Mitschrieb zu Höhere Mathematik III: Fachrichtungen Physik, Elektroingenieurwesen und Geodäsie

Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer

Vorlesung Wintersemester 2002/2003

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 4. Januar 2005

Mitschrieb der Vorlesung Höhere Mathematik III
von Herrn Dr. Müller-Rettkowski und Diplomphysiker Jochen Bitzer im Wintersemester 2002/2003
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung **5**
- 1.1 Komplexe Zahlen . . . 5
  - 1.1.1 Polardarstellung . . . 6
- 1.2 Exponentialfunktion . . . 6
- 1.3 Die trigonometrischen Funktionen . . . 7

2 Komplexe Funktionen **9**
- 2.1 Differenzierbarkeit im Komplexen . . . 11
- 2.2 Umkehrfunktion/Der komplexe Logarithmus/Wurzeln . . . 15
  - 2.2.1 Komplexer Logarithmus . . . 16
- 2.3 Der komplexe Logarithmus . . . 16
- 2.4 Konforme Abbildungen: Möbiustransformationen . . . 19
  - 2.4.1 Möbiustransformationen (gebrochen lineare Funktionen) . . . 25
  - 2.4.2 Spiegelung am Kreis . . . 27

3 Komplexe Kurvenintegrale **31**
- 3.1 Einleitung . . . 31
- 3.2 Sätze über komplexe Kurvenintegrale . . . 33

4 Potenzreihenentwicklungen, Taylorreihe **41**
- 4.1 Laurent-Reihe . . . 41
- 4.2 Isolierte Singularität und Residuensatz . . . 46
- 4.3 Auswertung (reeller uneigentlicher) Integrale . . . 50
  - 4.3.1 Linienintegrale mit Residuensatz . . . 50
  - 4.3.2 Uneigentliche Integrale mit Residuensatz . . . 51

5 Differentialgleichungen **55**
- 5.1 Implizite Differentialgleichung 1.Ordnung . . . 55
- 5.2 Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor . . . 59
- 5.3 Der integrierende Faktor . . . 61
- 5.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung . . . 64
  - 5.4.1 Beschreibung der Lösung . . . 65
  - 5.4.2 Wronski-Matrix/Wronski-Determinante . . . 66
- 5.5 Lösen des Problems $A(f;\alpha,\beta)$ . . . 68
- 5.6 Potenzreihenansatz . . . 71

Kapitel 1

Wiederholung

1.1 Komplexe Zahlen

Wir werden uns mit folgenden Dingen auseinandersetzen:

- Argument
- Exponentialfunktion
- Trigonometrische Funktionen

$z \in \mathbb{C}, z = x + \mathrm{i}y$

$x = \mathrm{Re}(z)$

$y = \mathrm{Im}(z)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow z = x + \mathrm{i}y \left(\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}\right)$

Zu einer komplexen Zahl gehört die konjugiert komplexe Zahl:

$\overline{z} = x - \mathrm{i}y$

$\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$

$\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{im}(z)$

Weiterhin gilt durch Kombination dieser Formeln:

$x = \mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right)$

$y = \mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \overline{z}\right)$

Für den Betrag einer komplexen Zahl erhält man nach Pythagoras:

$|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = z\overline{z}$

Des weiteren gilt die Dreiecksungleichung:

$z, w \in \mathbb{C}: \ ||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$

$|\mathrm{Re}(z) \leq |z|, |\mathrm{Im}(z) \leq |z|$

1.1.1 Polardarstellung

$z = r\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi, r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$

$r = |z|$

Durch $r > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ wird eindeutig eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Umkehrabbildung $z \in \mathbb{C} \mapsto r > 0, \varphi$ ist jedoch nicht eindeutig, was an der Periodizität der Winkelfunktionen sin und cos liegt. Der Winkel φ wäre nämlich nicht eindeutig bestimmt. Man kann aus dieser Abbildung jedoch eine eindeutige Abbildung machen, indem wir das Intervall, in dem sich φ befinden darf, folgendermaßen festlegt:

$z : \mathbb{C} \mapsto \arg(z) \in [0, 2\pi]$ oder $(-\pi, +\pi]$

1.) $\varphi = \arg(z) \Leftrightarrow z = |z|\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

2.) $\varphi = \arg(z) \Leftrightarrow z = |z|\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right), -\pi < \varphi \leq \pi$

Dies ist dann der Hauptzweig des Argumentes. Somit gilt nun:

1.) $\arg(-\mathrm{i}) = \dfrac{3\pi}{2}$

2.) $\arg(-\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\varphi = \arg(z) \Leftrightarrow z = |z|\left(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\right), \alpha < \varphi \leq \alpha + 2\pi$

$\alpha = 0, \alpha = -\pi$

1.2 Exponentialfunktion

$\exp : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, \exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} z^k$

An dieser Stelle sollte man noch einmal folgende Begriffe nachschlagen:

- Konvergenzradius
- Absolute Konvergenz
- Gleichmäßige Konvergenz

Der Konvergenzradius für diese Reihe ist ∞. Deshalb konvergiert sie für alle z. Weiterhin gilt:

$\exp(0) = 1$

$\exp(z) \neq 0 \,\forall\, z \in \mathbb{C}$

Mit dem CAUCHY-Produkt kann man beispielsweise folgende Formeln herleiten:

$\exp(z)\exp(w) = \exp(z + w); z, w \in \mathbb{C}$

Diese Beziehung heißt Additionstheorem für die Exponentialfunktion. Darüberhinaus gilt:

$\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}, \forall\, z \in \mathbb{C}$

$\exp(z) \neq 0 \,\forall\, z \in \mathbb{C}$

Durch Betrachtung der Reihe erhält man:

$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}) \Rightarrow \mathrm{Re}\left(\exp(z)\right) = \dfrac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right)$

$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z + \overline{z}) - \exp\left(2\mathrm{Re}(z)\right) = \left(\exp(\mathrm{Re}(z))\right)^2$

$|\exp(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} : z = x + \mathrm{i}y : |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$

$z = x + \mathrm{i}y, \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \Rightarrow |\mathrm{e}^z| = |\mathrm{e}^x||\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}|$

$y \in \mathbb{R} : |\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = 1 \left(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \neq 1\right)$

1.3 Die trigonometrischen Funktionen

$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k z^{2k}, \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}(-1)^k z^{2k+1}, z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z), z \in \mathbb{C}$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos(z) - \mathrm{i}\sin(z)$

$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$

$z = y \in \mathbb{R}:$

$\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)$

$\sin(y) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\right) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right)$

$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\left(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)\right) = |\mathrm{e}^z|\,|\cos\left(\arg(\mathrm{e}^z)\right) + \mathrm{i}\sin\left(\arg(\mathrm{e}^z)\right)|$

$\mathrm{e}^z = 1 \Leftrightarrow z_k = 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = 1, k \in \mathbb{Z}$

$\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \;\forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, k \in \mathbb{Z}$

$|\mathrm{Re}(z - z_0)|^2 \leq |z - z_0|^2 = \left(\mathrm{Re}(z - z_0)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z - z_0)\right)^2 = \left(\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0)\right)^2$

$z \mapsto z_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \mapsto \mathrm{Re}(z_0)$ und $\mathrm{Im}(z) \mapsto \mathrm{Im}(z_0)$

Wir können folglich bei Konvergenzfragen von komplexen Funktionen immer ins Reelle übergehen.

Kapitel 2

Komplexe Funktionen

$w = f(z), f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$

G ist ein Gebiet. Ein Gebiet hat die Eigenschaft, offen und zusammenhängend sein.

$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cos(y) + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin(y)$

$\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right) = \mathrm{e}^x \cos(y)$

$\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\right) = \mathrm{e}^x \sin(y)$

$\mathrm{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y)$

$\mathrm{Im} f(x + \mathrm{i}y) = v(x, y)$

$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$

Beispiel:

$w = \sin(z)$

$|\sin(x)| \leq 1$

Gesucht sei:

$\mathrm{Re}\left(\sin(x + \mathrm{i}y)\right) = u(x, y)$

$\mathrm{Im}\left(\sin(x + \mathrm{i}y)\right) = v(x, y)$

Wir wenden das Additionstheorem an:

$$\begin{aligned}\sin(x + \mathrm{i}y) &= \sin(x)\cos(\mathrm{i}y) + \cos(x)\sin(\mathrm{i}y) = \sin(x)\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2 y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2 y}\right) + \cos(x)\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2 \mathrm{y}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2 y}\right) = \\ &= \underbrace{\sin(x)\cosh(y)}_{u(x,y)} + \mathrm{i}\underbrace{\cos(x)\sinh(y)}_{v(x,y)}\end{aligned}$$

Veranschaulichen lässt sich dies durch $w = f(z)$.

