gibt mit:

$$\vec{f}(x) = \vec{f}(x_0) + \vec{a}(x - x_0) + \vec{\varphi}(x)(x - x_0), x \in I \text{ und } \vec{\varphi}(x_0)) = 0$$

In diesem Fall ist $\vec{a}$ eindeutig bestimmt, $\vec{a}$ wird mit $\vec{f}'(x_0)$ bezeichnet.

$$\underbrace{\lim_{x \mapsto x_0} (\vec{a} + \vec{\varphi}(x))}_{\vec{a}} = \lim_{x \mapsto x_0} \left(\frac{\vec{f}(x) - \vec{f}(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Ist $\vec{r} : I \mapsto \mathbb{R}^m$ in $t_0 \in I$ differenzierbar, so gilt:

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)\,(t - t_0)}_{\vec{g}(t)} + \vec{\varphi}(t)\,(t - t_0)\,, \vec{\varphi} \text{ ist stetig, } \vec{\varphi}(t_0) = 0$$

$\vec{g}(t)$ ist Parameterdarstellung einer Geraden, die in einer Umgebung von $\vec{r}(t_0)$ die Kurve $\vec{r}(t)$ in dem Sinne „gut “ approximiert, daß

$$\lim_{t \mapsto t_0} \frac{\|r(t) - g(t)\|}{t - t_0} = 0$$

$\vec{f}(t)$ beschreibt die Tangente $\vec{r} = \vec{r}(t)$ in $\vec{r}(t_0)$, falls $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{o}$:

$$\vec{g}(t) = \lim_{t_1 \mapsto t_0} \left\{ \vec{r}(t_0) + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \left(\vec{r}(t_1) - \vec{r}(t_0) \right) \right\}$$

Erinnerung (HM I):

Betrachten wir den Spezialfall $n = 2$:

- Explizite Kurvendarstellung:

  $$\left. \begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= g(y) \end{aligned} \right\}$$

- Parameterdarstellung:

  $$\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in I$$

- Implizite Darstellung:

  $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Darstellung als Schnitt von zwei Flächen ($n = 3$):

  $$\left. \begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$

Betrachten wir die implizite Darstellung:

$$\left.\begin{matrix} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{matrix}\right\} \xrightarrow{t \text{ eliminieren}} x^3 + x^2 = y^2$$

$\vec{r}(-1) = \vec{r}(1) = \vec{o}$

$t = 0 : \vec{r}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r}'(-1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{r}'(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Satz:

> $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}$ ist in t_0 differenzierbar.
>
> Jede Koordinatenfunktion ξ_k: $I \mapsto \mathbb{R}$ ist in t_0 differenzierbar, und es gilt: $\vec{r}'(t_0) = \begin{pmatrix} \xi_1'(t_0) \\ \xi_2'(t_0) \\ \vdots \\ \xi_n'(t_0) \end{pmatrix}$

Schreibe die k-te Komponente obiger Gleichung auf:

$\xi_k(t) = \xi_k(t_0) + (\vec{r}(t_0))_k\,(t - t_0) + \varphi_k(t_0)(t - t_0) \qquad (\varphi_k$ ist stetig, $\varphi_k(t_0) = 0)$

$$\lim_{t \mapsto t_0} \frac{\xi_k(t) - \xi_k(t_0)}{t - t_0} = (\vec{r}'(t_0))_k$$

Definition:

> Eine stetig differenzierbare Kurve $\vec{r} : I \mapsto \mathbb{R}^m$ mit $\vec{r}'(t) \neq \vec{o}, t \in I$, heißt **glatte** (**reguläre**) Kurve. Ist $\vec{r}'$ **stückweise stetig**, so heißt die Kurve $\vec{r} : I \mapsto \mathbb{R}^m$ **stückweise glatt**. Eine Menge K, die glatt ist, (Tangenten besitzt), kann eine Parameterdarstellungen besitzen, die nicht glatt sind.

Beispiele:

- Glatte Kurve:

  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, 1 \leq t \leq 1$

- Nichtglatte Kurve:

  $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 1$

  $\vec{r}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definition:

Die Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ heißt glatt, falls es eine reguläre Parameterdarstellung gibt.

Satz:

$\vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$ sei C^1-Kurve und regulär. Dann ist die Parametertransformation $t = g(\tau), \alpha \leq t \leq \beta$ eine bijektive, stetig differenzierbare $(\vec{r}([a, b]) = \varrho[(\alpha, \beta)])$ Abbildung mit $g'(\tau) \neq 0$. $\vec{\varrho}(t) = \vec{r}(g(\tau)), \alpha \leq \tau \leq \beta$ unparametrisierte Kurve.

Beispiel:

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 1, t = g(\tau) = -\cos\tau$

$\vec{\varrho}(t) = \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi$

$\vec{\varrho}'(\tau) = \vec{r}'(g(\tau))g'(\tau)$

$\|\vec{\varrho}'(\tau)\| = \|\vec{r}'(g(\tau))\| \cdot \|g'(\tau)\|$

Damit erhalten wir durch Differentiation folgenden Geschwindigkeitsvektor:

$$\boxed{\vec{r}'(t_0) = \lim_{t \mapsto t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}}$$

$\|\vec{r}'(t_0)\|$ ist der Betrag der Geschwindigkeit.

- Orientierungserhaltende Parametertransformation:

  $g'(\tau) > 0 : g(\alpha) = a, g(\beta) = b$

- Orientierungsumkehrende Parametertransformation

  $g'(\tau) < 0 : g(\alpha) = b, g(\beta) = a$

Beispiel:

$\vec{t} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$

$\vec{\varrho}(\tau) = \underbrace{\vec{r}(a + b - \tau)}_{g(\tau)}, a \leq \tau \leq b$

3.2.1 Bogenlänge (Länge L einer glatten Kurve C)

Es sei $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, $\vec{r}'(t) = \vec{o}$ und $t \in [a, b]$. Wir teilen die Kurve in Intervalle $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$.

$$\sum_{j=0}^{k-1} \|\vec{r}(t_{j+1}) - \vec{r}(t_j)\|$$

Satz:

$\vec{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$ sei glatte Kurve im $\mathbb{R}^m$. Dann gilt für die Länge von $\vec{r}([a, b])$:

$$L(C) = L_b^a(\vec{r}) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, \mathrm{d}t$$

Illustration:

$l'(t) = \text{Geschwindigkeit} = \|\vec{r}'(t)\|$

$$\int_a^b : l(b) - \underbrace{l(a)}_{=0} = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t = L$$

Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \geq 0$$

Die Länge der Kurve berechnet sich durch folgendes Parameterintegral:

$$L(\vec{r}) = \int_0^\infty \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

$$r'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{r} = \int_0^\infty \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sqrt{2}\mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$$

Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \left(1 + \mathrm{e}^{-t}\right) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \geq 0$$

$$\|\vec{r}(t)\| = \sqrt{\mathrm{e}^{-2t} + (1 + \mathrm{e}^{-t})^2} > 1 + \mathrm{e}^{-t}$$

$$L(\vec{r}) = \int_0^\infty \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t > \int_0^\infty (1 + \mathrm{e}^{-t}) \,\mathrm{d}t \text{ existiert nicht.}$$

Beispiel:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}, -1 \leq t \leq 1$$

$$\|\vec{r}'(t)\|^2 = 1 + \frac{t^2}{1 - t^2} = \frac{1}{1 - t^2}$$

$$L(\vec{r}) = \int_{-1}^{+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = \pi = \arcsin\Big|_{-1}^{1}$$

$$\vec{\varrho}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi, \|\vec{\varrho}(t)\| = 1$$

$$L(\vec{\varrho}) = \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}t = \pi$$

Satz:

Der folgende Satz beschreibt die Invarianz der Bogenlänge gegen Parametertransformationen:

Es sei $\vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$ eine glatte Kurve und $g : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b](g = g(\tau))$ eine bijektive C^1-Funktion mit $g(\tau) \neq 0$. Bezeichnet $\vec{\varrho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau)), \alpha \leq \tau \leq \beta$ die unparametrisierte Kurve, so gilt:

$$L(\vec{\varrho}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\vec{\varrho}'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{a}^{b} \|\vec{r}(t)\| \,\mathrm{d}t = L(\vec{r})$$

Nachrechnen:

$g'(\tau) < 0 : g(\alpha) = b, g(\beta) = a, |g'(\tau)| = -g'(\tau)$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\vec{\varrho}'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\tau} g(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\vec{r}'(g(\tau))\| g'(\tau) \,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \|\vec{r}'(g(\tau))\| g'(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\beta}^{\alpha} \|\vec{r}'(g(\tau))\| g(\tau) \,\mathrm{d}\tau$$

$$t = g(\tau) \int\limits_{a}^{b} \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Beispiel:

Wir betrachten die implizite Darstellung der Asteroide:

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ mit $a = \text{const.}$

Die Kurve ist symmetrisch zur x-Achse und y-Achse. Infolgedessen brauchen wir nur $x \geq 0$, $y \geq 0$ zu untersuchen.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos^3 t \\ a\sin^3 t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Wir berechnen die Länge der Kurve:

$\|\vec{r}'(t)\|^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$

$$L = 4 \cdot 3a \cdot \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = 6a$$

3.2.2 Die natürliche Darstellung einer Kurve

$\vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$ sei glatte Kurve. S ist der sogenannte Bogenlängenparameter. Mit L wird die Länge der Kurve bezeichnet.

$$s = l(t) = \int\limits_{a}^{t} \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t, a \leq t \leq b$$

$l : [a, b] \mapsto [0, L]$: Die Funktion ist bijektiv. $l'(t) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$, sie ist also stetig differenzierbar. Das heißt: $s = l(t)$ ist als Parametertransformation brauchbar: $t = l'(s)$

$$\vec{r}(t) \mapsto \boxed{\vec{\varrho}(s) = \vec{r}(l^{-1}(s))}, 0 \leq s \leq L$$

Diese Darstellung heißt die **natürliche** Darstellung der Kurve/Darstellung bezüglich der Bogenlänge.

Wir bilden die Ableitung der Funktion:

$$\vec{\varrho}'(s) = \vec{r}'(l^{-1}(s))(l^{-1})'(s) = r'(l^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{l'(l^{-1}(s))} = \frac{\vec{r}'(l^{-1}(s))}{\|\vec{r}'(l^{-1}(s))\|} : \|\vec{r}'(s)\|^2 = 1$$

$$l_0^s(\vec{\varrho}) = \int\limits_0^s \|\vec{\varrho}'(\sigma)\| \,\mathrm{d}\sigma = s$$

$\vec{r}$: $I \mapsto \mathbb{R}^m$ sei glatte Kurve $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Sie ist bogenparametrisiert, falls $\|\vec{r}'(t)\| = 1 \;\forall\; t$ gilt.

Beispiel: Schraubenlinie

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$s = l(t) = \int\limits_0^t \|\vec{r}'(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}t = s \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{2}} = l^{-1}(s)$$

Die natürliche Darstellung der Schraubenlinie lautet deshalb wie folgt:

$$\vec{\varrho}(s) = \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \sin \frac{s}{\sqrt{2}} \\ \frac{s}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, 0 \leq s \leq 2\sqrt{2}\pi$$

Nun kann man die Länge zwischen zwei Werten schnell berechnen: $L_{s_1}^{s_2}(\vec{\varrho}) = s_2 - s_1$

Bemerkung:

$\vec{r} = \vec{r}(s)$ sei die natürliche Darstellung einer glatten Kurve. $1 = \|\vec{r}'(s)\|^2 = \vec{r}'(s)^\intercal \vec{r}'(s) \xrightarrow{\text{Differenziere}} 0 = 2\vec{r}'(s)\vec{r}''(s)$. $\vec{r}''(s)$ ist eine Richtung, die senkrecht zur Kurve in Punkte $\vec{r} = \vec{r}(s)$ steht. $\vec{r}''(s)$ ist der sogenannte Hauptnormalenvektor. Wer weiterhin noch Interesse hat, sollte die Begriffe Binormale und Fresnelsche Formel in einem Mathematikbuch nachschlagen.

3.3 Differenzieren von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

3.3.1 Richtungsableitung/Partielle Ableitung

Wir betrachten fortan folgende Funktionen:

$$\vec{f} : D \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$

Eine solche Funktion nennt man für $m > 1$ Vektorfeld, für $m = 1$ handelt es sich um ein sogenanntes Skalarfeld. Kraftfelder und elektrische Felder sind beispielsweise Vektorfelder. Temperaturfelder sind Skalarfelder.
Zuerst führen wir eine Vorbetrachtung zur Motivation durch:

$n = 2, n = 1:$

$$z = g(x, y), \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1 + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}_0 + t\vec{v} \\ g(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \end{pmatrix}$

Gegeben ist $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (in Definitionsbereich von $g = g(x,y)$) und eine Richtung $\vec{v} \neq \vec{o}$ im $\mathbb{R}^2$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + tv_1 \\ y_0 + tv_2 \\ g(x_0 + tv_1, y_0 + tv_2) \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$ beschreibt die Kurve auf der Fläche $z = g(x,y)$.

Definition:

$g : D \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sei Skalarfeld, $\vec{x}_0 \in D$ und $\vec{v} \neq \vec{o}$ im $\mathbb{R}^n$ seien gegeben. Außerdem sei $\phi(h) = g(\vec{x}_0 + h(\vec{v})$ mit $h \in \mathbb{R}$ und ϕ: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Dann ist $\phi'(0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}(\phi(h) - \phi(0))$ die Richtungsableitung von ϕ in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.

$\phi'(0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}(\phi(h) - \phi(0)) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}(g(x_0 + h\vec{v}) - g(\vec{x}_0)) =: (D_{\vec{v}}g)(\vec{x}_0)$

Mit vorherigem Beispiel:

$\vec{r}'(0) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}(\vec{r}(h) - \vec{r}(0)) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \vec{x}_0 + h\vec{v} - \vec{x}_0 \\ g(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - g(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ (D_{\vec{v}}g)(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$

Ist $(D_{\vec{v}}g)(\vec{x}_0) > 0$, so wächst $\vec{g}(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$. Wenn $(D_{\vec{v}}g(\vec{_0}) < 0$ ist, so fällt $\vec{g}(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v}$.

Definition:

$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ sei Vektorfeld.

$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 \in D$ und $\vec{v} \neq \vec{o}$ im $\mathbb{R}^n$ seien gegeben. So kann man die Richtungsableitung komponentenweise definieren:

$$\left(D_{\vec{v}}\vec{f}\right)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} (D_{\vec{v}}f_1)(\vec{x}_0) \\ (D_{\vec{v}}f_2)(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ (D_{\vec{v}}f_n)(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, g(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 = \vec{x}^\intercal\vec{x}$

$(D_{\vec{v}}g)(\vec{x}) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}\left(\|\vec{x} + h\vec{v}\|^2 - \|\vec{x}\|^2\right) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{1}{h}\left(\|\vec{x}\|^2 + h^2\|\vec{v}\|^2 + 2h\vec{v}^\intercal\vec{x} - \|\vec{x}\|^2\right) = 2\vec{v}^\intercal\vec{x} = h(\vec{x})$

$(D_{\vec{v}}h)(\vec{x}) = D^2_{\vec{v}}g)(\vec{x}) = \lim\limits_{h \mapsto 0}(2\vec{v}^\intercal(\vec{x} + h\vec{v} - 2\vec{v}^\intercal\vec{x}) = 2\|\vec{v}\|^2$

$(D^3_{\vec{v}}g)(\vec{x}) = 0$

Beispiel:

$\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ sei konstant.

$\vec{f}(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x} \qquad \vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

$$(D_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h} (\mathcal{A}(\vec{x} + h\vec{v}) - \mathcal{A}\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x} + h\mathcal{A}\vec{v} - \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{v} \qquad (D^2_{\vec{v}}\vec{f})(\vec{x}) = \vec{o}$$

Zu 1.):

$$(D^2_{\vec{v}}g)(\vec{x}) = D_{\vec{v}}(\underbrace{2\vec{v}^\intercal}_{(1,n)}\vec{x}) = 2\vec{v}^\intercal\vec{v} = 2\|\vec{v}\|^2$$

Definition (partielle Ableitung):

$\vec{f}$: $D \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. $(D_{\vec{e}_j}\vec{f})(\vec{x})$ heißt partielle Ableitung von $\vec{f}$ bezüglich x_j der j-ten Variablen.

$$(D_j f)(\vec{x}) := (D_{\vec{e}_j})\vec{f}(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\vec{f}, \vec{f}_{x_j}$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}(D_j\vec{f})(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \lim_{h \mapsto 0} \left(\vec{f}(\vec{x} + h\vec{e}_j) - \vec{f}(\vec{x})\right) = \\ &= \lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h} \left(f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}x_j + h(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\right)\end{aligned}$$

Es werden die Variablen x_1, …, x_{j-1}, x_j, …, x_n festgehalten; die übrigbleibende Funktion von x_j wird wie in HM I differenziert.

$f(x, y, z) = x^2y^3 + z \ln x$

$D_2 f(x, y, z) = x^2 3y^2$

Die partiellen Ableitungen $D_1^3 f$, $D_1 D_2 f$, … können als Übung berechnet werden.

3.3.2 Vektoranalysis

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f ist **nicht** stetig in (0,0).

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \vec{o}$$

$$(D_{\vec{v}}f)(0, 0) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h} \left(f(0 + hv_1, 0 + hv_2) - \underbrace{f(0, 0)}_{0} \right) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h} \left(\frac{hv_1^2 h^2 v_2^2}{v_1^2 h^2 + v_2^4 h^4} \right) = \lim_{h \mapsto 0} =$$

$$= \left(\frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + v_2^4 h^2} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad v_1 = 0 \\ \dfrac{v_2^2}{v_1} & \text{für} \quad v_1 \neq 0 \end{cases}$$

f ist im Punkt $(0,0)$ in jeder Richtung $\vec{v} \neq \vec{o}$ differenzierbar, also auch partiell differenzierbar.
Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ an der Stelle $(1,2)$.

Aus der Existenz der Richtungsableitungen an einer Stelle für jede Richtung darf nicht auf Stetigkeit geschlossen werden.