Beispiel:

$f(z) = \mathrm{e}^z, G = \{z | 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$

Durch dieses Gebiet wird ein Streifen im der komplexen Ebene dargestellt.

$y_0 \in (0, \pi)$

$z(t) = \{t + \mathrm{i}y_0 | t \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{e}^{z(t)} = \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}y_0}$

Wir bewegen uns mit steigendem t auf einer Halbgerade von 0 nach ∞.

$z(t) = \{x_0 + \mathrm{i}t | \alpha \leq t \leq 2\pi\}$

Es handelt sich um einen Kreis in der komplexen Ebene.

Definition:

Gegeben sei eine Funktion $f: g \subset G \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$, $z_0 \in G$. f heißt in $z_0 \in G$ stetig, falls $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0)$ oder falls die Funktion $u(x,y) = \mathrm{Re} f(x+\mathrm{i}y)$, $u(x,y) = \mathrm{im} f(x+\mathrm{i}y)$ in (x_0, y_0) $(z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0)$ stetig sind. Falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß aus $z \in G$ und $|z - z_0| < \delta_\varepsilon$, folgt $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Beispiel:

$f(z) = z^2, u(x,y) = x^2 - y^2$

$v(x,y) = zxy$

$f: G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, w = f(z)$

$f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$

$w = f(z) = z + \frac{1}{z}, G = \{z | \mathrm{Im}(z) > 0\}$

Nun erhält man durch Umformung:

$$w = f(z) = z + \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

$$f(x+\mathrm{i}y) = x + \mathrm{i}y + \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2+y^2} = \underbrace{x + \frac{x}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + \mathrm{i} \underbrace{\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)}_{v(x,y)}$$

Beispiel zur Stetigkeit:

$f(z) = \frac{z}{\overline{z}}, z \neq 0$

Die Frage ist nun, ob f nach $z = 0$ stetig fortgesetzt werden kann.

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$\lim_{z \mapsto 0} f(z) = ?$$

$$f(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$$

Wir suchen uns Punkte auf der ersten Winkelhalbierenden der komplexen Ebene:

$$z_n = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} f(z_n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}$$

Eine andere Folge von Punkten ist:

$$z_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \mapsto \infty} = f(z_n) = 1$$

Nähert man sich auf zwei verschiedenen Wegen der Null an, so sind die Grenzwerte unterschiedlich. Daraus folgt, daß die Funktion $f(z)$ nicht stetig sein kann.

2.1 Differenzierbarkeit im Komplexen

Definition:

Es sei $f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$. f heißt in $z_0 \in G$ differenzierbar, falls $\lim\limits_{z \mapsto z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert. Dann heißt der Grenzwert die **Ableitung von f an der Stelle z_0** und wird mit $f'(z_0)$ bezeichnet. f heißt in z_0 **holomorph**, falls f in einer Umgebung von z_0 differenzierbar ist. Eine Funktion ist in einem Gebiet holomorph, wenn sie in jedem Punkt holomorph ist.

Satz ①:

f ist in z_0 differenzierbar genau dann, wenn es ein $A \in \mathbb{C}$ gibt mit folgender Eigenschaft:
$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(z - z_0)$, $z \mapsto z_0$
In diesem Fall ist $A = f'(z_0)$.

Beweis:

$$\lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = 0 \Leftrightarrow f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = o(z - z_0)$$

Es gelten wie im Reellen alle Differentiationsregeln wie beispielsweise Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, **Differenzieren von Potenzreihen**. Wir schauen uns eine komplexe Potenzreihe an:

$$f(z) = \sum_{k=}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, |z - z_0| < R : R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \left(\lim_{n \mapsto \infty} \left| \frac{a_n}{a_{m+1}} \right| \right)$$

$f'(z)$ existiert für alle z mit $z - z_0 < R$, und es gilt:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$$

Das ist nun wieder eine Potenzreihe mit demselben Konvergenzbereich. Die Potenzreihe ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung kann man berechnen, indem man gliedweise differenziert.
Es sei $f : G \subseteq G \mapsto \mathbb{C}$, $w = f(z)$, $u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + \mathrm{i}y)$, $v(x, y) = \mathrm{Im} f(x + \mathrm{i}y)$. Wir stellen uns nun die Frage, was die Differentiation von f für u und v bedeutet.

Definition:

1.) f heißt **reell** differenzierbar, wenn u, v differenzierbar sind.

2.) $(\partial_x f)(x + \mathrm{i}y) = D_1 u(x, y) + \mathrm{i} D_2 v(x, y)$
$(\partial_y f)(x + \mathrm{i}y) = D_2 u(x, y) + \mathrm{i} D_2 v(x, y)$

u, v sind differenzierbar in (x_0, y_0) $(z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0)$:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (D_1 u)(x_0, y_0)(x - x_0) + (D_2 u)(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right) \qquad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + (D_1 v)(x_0, y_0)(x - x_0) + (D_2 v)(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right) \qquad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

Nun schreiben wir die zweite Zeile komplex:

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + (D_1 u)(x_0, y_0)(x - x_0) + (D_2 u)(x_0, y_0)(y - y_0) + o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right) \qquad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

$$\mathrm{i}v(x, y) = \mathrm{i}v(x_0, y_0) + \mathrm{i}(D_1 v)(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathrm{i}(D_2 v)(x_0, y_0)(y - y_0) + \mathrm{i}o\left(\|(x, y) - (x_0, y_0)\|\right) \qquad (x, y) \mapsto (x_0, y_0)$$

Durch Addition folgt nun:

$$f(x+\mathrm{i}y) = f(x_0+\mathrm{i}y_0) + (\partial_x f)(x_0+\mathrm{i}y_0)(x-x_0) + (\partial_y f)(x_0+\mathrm{i}y_0)(y-y_0)$$

Wir setzen folgendes ein:

$$z = x+\mathrm{i}y, x = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$$

$$z_0 = x_0+\mathrm{i}y_0, y = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$$

Daraus folgt:

f ist in $z_0$reell differenzierbar.

$$\Leftrightarrow f(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) - \mathrm{i}\partial_y f(z_0))(z-z_0) + \frac{1}{2}(\partial_x f(z_0) + \mathrm{i}\partial_y f(z_0))(\overline{z}-\overline{z}_0) + o(|z-z_0|), z \mapsto z_0$$

Satz ②:

Es ist $w = f(z)$ in G holomorph. $\Leftrightarrow$ f ist reell differenzierbar in G und es gilt: $\partial_x f(z) + \mathrm{i}\partial_y f(z) = 0 \ \forall \ z \in G \ (\star)$

Was bedeutet jedoch $(\star)$:

$$D_1u(x,y) + \mathrm{i}D_1v(x,y) = -\mathrm{i}D_2u(x,y) + D_2v(x,y)$$

$$\Leftrightarrow D_1u(x,y) = D_2v(x,y)$$

$$\Leftrightarrow D_1v(x,y) = -D_2u(x,y)$$

Oder wie man in manch anderen Büchern findet:

$$u_x = v_y$$

$$v_x = -u_y$$

Dies sind die sogenannten **Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen**.

Satz ② (andere Formulierung):

$w = f(z)$ ist in G holomorph, falls das Vektorfeld $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ differenzierbar ist und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in G erfüllt sind.

Beispiel:

$$f(z) = \overline{z}$$

$$u(x,y) = x, v(x,y) = -y$$

Eingesetzt in die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen ergibt:

$$D_1u = 1 \neq D_2v = -1$$

Die Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Daraus folgt, daß die Funktion **nirgends** holomorph ist.

Beispiel:

$f(z) = |z| = \sqrt{z\overline{z}}$

$f(z) = \dfrac{|z|^2}{\overline{z}} = z$

$\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0$

Bemerkungen:

$$f(z) = f(z_0) + \overbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_x f(z_0) - \mathrm{i}\partial_y f(z_0)\right)}^{f'(z_0)}(z - z_0) + \overbrace{\frac{1}{2}\left(\partial_x f(z_0) + \mathrm{i}\partial_y f(z_0)\right)}^{0}(\overline{z} - \overline{z}_0) + o\left(|z - z_0|\right), z \mapsto z_0$$

1.) Ist f in z holomorph, so hat man:

$$\begin{aligned} f'(z) = f'(x + \mathrm{i}y) &= \frac{1}{2}\left(D_1 u(x,y) + \underbrace{\mathrm{i}D_1 v}_{-\mathrm{i}D_2 u} - \mathrm{i}D_2 u + \underbrace{D_2 v}_{D_1 u}\right) = \\ &= D_1 u(x,y) - \mathrm{i}D_2 u(x,y) = \\ &= D_1 u(x,y) + \mathrm{i}D_1 v(x,y) = \\ &= D_2 v(x,y) + \mathrm{i}D_1 v(x,y) = \\ &= D_2 v(x,y) - \mathrm{i}D_2 u(x,y) \end{aligned}$$

$|f(x + \mathrm{i}y)|^2 = u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = v_y^2 + u_y^2$

$f'(z) = 0 \Rightarrow f(z) = \text{const.}$

2.) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$ Die Ableitung dieser Funktion ist eine (2,2)-Matrix:

$$\vec{w}'(u,v) = \begin{pmatrix} D_1 u & D_2 u \\ D_1 v & D_2 v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 u & D_2 u \\ -D_2 u & D_1 u \end{pmatrix}(x,y)$$

Wir berechnen die Determinante:

$$\boxed{\det \vec{w}'(x,y) = |f'(x + \mathrm{i}y)|^2}$$

Ist diese Funktionaldeterminante ungleich 0, so ist $\vec{w}$ lokal injektiv.

$$\det \vec{\omega}'(x,y) \neq 0 \,\forall\, (x,y) \in G \Rightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) = a \\ v(x,y) = b \end{pmatrix}$$

3.) Es gilt: $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$

$$D_1 u(x,y) D_1 v(x,y) + D_2 u(x,y) D_2 v(x,y) = D_1 u(x,y)\left(-D_2 u(x,y)\right) + D_2 u(x,y) D_1 u(x,y) = 0$$

Interpretation:

$c, a = \text{const.}$

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= c \\ v(x,y) &= a \end{aligned}\right\} \text{Diese Linien stehen senkrecht aufeinander.}$$

Beispiel:

$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}zxy$

$x^2 - y^2 = u_0$

$zxy = v_0$

Diese stehen senkrecht aufeinander.

Beispiel:

Wir wollen zeigen, daß $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ holomorph in $\mathbb{C}$ ist.

$f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^{-(x^2-y^2+2\mathrm{i}xy)} = \underbrace{\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy}_{u(x,y)} + \mathrm{i}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy\right)}_{v(x,y)}$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt. u, v heißen **harmonisch**. Weiterhin muß gelten:

$\triangle u(x,y) = \triangle v(x,y) = 0$

$\triangle$ ist der Laplace-Operator mit $\triangle = \nabla \cdot \nabla$.

$u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$

$D_1^2 u(x,y) + D_2^2 u(x,y) = D_1^2 v(x,y) + D_2^2 v(x,y) = 0$

Als Übung kann man zeigen, daß man u, v beliebig oft differenzieren kann. Das heißt:
Mit f sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ holomorph.

Zunächst ohne Beweis:

Ist f einmal differenzierbar, so ist f beliebig oft differenzierbar. u, v sind beliebig oft stetig partiell differenzierbar, insbesondere gelte:

$D_1 D_2 u(x,y) = D_2 D_1 u(x,y)$

Satz:

Ist $w = f(z)$, $\mathrm{Re} f = u$, $\mathrm{Im} f = v$ in G holomorph, so sind u und v in G harmonisch.

$D_1 D_1 u = D_1 D_2 v, D_1 D_2 u = -D_1 D_1 v \Rightarrow \triangle v = 0$

$D_2 D_1 u = D_2 D_2 v, D_2 D_2 u = -D_2 D_1 v \Rightarrow \triangle u = 0$

Für den ladungsfreien Raum:

$\triangle \cdot \vec{E} = 0$

$\triangle \times \vec{E} = \vec{o} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\varphi$

φ ist das Potential.

$0 = \nabla\vec{E} = -\nabla \cdot \nabla\varphi = -\triangle\varphi$

Es gibt eine holomorphe Funktion f mit $\mathrm{Re} f(x+\mathrm{i}y) = \varphi(x,y)$.

$f(x+\mathrm{i}y) = \varphi(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$

$\varphi(x,y) = c$ sind die Äquipotentiallinien senkrecht zu $v(x,y) = \tilde{c}$.

Beispiel:

Ist $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ holomorph in $\mathbb{C}$?

Satz ④:

Ist $u = u(x, y)$ in einem einfach zusammenhängendem Gebiet G harmonisch, so gibt es eine in G harmonische Funktion $v = v(x, y)$ derart, daß $w = f(z)$ mit $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ ist in G holomorph. $u(x, y)$ ist gegeben und $v(x, y)$ ist gesucht. Ist $v = v(x, y)$ in einem einfach zusammenhängendem Gebiet G harmonisch, so gibt es eine in G harmonische Funktion $u = u(x, y)$ derart, daß $w = f(z)$ mit $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ ist in G holomorph. $u(x, y)$ ist gegeben und $v(x, y)$ ist gesucht.

Beweis:

$D_1 v = -D_2 u$

$D_2 v = D_1 u$

$$\nabla v = \begin{pmatrix} -D_2 u \\ D_1 u \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{lösbar}} D_2(-D_2 u) = D_1^2 u \Rightarrow \triangle u = 0$$

Beispiel:

$u(x, y) = x^2 - y^2 - y$

Gibt es eine holomorphe Funktion f mit $\mathrm{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y)$? Wir überprüfen:

$\nabla u = 2 + (-2) = 0$

Die Gleichung ist erfüllt. Folglich gibt es so eine Funktion, die wir nun bestimmen wollen. Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt:

$D_1 v = 2y + 1 \Rightarrow v(x, y) = 2xy + x + c(y)$

$D_2 v = 2x$

Mit der ersten Beziehung folgt:

$D_2 v(x, y) = 2x + c'(y) \Rightarrow c(y) = \lambda \in \mathbb{R} : v(x, y) = 2xy + x + \lambda$

$f(x + \mathrm{i}y) = x^2 - y^2 - y + \mathrm{i}\,(2xy + x + \lambda) \Rightarrow f(z) = z^2 + \mathrm{i}z + \mathrm{i}\lambda\,(\lambda \in \mathbb{R})$

Setze:

$$x = \frac{1}{2}\,(z + \overline{z})\,, y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(z - \overline{z})$$

2.2 Umkehrfunktion/Der komplexe Logarithmus/Wurzeln

Definition:

$f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ ist **injektiv**, falls aus $z_1 \neq z_2$ folgt $f(z_1) \neq f(z_2)$. Aus $f(z_1) = f(z_2)$ folgt $z_1 = z_2$.

Definition:

Ist $f : G \subseteq \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ holomorph und injektiv, so heißt f **schlicht**.

Beispiel:

$f(z) = z^2$

$G = \left\{ z \in \mathbb{C} | 0 < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \right\}$

Hier liegt keine Injektivität vor. $f(z) = z^2$ ist aber auf $G = \{z | 0 < \arg(z) < \pi\}$ injektiv.

Satz ① (ohne Beweis):

$w = f(z)$, $z \in G$ sei schlicht auf G. Dann ist $f(G)$ ein Gebiet. Die Umkehrfunktion $g : f(G) \mapsto G$ ist schlicht und es gilt:

$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$ mit $w \in f(G)$

Ist f in G schlicht, so gilt $f'(z) \neq 0$ für $z \in G$.

$\mathrm{e}^{w_1} = \mathrm{e}^{w_2} \Leftrightarrow w_1 = w_2 + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}$

$z = \exp(w)$ ist auf G_α schlicht, $\exp(G_\alpha) = E_\alpha$.