$f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} \ln z + x^2 + y^2 z$

y, z bleiben konstant, differenziere nach x wie gelernt: $f_x = D_1 f(x,y,z)$

$f_x = D_1 f(x,y,z) = y\mathrm{e}^{xy} \ln z + 2x$

Außerdem gilt hier: $D_2 D_1 f(x,y,z) = D_1 D_2 f(x,y,z)$, was in folgendem Satz verallgemeinert wird.

Schwarzscher Satz:

Die Funktion f besitze in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ die partiellen Ableitungen $D_j f, D_k f, D_j D_k f$. Es sei $D_j D_k f$ in $\vec{x}_0$ stetig. Dann existiert auch $D_k D_j f(\vec{x}_0)$ und es gilt: $(D_j D_k f)(\vec{x}_0) = (D_k D_j f)(\vec{x}_0)$.

Definition:

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offene** Menge, falls es für jeden Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein $\epsilon > 0$ gibt derart, daß $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}\vec{v}, |h| < \epsilon\} \subset D$ gilt.

$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \|h\vec{v}\| < \epsilon \|\vec{v}\|$

Bezeichnungen:

$\vec{f}\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

$\vec{f}$ heißt **in D partiell differenzierbar**, falls alle partiellen Ableitungen $D_k f_j(\vec{x}) (k = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,n)$ existieren für alle $\vec{x} \in D$. Die (m,n)-Matrix $(D_k f_j(\vec{x}))_{\substack{j=1,\ldots,n\\k=1,\ldots,n}}$ heißt **Funktionalmatrix** (**Jacobimatrix**) von $\vec{f}$ in $\vec{x}$:

$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = [D_1 \vec{f}(\vec{x}), D_2 \vec{f}(\vec{x}), \ldots, D_n \vec{f}(\vec{x})]$ oder $\left(\dfrac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)$

Falls $m = n$ ist, heißt $\det J_{\vec{f}}(\vec{x})$ **Funktionaldeterminante**.

3.3.3 Ebene Polarkoordinaten

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r > 0$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$\vec{f}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$, $D = \{(r,\varphi) | r > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ auf.

$J_{\vec{f}}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\det J_{\vec{f}}(r,\varphi) = r$

3.3.4 Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

$(r, \varphi, \vartheta) \mapsto (x, y, z)$

$x = r \cos\vartheta \cos\varphi$

$y = r \cos\vartheta \sin\varphi$

$z = r \sin\vartheta$

$r > 0, 0 \leq \varphi, 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ (Bijektivität)

$$\vec{f}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} : D = \left\{(r, \varphi, \vartheta) | r > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right\} \xrightarrow{\text{bijektiv}} \mathbb{R}^3 \setminus \{z\text{-Achse}\}$$

$$J_{\vec{r}}(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln nach der letzten Zeile und erhalten:

$$\det J_{\vec{f}}(r, \varphi, \vartheta) = \sin\vartheta r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \cdot \det \begin{pmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} + r\cos\vartheta\cos^2\vartheta \cdot r = r^2\cos\vartheta(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = r^2\cos\vartheta > 0$$

$$\left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$$

3.4 Nabla-Kalkül

3.4.1 Der Gradient

Das Symbol für den Gradienten ist $\vec{\nabla}$. $\vec{\nabla}$ ist ein sogenannter Vektoroperator.

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D_1 f \\ D_2 f \\ \vdots \\ D_n f \end{pmatrix} (\vec{x})$$

$$\vec{\nabla} : \begin{array}{lcl} \text{Skalarfeld} & \mapsto & \text{Vektorfeld} \\ f : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} & & \vec{\nabla} f : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n \end{array}$$

3.4.2 Die Divergenz

$\vec{\nabla} f(\vec{x})$ heißt **Gradient** von f in $\vec{x}$ $=\text{grad} f(\vec{x})$.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla}^\intercal \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} D_j f_j(\vec{x})$$

$$\vec{\nabla}^\intercal : \begin{array}{lcl} \text{Skalarfeld} & \mapsto & \text{Vektorfeld} \\ f : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n & & \sum_{j=1}^{n} D_j f_j(\vec{x}) = \text{div} \vec{f}(\vec{x}) \end{array}$$

3.4.3 Die Rotation

$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})$ für $\vec{x} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ $\qquad \vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \vec{e}_1(D_2 f_3 - D_3 f_2) + \vec{e}_2(D_3 f_1 - D_1 f_3) + \vec{e}_3(D_1 f_2 - D_2 f_1)$

3.4.4 Laplace-Operator

$$\vec{\nabla}^\intercal \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \operatorname{div}\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \left(\vec{\nabla}^\intercal \vec{\nabla}\right) f(\vec{x}) = \underbrace{\left(D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2\right)}_{\triangle = \vec{\nabla}^\intercal \vec{\nabla} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}} f(x)$$

$$\vec{a}^\intercal \vec{b} = \vec{b}^\intercal \vec{a} \qquad \vec{\nabla}^\intercal \vec{f} \neq \vec{f}^\intercal \vec{\nabla}$$

Beispiel:

Für ein Skalarfeld gilt:

$$\begin{array}{ll} f, g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} & f \cdot g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ \quad\downarrow & \quad\downarrow \\ \vec{\nabla}(fg) & \vec{\nabla}(fg) \end{array}$$

$$\vec{\nabla}(fg) = \vec{\nabla}(fg) + \vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g$$

Für ein dreidimensionales Vektorfeld erhalten wir:

$$\vec{\nabla} \times (f \cdot \vec{v}) = \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) + \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{v} + f\vec{\nabla} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$$\vec{\nabla}^\intercal (f\vec{v}) = \vec{\nabla}^\intercal (f\vec{v}) + \vec{\nabla}^\intercal (f\vec{v}) = \vec{v}^\intercal (\vec{\nabla} f) + f\vec{\nabla}^\intercal \vec{v}$$

Problem:

- Kugelkoordinaten:

  Welches Gebilde wird durch $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ beschrieben? Es handelt sich wohl um einen Kegel mit dem Öffnungswinkel $\frac{\pi}{2}$.

  - $\varphi = \text{const.} = \frac{\pi}{4}$: Beschreibung einer Ebene
  - $r = \text{const.}$: Kugeloberfläche

- Ebene Polarkoordinaten:

  - $r = \text{const.}$: Kreis
  - $\varphi = \text{const.}$: Halbgerade

Beispiel:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)(\vec{x})$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})(\vec{x}) = n$$

$$f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|) = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\right) \text{ kugelsymmetrisch}$$

$$h(\vec{x}) = \|\vec{x}\|, \vec{\nabla} h(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \\ \frac{x_2}{\|\vec{x}\|} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{\|\vec{x}\|} \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

$$f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|) : \vec{\nabla} f(\vec{x}) = g'(\|\vec{x}\|)\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|} : \vec{\nabla} f(\vec{x}) = -\frac{1}{\|\vec{x}\|^2} \cdot \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}} = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} \qquad \left(g(\tau) = \frac{1}{\tau}\right)$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} : \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}\right)(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{\nabla}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\|\vec{x}\|}\right) = \frac{n}{\|\vec{x}\|} + \vec{x}\cdot\frac{-\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}$$

$$\triangle(\|\vec{x}\|) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}(\|\vec{x}\|)\right) = \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}$$

$$f(\vec{x}) = g(\|\vec{x}\|) : \triangle f(\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}f(\vec{x})\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(g'(\|\vec{x}\|)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\cdot\vec{\nabla}g'(\|\vec{x}\|) + g'(\|\vec{x}\|)\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} =$$

$$= \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\cdot g''(\|\vec{x}\|)\cdot\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} + g'(\|\vec{x}\|)\cdot\frac{n-1}{\|\vec{x}\|} = g''(\|\vec{x}\|) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}g'(\|\vec{x}\|)$$

Satz:

$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} : \vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$: Alle partiellen Ableitungen 2.Ordnung mögen existieren und stetig sein. Dann gelten:

1.) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)(\vec{x}) = \vec{o}$ rot grad$f = \vec{o}$

2.) $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)(\vec{x}) = 0$ div rot $\vec{v} = 0$

3.) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right)(\vec{x}) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right)(\vec{x}) - \triangle\vec{v}(\vec{x})$

4.) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} : \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}\right) - \triangle\vec{v}$

3.5 Differenzieren von Funktionen $\vec{f} : S \leq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

S sei offen. $f : I(\text{offen}) \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ so gilt, daß der durch $f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{l(h)}_{\alpha(h)} + r(h)$ bei 0 definierte Rest r die Bedingung $\lim\limits_{h\mapsto 0}\frac{r(h)}{h} = 0$ erfüllt. $\alpha = f'(x_0) = l(x)$ ist die Ableitung von f in x_0. l heißt Differential von $f = x_0$.

Definition (Ableitung):

$f : S \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, S$ offen, heißt in $x_0 \in S$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ gibt derart, daß der durch

$\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + L(\vec{h}) + R(\vec{h})$

bei $\vec{o}$ definierte Rest R der Bedingung $\lim\limits_{h\mapsto 0}\frac{R(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$ genügt.

Bemerkung:

L heißt das Differential von $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$: geschrieben $\left(D\vec{f}(\vec{x}_0)\right)$. Wird L bezüglich von Basen in $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ durch eine Matrix dargestellt, so heißt diese Matrix **Ableitung von $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$**, geschrieben $\vec{f}'(x_0)$.
Ist $f : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in S$, so gibt es eine (m,n)-Matrix $\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + \vec{f}'(x_0)\vec{h} + R(\vec{h})$, wobei $\lim\limits_{h\mapsto 0}\frac{R(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{o}$ gilt.

Folgerung:

Ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar, so ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ stetig.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Diese Funktion ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar, da sie dort unstetig ist. (Obwohl $D_{\vec{v}}f(0,0)$ für alle $\vec{v} \neq \vec{o}$ existiert.)

Beispiel:

$\mathcal{A}$ sei eine konstante (m,n)-Matrix. $\vec{f}(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

$D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}) = \mathcal{A}\vec{v}$

$\vec{f}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\vec{x}+\vec{h}) - \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{h} + \vec{o} \Rightarrow \vec{f}'(\vec{x}) = \mathcal{A}$

$\vec{f}'(\vec{x})\vec{v} = \mathcal{A}\vec{v} = D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x})$

Satz:

Es sei $\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar mit der Ableitung $\vec{f}'(\vec{x}_0)$. Dann existiert $\left(D_{\vec{v}}\vec{f}\right)(\vec{x}_0)$ für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{o}$, und es gilt: $\vec{f}'(x_0)\vec{v} = \left(D_{\vec{v}}\vec{f}\right)(x_0)$.

Beweis:

Sei $\vec{v} \neq \vec{o}$ gegeben. Setzen in die obige Definition $\vec{h} = t\vec{v}$ ($t \in \mathbb{R}, |t|$ genügend klein).

$\vec{f}(\vec{x}_0 + t\vec{v}) = f(\vec{x}_0) = tf'(\vec{x}_0)\vec{v} + R(t\vec{v}) \qquad | : t$

$$D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0) \xleftarrow{t\mapsto 0} \frac{1}{t}\left(\vec{f}(\vec{x}_0+t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\right) = \vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{v} + \|\vec{v}\|\frac{R(\vec{v})}{t\|\vec{v}\|} \xrightarrow{t\mapsto 0} \vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{v}$$

Folgerungen/Bemerkungen/Beispiele:

Es sei $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar. Setze in Satz 3 $\vec{v} = \vec{e}_j$ für $j = 1, \ldots, n$.

$$\vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{e}_j = D_j\vec{f}(\vec{x}_0) : \vec{f}'(\vec{x}_0) = \left[D_1\vec{f}(\vec{x}_0), D_2\vec{f}(\vec{x}_0), \ldots, D_n\vec{f}(\vec{x}_0)\right] = D_{\vec{p}}(\vec{x}_0)$$

$\vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{e}_j$ ist die j-te Spalte der Abbildungsmatrix. Setze in Satz 3:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k\vec{e}_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{n} v_k D_k\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}'(\vec{x}_0)\vec{v} = D_{\vec{v}}\vec{f}(\vec{x}_0)$$

Setze $m = 1$:

$$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m : \boxed{D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)}$$

$$D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}f(\vec{x}_0) = \|\vec{v}\|\|\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)\|\cos\varphi$$

Beispiel:

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^\intercal, \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(m,n)} = \text{const.}$

$f(\vec{x}) = \vec{x}^\intercal \mathcal{A} \vec{x} \qquad f: \mathbb{R}^n \mathbb{R}$

Für eine symmetrische Matrix $\mathcal{A}$ gilt:

$\vec{x}^\intercal \mathcal{A} \vec{h} = (\vec{x}^\intercal \mathcal{A} \vec{h})^\intercal = \vec{h}^\intercal \mathcal{A} \vec{x}$

$$f(\vec{x}+h) - f(\vec{x}) = (\vec{x}+\vec{h})^\intercal \mathcal{A}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{x} = \underbrace{\vec{h}^\intercal \mathcal{A}\vec{x} + \vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{h}}_{2\vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{h}} + \vec{h}^\intercal \mathcal{A}\vec{h} = 2\vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{h} + \vec{h}^\intercal \mathcal{A}\vec{h}) = L(\vec{h} + R(\vec{h})$$

$$L = 2\vec{x}^\intercal \mathcal{A} = \vec{f}'(\vec{x}), \text{ da } \lim_{h \mapsto 0} \frac{\vec{h}^\intercal \mathcal{A}\vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0 \qquad \left(\text{Beispiel: } \frac{h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right)$$

Es sei $n = 2$, $m = 1$ und $z = f(x, y)$ die explizite Darstellung (differenzierbar) einer Fläche mit $z_0 = f(x_0, y_0)$.

$$f(x,y) = \underbrace{z_0 + D_1 f(x_0,y_0) D_2 f(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}}_{\substack{z = g(x,y) = z_0 + D_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + D_2 f(x_0,y_0)(y-y_0) \\ \text{Gleichung einer Ebene durch } (x_0,y_0,z_0)}} + R(x - x_0, y - y_0)$$

Dies ist eine Tangentialebene an die Fläche $z = f(x_0, y_0)$ in P. Der Normalenvektor der Ebene lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} D_1 f(x_0,y_0) \\ D_2 f(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir schauen uns folgende Menge an:

$$\max\{D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0 | \|\vec{v}\| = 1\} = \|\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\| \text{ für } \vec{v}_{max} = \frac{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)}{\|\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\|}$$

$$\min\{D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) | \|\vec{v}\| = 1\} = -\|\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\| \text{ für } \vec{v}_{min} = -\frac{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)}{\|\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\|}$$

$m = 1, n = 2 : z = f(x, y)$

$$\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}, C = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + tD_1 f(x_0,y_0) \\ y_0 + D_2 f(x_0,y_0) \\ f(x_0 + tD_1 f, y_0 + tD_2 f) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, C \subset F$$

Bewegt man sich von $t = 0$ aus in Richtung $\left\{\begin{matrix} \text{wachsender } t\text{-Werte } (t > 0) \\ \text{fallender } t\text{-Werte } (t < 0) \end{matrix}\right\}$, so bewegt man sich auf der Fläche auf der Linie des $\left\{\begin{matrix} \text{stärksten Anstiegs} \\ \text{größten Abfalls} \end{matrix}\right\}$, der sogenannten Fallinie.

Beispiel:

$z = x^2 + y^2$

$f(x,y), \vec{\nabla} f = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Übung:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeige, daß f in (0,0) **nicht** differenzierbar, aber stetig ist.

3.5.1 Differenzierbarkeitskriterium

Satz:

$\vec{f}: S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ sei gegeben.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Falls alle $m \cdot n$ partielle Ableitungen $D_j f_k (j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, n)$ in einer Umgebung von $\vec{x}_0 \in S$ existieren und in $\vec{x}_0$ stetig sind, dann ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Bei der Funktion $f(x,y)$ ist beispielsweise $D_1 f$ in $(0,0)$ unstetig.

3.5.2 Kettenregel

Satz:

Es sei $\vec{g}: \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n, \vec{f}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$. $\vec{g}$ sei in $\vec{x}_0$ und $\vec{f}$ sei in $g(\vec{x}_0)$ differenzierbar. Dann ist $\vec{f} \circ \vec{g}: \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^m$ in $\vec{x}_0$ differenzierbar. Es gilt:

$$\underbrace{\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)' (\vec{x} - 0)}_{(m,p)} = \underbrace{\underbrace{\vec{f}'(g(\vec{x}_0))}_{(m,n)} \underbrace{g'(\vec{x}_0)}_{(n,p)}}_{(m,p)}$$

Beispiel:

Es sei $p = m = 1$, $n = 2$. Wir betrachten die Funktionen $\vec{g}$: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ und f: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 1+t^2 \end{pmatrix}, \ f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$$

$f \circ \vec{g}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, (f \circ \vec{g})(t) = f(\vec{g}(t)) = \mathrm{e}^{t^3} \sin(1+t^2) = h(t), h'(t)$ (siehe HM I)

$(f \circ \vec{g})'(t) = f'(\vec{g}(t))\vec{g}'(t)$

$f'(\vec{g}(t)) = (D_1 f(\vec{g}(t)) \, , \, D_2 f(\vec{g}(t)) = \left(\mathrm{e}^{t^3} \sin(1+t^2), \, \mathrm{e}^{t^3} \cos(1+t^2)\right)$

$$\vec{g}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

$(f \circ \vec{g})'(t) = 3t^2 \mathrm{e}^{t^3} \sin(1+t^2) + 2t\mathrm{e}^{t^3} \cos(1+t^2)$

Beispiel:

Es sei $F\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ und $\vec{r}\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$.

$$F = F(\vec{x}), \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$g(t) = F(\vec{r}(t)) = (F \circ \vec{r})(t)$$

$$g'(t) = F'(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \left(\vec{\nabla} F(\vec{r}(t))\right)^{\mathsf{T}} \dot{\vec{r}}(t) = \vec{\nabla} F(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \sum_{k=1}^{n} D_k F(\vec{r}(t)) \dot{x}_k(t)$$

Für den Fall $n = 3$ ist $F(x, y, z) = \text{const.}$ die implizite Darstellung einer Fläche. Durch $ax + by + cz = 5$ wird beispielsweise eine Ebene dargestellt und $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 3$ ist eine Kugel um $M(0|0|3)$ mit Radius $\sqrt{3}$.