$\log : E_\alpha \mapsto G_\alpha$

2.2.1 Komplexer Logarithmus

$\exp(\log z) = z$

$\log(\exp(w)) = w$

$\mathrm{e}^w = z$

$w \in G_\alpha$, $z \in E_\alpha$, z sei gegeben. Gesucht ist w mit $\alpha < y\arg(z) < \alpha + 2\pi$.

$w = u + \mathrm{i}v$

$\mathrm{e}^u \mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = |z| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$

$\mathrm{e}^u = |z| \Rightarrow u = \ln|z|$

$f : G \subseteq \mathbb{C}$ heißt **schlicht** (univalent), wenn f in G holomorph und injektiv ist.

Beispiel:

$f(z) = z^2$ ist injektiv auf $\{z | \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Bemerkung:

Aus $f'(z) \neq 0 \ \forall \ z \in G$ folgt **nicht**, daß f auf G injektiv ist.

2.3 Der komplexe Logarithmus

Es sei $E_\alpha = \{z | z \neq 0, \alpha < \log(z) < \alpha + 2\pi\}$ eine geschlitzte Ebene. Dann definieren wir die zu $z = \exp(w)$ gehörige Umkehrfunktion $w = \log(z)$.

Satz ②:

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ wird durch $\log_k(z) := \ln|z| + \mathrm{i}\,(\arg(z) + 2k\pi)$, $z \in E_\alpha\,(z \neq 0, \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi)$ eine schlichte Funktion definiert. Es gilt:

$\log_k'(z) = \frac{1}{z}$ für $z \in E_\alpha$ und $\exp(\log_k(z)) = z$, $z \in E_\alpha$

Man nennt die Funktion ***k*-ter Zweig des Logarithmus**. Für $k = 0$ heißt $\log_0(z)$ der **Hauptzweig** des Logarithmus für $\alpha = \pi$ (oder $\alpha = 0$). Das Bild von E_α unter $\log_k$ ist $\{w|\alpha + 2k\pi < \mathrm{Im}(w) < \alpha + (2k+1)\pi\}$.

Beispiel:

Wenn man den Logarithmus einer Zahl berechnen will, bekommt man also nicht einen bestimmten Wert, sondern eine ganze Menge von Werten:

$$\log(\mathrm{i}) = \left\{z|z = \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Deshalb ist der Hauptwert definiert:

$$\log_0(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$$

Man kann jetzt auch den Logarithmus einer negativen Zahl berechnen, was im Reellen nicht möglich war:

$$\log(-1) = \{z|z + \mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\log(1) = \{z|z + 2k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}\}$$

Nimmt man hier den Hauptwert des komplexen Logarithmus, so erhält man gerade den Logarithmus im Reellen.

Beispiel:

Es soll $\{z|\mathrm{Re}(z) < 0\}$ durch eine Logarithmusfunktion schlicht abgebildet werden. Man erhält dabei einen Streifen von $\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$ bis $\frac{5\pi}{2}\mathrm{i}$.

Beispiel:

Wir berechnen die Stammfunktion von $f(x)$ mit den Mittels der Funktionentheorie:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Durch komplexe Partialbruchzerlegung folgt:

$$f(x) = \frac{1}{(t + \mathrm{i})\,(t - \mathrm{i})} = \frac{A}{t + \mathrm{i}} + \frac{B}{t - \mathrm{i}}$$

Mittels der Zuhaltemethode gewinnt man A und B:

$$A = -\frac{1}{2\mathrm{i}}$$

$$B = \frac{1}{2\mathrm{i}}$$

Also folgt damit:

$$f(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{t - \mathrm{i}} - \frac{1}{t + \mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{i}t + 1} - \frac{1}{\mathrm{i}t - 1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + \mathrm{i}t} + \frac{1}{1 - \mathrm{i}t}\right)$$

Durch Integration erhalten wir:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}t} + \frac{1}{1-\mathrm{i}t}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\ln(1+\mathrm{i}t) - \ln(1-\mathrm{i}t)\right]$$

Wir erhalten nun mit der Definition des komplexen Logarithmus:

$$\ln(1+\mathrm{i}t) = \ln|1+\mathrm{i}t| + \mathrm{i}\arg(1+\mathrm{i}t) = 1+t^2+\mathrm{i}\arctan\left(\frac{t}{1}\right) = 1+t^2+\mathrm{i}\arctan(t)$$

$$\ln(1-\mathrm{i}t) = \ln|1-\mathrm{i}t| + \mathrm{i}\arg(1-\mathrm{i}t) = 1+t^2+\mathrm{i}\arctan\left(-\frac{t}{1}\right) = 1+t^2-\mathrm{i}\arctan(t)$$

Somit gilt also schlußendlich:

$$F(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\left(1+t^2+\mathrm{i}\arctan(t)\right) - \left(1+t^2-\mathrm{i}\arctan(t)\right)\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot 2\mathrm{i}\arctan(t) = \boxed{\arctan(t)}$$

Damit folgt also das aus der reellen Analysis schon bekannte Ergebnis.

Übung:

$$G = \left\{z \mid \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{3\pi}{4}, 1 < |z| < \mathrm{e}\right\}$$

Diese Menge ist abzubilden mit Logarithmusfunktion, für die $k = 1$ zu wählen ist.

$$w = \log_1(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\left(\arg(z) + 2\pi\right)$$

Definition:

Es sei $z \neq 0, a \in \mathbb{C}$. Dann ist $z^a = \mathrm{e}^{a\log(z)}$ definiert, wenn der Logarithmus definiert ist.

Beispiel:

$$a = \frac{1}{n} : z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z) + \mathrm{i}2k\pi)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg(z)}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}$$

Das sind n verschiedene komplexe Zahlen, die man für $k = 0,\ 1,\ 2,\ n-1$ erhält. Die Beziehung ist nichts anderes als die Formel von Moivre, die wir schon kennengelernt haben. Die Punkte $\sqrt[n]{z}$ bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{|z|}$. Für $n = 2$ gilt beispielsweise:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg(z)}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}$$

$$\left(\sqrt{z}\right)_0 : E_0 \Rightarrow \{w|\mathrm{Im}(z) > 0\}$$

$$\left(\sqrt{z}\right)_1 : E_0 \Rightarrow \{w|\mathrm{Im}(z) < 0\}$$

Warnung:

Im Reellen gelten folgende Rechenregeln:

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
- $\log a^b = b\log(a)$

Diese Regeln sind jedoch im **Komplexen** im allgemeinen **falsch**!

Beispiel:

$\log(\mathrm{i}(-1+\mathrm{i})) \stackrel{?}{=} \log \mathrm{i} + \log(-1+\mathrm{i})$

Wir betrachten log in $E_{-\pi}$ und $k = 0$:

$$\log(-\mathrm{i}-1) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Nun berechnen wir die rechte Seite der Gleichung:

$$\log \mathrm{i} = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$$

$$\log(-1+\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}$$

Die beiden Seiten sind nicht gleich, also gilt die erste Rechenregel nicht.

Übung:

Überprüfe folgendes:

$$\log(-1) = \frac{1}{2}\log(-1)^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{4}\log(-1)^4$$

2.4 Konforme Abbildungen: Möbiustransformationen

Folgende Begriffe wollen wir behandeln:

- $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- Der Punkt „∞“
- Inversion
- Verallgemeinerte Kreise

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$\mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei schlicht.

$\{z | 0 < |z| < 1\} \mapsto \{w | 1 < w < \infty\}$

$\{z | 1 < |z| < \infty\} \mapsto \{w | 0 < |w| < \infty\}$

$\{z \,|\, |z| = 1\} \mapsto \{w \,|\, |w| = 1\}$

Definition:

Es sei $f(0) := \infty \left(= \frac{1}{0}\right)$, $f(\infty) = 0$, $\left(= \frac{1}{\infty}\right)$. Hiermit wird $f(z) = \frac{1}{z}$ definiert $\forall\, z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $f(z)$ hat in ∞ die Eigenschaft E, falls $f\left(\frac{1}{z}\right)$ diese Eigenschaft für $z = 0$ hat.

Beispiel:

Ist $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z = \infty$ differenzierbar? Betrachte $g(z) = \sin z$ in $z = 0$. Dort ist $\sin(z)$ differenzierbar.

Beispiel:

Die reelle und die imaginäre Achse schneiden sich in Unendlichen unter dem Winkel $\frac{\pi}{2}$.

- Reelle Achse $\xrightarrow{\frac{1}{z}}$ Reelle Achse
- Imaginäre Achse $\xrightarrow{\frac{1}{z}}$ Imaginäre Achse

Beispiel:

Wir wollen zeigen, daß $f(z) = \frac{1}{z} : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ holomorph ist.

$z = 0 : f(0) = \infty; h(z) = \dfrac{1}{f(z)} = z \Rightarrow h'(z) = 1, h'(0) = 1$

$z = \infty : f(\infty) = 0; g(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right) = z \Rightarrow g'(z) = 1, g'(0) = 1$

Also ist die Funktion holomorph.

Satz:

$f(z) = \dfrac{1}{z}$ bildet Kreise oder Geraden auf Kreise oder Geraden ab.

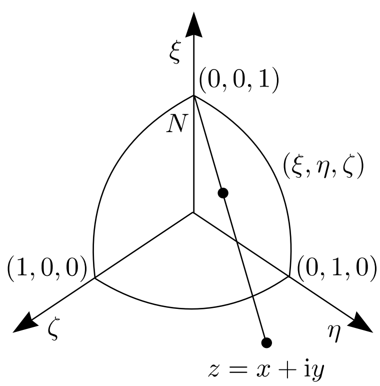
Beweis:

Ersetze in der allgemeinen Kreis-Geraden-Gleichung $\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ die Variable z durch $\dfrac{1}{z}$. Man erhält somit durch Multiplikation mit $|z|^2$:

$\gamma|z|^2 + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \alpha = 0$

Es handelt sich dabei also wieder um eine Gerade oder einen Kreis. Wir betrachten nun:

$\sum = \{(\xi, \eta, \zeta) | \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$



$(\xi, \eta, \zeta) \in \sum \xrightarrow{\text{bijektiv}} z + \dfrac{\xi}{1-\zeta} + \mathrm{i}\dfrac{\eta}{1-\zeta}\ (\xi, \eta, \zeta) \neq (0,0,1)$

Folgende Abbildung nennt man **Stereographische Projektion**:

$\hat{\mathbb{C}} \mapsto \sum$

$z \mapsto \left(\dfrac{z+\overline{z}}{1+|z|^3}, -\mathrm{i}\dfrac{z-\overline{z}}{1+|z|^3}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^3+1}\right)\ (\star)$

Problem:

Es sei die Abbildung $z \in \hat{\mathbb{C}} \mapsto \frac{1}{z}$ gegeben. Was bedeutet diese auf der Kugel? Dazu ersetze man in ($\star$) z durch $\frac{1}{z}$. Man erhält:

$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, -\zeta)$

Wir schreiben dies in einer Verkettung von Abbildungen:

$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, \zeta) \mapsto (\xi, -\eta, -\zeta)$

Bei der ersten Abbildung handelt es sich um eine Spiegelung an der (ξ, ζ)-Ebene. Die zweite Abbildung ist eine Spiegelung an der (ξ, η)-Ebene. Auf der Kugel gehen somit durch die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ Kreise über in Kreise. Nun gilt:

$\{\text{Kreise, Geraden aus } \hat{\mathbb{C}}\} \xrightarrow{\text{Stereographische Projektion}} \{\text{Kreise auf der Kugel}\}$

Beweis:

Die Gleichung eines verallgemeinerten Kreises lautet:

$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$

$\beta = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2$

Somit folgt:

$\alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0 \mapsto 2\beta_1\xi - 2\beta_2\eta + (\alpha - \gamma)\zeta = -\alpha - \gamma$

Es handelt sich hier um eine Ebenengleichung. Schnitt mit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ergibt einen Kreis. Der Kreis geht durch N, falls:

$\alpha - \gamma = -\alpha - \gamma \Leftrightarrow \alpha = 0$

Kreis geht nicht durch $N \xrightarrow[\alpha \neq 0]{}$ Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$

Ergebnisse:

> Kreise und Geraden in $\hat{\mathbb{C}}$ werden auf der Kugel zu Kreisen. Kreise in $\hat{\mathbb{C}}$ werden auf der Kugel Kreise, die nicht durch N gehen. Geraden in $\hat{\mathbb{C}}$ werden auf der Kugel Kreise durch N. ∞ liegt auf jeder Geraden und auf keinen Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$.

Satz ①:

> Es sei $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$. Die Abbildungen von $\hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$: $z \mapsto z + a$ (Translation) und $z \mapsto az$ (Drehstreckung) bilden Kreise in Kreise und Geraden in Geraden ab.

Beweis (für Drehstreckung):

Siehe: $az = |a||z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}$

Satz ②:

Es sei $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Diese Abbildung bildet verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise ab, d.h. genau:

- Kreis durch 0 **geht über** in Gerade nicht durch 0.
- Kreis nicht durch 0 **geht über** in Kreis nicht durch 0.
- Gerade durch 0 **geht über** in Gerade durch 0.
- Gerade nicht durch 0 **geht über** in Kreis durch 0.

Wir gehen nun über zu **konformen Abbildungen**.

Definition:

Es sei $f : G \subseteq \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$. f heißt in $z_0 \in G$ **konform**, falls f in z_0 holomorph und $f'(z_0) \neq 0$ gilt (in G konform, falls $f'(z) \neq 0 \; \forall \; z \in G$).

Bemerkungen:

1.) Eine in G schlichte Funktion ist in G konform.

2.) Eine in G konforme Funktion ist lokal schlicht.

Schlichtheit ist somit der Konformität übergeordnet. Was bedeutet aber Konformität geometrisch?
Gegeben sei $w = f(z)$, $z \in G$ mit $f'(z_0) \neq 0$.

$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t), a \leq t \leq b$

$z(t_0) = z_0$

$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) + \mathrm{i}\dot{y}(t)$ ist die Tangentenkurve.

$\dot{z}(t) \neq 0$

Eine Kurve mit dieser Eigenschaft hatten wir in HMII als regulär bzw. glatt bezeichnet. Diese Kurve soll nun abgebildet werden wobei wir erhalten:

$w(t) = f(z(t)), a \leq t \leq b$

Mittels der Kettenregel folgt:

$\dot{w}(t) = f'(z(t))\dot{z}(t)$

$\dot{w}(t_0) = f'(z(t_0))\dot{z}(t_0)$

Für das Argument folgt:

$\arg(\dot{w}(t)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\dot{z}(t_0))$

$\arg(\dot{z}(t_0))$ gibt die Richtung von γ in z_0 an; $\arg(\dot{w}(t_0))$ die Richtung des Bildes von γ in z_0.

$\sigma = \arg(\dot{z}_1(t_0)) - \arg(\dot{z}_2(t_0)) = \arg(\dot{w}_1(t_0)) - \arg(f'(z_0)) - (\arg(\dot{w}_2(t_0)) - \arg(f'(z_0))) = \arg(\dot{w}_1(t_0)) - \arg(\dot{w}_2(t_0))$

Daraus folgt, daß der Winkel erhalten bleibt. Dies formulieren wir in einem Satz:

Satz ③:

Ist f in z_0 konform, so bleibt der Winkel zwischen Kurven in z_0 der Größe und dem Drehsinn auch erhalten.

Satz ④:

Jede holomorphe, nicht konstante Funktion bildet Gebiete auf Gebiete ab.

Nun folgt der zentrale Satz in diesem Kapitel, nämlich der **Riemannscher Abbildungssatz**:

Satz ⑤:

G, $G^\star$ seien einfach zusammenhängende (ohne Löcher) Gebiete, die mindestens zwei Randpunkte haben. Dann gibt es eine schlichte Funktion f mit $f(G) = G^\star$.

Eine Abbildung, die verallgemeinerte Kreise in verallgemeinerte Kreise abbildet, heißt **kreistreu**.

Beispiele für kreistreue Abbildungen:

- $z \mapsto z + a$
- $z \mapsto az$
- $z \mapsto \dfrac{1}{z}$

Satz ⑤ (Riemannscher Abbildungssatz):

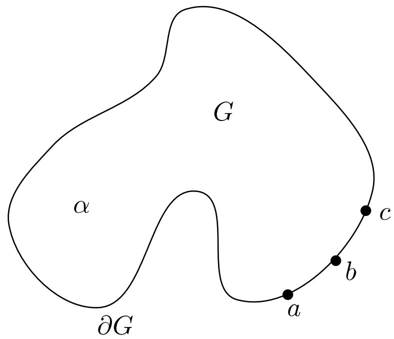
G, $G^\star$ seien einfach zusammenhängende Gebiete mit jeweils mindestens zwei Raumpunkten. Dann gibt es eine schlichte Abbildung f von G auf $G^\star$.