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in I$$

$C \subset F$, d.h. $F(x(t), y(t), z(t)) = \text{const.}\, \forall\, t$

$$g'(t) = \vec{\nabla} F(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$$

$\vec{\nabla} F(\vec{r}(t)) \perp \dot{\vec{r}}(t)$ ist die Tangentenrichtung an C in $\vec{r}(t)$.

Folgerung:

$\vec{\nabla} F(\vec{r}(t_0))$ ist der **Normalenvektor** von F in dem Punkt P, der durch $\vec{r}(t_0)$ gegeben ist.

Satz:

Es sei $F : S \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar und $\vec{\nabla} F \neq \vec{o}$ in S. F sei die durch $F(x, y, z)$ =const. implizit definierte Fläche. Der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ liege auf F, d.h. $F(\vec{r}_0) = \text{const.}$

Dann ist $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{\nabla} F(\vec{r}_0) = 0$ die Gleichung der Tangentialebene an F in P. Die Gleichung lautet also:

$$(x - x_0) D_1 F(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) D_2 F(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) D_3 F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$z = f(x, y)$$

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$$

$$(x - x_0) D_1 f(x_0, y_0) + (y - y_0) D_2 f(x_0, y_0) + (z - z_0)(-1) = 0$$

3.5.3 Parameterdarstellung einer Fläche F in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{cccc} \vec{f}: & S \subseteq \mathbb{R}^2 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ & (0,0) & & (x,y,z) \end{array} \quad \vec{f}(u, v) = \begin{pmatrix} f_1(u, v) \\ f_2(u, v) \\ f_3(u, v) \end{pmatrix} \text{ sei differenzierbar.}$$

Beispiel:

$$\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

Eine Kugel um den Ursprung mit Radius 1 wird beschrieben durch:

$$\vec{f}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ und } -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

$\vec{r}_0 = \vec{f}(u_0, v_0)$

$C_1 : \vec{r}_1(t) = \vec{f}(u_0 + t, v_0)$

$C_2 : \vec{r}_2(t) = \vec{f}(u_0, v_0 + t)$

$$\dot{r}_1(0) = \vec{f}'(u_0,v_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\left[D_1\vec{f}(u_0,v_0), D_2\vec{f}(u_0,v_0)\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = D_1\vec{f}(u_0,v_0)$$

$\dot{\vec{r}}_2(0) = D_2\vec{f}(u_0,v_0)$

Die Parameterdarstellung für die Tangentialebene lautet:

$\vec{x}(\lambda,\mu) = \vec{r}_0 + \lambda D_1\vec{f}(u_0,v_0) + \mu D_2\vec{f}(u_0,v_0)$

$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\left(D_1\vec{f}(u_0,v_0) \times D_2\vec{f}(u_0,v_0)\right) = 0$

$F(x,y,z) = 0,\ \vec{\nabla}F \neq \vec{o}$

$\vec{f} = \vec{f}(u+v)$

$D_1\vec{f}(u,v) \times D_2\vec{f}(u,v) \neq \vec{o}$ glatte Fläche

Definition:

$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ in $\vec{x}_0 \in S$ k-mal stetig differenzierbar (C^k), falls alle partiellen Ableitungen bis einschließlich der Ordnung k bei $\vec{x}_0$ existieren und in $\vec{x}_0$ stetig sind.

Beispiel:

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\sin x_1)\mathrm{e}^{y_2}\frac{1}{x_3} \in C^{25}$$

Satz:

$\vec{f} : S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar ($\in C^1(S)$), so ist $\vec{f}$ differenzierbar.

3.5.4 Andere Betrachtungsweise des Gradienten

Es seien F und $\vec{r}$ wie zuvor definiert. $N = \{\vec{x} \in S | F(\vec{x}) = c\}$ bezeichnet man als Niveaumenge von F. Es gilt $\vec{\nabla}F(\vec{x}_0) \perp N$ für $\vec{x}_0 \in N$. Niveaumengen heißen für $n = 2$ **Höhenlinien** und für $n = 3$ **Äquipotentialflächen**.

Beispiel:

a.) Temperaturfeld: $\mu = T(x,y,z)$

b.) Wärmeflußvektor: $\vec{j} = -k\vec{\nabla}T$ mit der Wärmeleitfähigkeit $k = \text{const.} > 0$

Satz:

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, f \in C^2 \\ \vec{v}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, \vec{v} \in C^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) = 0 \\ \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = \vec{o} \end{array}$$

Definition:

Ein Vektorfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ heißt Gradientenfeld/Potentialfeld/konservatives Feld, falls es ein C^1-skalares Feld $V: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{F} = \vec{\nabla} V$. (V heißt **Potential** zu $\vec{F}$.)

Aus Satz 2 folgt:

Für ein C^1-Potentialfeld $\vec{F}$ gilt: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{o}$ ($\vec{F}$ ist wirbelfrei.) Ist $\vec{F}$ ein Potentialfeld, so gilt $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{o}$.

Gegeben sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$. Ist $\vec{F}$ ein Potentialfeld?

Falls $\vec{F}$ ein Potentialfeld ist, folgt $F_1 = D_1 V$, $F_2 = D_2 V$ und $F_3 = D_3 V$.

Beispiel: Graviationsfeld/Coulombkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{c}{\|\vec{x}\|^3} \vec{x} = -\vec{\nabla}\left(\frac{c}{\|\vec{x}\|}\right)$$

Die Äquipotentialflächen sind nichts anderes als Kugelflächen:

$$V(\vec{x}) = \frac{c}{\|\vec{x}\|} = \text{const.}$$

$$\|\vec{x}\| = \frac{c}{\text{const.}}$$

Die Kraft steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen (Kugelflächen).

3.5.5 Anwendung der Kettenregel (Differentiation von Parameterintegralen)

$$F(y) \int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \qquad F'(y) = ?$$

Voraussetzung:

1.) $f = f(x,y)$ ist auf $R = \{(x,y) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ definiert und stetig. $D_2 f(x,y)$ existiere und sei stetig auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt (ohne Beweis):

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x, I'(y) = \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_a^b D_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b D_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

2.) p, q: $[c,d] \mapsto [a,b]$ sei differenzierbar. Es gilt:

$$F'(y) = q'(y) f(q(y),y) - p'(y) f(p(y),y) + \int\limits_{p(y)}^{q(y)} D_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$G(x_1,x_2,x_3) := \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x_1,x_3)\,\mathrm{d}x \text{ wobei } \underbrace{G : \underbrace{[a,b]\times[a,b]\times[c,d]}_{\mathbb{R}^3} \mapsto \mathbb{R}}_{F(y)=G(\vec{g}(y))}$$

$$\vec{g}(y) = \begin{pmatrix} p(y) \\ q(y) \\ y \end{pmatrix} \text{ wobei } \vec{g} : [c,d] \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$F'(y) = G'(\vec{g}(y))\vec{g}'(y) = (D_1G(\vec{g}(y))(D_2G(\vec{g}(y))D_3G(\vec{g}(y))\begin{pmatrix} p'(y) \\ q'(y) \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(-f(p(y),y)), f(q(y),y), \int\limits_{p(y)}^{q(y)} D_2 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\begin{pmatrix} p'(y) \\ q'(y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.6 Taylorformel

Definition:

1.) $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls für alle Punkte $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\{\vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}), 0 \le t \le 1\} \subset S$.

2.) Taylorformel (HM I):

$F : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ sei k-mal stetig differenzierbar und $F^{(k+1)}$ existiere auf $(0,1)$. Dann gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$ mit folgender Eigenschaft:

$$F(1) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}F^{(j)}(0)}_{T_k} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\vartheta)}_{R_k} =$$

$$= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2!}F''(0) + \frac{1}{3!}F'''(0) + \ldots + \frac{1}{(k+1)!}F^{(k+1)}(\vartheta)$$

3.) $S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, konvex; $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, f \in C^k(S), f$ sei $(k+1)$-mal partiell differenzierbar. $(\vec{x}, \vec{x}_0 \in S; \vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0)$

Wende z_k auf $F(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$ $(0 \le t \le 1)$ an:

$$F'(t) = \underbrace{f'(\vec{x}_0+\vec{h})}_{(1,n)}\vec{h} = \vec{h}^\intercal\vec{\nabla}f(\vec{x}_0+\vec{h}) = \sum_{l=1}^{n} h_l D_l f(\vec{x}_0+\vec{h}) = \left(\sum_{l=1}^{n} h_l D_l\right) f(\vec{x}_0+\vec{h}) = \left(D_{\vec{h}} f\right)(\vec{x}_0+\vec{h}) =$$

$$= \left(\vec{h}^\intercal\vec{\nabla}\right) f(x_0+\vec{h})$$

$$F''(t) = \left(\vec{h}^\intercal\vec{\nabla}\right)\left(\vec{h}^\intercal\vec{\nabla}\right) f(\vec{x}_0+\vec{h}) = \sum_{j=1}^{n} h_p D_p \left(\sum_{l=1}^{n} h_l D_l f(\vec{x}_0+\vec{h})\right) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} h_p h_l D_p D_l f(\vec{x}_0+\vec{h})$$

$$F^{(j)}(t) = \sum_{l_j=1}^{n} \ldots \sum_{l_2=1}^{n}\sum_{l_1=1}^{n} h_{l_j}h_{l_{j-1}}\ldots h_{l_1} D_{l_j}\ldots D_{l_1} f(\vec{x}_0+\vec{h}) = \left(\vec{h}^\intercal\vec{\nabla}\right)^j f(\vec{x}_0+\vec{h})$$

Taylorsatz:

Für alle $\vec{x}, \vec{x}_0 \in S$ gilt: Es gibt ein $\vartheta \in (0,1)$ mit:

$$f(\vec{x}) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left((\vec{x}-\vec{x}_0)^\intercal \vec{\nabla}\right)^j f(\vec{x}_0)}_{T_k \text{ Taylorpolynom von Grad } k} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \left((\vec{x}-\vec{x}_0)^\intercal \vec{\nabla}\right)^{k+1} f(\vec{x}_0 + \vartheta(\vec{x}-\vec{x}_0))}_{\text{Rest } (\|\vec{x}-\vec{x}_0\|^k), \vec{x}\mapsto\vec{x}_0}$$

Spezialfälle:

Den Fall $n = 1$ haben wir schon in HM I abgehandelt:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} (x-x_0)^j f^{(j)}(x_0) + \frac{1}{(k+1)} (x-x_0)^{k+1} f^{(k+1)}(x_0 + \vartheta(x-x_0))$$

Für $k = 0$ folgt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{x}-\vec{x}_0)^\intercal \vec{\nabla} f(\vec{x}_0 + \vartheta(\vec{x}-\vec{x}_0))$

Für $n = 2$ lautet der Mittelwertsatz:

$\vec{x} = (x, y), \vec{x}_0 = (\vec{x} - 0, \vec{y}_0)$

$f(x,y) = f(x_0, y_0) = (x-x_0) D_1 f(x_0 + \vartheta(x-x_0) y_0 + \vartheta(y-y_0)) + (y-y_0) D_2 f(x_0 + \vartheta(x-x_0) y_0 + \vartheta(y-y_0))$

Folgerung:

$f : S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt: $f = \text{const}$ in $S \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{o}$ für $\vec{x} \in S$

Mit Mittelwertsatz folgt: Wähle $\vec{x}_0$, $\vec{x}_1 \in S$: $f(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_1) = (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)^\intercal \vec{\nabla} f(\vec{x}_0 + \vartheta(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)) = 0$

Beispiel:

$S = \{(x,y) | x > 0, y > 0\}$

$f(x,y) = \arctan \frac{x}{y} + \arctan \frac{y}{x}$

$D_1 f(x,y) = 0 = D_2 f(x,y)$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = \vec{o} \,\forall\, (x,y) \in S$

$\Rightarrow f(x,y) = \text{const.} = f(1,1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$

Entwicklung bis zur Ordnung $k = 2$:

$$\left((x_1 - x_1^0) D_1 + (x_2 - x_2^0) D_2 + \ldots + (x_n - x_n^0) D_n\right)^2 f(\vec{x}_0) = \sum_{j,k=1}^{n} (x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) \underbrace{(D_j D_k f(\vec{x}_0))}_{H_f(\vec{x}_0)}$$

$H_f(\vec{x}_0) = (D_j D_k f(\vec{x}_0))_{j=1,2,\ldots,n}$

Dies ist gerade die sogenannte Hessesche Matrix (symmetrisch).

$$T_2(f; \vec{x}_0)(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\vec{x}-\vec{x}_0)^\intercal \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \left((\vec{x}-\vec{x}_0)^\intercal \vec{\nabla}\right)^2 f(\vec{x}_0) =$$

$$= f(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0) D_j f(\vec{x}_0) + \sum_{j,k=1}^{n} (x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)\,(D_j D_k f(\vec{x}_0))$$

Betrachten wir als Beispiel die **Hesse-Matrix für $n = 2$**:

$$H_{f(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} D_1^2 f & D_1 D_2 f \\ D_2 D_1 f & D_2^2 f \end{pmatrix} (x_0, y_0)$$

Übung:

Berechne $T_3(f; \vec{x}_0)(\vec{x})$!

Beispiel:

$f(x,y) = (x-1)^4 (y-2)^3$ soll um $(0,0)$ bis zur 1.Ordnung entwickelt werden.

$$f(x,y) \approx T_1\left(f(0,0)\right)(x,y) = \underbrace{f(0,0) + (x-0)D_1 f(0,0) + (y-0)D_2 f(0,0)}_{t(x,y)} = \boxed{-8 + 32x + 12y}$$

Dies ist Gerade die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche durch den Punkt (0,0).

Beispiel:

$f(x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + \sin(xy)$

Entwickle um (0,0) bis zur 3.Ordnung:

$$f(x,y) = T_2 f(0,0) f(xy) + \frac{1}{3!}\left(xD_1 + yD_2\right)^3 f(0,0) = T_2(f;(0,0))(x,y) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(x^3 D_1^3 f(0,0) + 3x^2 y D_1^2 D_2 f(0,0) + 3xy^2 D_1 D_2^2 f(0,0) + y^3 D_2^3 f(0,0)\right) = \sum_{j=0}^{3}\left(\sum_{l+s=j} \alpha_{ls} x^l y^s\right)$$

Wir nehmen zur Berechnung der TAYLORreihe die uns schon bekannte Reihe der Exponentialfunktion und der Sinusfunktion:

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(x+y)^j + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(xy)^{2k+1} = \boxed{1 + x + y + \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \ldots}$$

Beispiel:

$f(x,y) = x^2 - y^2$ um (0,0) entwickeln bis zur 4.Ordnung:

$f(x,y) = x^2 - y^2$!

Entwickle um (1,2):

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{2} \sum_{l+s=j} \alpha_{ls}\left((x-1)^l (y-2)^s\right) =$$
$$= (x-1+1)^2 - (y-2+2)^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 - (y-2)^2 - 4 - 4(y-2) =$$
$$= 1 + (x-1)\cdot 2 - 4(y-2) + \frac{1}{2}(2(x-1)^2 - 2(y-2)^2$$

Beispiel:

Wir entwickeln die Funktion f um $x_0 = (1, -1, 0)$ bis zur 2.Ordnung:

$$\boxed{f(x,y,z) = (x-1)\mathrm{e}^z - (y+1)^2}$$

Zuerst berechnen wir die ersten und zweiten partiellen Ableitungen:

$f_x = \mathrm{e}^z$	$f_y = -2\,(y+1)$	$f_z = (x-1)\,\mathrm{e}^z$
$f_{xx} = 0$	$f_{yx} = 0$	$f_{zx} = \mathrm{e}^z$
$f_{xy} = 0$	$f_{yy} = -2$	$f_{zy} = 0$
$f_{xz} = \mathrm{e}^z$	$f_{yz} = 0$	$f_{zz} = (x-1)\,\mathrm{e}^z$

Damit gilt also:

$$T_0(x,y,z) = \frac{1}{0!} f(1,-1,0) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$T_1(x,y,z) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0,z_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0,z_0)\,(y-y_0) + \frac{\partial}{\partial z} f(x_0,y_0,z_0)\,(z-z_0)\right) =$$
$$= \mathrm{e}^0 \cdot (x-1) + 2\,(-1+1)^2 + (1-1)\,\mathrm{e}^0 \cdot 0 = \boxed{(x-1)}$$

$$T_2(x,y,z) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\,(x-x_0)\,(z-z_0) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + \right.$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\,(y-y_0)\,(z-z_0) + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x}\,(z-z_0)\,(x-x_0) +$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial z \partial y}\,(z-z_0)\,(y-y_0) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,(z-z_0)^2\right)$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerte folgt:

$$T_2(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 1 \cdot (x-1)\,z + 0 - 2 \cdot (y+1)^2 + 0 + 1 \cdot z\,(x-1) + 0 + 0\right) = (x-1)\,z - (y+1)^2$$

Damit gilt also:

$$\boxed{f(x,y,z) \approx (x-1) + (x-1)\,z - (y+1)^2}$$

Beispiel:

Es soll folgende Funktion um $P(1,-1,0)$ bis zur 2.Ordnung entwickelt werden:

$$\boxed{f(x,y,z) = x\mathrm{e}^z - y^2}$$

Für die partiellen Ableitungen gilt:

$f_x = \mathrm{e}^z$	$f_y = -2y$	$f_z = x\mathrm{e}^z$
$f_{xx} = 0$	$f_{yx} = 0$	$f_{zx} = \mathrm{e}^z$
$f_{xy} = 0$	$f_{yy} = -2$	$f_{zy} = 0$
$f_{xz} = \mathrm{e}^z$	$f_{yz} = 0$	$f_{zz} = x\mathrm{e}^z$