Satz ⑥:

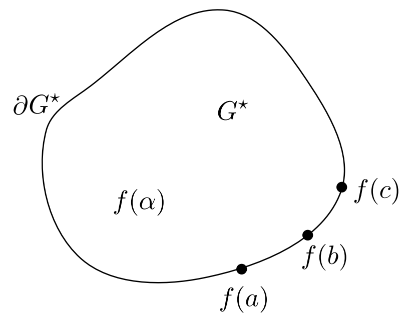
G, $G^\star$ seinen zwei Gebiete, deren Ränder JORDANkurven sind, die sich nur aus endlich vielen Geraden oder Kreisstücken zusammensetzen. $w = f(z)$ bilde G schlicht auf $G^\star$ ab. Dann gelten:

1.) f ist auf $G \cup \partial G$ stetig.

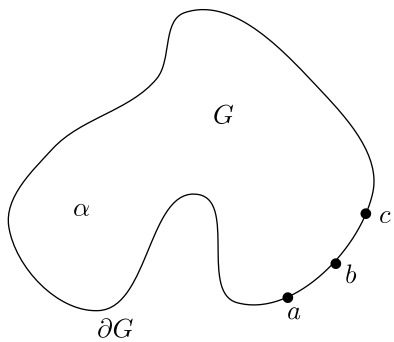
2.) $f(\partial G) = \partial G^\star$ (Rand $\mapsto$ Rand). Diese Zuordnung $\partial G \mapsto \partial G^\star$ ist injektiv und **orientierungstreu**.



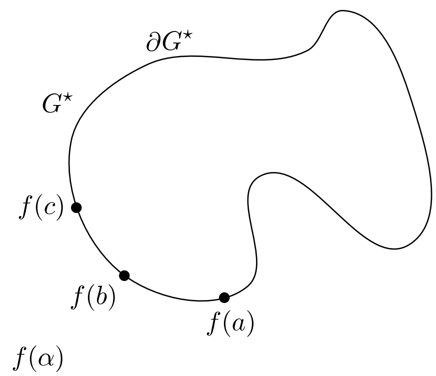
$\overrightarrow{a, b, c}$



$\overrightarrow{f(a), f(b), f(c)}$

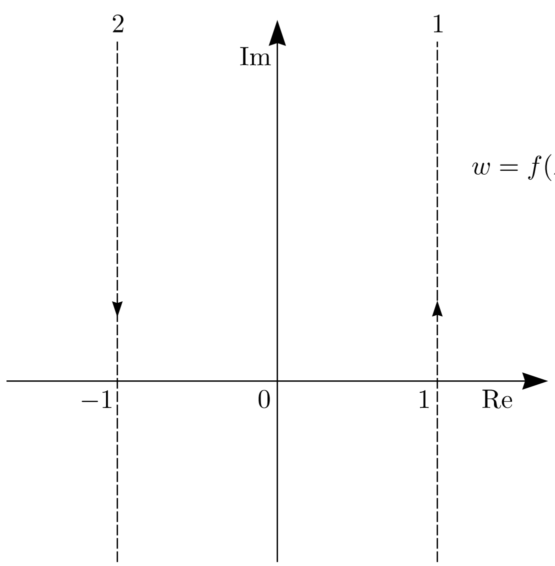


$\overrightarrow{a, b, c}$

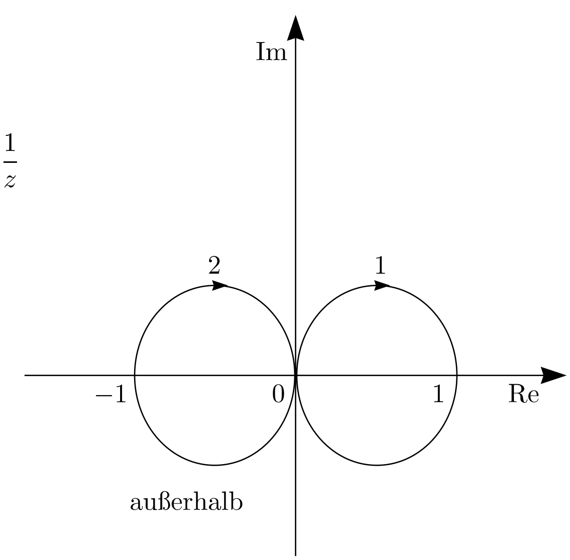


„Liegt α links vom orientieren Rand ∂G, so liegt $f(\alpha)$ links vom orientierten Rand $\partial G^\star$“.

Beispiel:



$$w = f(z) = \frac{1}{z}$$



2.4.1 Möbiustransformationen (gebrochen lineare Funktionen)

Definition:

Es seinen vier Zahlen a, b, c, $d \in \mathbb{C}$ gegeben, für die gilt $ad - bc \neq 0$. Dann nennen wir die Abbildung $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ eine **Möbiustransformation**. M sei die Menge der MÖBIUStransformationen.

Wir differenzieren $T(z)$:

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

Durch die Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ wird somit ausgeschlossen, daß die Funktion konstant ist.

Definition:

Es sei $T \in M$, wobei $T\colon \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$.

$$T(z) = \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{für} \quad z \neq \infty, z \neq -\dfrac{d}{c} \\ \infty & \text{für} \quad z = -\dfrac{d}{c} \\ \dfrac{a}{c} & \text{für} \quad z = \infty \end{cases}$$

$c \neq 0 : T(z) = \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{bc-ad}{cz+d} + a\right) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(z)$ mit:

- $T_1(z) = cz + d$
- $T_2(z) = \dfrac{1}{z}$
- $T_3(z) = \dfrac{bc-ad}{c} z + \dfrac{a}{c}$

$T \in M$ ist somit kreistreu. Außerdem bildet $(M, \circ)$ eine Gruppe:

1.) $S, T \in M \mapsto S \circ T \in M$

2.) $\mathrm{id} \in M : T \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ T = T \;\forall\; T \in M$

$$\mathrm{id}(z) = \frac{1z+0}{0z+1}$$

3.) $S, T, U \in M\colon (T \circ S) \circ U = T \circ (S \circ U)$

4.) $T \in M \mapsto T^{-1} \in M\colon T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \mathrm{id}$

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

Satz ⑦:

T sei $\in M$. Dann ist die Abbildung $T : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}$ **schlicht**.

Beweis der Holomorphie:

$c \neq 0:$

- In $z = \infty$:
  Betrachte $g(t) = T\left(\frac{1}{z}\right)$ für $z = 0$:

  $$g'(0) = \frac{bc - ad}{c^2}$$

- In $z = -\frac{d}{c}$

  $$h(z) = \frac{1}{T(z)} \text{ für } z = -\frac{d}{c}$$

  $$h'\left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{c^2}{bc - ad}$$

Satz ⑧:

MÖBIUStransformationen sind kreistreu, d.h. genau für $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Eine Gerade durch $-\frac{d}{c}$ geht über in eine Gerade durch $\frac{a}{c}$. Eine Gerade nicht durch $-\frac{d}{c}$ geht über in einen Kreis durch $\frac{a}{c}$. Ein Kreis durch $-\frac{d}{c}$ wird abgebildet in eine Gerade nicht durch $\frac{a}{c}$. Aus einem Kreis nicht durch $-\frac{d}{c}$ wird ein Kreis, der nicht durch $\frac{a}{c}$ geht.

Satz ⑨:

$T \in M$ besitze mehr als 2 Fixpunkte. Dann gilt $T = \mathrm{id}$.

Satz ⑩:

z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 seien Tripel paarweise verschiedener komplexer Zahlen aus $\hat{\mathbb{C}}$. Dann gibt es **genau eine** MÖBIUStransformation T mit $T(z_j) = w_j$ mit $j = 1, 2, 3$.