Damit gilt also:

$$T_0 = 1 \cdot \mathrm{e}^0 - (-1)^2 = 0$$

$T_1 = 1 \cdot (x-1) + 2\,(y+1) + z = 1 + x + z + 2y$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(0 + 0 + 1 \cdot (x-1)\,z + 0 - 2\,(y+1)^2 + 0 + 1 \cdot (x-1)\,z + 0 + z^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(x-1)\,z - (y+1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)\,z + \frac{1}{2}z^2 = (x-1)\,z - (y+1)^2 + \frac{1}{2}z^2$$

Also folgt:

$$\boxed{f(x,y,z) \approx 1 + x + z + 2y + (x-1)\,z - (y+1)^2 + \frac{1}{2}z^2}$$

Beispiel:

Wir entwickeln folgende Funktion um den Punkt $P(0,0)$ bis zur dritten Ordnung:

$$\boxed{f(x) = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)}$$

$$f_x = \frac{1}{1+\frac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}} \cdot \frac{(1+xy)\cdot 1 - y\cdot(x-y)}{(1+xy)^2} = \frac{1}{1+\frac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}} \frac{1+xy-yx+y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1}{1+\frac{(x-y)^2}{(1+xy)^2}} \cdot \frac{1+y^2}{(1+xy)^2} =$$
$$= \frac{(1+xy)^2}{1+2xy+x^2y^2+x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{1+y^2}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+x^2)\,(1+y^2)} \cdot \left(1+y^2\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

Analog folgt:

$$f_y = -\frac{1}{1+y^2}$$

Wir berechnen die zweiten Ableitungen:

$$g_{xx} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$g_{yx} = g_{xy} = 0$$

$$g_{yy} = \frac{2y}{(1+y^2)^2}$$

Für die dritten partiellen Ableitungen gilt:

$$g_{xxy} = g_{yxx} = g_{xyy} = g_{yyx} = 0$$

$$g_{xxx} = \frac{\left(1+x^2\right)^2 \cdot (-2) + 2x \cdot 2 \cdot \left(1+x^2\right) \cdot 2x}{(1+x^2)^3} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$g_{yyy} = \frac{2-6y^2}{(1+y^2)^3}$$

Man erhält dann:

$$T_0 = 1 \cdot \arctan(0) = 0$$

$$T_1 = 1 \cdot (g_x(0,0)\cdot x + g_y(0,0)\cdot y) = x - y$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot (g_{xx}(0,0)\cdot x + 2g_{xy}(0,0)\cdot xy + g_{yy}(0,0)\cdot y) = \frac{1}{2}(0+0+0) = 0$$

$$T_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(g_{xxx}(0,0)\cdot x^3 + g_{yyy}\cdot y^3\right) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3$$

Also folgt schlußendlich:

$$\boxed{f(x) \approx x - y - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3}$$

3.7 Relative (Lokale Extremwerte)

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, : $S \mapsto \mathbb{R}$ besitze in $\vec{x}_0 \in S$ ein relatives Maximum (Minimum), falls $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ für alle $\vec{x}$ aus einer Umgebung von $\vec{x}_0 \{\vec{x} | \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}$. Gilt „<" („>") $\forall\ \vec{x} \in U \setminus \{\vec{x}_0\}$, so heißt der Extremwert **eigentlich** (**isoliert**).

Beispiel:

$f(x,y) = x^2 + y^2, S = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$

Das Minimum liegt bei $(0,0)$; ein Maximum gibt es nicht.

Satz:

$f : S \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. In $\vec{x}_0 \in S$ besitze f einen lokalen Extremwert. Dann gilt $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{o}$.

Beweis:

Es ist g_k: $[-\varepsilon, \varepsilon] \mapsto \mathbb{R}$. Bei $\vec{x}_0$ liege Maximum. Oder mit anderen Worten: $g_k(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_k)$ hat bei $t = 0$ ein Maximum.

$0 = g_k'(0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}_k = D_k f(\vec{x}_0)$ für $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$

Definition:

$\vec{x}_0 \in S$ mit $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{o}$ heißt **stationärer** Punkt von f.

Aussage von Satz 1:

Ist f in der Menge S differenzierbar, so sind die Punkte, in denen f extremal wird, unter den stationären Punkten zu suchen.

Beispiel:

$f(x,y) = x^2 - y^2, S = \{(x,y) | x^2 + y^2 < 1\}$

Wir bilden den Gradienten:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich, daß $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt ist. In jeder Umgebung von (0,0) ist f positiv und auch negativ. Bei (0,0) kann folglich weder ein Maximum von ein Minimum liegen.

Definition (Sattelpunkt):

$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = 0, S(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$ heißt **Sattelpunkt** von f, wenn es in jeder Umgebung von $\vec{x}_0$ Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S$ gibt mit $f(\vec{x}_1) < f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}_2)$.

Satz:

$f : S \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar, $f \in C^2(S)$. $\vec{x}_0$ sei stationärer Punkt. Dann gelten:

a.) $H_f(\vec{x}_0)$ ist **positiv definit** $\Rightarrow$ f hat in $\vec{x}_0$ ein eigentliches lokales **Minimum**.

b.) $H_f(\vec{x}_0)$ ist **negativ definit** $\Rightarrow$ f hat in $\vec{x}_0$ ein eigentliches lokales **Maximum**.

c.) $H_f(\vec{x}_0)$ ist **indefinit** $\Rightarrow$ f hat in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

d.) $H_f(\vec{x}_0)$ ist **semidefinit** $\Rightarrow$ Es ist keine allgemeine Aussage möglich.

Erinnerung:

- $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\intercal$ heißt positiv definit: $\vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{x} > 0 \ \forall \ \vec{x} \neq \vec{o}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\intercal$ heißt negativ definit: $\vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{x} < 0 \ \forall \ \vec{x}$
- $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\intercal$ heißt indefinit: $\vec{x}^\intercal \mathcal{A}\vec{x} > 0$, $\vec{y}^\intercal \mathcal{A}\vec{y} < 0$

Beweis zu a.):

$$H_f(\vec{x}_0) > 0 \xrightarrow[f \in C^2(S)]{} H_f(\vec{x}) > 0 \text{ für alle } \vec{x} \text{ mit } \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}_{\vec{x} \subseteq U} < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)$$

Für $\vec{x} \subseteq U$, $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, $0 < \vartheta < 1$ wenden wir den TAYLORsatz an:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^\intercal H_f\,\underbrace{(\vec{x}_0 + \vartheta(\vec{x} - \vec{x}_0))}_{\in U}(\vec{x} - \vec{x}_0) > 0$$

$f(\vec{x}_0)$ ist minimal.

Beispiel:

$$f(x, y) = x^2 + y^4 \qquad \varrho = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$$
$$g(x, y) = x^2 + y^3$$

$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist stationär sowohl für f als auch für g. Die HESSEmatrix $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist positiv semidefinit. Da $f > 0 \ \forall \ (x, y) \neq (0, 0)$, ist $(0, 0)$ ist eigentliches Minimum. g hat in (0,0) jedoch einen Sattelpunkt: $g(0, y) = y^3$.

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{o}$$

Für $n = 2$ gilt $z = f(x, y)$ und $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$. Dies kann man immer als eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ deuten.

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{o}$$

$$\vec{n}_{x_0, y_0, z_0} = \begin{pmatrix} D_1 f(x_0, y_0) \\ D_2 f(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die HESSEmatrix lautet $H_f(\vec{x}_0) = (D_j D_k f(\vec{x}_0))_{j=1,2,\ldots,n}$; diese ist symmetrisch. Im Falle $n = 2$ gilt:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$H_{f(x_0, y_0)} = \begin{pmatrix} D_1^2 f(x_0, y_0) & D_1 D_2 f(x_0, y_0) \\ D_2 D_1 f(x_0, y_0) & D_2^2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

3.7.1 Definitheit

Wir betrachten den Fall $n = 2$:

- Positive Definitheit:

  $\det(H_{f(x_0,y_0)}) > 0$ und $D_1^2 f(x_0, y_0) > 0$

  Semidefinitheit liegt für $\det(H_{f(x_0,y_0)}) \geq 0$ vor.

- Negative Definitheit:

  $\det H_f > 0$ und $D_1^2 f(x_0, y_0) < 0$

- Indefinitheit:

  $\det H_f(x_0, y_0) < 0$

Beispiel:

Es sei $S = \mathbb{R}^2$: Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$. Gesucht sind lokale Extremwerte dieser Funktion.

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 + 2x \\ 2y(x-1) \end{pmatrix}$$

Die stationären Punkte bekommt man nun durch Nullsetzen:

a.) $y^2 + 3x^2 + 2x = 0$

b.) $2y(x - 1) = 0$

Aus der zweiten Gleichung ergibt sich $y = 0$ oder $x = 1$.

a.) Einsetzen von $y = 0$ in erste Gleichung:

  $$x(3x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = -\frac{2}{3}$$

  $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ sind stationäre Punkte.

b.) Einsetzen von $x = 1$ in erste Gleichung:

  $$5 + y^2 = 0$$

  Diese Gleichung ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar. $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ sind **alle** stationäre Punkte.

$D_1^2 f(x, y) = 6x + 2, D_2 D_1 f(x, y) = 2y = D_1 D_2 f(x, y), D_1^2 f(x, y) = 2(x - 1)$

$$D_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hier liegt Indefinitheit vor; bei (0,0) haben wir folglich einen Sattelpunkt.

$f(0, y) = -y^2, f(x, y) = x^2 + x^3 > 0$ mit $-1 < x < 0$ und $x > 0$

$$H_f\left(-\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Hier liegt wegen negativer Definitheit ein lokales Maximum vor.

$z = x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

Als Übung kann überprüft werden, ob Randmaxima oder -minima vorliegen.

3.7.2 Extremwerte von Funktionen, die auf abgeschlossenen und beschränkten Bereichen definiert sind

Definition:

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ sei Menge. $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Randpunkt** von B, falls für jedes $\varepsilon > 0 \{\vec{x} | \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\} \cap B \neq \phi$ und $\{\vec{x} | \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \phi$. $\partial B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}$ ist Randpunkt von $B\}$. B heißt **abgeschlossen**, falls $\partial B \subset B$. B heißt **beschränkt**, falls es ein $k > 0$ gibt mit $\|\vec{x}\| \leq k \, \forall \, \vec{x} \in B$.

In HM I hatten wir: Falls $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, besitzt es gleichzeitig ein Maximum und Minimum.

Satz:

$B \subseteq \mathbb{R}^n$ sei beschränkte, abgeschlossene Menge und $f : B \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig. Es gibt $\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in B$ mit $\max\{f(\vec{x}), \vec{x} \in B\} = f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_1) \, \forall \, x \in B = \max\{f(\vec{x}), \vec{x} \in B\}$.

1.) f ist beschränkt (Widerspruch)

2.) $\{f(\vec{x}) | \vec{x} \in B\}$ besitzt Supremum α $f(\vec{x}) \leq \alpha \, \forall \, \vec{x} \in B$.

3.) $\alpha = \max\{\dots\}$

Betrachten wir das Problem für $n = 2$: Gesucht sind Extremwerte von $f : B \mapsto \mathbb{R}$

1. Bestimme stationäre Stellen in $B \setminus \partial B$. Untersuche wie im vorhergehenden Abschnitt.
2. Untersuche an Stellen, wo f nicht differenzierbar ist ($f(x, y) = |x + y|$)
3. Untersuche f auf ∂B (Parameterdarstellung des Randes suchen und in Funktion einsetzen)

Beispiel:

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$

$B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

$\partial B = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

1.) $x^2 + y^2 < 1 \vec{\nabla} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix} = \vec{o}$

$(0, 0)$ ist somit der einzige stationäre Punkt; es handelt sich um ein isoliertes globales Minimum (siehe HESSEmatrix).

2.) f auf ∂B untersuchen ($x = \cos t, y = \sin t$)

$f_{\partial B} = 1 + \sin^2 t = g(t)$

Wegen der Symmetrie von f und B genügt es, ∂B für $x \geq 0$, $y \geq 0$ zu untersuchen.

$\partial B : y = \sqrt{1 - x^2}$ für $0 \leq x \leq 1$

$f_{\partial B} = g(x) = x^2 + 2(1 - x^2) = 2 - x^2$ für $0 \leq x \leq 1$

a.) $g(0) = 2 = \max\limits_{x \geq 0, y \geq 0}$: $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = (0, -1)$ sind mögliche Maximumpunkte für $f_{\partial B}$.

b.) $g(1) = 1 = \max\limits_{x \geq 0, y \geq 0}$: $P_3 = (1, 0)$, $P_4 = (-1, 0)$ sind mögliche Minimumpunkte für $f_{\partial B}$.

Frage: Wird $f_{\partial B}$ in P_1 lokal maximal? Wir untersuchen $(x, y) \in B$ nahe $(0, 1)$:

$$f(x, y) = f(0, 1) + (x, y - 1)\vec{\nabla} f(0) + r = 2 + (x, y - 1)\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix} + r = 2 + 4(y - 1) + r < 2 = f(0, 1)$$

Hier liegt somit ein lokales Maximum vor.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}D_1 f\\D_2 f\\-1\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich, daß $\vec{\nabla} f$ nach außen gerichtet sein muß. $P_3(1, 0)$: Wir schneiden die Fläche mit der x-z-Fläche. Falls es sich um ein Minimum handelt, so muß $\vec{\nabla} f(1, 0)$ ins Innere von B gerichtet sein. $\vec{\nabla} f(1, 0) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ geht nach außen; es liegt daher kein Minimum für f vor.

$$f(x, y) = f(1, 0) + (x - 1, y)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + r \text{ für } \|x - 1, y\| \text{ klein, } (x, y) \in B = 1 + 2(x - 1) + r < 1$$

Es liegt daher kein Minimum vor.

Satz:

$B \subseteq \mathbb{R}^2$ sei beschränkt und abgeschlossen. $f : B \mapsto \mathbb{R}$ sei 2 mal stetig differenzierbar. Die glatte Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ stelle ein Stück des Randes ∂B dar. $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$ besitze für $\tau \in (t_0, t_1)$ einen Extremwert. Es sei $z_0 = f(x_0, y_0), x_0 = x(\tau), y_0 = y(\tau)$. Es gelten noch $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \neq \vec{o}$. Dann gilt:
Ist z_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum von ϕ und weist $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ ins Innere bzw Äußere von B, so ist z_0 ein lokales Maximum bzw. Minimum von f.

3.8 Inverse und implizite Funktionen

$S \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, $\vec{x}_0 \in S, \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n. \vec{f} : S \mapsto \mathbb{R}^n$ sei gegeben und stetig differenzierbar. Problem: $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$ liege vor mit $\vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}_0)$. Soll in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ nach $\vec{x}$ aufgelöst werden. Falls möglich: $\vec{x} = \vec{f}^{-1}(\vec{y})$

Plausibilitätsbedingung (Definition von $\vec{f}'(\vec{x}_0)$):

$$\vec{y} - \vec{y}_0 = \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}'(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|), x \mapsto \vec{x}_0$$

$$\vec{x} = \left(\vec{f}'(\vec{x}_0)\right)^{-1}(\vec{y} - \vec{y}_0) + \vec{x}_0 + o\underbrace{(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)}_{\|\vec{y} - \vec{y}_0\|}$$

$$\vec{x} = \underbrace{\vec{f}^{-1}(\vec{y}_0) + \left(\vec{f}'(\vec{x}_0)\right)^{-1}(\vec{y} - \vec{y}_0) + o(\|\vec{y} - \vec{y}_0\|)}_{\vec{f}^{-1}(\vec{y})}, \vec{y} \mapsto \vec{y}_0$$

3.8.1 Inverse Funktionen

Satz:

$\vec{f} : S \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, S$ sei offen, $\vec{f}$ sei stetig differenzierbar auf S. Es sei $\vec{x}_0 \in S$ und $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ sei regulär ($\det f'(\vec{x}_0) \neq 0$). Dann gibt es eine offene Umgebung U von $\vec{x}_0$ mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\vec{f}(U) = V$ ist offen im $\mathbb{R}^n$.

2.) $\vec{f}_U^S$ ist bijektiv und die somit definierte Umkehrfunktion $f^{-1} : V \mapsto U$ ist stetig differenzierbar. $\vec{f}$ ist bei $\vec{v}_0$ lokal invertierbar.

3.) $(\vec{f}^{-1})'(\vec{y}) = [f'(\vec{f}^{-1}(\vec{y})]^{-1}, \vec{y} \in V$

Beispiel (Polarkoordinaten in der Ebene):

$\vec{f} : \{(r, \varphi) | r > 0, 0 < \varphi < \pi\} \mapsto \mathbb{R}^2$

$\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

$\vec{f}(S) = \{(x, y) | y > 0\}$

$\det \mathcal{J}_{\vec{f}}(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r \neq 0$

Satz 1 besagt: Zu (r_0, φ_0) gibt es eine Umgebung U, die umkehrbar stetig differenzierbar auf eine Umgebung von $(r_0\cos\varphi_0, r_0\sin\varphi_0)$ abgebildet wird. Diese Abbildung ist sogar global (auf ganz S umkehrbar stetig differenzierbar):

$$\vec{f}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{pmatrix}$$

Daß $\vec{f}$ global umkehrbar ist, folgt nicht aus $\det \mathcal{J}_{\vec{f}} = (r, \varphi) \neq 0 \,\forall\, (x, \varphi)$.

Beispiel:

$\vec{f}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \det \mathcal{J}_{\vec{f}}(r, \varphi) = r \neq 0$ mit $S = \{(r, \varphi) | r > 0, 0 < \varphi < 4\pi\}$

$\vec{f}$ ist auf S nicht global injektiv.

$\vec{f}\left(r_0, \frac{\pi}{2}\right) = \vec{f}\left(r_0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Beispiel:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ 2uv \end{pmatrix}, S = \{(u, v) | (u, v) \neq (0, 0)\}$

Gesucht ist $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$; wir müssen dazu $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ auflösen:

$\det \mathcal{J}_{\vec{f}}(u, v) = \det \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} = 4(u^2 + v^2) \neq 0$

Infolgedessen ist diese Funktion $\vec{f}$ nach Satz 1 in der Umgebung von jedem $(u, v) \in S$ stetig differenzierbar umkehrbar. $\vec{f}$ ist jedoch nicht global invertierbar. Die Abbildung hat folgende Eigenschaften:

$f(u, v) = f(-u, -v)$

Dadurch ist die Injektivität verletzt, die Funktion ist nicht global umkehrbar.

3.8.2 Implizite Funktionen (Mehr Unbekannte als Gleichungen)

Beispiel:

$f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2 = 0$

Ist die Gleichung $f(x,y) = 0$ nach x auflösbar ($x = g(y)$) oder nach y auflösbar $y = h(x)$, so werden h und g implizit durch $f(x,y) = 0$ definiert.

$|y| = |x|\sqrt{1-x^2} \Rightarrow |x| \leq 1$

Mit der Ungleichung zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel gilt:

$|y| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + (1-x^2)\right) \leq \frac{1}{2}$

Für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ wird $y = \pm\frac{1}{2}$.

a.) Waagerechte Tangente:

$D_1 f(x,y) = 0$

b.) Senkrechte Tangente:

$D_2 f(x,y) = 0$

Die Gleichung $f(x,y) = 0, f \in C^1$ besitzt in der Umgebung eines Punktes (x_0, y_0) mit $f(x_0,y_0) = 0$ eine Auflösung $y = h(x)$ ($x = g(y)$), falls $D_2 f(x_0,y_0) \neq 0 (D_1 f(x_0,y_0) \neq 0)$.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (D_1 f(x_0,y_0), D_2 f(x_0,y_0)) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\|\right)$$

$$0 = D_1 f(x_0,y_0)(x-x_0) + D_2 f(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\| \dots \|)$$

Aus $\vec{f}(\vec{z}) = \vec{o}$ mit $\vec{f}(\vec{z}) \in \mathbb{R}^m$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^p$ ($p > m$) ergeben sich m Gleichungen mit p Unbekannten. Setze $\vec{z} = (\vec{x}, \vec{y})$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ und $n + m = p$. $\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{o}$ soll nach $\vec{y}$ aufgelöst werden: Man erhält m Gleichungen mit m Unbekannten.

$$\underbrace{\vec{f}'(\vec{x},\vec{y})}_{(m,m+n)} = [\underbrace{D_1 f(\vec{x},\vec{y}), D_2\vec{f}(\vec{x},\vec{y}), \dots, D_n\vec{f}(\vec{x},\vec{y})}_{(m,n)}, \underbrace{D_{m_1}\vec{f}(\vec{x},\vec{y}), \dots, D_{m+n}\vec{f}(\vec{x},\vec{y})}_{(m,m)}]$$

Satz:

$\vec{f}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{o}, \vec{f} : S \subset \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}^m$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^m, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$ sei auf der offenen Menge S stetig differenzierbar. Es seien erfüllt:

1.) $\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{o}$

2.) $\partial_{\vec{y}}\vec{f}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ sei regulär.

Dann gelten:

a.) Es gibt um $\vec{x}_0$ eine Umgebung U und um $\vec{y}_0$ eine Umgebung V und eine Funktion $\vec{h} : U \mapsto V, \vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ mit $\vec{y}_0 = \vec{h}(\vec{x}_0)$ und $\vec{f}(\vec{x}, h(\vec{x})) = \vec{o}, \vec{x} \in U$.

b.) $\vec{h}$ ist stetig differenzierbar und es gilt:
$\vec{h}'(\vec{x}) = -\left(\partial_{\vec{y}}\vec{f}(\vec{x},\vec{h}(\vec{x}))\right)^{-1} \partial_{\vec{x}} f(\vec{x},\vec{h}(\vec{x})) \qquad \vec{x} \in U$

$\mathcal{A}$ sei eine $(m, n+m)$-Matrix. Wir betrachten:

$\vec{f}(\vec{u}) = \mathcal{A}\vec{u}$ mit $\vec{u} \in \mathbb{R}^{n+m}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix}$

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{A} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \vec{a}_j = \sum_{k=n+1}^{n+m} \eta_k \vec{a}_k$$

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{A}_1\vec{x} + \mathcal{A}_2\vec{y} = \vec{o} \qquad \mathcal{A} = [\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2]$$

$$\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{o}$$

$$\vec{y} = -\mathcal{A}_2'\mathcal{A}_1\vec{x} = \vec{h}(\vec{x})$$

Beispiel:

Für $n = 3$ und $m = 2$ gilt:

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{x_4} + x_5x_1 - 4x_2 + 3 \\ x_5 \cos x_4 - 6x_4 + 2x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{f}(3, 2, 7, 0, 1) = \vec{o}$

Wir wollen nach x_4, x_5 auflösen:

$x_4 = y_1, x_5 = y_2$

$$\mathcal{J}_{\vec{y}}\vec{f}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{y_1} & x_1 \\ -y_2 \sin y_1 - 6 & \cos y_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist die Ableitungsmatrix an der geforderten Stelle regulär:

$$\mathcal{J}_{\vec{y}}\vec{f}(3, 2, 7, 0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus dem Satz folgt:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{h}(x_1, x_2, x_3) : \vec{f}((x_1, x_2, x_3), h_1(x_1, x_2, x_3), h_2(x_1, x_2, x_3)) = \vec{o}$$

$$\vec{G}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x})) = \vec{o}$$

$$\vec{G}'(\vec{x}) = \underbrace{\vec{f}'(\vec{x}h(\vec{x}))}_{(m,m+n)} \overbrace{\begin{pmatrix} E_n \\ \vec{h}'(\vec{x}) \end{pmatrix}}^{(n+m,n)} = \mathcal{J}_{\vec{x}}\vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))E_n + \mathcal{J}_{\vec{y}}\vec{f}\vec{h}'(\vec{x})$$

$$\vec{h}'(\vec{x}) = -\left(\mathcal{J}_{\vec{y}}\vec{f}(\vec{x}_1, \vec{h}(\vec{x})\right)^{-1} \mathcal{J}_{\vec{x}}\vec{f}(\vec{x}, \vec{h}(\vec{x}))$$

$$\vec{h}'(3, 2, 7) = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \underbrace{\mathcal{J}_{\vec{x}}\vec{f}(3, 2, 7, 0, 1)}_{\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ 10 & -24 & -2 \end{pmatrix}$$

3.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (NB)

Beispiel:

Es ist $f(x,y,z) = xyz$ zu minimieren, wobei $f\colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$.

$y_1(x,y,z) = 0$

$y_2(x,y,z) = 0$

Außerdem gelten die folgenden Nebenbedingungen:

$x + y + z - 5 = 0$

$yz + zx + xy - 8 = 0$

Beispiel:

Gesucht sind die Punkte $P_1(x,y)$ des Kreises $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ und die Punkte $Q=(u,v)$ der Geraden $\{(u,v)|u+v=4\}$, die voneinander minimalen Abstand haben. Es ist $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$ zu minimieren unter den Nebenbedingungen $x^2+y^2-1=0$ und $u+v-4=0$.

Problem:

Es ist $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ zu minimieren. Die Nebenbedingungen sind $g_1(x,y,z)=0$ und $g_2(x,y,z)=0$. $C = F_1 \wedge F_2$ ist eine Kurve. ($\vec{\nabla} g_1$, $\vec{\nabla} g_2$ sind linear unabhängig.) Gesucht ist nun $\{f(x,y,z)|)x,y,z) \in C\}$. Es sei $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $t \in I$ eine Parameterdarstellung von C. Es ist $F(t) = \vec{f}(\vec{r}(t))$ zu minimieren für $t \in I$. Wird F in $t_0 \in I$ minimal, so gilt:

$\vec{r}'(t) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t_0))^{\mathsf{T}} \vec{r}'(t_0) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$

Wird F in P minimal, so gilt $\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) \perp C$. Da $C \subset F_1$ ist, wissen wir auch, daß $\vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0) \perp C$ und $\vec{\nabla} g_2(x_0,y_0,z_0) \perp C$ gilt. Hieraus folgt, daß $\vec{\nabla} f$,$\vec{\nabla} g_1$ und $\vec{\nabla} g_2(x_0,y_0,z_0)$ in der Ebene durch P mit $\vec{n} = \vec{r}'(t_0)$ liegen.

Sie sind linear abhängig $\xrightarrow[\vec{\nabla} g_1, \vec{\nabla} g_2 \text{ linear unabhängig}]{} \vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(x_0,y_0,z_0) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(x_0,y_0,z_0)$

(x_0,y_0,z_0), λ_1, λ_2 lassen sich bestimmen aus den Gleichungen:

$\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_1 \vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0) + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(x_0,y_0,z_0)$

$g_1(x_0,y_0,z_0) = g_2(x_0,y_0,z_0) = 0$

3.9.1 Lagrange-Multiplikatorregel

Satz:

Gegeben sind $f\colon S \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, f sei stetig differenzierbar und $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \colon S \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ $(m < n)$ stetig differenzierbar. Ist $\vec{x}_0$ ein Extremalpunkt von f unter den Nebenbedingungen $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{o}$ und sind $\vec{\nabla} g_1$, $\vec{\nabla} g_2$, …, $\vec{\nabla} g_{n-1}$ linear unabhängig, so gibt es Zahlen λ_1, …, $\lambda_m \in \mathbb{R}$ mit $\vec{\nabla} f(\vec{x}_n) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{\nabla} g_j(\vec{x}_j)$. Dies zusammen mit $\vec{g}(\vec{x}_0) = \vec{o}$ sind $n+m$ Gleichungen für die $n+m$ Unbekannten $\vec{x}_0$ und λ_1, λ_2, …, λ_{n-1}.

Betrachte:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \vec{\nabla} g_j(\vec{x}_0) = \vec{o}}$$

$$F(x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

Berechne von F die Extremwerte: Dazu müssen wir als erstes herausfinden, wo die stationären Stellen liegen.

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} F(\vec{x}_1, \mu_1, \ldots, \mu_m) = \vec{o} = \vec{\nabla}_{\vec{x}} f(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \vec{\nabla} g_1(\vec{x}) = \vec{o}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{\mu}} F(\ldots) = \vec{o} = \vec{g}(\vec{x})$$

Beispiel:

$F(x, y, z, \mu_1, \mu_2) = xyz + \mu_1(x + y + z - 5) + \mu_2(yz + zx + xy - 8)$

Wir berechnen $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$:

1.) $yz + \mu_1 + \mu_2(z + y) = 0$

2.) $xz + \mu_1 + \mu_2(z + x) = 0$

3.) $xy + \mu_1 + \mu_2(x + y) = 0$

Außerdem ist noch $\vec{\nabla}_{\vec{\mu}}$ auszuwerten:

4.) $x + y + z - 5 = 0$

5.) $yz + zx + xy - 8 = 0$

Wir subtrahieren die zweite Gleichung von der ersten:

$z(y - x) + \mu_2(y - x) = (y - x)(z + \mu_2) = 0 \Rightarrow y = x$ oder $z + \mu_2 = 0$

Durch Einsetzen in die vierte Gleichung erhalten wir $2x + z = 5$ und daraus $z = 5 - 2x$. Aus der fünften Gleichung folgt:

$2x(5 - 2x) + x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 = y_1,\ z_1 = 1$ oder $x_2 = \dfrac{4}{3} = y_2,\ z_2 = \dfrac{2}{3}$

$P_1(2, 2, 1),\ P_2\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

Zyklische Vertauschung der Variablen (Invarianz) $(x, y, z) \mapsto (y, z, x) \mapsto (z, x, y)$ ergibt:

$P_3(2, 1, 2),\ P_4\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

$P_5(1, 2, 2),\ P_6\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$

P_1, P_3, P_5 sind Minima und P_2, P_4, P_6 Maxima.

Beispiel:

Es soll $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ extremal (minimal) werden unter folgenden Nebenbedingungen:

$g_1(x_1,x_2,x_3)=x_3=0$, $g_2(x_1,x_2,x_3)=x_3^2-(x_2-1)^3)=0$

$F(x_1,x_2,x_3,\mu_1,\mu_2)=x_1^2+x_2^2+\mu_1x_3+\mu_2\left[x_3^2-(x_2-1)^3\right]$

Wir berechnen $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$:

1.) $2x_1=0\Rightarrow x_1=0$

2.) $2x_2-3\mu_2\left(x_2-1\right)^2=0\Rightarrow x_2=0$

3.) $\mu_1+2x_3^2\mu_2=0$

Außerdem benötigen wir $\vec{\nabla}_{\vec{\mu}}$:

4.) $x_3=0$

5.) $x_3^2-(x_2-1)^3=0\Rightarrow$ Mit der vierten Gleichung erhalten wir $x_2=1$.

$x_2=0$ und $x_2=1$ ergibt einen Widerspruch. Infolgedessen ist das Gleichungssystem **nicht lösbar**. Extremwerte liegen höchstens dort vor, wo $\vec{\nabla}g_1$ und $\vec{\nabla}g_2$ linear abhängig sind. Dies geht nur für $x_2=1$. Dann folgt also Lösung: $S(0,1,0)$.

Beispiel für Kettenregel:

$f(x_1,x_2,x_3)=0\Rightarrow x_3=h(x_1,x_2)$

$D_3f(x_1,x_2,x_3)\neq 0$

$$g(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,h(x_1,x_2))=(f\circ\vec{g})(x_1,x_2),\vec{j}(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\h(x_1,x_2)\end{pmatrix},\vec{j}:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^3$$

$$\vec{j}'(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\D_1h&D_2h\end{pmatrix}\qquad (3,2)\text{-Matrix}$$

$f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}, f'(x_1,x_2,x_3)=(D_1f(x_1,x_2,x_3),D_2f(x_1,x_2,x_3),D_3f(x_1,x_2,x_3))$

$$g'(x_1,x_2)=(D_1g(x_1,x_2),D_2g(x_1,x_2))=f'(x_1,x_2,h(x_1,x_2))\vec{j}'(x_1,x_2)=$$

$$=(D_1f(x_1,x_2),h(x_1,x_2)),D_2f(x_1,x_2),h(x_1,x_2)),D_3f(x_1,x_2),h(x_1,x_2)))\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\D_1f(x_1,x_2)&D_2f(x_1,x_2)\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{D_1f(x_1,x_2,h(x_1,x_2)+D_2(x_1,x_2,h(x_1,x_2))D_1h(x_1,x_2)}_{D_1g(x_1,x_2)}\underbrace{D_2f(x_1,x_2,h(x_1,x_2))+D_2f(x_1,x_2,h(x_1,x_2))D_2h(x_1,x_2)}_{D_2g(x_1,x_2)}$$

Kapitel 4

Mehrdimensionale Integralrechnung

Wir werden in diesem Kapitel folgendes kennenlernen:

- Bereichsintegrale
- Volumenintegrale
- Kurvenintegrale
- Oberflächenintegrale
- Stokesscher Integralsatz
- Gaussscher Integralsatz

4.1 Einführung

1. $G \subseteq \mathbb{R}^2, f : G \mapsto \mathbb{R}$

   $$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = ?$$

   G sei offen, zusammenhängend und $\subseteq \mathbb{R}^2$. „Zusammenhängend“ bedeutet, daß mit 2 Punkten von G auch eine Verbindungskurve ganz in G. Zwei getrennte Mengen sind beispielsweise nicht zusammenhängend. Die Menge darf aber „Löcher“ besitzen. Wenn keine Löcher vorhanden sind, spricht man von „einfach zusammenhängend“. Eine offene und zusammenhängende Menge heißt Gebiet.

   G ist außerdem beschränkt, das heißt es gibt eine Zahl $k > 0$ mit $x \in G$ für die gilt $\|\vec{x}\| < k$ ($G \subset \{\vec{x} | \|\vec{x}\| < k\}$). f: $\overline{G} \mapsto \mathbb{R}^2$ sei stetig, also gelte $f \in C^0(\overline{G})$. Mit $\overline{G} \equiv G \cup \partial G$ bezeichnen wir G mit Rand. Folgendes können wir beispielsweise noch nicht integrieren:

   $$f(x,y) = \frac{1}{1-(x^2+y^2)}, G = \{(x,y)|x^2+y^2 < 1\} \notin C^0(\overline{G})$$

   Im $\mathbb{R}^2$ ist eine Linie kein Gebiet.

   Voraussetzung:

   G ist beschränktes Gebiet: $f \in C^0(\overline{G})$ ($\Rightarrow$ f ist beschränkt.)