Beweis:

$$T_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

$$T_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

$T_1, T_2 \in M : T_1(z_1) = 0, T_1(z_2) = 1, T_1(z_3) = \infty$

$$\boxed{T = T_2^{-1} \circ T_1}$$

$T(z_j) = T_2^{-1}(T_1(z_j)) = T_2^{-1}(1) = w_2, j = 2$

Es gibt nur diese MÖBIUStransformation: Angenommen, es gäbe $S \in M$ mit $S(z_j) = w_j$. Dann müssen wir beweisen, daß $S = T$ gilt.

$S(z_j) = T_(z_j), j = 1, 2, 3$

$\underbrace{S^{-1} \circ T(z_j)}_{\in M} = z : j, j = 1, 2, 3$

Es handelt sich somit um eine MÖBIUStransformation, welche 3 Fixpunkte hat. Also muß es die Identität sein.

$S^{-1} \circ T = \mathrm{id} \Rightarrow T = S$

$w = T(z) = T_2^{-1}(T_1(z))$

$\Rightarrow T_2(w) = T_1(z)$ (implizite Darstellung für $w = T(z)$)

$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$

Folgerung:

Eine MÖBIUStransformation T mit $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$ genügt der Bedingung:

$T(\overline{z}) = \overline{T(z)} \, \forall \, z \in \hat{\mathbb{C}}$

2.4.2 Spiegelung am Kreis

$|z - a| = r : z \mapsto \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a$

1.) Gesucht sei eine Abbildung $T : \{\mathrm{Im}(z) > 0\} \mapsto \{w||w| < 1\}$. Die Funktion soll eine MÖBIUStransformation sein:

$T = \frac{az + b}{cz + d}$

Unsere Forderung ist also:

1.) $0 \mapsto -1$
2.) $1 \mapsto -\mathrm{i}$
3.) $\infty \mapsto 1$

Die dritte Bedingung ergibt $a = c$. Daraus folgt:

$T(z) = \frac{z + \tilde{b}}{z + \tilde{d}}$

Mit der ersten Bedingung ergibt sich $\tilde{b} = \tilde{d}$:

$T(z) = \frac{z - \tilde{b}}{z + \tilde{b}}$

Jetzt ist nur noch die zweite Bedingung zu erfüllen:

$T(1) = \frac{1 - \tilde{b}}{1 + \tilde{b}} = -\mathrm{i}$

$T(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} : \{z|\mathrm{Im}(z) > 0\} \mapsto \{w||w| < 1\}$

$T(z) = r\frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} + a : \{z|\mathrm{Im}(z) \geq 0\} \mapsto \{w||w - a| < r\}$

Die Umkehrabbildung lautet:

$T^{-1}(w) = \mathrm{i}\frac{w - a + r}{-w + a + r}$

2.) Wir suchen eine Abbildung, welche folgende Gerade auf die reelle Achse abbildet:

$z(t) = a + t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, t \in \hat{\mathbb{R}}, \tan\varphi = \text{Steigung}$

$T(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(z - a) : T(g) = \hat{\mathbb{R}}$

Ergebnis:

1.) $w = T_k(z) = \mathrm{i}\dfrac{z-a+r}{-z+a+r}$:$\{z||z-a|<r\} \mapsto \{w|\mathrm{Im}(w)>0\}$, $K:|z-a|=r$

$T_K(K) = \hat{\mathbb{R}}, T_K^{-1}(z) = r\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}+a$

2.) $w = T_g(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(z-a)$:$\{z|z=a+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\, t\in\hat{\mathbb{R}}\} \mapsto \hat{\mathbb{R}}$

Definition (Spiegelung an K oder g/E):

Es sei $T \in M$ mit $T(E) = \hat{\mathbb{R}}$. Für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ wird mit $\varrho_E(z)$ der Spiegelpunkt an E bezeichnet: $\varrho_E(z) = T^{-1}(\overline{T(z)})$, $z \in \hat{\mathbb{C}}$, wobei $T \in M$ mit $T(E) = \hat{\mathbb{R}}$ ist.

Um konkrete Formeln für Spiegelungen zu erhalten, setzen wir $T = T_K$ in die Definition ein, wobei man nun für die Spiegelung an einem Kreis erhält:

$$\varrho_k(z) == \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a, z \in \hat{\mathbb{C}}$$

Für die Spiegelung an einer Geraden ergibt sich:

$$\varrho_g(z) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}\left(\overline{z}-\overline{a}\right)+a, z\in\hat{\mathbb{C}}$$

„Vernünftige“ Spiegelungen erfüllen folgende Bedingungen:

1.) $\varrho_E = \varrho_E^{-1}$, $\varrho_E \circ \varrho_E = \mathrm{id}$

2.) $\varrho_E(z) = z$, $z \in E$

Wir überprüfen die erste Bedingung durch Einsetzen:

$$\varrho_E(\varrho_E(z)) = T^{-1}\overline{(T(\varrho_E(z)))} = T^{-1}\overline{\left(T\left(T^{-1}\left(\overline{T(z)}\right)\right)\right)} = z$$

Geometrie:

$$\varrho_k(z) = \frac{r^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a$$

$$|\varrho_k(z)-a| = \frac{r^2}{(z-a)^2}|z-a|$$

$\varrho_k(z)$, z und a liegen auf demselben Halbstrahl, der von a ausgeht.

$$|\varrho_k(z)-a||z-a| = r^2$$

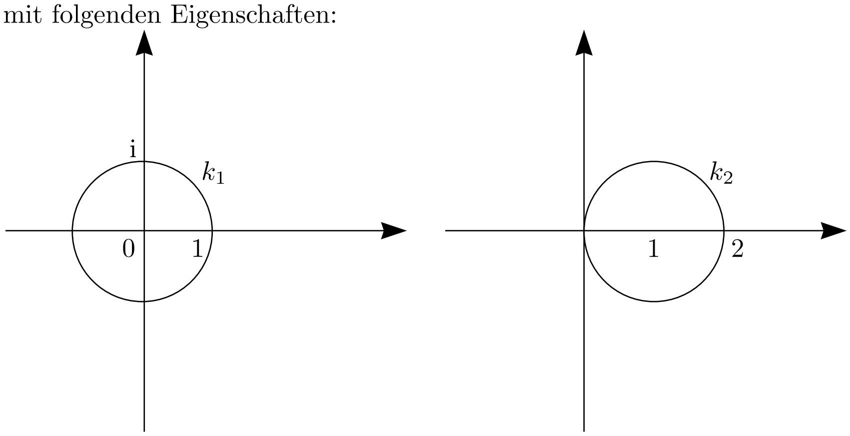
Satz (Symmetrieprinzip für Möbiustransformationen):

Spiegelpunkte gehen unter MÖBIUStransformationen über in Spiegelpunkte. Es sei $L \in M$. Dann gilt:

$$L(\varrho_E(z)) = \varrho_{L(E)}(L(z))$$

Beispiel:

Gesucht ist eine konforme Abbildung $\{z||z|<1\} \mapsto \{w||w-1|<1\}$ mit $0 \mapsto \frac{1}{2}$ und $1 \mapsto 0$. Wir suchen also L mit folgenden Eigenschaften:



- $L(0) = \frac{1}{2}$
- $L(1) = 0$

$L(\infty) = \varrho_{|z-1|}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} + 1 = -1$

Daraus folgt nun:

$L(z) = \frac{-z+1}{z+2}$

Kapitel 3

Komplexe Kurvenintegrale

3.1 Einleitung

In diesem Abschnitt werden wir zwei wichtige Sätze kennenlernen:

- CAUCHYscher Integralsatz
- CAUCHYsche Integralformel

Definition:

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet mit einer stetigen Abbildung $f : G \mapsto \mathbb{C}$, $f = u + \mathrm{i}v$, wobei $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$. $g \subseteq G$ sei stückweise glatte Kurve, d.h. es gibt eine Darstellung $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ mit $\dot{z}(t) \neq 0$, $a \leq t \leq b$.