Definition:

Wir definieren $\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ für spezielle G:

$G^{(x)} = \{(x,y)|a(y) < x < b(y), c < y < d\}$ seien in x-Richtung projizierbare Gebiete: $\iint\limits_{G^{(x)}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) := \int\limits_{y=c}^{d} \Bigg(\underbrace{\int\limits_{x=a(y)}^{b(y)} f \ldots}_{\text{Funkti}\ldots}$

Bemerkungen:

1.) $f(x,y) \geq 0$. Dann bedeutet:

$\iint\limits_{G^{(x)}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ das Volumen von $\{(x,y,z)|(x,y) \in G^{(x)}, 0 \leq z \leq f(x,y)\}$

$$\int\limits_{x=a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x = I(\text{Fläche})$$

2.) Für $f(x,y) = 1$ ist $\iint\limits_{G^{(x)}} 1\,\mathrm{d}(x,y) = I(G^{(x)})$ Flächeninhalt von $G^{(x)}$.

$$I(G^{(x)}) = \int\limits_{y=c}^{d} b(y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_{y=c}^{a} a(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{y=c}^{d} (b(y) - a(y))\,\mathrm{d}y = \int\limits_{y=c}^{c} \left(\int\limits_{x=a(y)}^{b(y)} 1\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \iint\limits_{G^{(x)}} \mathrm{d}(x,y)$$

2.) In y-Richtung projizierbare Gebiete: $G^{(y)} = \{(x,y)|c(x) < y < d(x), a < x < b\}$

$$\iint\limits_{G^{(y)}} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

3.) Läßt sich G disjunkt in Teilgebiete $G_1, \ldots, G_N$ der Formen (1),(2) zerlegen, wobei $G_1, \ldots, G_N$ höchstens Randstücke gemeinsam haben, so wird definiert:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \sum_{j=1}^{N} \iint\limits_{G_j} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Beispiel:

G sei der beschränkte Teil des $\mathbb{R}^2$, der durch die Kurve $x = 2, y = y, xy = 1$ berandet wird. Wir wollen nun berechnen:

$$\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

$$G = G^{(y)} = \{(x,y)|\frac{1}{x} < y < x, 1 < x < 2\}$$

$$\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{x=1}^{2}\left(\int\limits_{y=\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{x=1}^{2} x^2\left(\int\limits_{y=\frac{1}{x}}^{2}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{9}{4}$$

Alternative:

$$G_1 = G^{(x)} = \{(x,y)|\frac{1}{y} < x < 2, \frac{1}{2} < y < 1\}$$
$$G_2 = G^{(x)} = \{(x,y)|y < x < 2, 1 < y < 2\}$$
$$\iint\limits_G \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{y=\frac{1}{2}}^{1}\left(\int\limits_{x=\frac{1}{y}}^{2}\frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int\limits_{y=1}^{2}\left(\int\limits_{x=y}^{2}\frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{9}{4}$$

Beispiel:

$$G = \{(x,y)|0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^3} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{y=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{y=0}^{1}\left(\int\limits_{x=0}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$
$$\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+y-2y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^3} - 2y\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+y)^3} = -\frac{x}{(x+y)^2}$$
$$\int \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y = \frac{y}{(x+y)^2}$$
$$\int\limits_{x=0}^{1} \left.\frac{y}{(x+y)^2}\right|_{y=0}^{1}\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{1}\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{1}{x+1}\right|_{x=0}^{1} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$
$$\int\limits_{y=0}^{1} -\left.\frac{x}{(x+y)^2}\right|_{x=0}^{1}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$$

Dies liefert unterschiedliche Ergebnisse, da $f \notin C^0(\overline{G})$. $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$ existiert nicht.

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y) = 0$$
$$\lim_{\left(x,\frac{1}{2}x\right)\mapsto(0,0)} \frac{\frac{1}{2}x}{\left(\frac{3}{2}\right)^3 x^3} = \infty$$

Beispiel:

$$I = \int\limits_0^1\int\limits_y^{y^2+1} x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\left[\frac{1}{3}x^3y\right]_y^{y^2+1}\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}\left(y^2+1\right)^3y - \frac{1}{3}y^4\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{24}\left(y^2+1\right)^4 - \frac{1}{15}y^5\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{24}\cdot 16 - \frac{1}{15}\cdot 1 - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{67}{120}}$$

Beispiel:

$$I = \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{\max(0,4x-4)}^{x^2} 2xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{x^2} 2xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{4x-4}^{x^2} 2xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

Für das erste Integral folgt:

$$I_1 = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{x^2} 2xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} \left[xy^2\right]_0^{x^2} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^5 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$I_2 = \int\limits_{1}^{2} \int\limits_{4x-4}^{x^2} 2xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} \left[xy^2\right]_{4x-4}^{x^2} \,\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} \left(x^5 - x\,(4x-4)^2\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2} \left(x^5 - 16x^3 + 32x^2 - 16x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^6 - 4x^4 + \frac{32}{3}x^3 - 8x^2\right]_1^2 = 1\frac{1}{6}$$

Durch Addition gilt dann:

$$I = 1\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{1\frac{1}{3}}$$

4.2 Vertauschen der Integrationsreihenfolge

Satz:

Es sei $\overline{G} = \{[a,b] \times [c,d]\}$ und $f \in C^0(\overline{G})$. Dann gilt: $\displaystyle\int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{y=c}^{d} \left(\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

Beispiel:

$$G = \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

$$I(G) = \iint\limits_G \mathrm{d}(x,y)$$

$$I(G) = 4\,(I(G_1) + I(G_2))$$

$$I(G_1) = \int\limits_{x=0}^{1} \left(\int\limits_{y=\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{12}$$

$$I(G_2) = \int\limits_{x=1}^{2} \left(\int\limits_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$$

$$G = \{(r,\varphi) | 1 < r < 2, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

Wir können ein Integral approximieren durch eine Summe:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \sim \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{M} f(p_{jk})\Delta_{jk}$$

Problem:

Wir wollen den Flächeninhalt des Gebietes G berechnen. Deshalb führen wir eine Koordinatentransformation $\vec{F}: G^\star \mapsto G, \vec{F}(G^\star) = G$ durch: $\vec{F}$ soll injektiv und stetig differenzierbar sein.

$\det \vec{F}(u,v) \neq 0$

Wir approximieren den Flächeninhalt:

$I(Q) \sim \|\vec{a} \times \vec{b}\|$

$\vec{a} = \vec{F}(u + \Delta u, v) - \vec{F}(u,v) = D_1\vec{F}(u,v)\Delta u + o(|\Delta u|)$

$\vec{b} = \vec{F}(u, v + \Delta v) - \vec{F}(u,v) = D_2\vec{F}(u,v)\Delta v + o(|\Delta v|)$

$D_1\vec{F}(u,v), D_2\vec{F}(u,v)] = \vec{F}'(u,v) = J_{\vec{F}}(u,v) : \|\vec{a} \times \vec{b}\| \sim \underbrace{\|D_1\vec{F}(u,v) \times D_2\vec{F}(u,v)\|}_{\det \vec{F}'(u,v)} \Delta u \Delta v$

$$\iint\limits_{\vec{F}(G^\star)=G} \mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{G^\star} \det(\vec{F}'(u,v)\mathrm{d}(u,v)$$

Beispiel:

Wir verwenden Polarkoordinaten $u = r$ und $v = \varphi$:

$$\vec{F}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\det \vec{F}'(r,\varphi) = r$

$$\iint\limits_G \mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=?1}^{2} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = 3\pi$$

$\mathrm{d}(x,y) = |\det \vec{F}'(u,v)| \,\mathrm{d}(u,v)$

Flächenelement in (x,y)-Koordinaten $\Leftrightarrow$ Flächenelement in (u,v)-Koordinaten (Flächenelement in Polarkoordinaten) $r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$

$$I(G) = \iint\limits_G \mathrm{d}F = \iint\limits_{x,y} \mathrm{d}(x,y) \overset{t=g(\tau)}{=} \iint\limits_{r,\varphi} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = \iint\limits_{u,v} |\det \vec{F}'(u,v)| \,\mathrm{d}(u,v)$$

4.3 Kurven-/Linienintegrale

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet. $\gamma \subset G$ ist Trajektorie der Kurve: $\vec{r}: I \mapsto G, \vec{r} = \vec{r}(t)$: $C^1(I), \vec{r}'(t) \neq \vec{o}$. $f: G \mapsto \mathbb{R}$ sei stetiges Skalarfeld.

$$\int\limits_\gamma f \,\mathrm{d}s := \int\limits_{t=a}^{b} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

heißt Linienintegral von f längs (über) γ. Für f=1 ist dies gerade die Länge der Kurve $\vec{r}$: $\int \mathrm{d}s = \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$

Bemerkungen:

1. Die Definition ist unabhängig von der speziellen Darstellung von γ.

   $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$

   $\vec{\varrho} = \vec{\varrho}(\tau), \alpha \leq \tau \leq \beta = \vec{r}(g\tau))$

   $t = g(\tau)$ ist eine Parametertransformation mit g: $[\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ und $g'(\tau) \neq 0$.

   Ziel:

   $$\int\limits_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{!}{=} \int\limits_\alpha^\beta f(\vec{\varrho}(\tau))\|\vec{\varrho}'(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = \int_\gamma f\,\mathrm{d}s$$

   $$\int\limits_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta f(\vec{\varrho}(\tau))\underbrace{\|\vec{r}'(g(\tau))\|g'(\tau)}_{\|\vec{\varrho}'(\tau)\|}\,\mathrm{d}\tau \text{ wobei } g'(\tau) > 0$$

   $\|\vec{\varrho}'(\tau)\| = \|\vec{r}'(g(\tau))g'(\tau)\| = \|\vec{r}'(g(\tau))\||g'(\tau)| = \|\vec{r}'(g(\tau))\|g'(\tau)$

2. Die Definition ist richtungsinvariant.

   $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$ für $a \leq t \leq b$

   $\gamma^- : \vec{\varrho} = \vec{\varrho}(\tau) = \vec{r}(a + b - \tau)$ für $a \leq \tau \leq b$

   $$\left\| \int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma^-} f\,\mathrm{d}s \right\|$$

3. Das Gesamtintegral über eine Kurve setzt sich additiv aus den Integralen über einzelne Kurvenabschnitte zusammen.

   $$\int\limits_\gamma \mathrm{d}s = \int\limits_{\gamma_1} f\,\mathrm{d}s + \int\limits_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}s + \ldots$$

4. Wenn γ eine geschlossene Kurve ist, kann man ein sogenanntes Ringintegral definieren:

   $$\int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}s = \oint f\,\mathrm{d}s$$

   γ sei JORDANkurve, das heißt $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ist injektiv (besitzt keine Doppelpunkte).

4.3.1 Linienintegrale eines Vektorfeldes $\vec{v}$ über eine Kurve γ

$\vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \vec{v}$ sei stetig, $\gamma \subset G$ sei stückweise glatt. Des weiteren sei $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit $a \leq t \leq b$ ($\vec{\varrho} = \vec{\varrho}(\tau)$ mit $\alpha \leq \tau \leq \beta$).

$$\int\limits_\gamma \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} := \int\limits_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,\mathrm{d}t \text{ heißt Linienintegral von } \vec{v} \text{ über } \gamma.$$

Eine andere Bezeichnung ist:

$$\int\limits_\gamma v_1\,\mathrm{d}x_1 + v_2\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + v_n\,\mathrm{d}x_n = \int\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Weitere Bezeichnungen:

$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ sei Vektor der Länge Eins in Richtung γ. Wir können den Integralbegriff somit erweitern, indem wir nun für das Integral über ein Skalarfeld schreiben können:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t) \cdot \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_\gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{T}\right) \,\mathrm{d}s$$

Da $\vec{T}_\gamma = -\vec{T}_{\gamma^-}$ ist, gilt:

$$\int_\gamma \left(\vec{v} \cdot \vec{T}\right) \,\mathrm{d}s = -\int_{\gamma^-} \left(\vec{v} \cdot \vec{T}\right) \,\mathrm{d}s$$

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_{\gamma^-} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Zum Merken:

- Skalares Linienelement: $\mathrm{d}s = \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$
- Vektorielles Linienelement: $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{r}'(t) \,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}\vec{s} = \vec{T} \,\mathrm{d}s$

Beispiel:

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2yz \\ -y \end{pmatrix}, \gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \\ 1-t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 1$$

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2(-t^2)(1-t) \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \\ -1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 4t^2(1-t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}$$

Beispiel:

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ für } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \,\mathrm{d}t = -\pi$$

Übung:

$$\vec{\varrho}(\tau) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \\ t \end{pmatrix} \text{ für } -1 \le t \le 1$$

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\gamma} : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Es sei ∂G: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ mit $a \leq t \leq b$ und $\|\vec{r}'(t)\| = 1$.

$$\vec{T}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$\vec{N}(t)$ erhält man aus $\vec{T}(t)$ durch Drehung um $-\dfrac{\pi}{2}$.

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

4.3.2 Spezielle Integrale über Vektorfeldes

$$\oint\limits_{\partial G} \left(\vec{v} \cdot \vec{T}\right) \mathrm{d}s$$

Dieses Integral nennt man Zirkulation des Vektorfeldes $\vec{v}$ längs ∂G.

$$\oint\limits_{\partial G} \left(\vec{v} \cdot \vec{N}\right) \mathrm{d}s$$

Dies ist der sogenannte Fluß $\vec{v}$ längs ∂G.

Beispiel:

Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathrm{d}x$$

Wir wollen dies lösen, indem wir Polarkoordinaten einführen:

$$\mathrm{d}(x, y) = r\,\mathrm{d}(r, \varphi)$$

$$G^\star \left\{ r, \varphi | 0 \leq r \leq \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int\limits_{r=0}^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \frac{1}{r} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \sqrt{2} - 1$$

Beispiel:

Es sei $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\gamma < \mathbb{R}^n$ und $a \leq t \leq b$. f: $G \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar:

$$\vec{f}'(x) = (D_1 f(\vec{x}), D_2 f(\vec{x}), \ldots, D_n f(\vec{x})) = \vec{\nabla} f(\vec{x})$$

$$\int\limits_\gamma \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_a^b \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} : g(t) = f(\vec{r}(t)) : \boxed{g'(t) = f'(\vec{r}(t))\vec{r}'(t) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)}$$

$$\int\limits_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = g(b) - g(a) = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

$\vec{v} = \vec{\nabla} f : \int\limits_{\gamma} = f(B) - f(A)$

In G ist $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix}$.

$\gamma : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, a \leq t \leq b : \int\limits_{\gamma} \vec{v}(x, y) \, \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{a}^{b} \vec{v}(t, f(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t$

$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} : \int\limits_{\gamma} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{a}^{b} [u(x, f(x)) + w(x, f(x)) f'(x)] \, \mathrm{d}x$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} g(t) \\ t \end{pmatrix}, c \leq t \leq d : \int\limits_{\gamma} \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{c}^{d} [u(g(t), t) g'(t) + w(y(t), y] \, \mathrm{d}y$

Schreibweise:

$u_1 \, \mathrm{d}x + u_2 \, \mathrm{d}y + \ldots + v_m \, \mathrm{d}x_m : \int\limits_{\gamma} xy \, \mathrm{d}x + (x - y) \, \mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} xy \\ x - y \end{pmatrix}$

4.4 Gaußscher Integralsatz in der Ebene (Gaußscher Satz)

Satz:

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ sei beschränktes Gebiet. ∂G sei positiv bezüglich G orientiert und ∂G sei stückweise glatt. G sei sowohl in x-Richtung als auch in y-Richtung projizierbar. $G = \{(x, y) | a(y) < x < b(y), c < y < d\} = \{(x, y) | c(x) < y < d(x), a < x < b\}$ $P = P(x, y), Q = Q(x, y) \in C^1(\overline{G})$.

Mit $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ gilt:

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{G} [D_1 Q(x, y) - D_2 P(x, y)] \, \mathrm{d}(x, y)$$

$$\oint\limits_{\partial G} (P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y) = \iint\limits_{G} [Q(x, y) - P(x, y)] \, \mathrm{d}(x, y)$$

Beweis:

Wir schreiben:

$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = \vec{v}_1(x, y) + \vec{v}_2(x, y)$

Der 1.Schritt ist, $\oint\limits_{\partial G} \vec{v}_1 \, \mathrm{d}\vec{s}$ zu berechnen.

$\gamma_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ c(t) \end{pmatrix}$ für $a \leq t \leq b$

$\gamma_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ d(t) \end{pmatrix}$ für $a \leq t \leq b$

Es ist $\partial G = \gamma_1 + \gamma_2$.

$$\int\limits_{\gamma_1} \vec{v}_1 \,\mathrm{d}\vec{s} + \int\limits_{\gamma_2} \vec{v}_1 \,\mathrm{d}\vec{s}$$

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{v}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_a^b \left[P(x, c(x)) - P(x, d(x))\right] \mathrm{d}x = -\int\limits_a^b \left[\int\limits_{c(x)}^{d(x)} D_2 P(x,y) \,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \iint\limits_G -D_2 P(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$$

$\gamma_1^- : \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $c \leq t \leq d$

$\gamma_2 : \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ t \end{pmatrix}$ für $c \leq t \leq d$

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{v}_2 \cdot \mathrm{d}s = -\int\limits_{\gamma_1} \vec{v}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int\limits_{\gamma_2} \vec{v}_2 \,\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_c^d \left[-Q(a(y), y) + Q(b(y), y)\right] \mathrm{d}y = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x=c(y)}^{b(y)} D_1 Q(x,y) \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \iint\limits_G D_1 Q(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$$

Somit folgt nun:

$$\boxed{\oint\limits_{\partial G} (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \iint\limits_G \left[D_1 Q(x,y) - D_2 P(x,y)\right] \mathrm{d}(x,y)}$$

Beispiel:

Es sei γ: $r = \varphi$ für $0 \leq \varphi \leq \pi$. (r, φ sind Polarkoordinaten in der (x,y)-Ebene.)

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x(x^2+y^2) \\ y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Gesucht ist $\int\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

$$\underbrace{\int\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int\limits_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}_{\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}} = \iint\limits_G \left[D_1 Q - D_2 P\right] \mathrm{d}(x,y)$$

$$\gamma_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, -\pi \leq t \leq 0 : \int\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int\limits_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int\limits_{-\pi}^0 \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{4}t^4\right]_{-\pi}^0 = \frac{\pi^4}{4}$$

$$\int\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} : \vec{v}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \begin{pmatrix} r^3 \cos\varphi \\ r^3 \sin\varphi \end{pmatrix}_{r=\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi^3 \cos\varphi \\ \varphi^3 \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\iint\limits_{G_1} D_2 v_1(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = -\oint\limits_{\partial G} v_1(x,y) \,\mathrm{d}x \;(\star)$$

$$\iint\limits_{G_1} D_1 v_2(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{v}_2(x,y)\,\mathrm{d}y\,(\star\star)$$

$(\star)$ gilt für folgende Gebiete:

$$\int\limits_{\gamma_2} v_1\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\gamma_2} \vec{w}\,\mathrm{d}\vec{s} \text{ mit } \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}, c(b) \le t \le d(b), \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

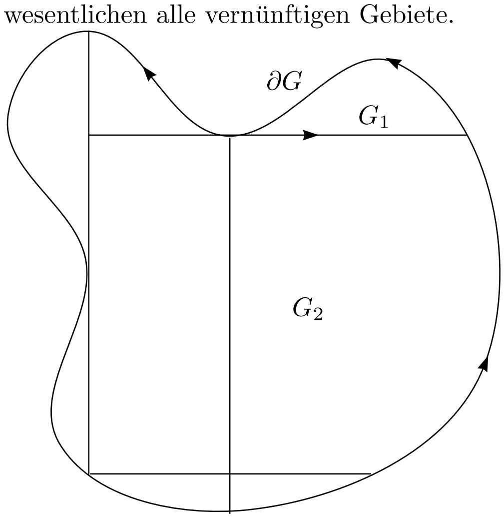
$$\int\limits_{\gamma_2} v_1\,\mathrm{d}x = \int\limits_{c(b)}^{d(b)} (v_1(b,t)\cdot 0 + 0\cdot 1)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\oint\limits_{\partial G} v_1\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_{\gamma_1} v_1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_3} v_1\,\mathrm{d}x}_{\text{letztesMal)}} + \int\limits_{\gamma_2} v_1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\gamma_4} v_1\,\mathrm{d}x - \int\limits_{x=a}^{b} \left(\int\limits_{y=c(x)}^{d(x)} (D_2 v_1)(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$(\star\star)$ gilt für Gebiete, die gleichzeitig die Eigenschaften $1,2; 1^\star, 2^\star; 1, 2^\star; 1^\star, 2$ haben, also beispielsweise Rechtecke, Dreiecke, Ellipsen, Kompositionen aus Geraden und krummlinigen Begrenzungen.

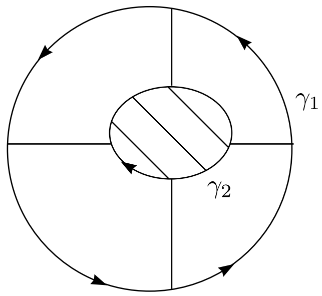
Bemerkung:

Der Satz gilt für Gebiete, die sich in endlich viele Teilgebiete a.), b.), c.) oder d.) zerlegen lassen. Das sind im wesentlichen alle vernünftigen Gebiete.

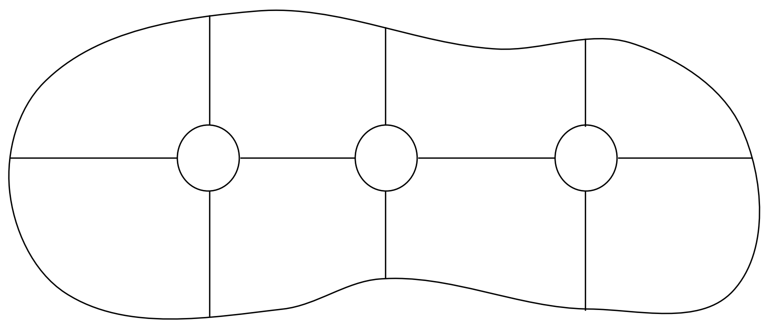


$$\iint\limits_{G_1} (D_1 v_2 - D_2 v_1)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\text{Stück von } \partial G} + \int \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

$$\iint\limits_{G_1} (D_1 v_2 - D_2 v_1)\,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{\text{Stück von } \partial G} + \int \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$$



$$\iint\limits_G D_1 v_2 - D_2 v_1 \,\mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2}$$



4.4.1 Anwendungen des Gaußschen Satzes (Raum) (Greenscher Satz (Ebene))

$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Wir müssen die Komponentenfunktionen ableiten und erhalten:

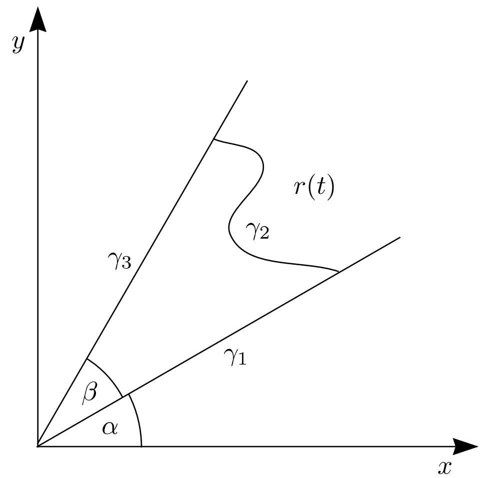
$D_1 \vec{v}_2 = 1, D_2 \vec{v}_1 = -1$

$$2 \iint\limits_G \mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} (x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x) = 2I(G)$$

4.4.2 Leibnizsche Sektorformel

$r = r(t) \in C^1[\alpha, \beta]$ (stückweise), $G = \{(x,y) | x = r\cos t, y = r \sin t, \alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq r \leq r(t)\}$. Dann gilt:

$$I(G) = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta r^2(t) \,\mathrm{d}t$$



$$I(G) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_3} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)\right]$$

$$\gamma_1 : \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \tau\cos\alpha \\ t\sin\alpha \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq \tau \leq r(\alpha)$$

$$\gamma_3 : \vec{r}_3(\tau) = \begin{pmatrix} \tau\cos\beta \\ \tau\sin\beta \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq \tau \leq r(\beta)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_{\gamma_1} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_0^{r(\alpha} \vec{v}(\vec{r}_1(\tau)) \cdot \vec{r}_1'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^{r(\alpha)} (-\tau\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \tau\cos\alpha\cdot\sin\alpha)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

$$\int\limits_{\gamma_3} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0$$

$$\gamma_2 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos t - r(t)\sin t \\ r'(t)\sin t + r(t)\cos t \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_{\gamma_2} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \int\limits_\alpha^\beta [(-r(t)\sin t)(r'\cos t - r\sin t) + r\cos t(r'\sin t + r\cos t)]\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta r^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Beispiel: Kreisausschnitt

$$F = \frac{1}{2}\int\limits_0^\alpha r^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}r^2\alpha$$

4.4.3 Umschreiben des Gaußschen Satzes (Stokesscher Satz)

G sei wie vorher, $\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar in $\overline{G}$.

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ v_3(x,y) \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\iint\limits_G \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}(x,y)\right) \cdot \vec{e}_3 \,\mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Begründung:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. Dies ist nun der sogenannte STOKESscher Satz (in der Ebene). Weiterhin formen wir um:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \vec{N} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$G, \partial G$ sei wie vorher, $\vec{w} : G \mapsto \mathbb{R}^2$ sei stetig differenzierbares Vektorfeld:

$$\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} w_1(x,y) \\ w_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$\iint\limits_G \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \,\mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}s$$

Dies ist der sogenannte Divergenzsatz.

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \\ v_3(x,y) \end{pmatrix},\ (x,y) \in G$$

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} w_1(x,y) \\ w_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{v} \,\mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{T} \,\mathrm{d}s = \iint\limits_G \left(D_1 v_2 - D_2 v_1\right)(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_G \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \vec{e}_3 \,\mathrm{d}(x,y)$$

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}s = \iint\limits_G \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}\right)(x,y) \,\mathrm{d}(x,y)$$

4.4.4 Greensche Formeln

Setze $\vec{w} = \vec{\nabla} f, f$ sei 2 mal stetig differenzierbar in (D):

$$\oint\limits_{\partial G} D_{\vec{N}} f \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{G} \triangle f \, \mathrm{d}(x,y)$$

f, g seien 2 mal stetig differenzierbare Skalarfelder: Setze in $(D) : \vec{w} = g\vec{\nabla} f$

1.) $g\vec{\nabla} f \cdot \vec{N} = g D_{\vec{N}} f$

2.) $\vec{\nabla} \cdot (g\vec{\nabla} f) = (\vec{\nabla} g) \cdot (\vec{\nabla} f) + g\triangle f$

- 1.Greensche Formel:

$$\oint\limits_{\partial G} g D_{\vec{N}} f \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{G} \left(\vec{\nabla} g \cdot \vec{\nabla} f + g \triangle f\right) \mathrm{d}(x,y)$$

$$\left(\iint\limits_{G} \left[D_1 g D_1 f + D_2 g D_2 f + g(D_1^2 f + D_2^2 f)\right] \mathrm{d}(x,y)\right)$$

Vertausche f und g: $\oint\limits_{\partial G} f D_{\vec{N}} g \, \mathrm{d}s = \iint\limits_{G} \left(\vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} f + f \triangle g\right) \mathrm{d}(x,y)$

- 2.Greensche Formel:

$$\oint\limits_{\partial G} \left(g D_{\vec{N}} f - f D_{\vec{N}} g\right) \mathrm{d}s = \iint\limits_{G} \left(g\vec{\nabla} f - f\vec{\nabla} g\right) \mathrm{d}(x,y)$$

Wir notieren uns die Potentialgleichung:

$\Delta u = \varrho(\vec{x})$, $\vec{x} \in G$, $u = \varphi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \partial G$

Setze für g die Funktion u ein:

$$\oint\limits_{\partial G} \left(\varphi D_{\vec{N}} f - f D_{\vec{N}} \varphi\right) \mathrm{d}x = \iint\limits_{G} (u \triangle f - f g) \, \mathrm{d}(x,y)$$

Wähle f so geschickt, daß hieraus u bestimmbar wird. ($f = 0$ auf ∂G: $\Delta f = \delta$) f heißt dann **Greensche Funktion** zum Problem.

4.5 Potentialfelder (Gradientenfeld, konservatives Feld)

$\vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ heißt Potentialfeld, falls es ein Skalarfeld $f : G \mapsto \mathbb{R}$ gibt derart, daß $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}), \vec{x} \in G$ gibt. Für $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b$ hat man:

$$\int\limits_{\gamma} \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

f heißt **Potential** zu $\vec{v}$ (**Stammfunktion**). Erinnerung: $\left(\int\limits_a^b h'(t) \, \mathrm{d}t = h(b) - h(a)\right)$

Satz:

Ist $\vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Potentialfeld, so gilt: $\mathcal{J}_{\vec{v}}(\vec{x}) = \mathcal{J}_{\vec{v}}^{\intercal}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in G$.

Beweis:

$\mathcal{J}_{\vec{v}}(\vec{x}) = \left[D_1\vec{v}(\vec{x}), D_2\vec{v}(\vec{x}), \ldots, D_n\vec{v}(\vec{x}) = (D_j v_k(\vec{x}))_{k_{ij}}\right]$

Unser Ziel ist zu zeigen, daß $D_j v_k(\vec{x}) = D_k v_j(\vec{x})$ gilt. Bekannt ist $v_k(\vec{x}) D_k f(\vec{x})$ für $l = 1, 2, \ldots, n$.

$D_j v_k(\vec{x}) = D_j D_k f(\vec{x}) = D_k D_j f(\vec{x}) = D_k v_j(\vec{x})$

$n = 3 : D_1 v_2 = D_2 v_1, D_1 v_3 = D_3 v_1, D_2 v_3 = D_3 v_2 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}) = \vec{o}$

Satz:

$G \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet. $\vec{r}_0, \vec{r}_1 \in G$: Es sei $\vec{v}$ ein stetiges Potentialfeld mit einem Potential f. Dann gilt für jedes $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindende in G verlaufende stückweise glatte Kurve $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), 0 \leq t \leq b$ ($\vec{r}(a) = \vec{r}_0, \vec{r}(b) = \vec{r}_1$):

$$\int\limits_{\gamma} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_0)$$

Satz:

Es sei $\vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann sind äquivalent:

1.) $\vec{v}$ ist ein **Potentialfeld**.

2.) Für je zwei Punkte $\vec{r}_0, \vec{r}_1$ in G ist $\int\limits_{\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ unabhängig von der $\vec{r}_0$ mit $\vec{r}_1$ verbindenden Kurve γ.

3.) Für **jede** geschlossene Kurve $\gamma \subset G$ gilt: $\oint\limits_{\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$

Beweis:

Aus dem ersten Punkt folgt durch den zweiten Satz der zweite Punkt. Um (3) zu beweisen gehen wir folgendermaßen vor: Das **Ziel** ist $\oint\limits_{\gamma} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = 0$, wobei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$. Wir haben folgende **Voraussetzung**:

$$\int\limits_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\gamma_2} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

$$\oint\limits_{\gamma} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} + \int\limits_{\gamma_2^-} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \oint\limits_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Nun zeigen wir noch die Umkehrung von (3) nach (2). Unser **Ziel** ist:

$$\oint\limits_{\gamma_1} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\gamma_2} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Bilde $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$ und argumentiere wie vorher. (2) $\mapsto$ (1) beweisen wir dadurch, indem wir zeigen, daß $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist. $x_0 \in G$ sei beliebig, aber fest:

$$f(\vec{x}) = \gamma \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}, \vec{x} \in G$$

Wir machen die **Probe**: $D_j f(\vec{x}) = v_j(\vec{x})$, wobei $\vec{x} \in G$.

$$f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x}) = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}+h\vec{e}_j} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_{\vec{x}}^{\vec{x}+h\vec{e}_j} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$\vec{r}(t) = \vec{x} + t\vec{e}_j, \alpha \le t \le h$ sei eine gerade Verbindung zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x} + h\vec{e}_j$ mit $\vec{r}'(t) = \vec{e}_j$. Somit folgt nun (mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung):

$$\int\limits_{\vec{x}}^{\vec{x}+h\vec{e}_j} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_0^h \vec{v}(\vec{x} + h\vec{e}_j) \cdot \vec{e}_j \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^h v_j \cdot (\vec{x} + t\vec{e}_j) \,\mathrm{d}t \underset{MWSIR}{=} hv_j(\vec{x} + t\vec{e}_j), t \in (0, h).$$

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{1}{h} \left(f(\vec{x} + h\vec{e}_j) - f(\vec{x}) = v_j(\vec{x} + t\vec{e}_j)\right) \xrightarrow{h \mapsto 0} v_j(\vec{x}) = D_j f(\vec{x})$$

Definition:

Das Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene doppelpunktfreie Kurve stetig in G auf einem Punkt zusammenziehen läßt.

Satz:

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf G. Dann gilt: $\vec{v}$ ist Potentialfeld $\Leftrightarrow \mathcal{J}_{\vec{v}}(\vec{x}) = \mathcal{J}_{\vec{v}}(\vec{x}), \vec{x} \in G$. Im Fall $n = 3$ bedeutet das: $\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{x}) = \vec{o}$.

Beispiel:

Ist G nicht einfach zusammenhängend, so folgt im allgemeinen aus $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{o}$ **nicht**, daß $\vec{v}$ Potentialfeld ist.

$$n = 2 : \vec{v}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, G = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}\}$$

Übung:

$$D_1 v_2(x, y) = D_2 v_1(x, y), (x, y) \neq (0, 0) \qquad (\mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{x}) = \mathcal{J}_{\vec{v}}(\vec{x})^\mathsf{T})$$

$$\gamma : x^2 + y^2 = 1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi$$

$$\oint\limits_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0$$

Somit folgt aus Satz 3, daß dies kein Potentialfeld ist.
Die Fläche F: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ mit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{r}$: $U \mapsto \mathbb{R}^3$ ist einmal stetig differenzierbar.

$$\mathrm{d}o = D_1\vec{r}(u, v) \times D_2\vec{r}(u, v) \,\mathrm{d}(u, v)$$

$$\mathrm{d}\vec{o} = (D_1\vec{r}(u, v) \times D_2\vec{r}(u, v)) \,\mathrm{d}(u, v) = \vec{N} \,\mathrm{d}v$$

4.5.1 Gaußscher Integralsatz

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\partial G} (v_1 \,\mathrm{d}x + v_2 \,\mathrm{d}y) = \iint\limits_{G} \left[D_1 v_2(x,y) - D_2 v_1(x,y)\right] \mathrm{d}(x,y)$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \oint\limits_{\partial G} x \,\mathrm{d}y = I(G)$$

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f \,\mathrm{d}s}$$

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

$$f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} : \iint\limits_{F} f \,\mathrm{d}v = \iint\limits_{U} f(\vec{r}(u,v)) D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) \,\mathrm{d}(u,v)$$

$$\vec{w} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} : \iint\limits_{F} \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{o} := \iint\limits_{U} \vec{w}(\vec{r}(u,v)) \cdot (D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)) \,\mathrm{d}(u,v)$$

Beispiel:

$$z = h(x,y) \text{ mit } (x,y) \in U : F \qquad \left(z = \sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix}, D_1\vec{r}(x,y) \times D_2\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ D_1 h(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ D_2 h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1 h(x,y) \\ -D_2 h(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}o = \sqrt{1 + (D_1 h)^2 + (D_2 h)^2} \,\mathrm{d}(x,y)$$

$$I(F) = \iint\limits_{(x,y)\in U)} \sqrt{1 + (D_1 h)^2 + (D_2 h)^2} \,\mathrm{d}(x,y)$$

Obere Halbkugel K_+ um (0,0,0) mit Radius R:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x,y) : x^2 + y^2 < R^2 \qquad \left(z = a_3 + \sqrt{R^2 - (x-a_1)^2 - (y-a_2)^2}\right)$$

$$\mathrm{d}o = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} I(K_+) = \iint\limits_{x^2+y^2<R^2} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \,\mathrm{d}(x,y) = \int\limits_{x=-R}^{R} \int\limits_{y=\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$$

Wir verwenden Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

$$y = r\sin\varphi \quad 0 \le r \le R$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2$$

Nun wollen wir noch $I(K_+)$ mit Kugelkoordinaten berechnen:

$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}, 0\leq\varphi\leq 2\pi, 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{d}o = \|D_1\vec{r}\times D_2\vec{r}\|\,\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = \left\|\begin{pmatrix}-\sin\varphi\cos\vartheta\\ \cos\varphi\cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos\varphi\sin\vartheta\\ -\sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}\right\|\mathrm{d}(\varphi,\vartheta) = R^2\cos\vartheta$$

$$I(K_+) = R^2\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi R^2$$

Beispiel:

Wir wollen eine Rotationsfläche berechnen:

$$z = f(u)\sin v$$

$$y = f(u)\cos v$$

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix}f(u)\cos v\\ f(u)\sin v\end{pmatrix}, a\leq u\leq b, 0\leq v\leq 2\pi$$

$$\mathrm{d}o = \|D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)\|\,\mathrm{d}(u,v) = \left\|f(u)\begin{pmatrix}f'(u)\\ -\cos v\\ -\sin v\end{pmatrix}\mathrm{d}(u,v)\right\| = f(u)\sqrt{1+f(u)^2}\,\mathrm{d}(u,v)$$

$$I(\text{Rotationsfläche}) = \int\limits_{u=a}^{b}\int\limits_{v=0}^{2\pi} f(u)\sqrt{1+f(u)^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u) = 2\pi\int\limits_{u=a}^{b} f(u)\sqrt{1+f(u)^2}\,\mathrm{d}u$$

Übung:

Kugeloberfläche!

4.6 Variable Substitution im Bereichsintegral

Definition:

$\vec{\psi}$ sei eine Parametertransformation: $\vec{\psi}(U^\star) = U, \vec{\psi}(G^\star), \vec{\psi}$ sei injektiv und stetig differenzierbar, $\det\vec{\psi}(\xi,\eta)\neq 0\,(>0)$.

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_1(\xi,\eta)\\ \psi_2(\xi,\eta)\end{pmatrix}$$

$$\vec{\psi}'(\xi,\eta) = \begin{pmatrix}D_1\psi_1 & D_2\psi_1\\ D_1\psi_2 & D_2\psi_2\end{pmatrix}, \det\vec{\psi}'(\xi,\eta) = (D_1\psi_1 D_2\psi_2 - D_1\psi_2 D_2\psi_1)(\xi,\eta)$$

$$I(G) = \iint\limits_{G=\vec{\psi}(G^\star)}\mathrm{d}(u,v)$$

$$\partial G^\star = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}\text{ mit } a\leq t\leq b,\ \partial G: \vec{R}(t) = \vec{\psi}(\underbrace{\xi(t),\eta(t)}_{\vec{r}(t)}) = \begin{pmatrix}\psi_1(\vec{r}(t))\\ \psi_1(\vec{r}(t))\end{pmatrix}\text{ mit } a\leq t\leq b$$

$$I(G) = \iint\limits_{G=\vec{\psi}(G^\star)} \mathrm{d}(u,v) = \oint\limits_{\partial G} u\,\mathrm{d}v = \int\limits_a^b \psi_1(r(t))\underbrace{(\psi_2\circ\vec{r})'(t))}_{R_2'(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$(\psi_2\circ\vec{r})'(t) = \underbrace{\psi_2'(\vec{r}(t))}_{(1,2)}\underbrace{\vec{r}'(t)}_{(2,1)} = \vec{\nabla}\psi_2(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)$$

$$\iint\limits_G \mathrm{d}(u,v) = \int\limits_a^b \Big(\psi_1(\vec{r}(t))\vec{\nabla}\psi_2(\vec{r}(t))\Big)\cdot\underbrace{\vec{r}'(t)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}\vec{s}|\partial G^\star} = \int\limits_{\partial G^\star}(\psi_1\vec{\nabla}\psi_2)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_{\partial G^\star}(\psi_1 D_1\psi_2\,\mathrm{d}\xi + \psi_1 D_2\psi_2\,\mathrm{d}\eta)$$

Nun wenden wir noch den Gaussschen Integralsatz an:

$$\oint\limits_{\partial G^\star}(\underbrace{\psi_1 D_1\psi_2}_{v_1}\,\mathrm{d}\xi + \underbrace{\psi_1 D_2\psi_2}_{v_2}\,\mathrm{d}\eta) = \iint\limits_{G^\star}\underbrace{[D_1(\psi_1 D_2\psi_2) - D_2(\psi_1 D_1\psi_2)]}_{\det\vec{\psi}'(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}(\xi,\eta)$$

$$\mathrm{d}(u,v) = |\det(\vec{\psi}'(\xi,\eta)|\,\mathrm{d}(\xi,\eta)$$

Satz:

$\vec{\psi}, U, U^\star, G, G^\star$ sei wie vorher. $f = f(u,v)$ sei stetig auf U. Dann gilt:

$$\iint\limits_{G=\vec{\psi}(G^\star)} f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) = \iint\limits_{G^\star} f(\vec{\psi}(\xi,\eta))\det\vec{\psi}'(\xi,\eta)\,\mathrm{d}(\xi,\eta)$$

In HM I hatten wir:

$$\psi : \underbrace{I^\star}_{\xi} \mapsto \underbrace{I}_{u} : \int\limits_{I=\psi(I^\star)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{I^\star} f(\psi(\xi))\psi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Satz:

Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie vorher auch. Dann erhält man:

$$I(F) = \iint\limits_F \mathrm{d}o = \iint\limits_{U^\star}\|D_1\vec{\varrho}(\xi,\eta)\times D_2\vec{\varrho}(\xi,\eta)\|\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = \underbrace{\iint\limits_U \|D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)\|\,\mathrm{d}(u,v)}_{f(u,v)}$$

$$\iint\limits_U f(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) = \iint\limits_{U^\star} f(\vec{\psi}(\xi,\eta))\det\vec{\psi}'(\xi,\eta)\,\mathrm{d}(\xi,\eta)$$

Berechne mit der Kettenregel: $D_1\vec{\varrho}(\xi,\eta)\times D_2\vec{\varrho}(\xi,\eta)$ mit $\vec{r}\cdot\vec{\psi} = \vec{\varrho}$.

Beispiel:

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z\end{pmatrix}, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Wir betrachten $F = \{(x,y,z)|x^2+y^2 = 1, 0\leq z\leq 1\}$: Hierdurch wird ein beschränktes Gebiet $G\subset\mathbb{R}^3$ berandet. Gesucht ist der Fluß ϕ von $\vec{v}$ durch F nach außen bezüglich G:

$$\phi = \iint\limits_F \vec{v}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}o$$

$\vec{N}_F$ sei die Einheitsnormale nach außen, F_1 die Seitenfläche und F_2, F_3 die Deckflächen.

$$F_1 : \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ und } 0 \leq v \leq 1$$

Wir rechen dies nach:

$$\vec{N} = D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) \frac{1}{\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} \cdot \vec{N}_{F_1} = \cos^2 u$, $\mathrm{d}o = \mathrm{d}(u,v)$

$$\int\limits_{F_1} \vec{v} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o = \pi$$

$$F_2 : \vec{r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int\limits_{F_2} \vec{v} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint\limits_{F_3} \vec{v} \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o = 0$$

4.6.1 Der Stokessche Integralsatz in $\mathbb{R}^3$

Voraussetzung 1:

- $F^\star : \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in U^\star \subseteq \mathbb{R}^2$
- 2 mal stetig differenzierbar und glatt ($D_1\vec{r} \times D_2\vec{r} \neq \vec{o}$)
- $F^\star$ einfach ($\vec{r}$ ist injektiv)
- $F^\star$ ist zweiseitige Fläche im $\mathbb{R}^3$. $F^\star$ ist orientierbar.

Voraussetzung 2:

- $F \subset F^\star, \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in U \subseteq U^\star$ ist Flächenstück auf $F^\star$, ∂F ist stückweise glatte JORDANkurve.

Voraussetzung 3:

- $\vec{f} : F^\star \mapsto \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\iint_F \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \oint\limits_{\partial G} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\iint_F \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \mathrm{d}o = \oint\limits_{\partial G} \vec{f} \cdot \vec{T} \mathrm{d}s$$

1. ∂U sei positiv orientiert. Damit liegt $\vec{T}$ fest. Dann ist die Richtung von $\vec{N}$ die Richtung von $D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)$.
2. $\vec{v} \perp \vec{T}$ in der Tangentialebene und ist nach außen bezüglich auf F gerichtet. $\vec{N}$ hat die Richtung von $\vec{v} \times \vec{T}$.

Wir wollen dies nun nachrechnen:

$$\iint_F \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \iint_U \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right)(\vec{r}(u,v)) \cdot (D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v))}_{(\star)} \mathrm{d}(u,v)$$

$(\star)$ geht nun durch Vertauschung der Faktoren des Skalarproduktes über in:

$$\underbrace{(D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v))}_{\vec{a}\times\vec{b}} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right)}_{\vec{c}\times\vec{d}}(\vec{r}(u,v))$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) = \vec{c}\left[(\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}\right] = \vec{b} \cdot \left((\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{d}\right) - \vec{a} \cdot \left((\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}\right)$$

Angewendet auf unsere Rechnung ergibt:

$$D_2\vec{r}(u,v) \cdot \left((D_1\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla})\vec{f}\right)(\vec{r}(u,v)) - D_1\vec{r}(u,v) \cdot \left(D_2\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla})\vec{f}\right)(\vec{r}(u,v)) = (\star)$$

$$\underbrace{(\vec{f} \cdot \vec{r})}_{\phi}(u,v) = \vec{\phi}(u,v)$$

$$\underbrace{\phi'(u,v)}_{(3,2)} = \left[D_1\vec{\phi}(u,v), D_2\vec{\phi}(u,v)\right]$$

$$\begin{aligned} D_1\vec{\phi}(u,v) &= \underbrace{\vec{f}'(\vec{r}(u,v))}_{(3,3)}\underbrace{D_1\vec{r}(u,v)}_{(3,1)} = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & D_3 f_2 \\ D_1 f_3 & D_2 f_3 & D_3 f_3 \end{pmatrix}(\vec{r}(u,v)) \cdot D_1\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} D_1\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla} f_1 \\ D_1\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla} f_2 \\ D_1\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla} f_3 \end{pmatrix} = \\ &= \left[\left(D_1\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{f}\right](\vec{r}(u,v)) \end{aligned}$$

Nun folgt:

$$D_2\vec{r}(u,v) \cdot \underbrace{\left((D_1\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla})\vec{f}\right)(\vec{r}(u,v))}_{D_1\phi(u,v)} - D_1\vec{r}(u,v) \cdot \underbrace{\left(D_2\vec{r}(u,v) \cdot \vec{\nabla})\vec{f}\right)(\vec{r}(u,v))}_{D_2\vec{\phi}(u,v)}$$

$$\begin{aligned} \iint_F \left(\vec{\nabla} \times \vec{f}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{o} &= \iint_U \underbrace{\left(D_2\vec{r}(u,v) \cdot D_1\vec{\phi}(u,v) - D_1\vec{r}(u,v) \cdot D_2\vec{\phi}(u,v)\right)}_{D_1\underbrace{\left(\vec{\phi} \cdot D_2\vec{r}\right)(u,v)}_{v_2} - D_2\underbrace{\left(\vec{\phi} \cdot D_1\vec{r}(u,v)\right)}_{v_1}} \mathrm{d}(u,v) = \\ &= \oint_{\partial U} \left(\vec{\phi} \cdot D_1\vec{r}\,\mathrm{d}u + \vec{\phi} \cdot D_2\vec{r}\,\mathrm{d}v\right) = \oint_{\partial U} \vec{\phi} \cdot (D_1\vec{r}\,\mathrm{d}u + D_2\vec{r}\,\mathrm{d}v) = \\ &= \int_{t=a}^{b} \vec{\phi}(\vec{w}(t)) \cdot \underbrace{(D_1\vec{r}(\vec{w}(t)) \cdot u'(t) + D_2\vec{r}(\vec{w}(t)) \cdot v'(t))}_{\vec{\varrho}'(t)} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Nun führen wir eine Zwischenrechnung durch:

$$\vec{\varrho}'(t) = \vec{r}'(\vec{w}(t))\vec{w}'(t) = [D_1\vec{r}(\vec{w}(t)), D_2\vec{r}(\vec{w}(t))]\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \int_{t=a}^{b} \vec{\phi}(\vec{w}(t))\vec{\varrho}'(t)\,\mathrm{d}t = \oint_{\partial F} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Beispiel:

f,g seien skalare Felder:

$f(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^2$

$g(x,y,z) = x + y + z$

$F = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$

Zu berechnen ist:

$$J := \iint\limits_F \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \iint\limits_F \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \cdot \vec{N} \,\mathrm{d}o$$

$\vec{N}$ ist die Einheitsnormale auf F mit nichtnegativer z-Komponente.

1.Möglichkeit:

$\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g = \vec{\nabla} \times \vec{v}$

Wähle $\vec{v} = f\vec{\nabla} g : \vec{\nabla} \times \left(f\vec{\nabla} g\right) = \vec{\nabla} \times (f\vec{\nabla} g) + \vec{\nabla} \times (f\vec{\nabla} g) = (\vec{\nabla} f) \times (\vec{\nabla} g) + f \underbrace{(\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} g))}_{\vec{o}}$

$$J = \iint\limits_F \vec{\nabla} \times (f\vec{\nabla} g) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \oint\limits_{\partial G} f\vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \left(x^3 - y^3 + z^2\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (\cos^3 t - \sin^3 t)(\cos t - \sin t) \,\mathrm{d}t = \left[\frac{6}{8} t\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

2.Möglichkeit:

$\{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$

$$J = \oint\limits_{\partial F} f\vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_F \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \mathrm{d}\vec{o} = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1, z=0} \left(\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1, z=0} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -3y^2 \\ 2z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1, z=0} \left(3x^2 + 3y^2\right) \mathrm{d}(x,y)$$

Mit Polarkoordinaten erhält man:

$x = r\cos t, y = r\sin t$

$0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$3 \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{t=0}^{2\pi} r^2 \cdot r \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}r = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\pi$$

(siehe Induktionsgesetz, Lenzsche Regel)

4.6.2 Substitution der Variablen im Volumenintegral

$$\vec{v} : G \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : \vec{\psi}(u,v,w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ sei injektiv, stetig differenzierbar und es gelte $\det \vec{\psi}(u,v,w) \neq 0$ mit $(u,v,w) \in G$.

$$\iiint\limits_{\vec{\psi}(G)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint\limits_{G} \left(f \circ \vec{\psi}\right)(u,v,w) \det \vec{\psi}'(u,v,w)\,\mathrm{d}(u,v,w)$$

Man kann dies auch anders schreiben, wenn man mehr Übung hat:

$$\int\limits_{\vec{\psi}(G)} f(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int\limits_{G} \left(f \circ \vec{\psi}\right)(\vec{u}) \det \vec{\psi}'(\vec{u})\,\mathrm{d}\vec{u}$$

Beispiel:

Hier gibt es nun ein Beispiel zu Kugelkoordinaten $u = r$, $v = \varphi$, $w = \vartheta$:

$$\vec{\psi}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}, r > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

Man findet übrigens in vielen Büchern auch:

$$\vec{\psi}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Es kommt in Anwendungen sehr häufig vor, daß man kugelsymmetrische Funktionen integrieren muß:

$$f = f(t), t \in \mathbb{R}$$

$$g\underbrace{(x,y,z)}_{\vec{x}} = f(\|\vec{x}\|), r_2 > r_1 > 0$$

$$I = \int\limits_{r_1 \leq x \leq r_2} f(\|\vec{x}\|)\,\mathrm{d}\vec{x} \qquad \left(= \iiint\limits_{r_1 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r_2} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\,\mathrm{d}(x,y,z)\right)$$

$$I = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r_1}^{r_2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r) r^2 \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot 2 \cdot \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r) r^2\,\mathrm{d}r$$

Als Funktion $f(r)$ hat man nun beispielsweise:

$$f(r) = \mathrm{e}^{r^3}$$

$$r_1 = 0, r_2 = 1 : \int\limits_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2{}^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}(x,y,z) = 4\pi \int\limits_0^1 \mathrm{e}^{r^3} r^2\,\mathrm{d}r \underset{\varrho = r^3}{=} \frac{4}{3}\pi(\mathrm{e} - 1)$$

Zusammenfassung:

Wir haben also nun folgende Integralsätze:

1.) STOKESscher Satz:

$$G \subseteq \mathbb{R}^2 : \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in C^1(G) : \iint\limits_G \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \vec{e}_z \, \mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

2.) Integralsatz/GAUSSscher Satz:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in C^1(G) : \iint\limits_G \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \, \mathrm{d}(x,y) = \oint\limits_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}s$$

3.) STOKESscher Integralsatz für $\vec{v}$ und $F \in \mathbb{R}^3$:

$$\iint\limits_F \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o = \oint\limits_{\partial F} \vec{v} \cdot \vec{T} \cdot \mathrm{d}s$$

4.) GAUSSscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$:

$$\iiint\limits_G \vec{\nabla} \cdot \vec{w} \, \mathrm{d}\tau = \oiint_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{N} \mathrm{d}o$$

4.7 Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \subseteq G$ sei in z-Richtung projizierbar: $G = \{(x,y,z) | g(x,y) \leq z \leq h(x,y), (x,y) \in G_0\}$

$$F_1 : \vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ h(x,y) \end{pmatrix}, \vec{N} \, \mathrm{d}o = \pm \frac{D_1\vec{r} \times D_2\vec{r}(x,y)}{\|D_1\vec{r} \times D_2\vec{r}(x,y)\|} \|D_1\vec{r} \times D_2\vec{r}\| \, \mathrm{d}(x,y) = \pm \begin{pmatrix} -D_1h(x,y) \\ -D_2h(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y)$$

Das Minuszeichen benötigen wir nicht. Weiterhin folgt:

$$F_2 : \vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \vec{N} \, \mathrm{d}o = \begin{pmatrix} D_1g(x,y) \\ D_2g(x,y) \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y), (x,y) \in G_0$$

$$F_3 : \vec{N} \, \mathrm{d}o = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}o$$

Hier ist es zwar unwichtig, was in den ersten beiden Zeilen steht. Dennoch kann man es sich überlegen:

$$\partial G_0 : \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}}_{0 \leq x \leq L}, F_3 : \vec{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z \end{pmatrix}$$

$g(x(s), y(s)) \leq z \leq h(x(s), y(s)), D_1\vec{r} \times D_2\vec{r}$

$f : G \mapsto \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar:

$$\iiint\limits_G D_3 f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \iint\limits_{(x,y)\in G_0} \left(\int\limits_{z=g(x,y)}^{h(x,y)} D_3 f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}(x,y)$$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_G D_3 f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \iint\limits_{(x,y)\in G_0} \left(f(x,y)h(x,y) - f(x,y)g(x,y)\right)\,\mathrm{d}(x,y) = \\ &= \iint\limits_{(x,y)\in G_0} f(x,y,h(x,y))\,\mathrm{d}(x,y) + \iint\limits_{(x,y)\in G_0} f(x,y,g(x,y))(-1)\,\mathrm{d}(x,y) + \\ &\quad + \iint\limits_{(x,y)\in G_0} f\left(F_3\right)\,\mathrm{d}(x,y)\end{aligned}$$