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{t=a}^{b} f(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

Erinnerung:

In HMII hatten wir ein Linienintegral folgendermaßen definiert:

$$\int_\gamma \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t \text{ mit } \gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), a \leq t \leq b \text{ und } \mathrm{d}s = \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_\gamma g\,\mathrm{d}s = \int_a^b g(\vec{r}(t))\|\dot{\vec{r}}(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Beispiele:

1.) Integration über den Viertelkreis im 1.Quadranten der komplexen Ebene:

$f(z) = \overline{z}^2$

Wir benötigen eine Parameterdarstellung für den Kreis:

$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

Wir setzen diese Darstellung in die Funktion $f(z)$ ein:

$f(z(t)) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}$

$\dot{z}(t) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

Daraus folgt nun das Integral:

$$\int_\gamma \overline{z}^2 \,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \mathrm{i}$$

2.) <u>l-facher Kreisdurchlauf:</u>

$f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^k}, k \in \mathbb{Z}$

$a : \mathbb{C}$

$g : |z - a| = r$ soll l mal im positiven Sinn durchlaufen werden:

$z(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + a, 0 \leq t \leq l \cdot 2\pi$

$\dot{z}(t) = \mathrm{i} \cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}\,(z(t) - a)$

Somit folgt durch Einsetzen in die Funktion $f(z)$ wiederum:

$$f(z(t)) = \frac{1}{(z(t)-a)^k} = r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}$$

Das Integral ergibt sich nun folgendermaßen:

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = \int_0^{2\pi l} r^{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \cdot \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}r^{\mathrm{i}k}\int_0^{2\pi l} \mathrm{e}^{(1-k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \mathrm{i}2\pi l & \text{für} \quad k = 1 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{\substack{|z-a|=r \\ l\text{-mal}}} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \neq 1 \\ l & \text{für} \quad k = 1 \end{cases}}$$

Das Ergebnis hängt nicht von r ab.

3.) <u>Kompliziertes Integral:</u>

$$\oint\limits_{|z|=z} |z|\frac{\mathrm{e}^z}{z^2}\,\mathrm{d}z$$

$z(t) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0 \leq t \leq 2$

Nun folgt mit dem Beispiel vorher.

$$z \oint\limits_{|z|=z} \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right)\mathrm{d}z = 2 \oint\limits_{|z|=z} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \ldots\right)\mathrm{d}z = 4\pi\mathrm{i}$$

Wiederholung: Gaußscher Satz in der Ebene:

G sei ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ mit stückweise glatten positiv orientierten Rand ∂G. $P = P(x, y) \in C^{-1}(\overline{G})$. Dann gilt:

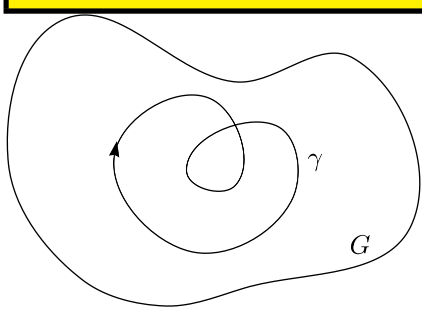
$$\oint_{\partial G} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_G [D_1 Q(x, y) - D_2 P(x, y)]\,\mathrm{d}(x, y)$$

3.2 Sätze über komplexe Kurvenintegrale

Satz ① (Integralsatz von Cauchy):

Es sei f holomorph im einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subset C$. Dann gilt für jede stückweise glatte geschlossene Kurve $\gamma \subset G$:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$



Begründung:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Wir zerlegen die Funktion $f(z)$ in Real- und Imaginärteil:

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

Des weiteren gilt durch Parametrisierung:

$$\gamma : z = z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, a \leq t \leq b, z(a) = z(b)$$

$$f(z(t))\dot{z}(t) = u(x(t), y(t)) + \mathrm{i}v(x(t), y(t))\,(\dot{x}(t) + \mathrm{i}\dot{y}(t)) = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Somit folgt durch Einsetzen in das Integral:

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{t=a}^{b} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_a^b \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t$$

Da sowohl $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$ als auch $\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ Potentialfelder sind (siehe HMII), so folgt:

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 + 0 = 0$$

Bemerkung:

Setzt sich eine Kurve γ aus mehreren Teilkurven γ_i zusammen, so ergibt sich das Integral über γ als Summe der einzelnen Integrale über γ_i:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1} \int\limits_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Die Integration hängt natürlich auch von der Orientierung der Kurve ab. Die obige Formel gilt nur, wenn die Teilkurven γ_i dieselbe Orientierung haben. Besitzt γ die Parametrisierung $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, so gilt für die Kurve γ^- mit entgegengesetzter Orientierung beispielsweise die Parametrisierung:

$$\gamma^- : z = z(b + a - t), a \leq t \leq b$$

Beispiel:

$f(z) = z, G =$

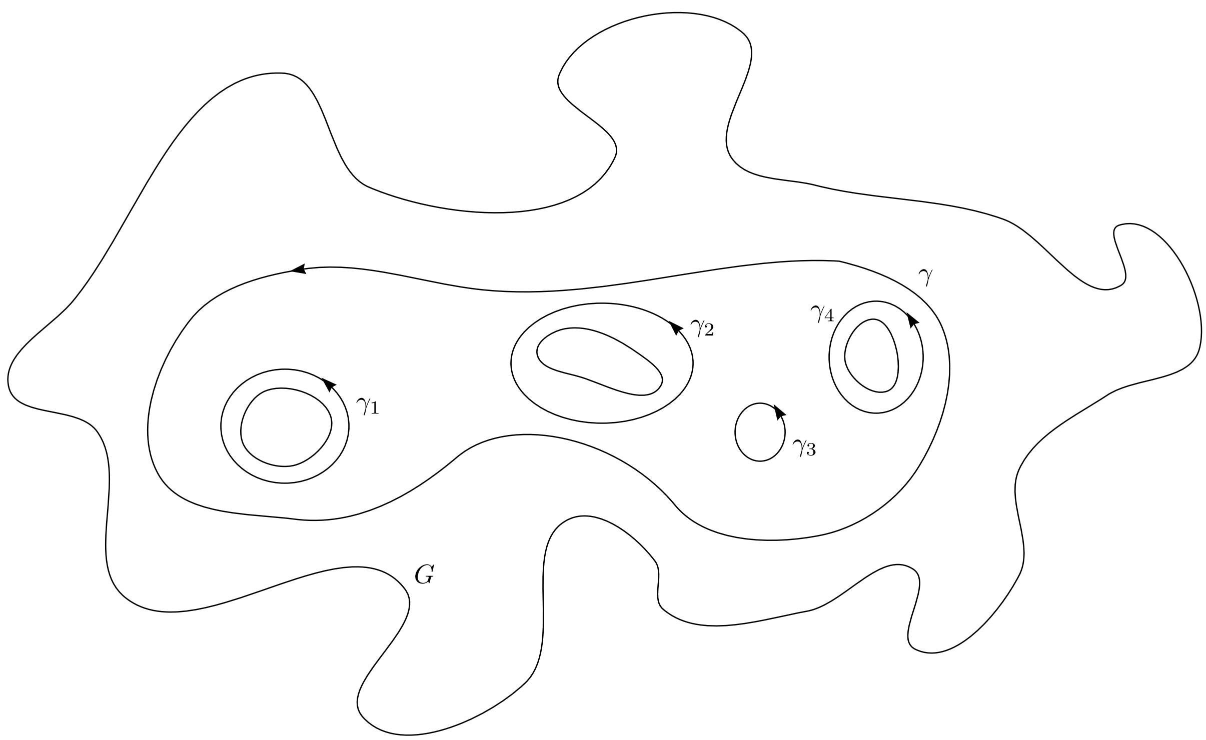
γ sei geschlossene Kurve:

$z = z(t), a \leq t \leq b, z(a) = z(b)$

$$\oint\limits_{\gamma} z\,\mathrm{d}z = \int\limits_{t=a}^{b} z(t)\dot{z}(t)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int\limits_{t=a}^{b} \left(z^2(t)\right)'\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(z^2(b) - z^2(a)\right) = 0$$

Dies gilt unabhängig von der Kurve γ.

Satz ② (Folgerung aus Satz ①):



$G \subset \mathbb{C}$ sei Gebiet und $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sei holomorph. γ, γ_1, γ_2, …, γ_m seinen stückweise glatte, geschlossene, doppelpunktfreie, im selben Sinn orientierte Kurven. γ_1, …, γ_m verlaufen im Innengebiet von γ und γ_j verläuft im Außengebiet von γ_k $(k \neq j)$. Das Gebiet zwischen γ und γ_1, …, γ_m liegt im Gebiet G. Dann gilt:

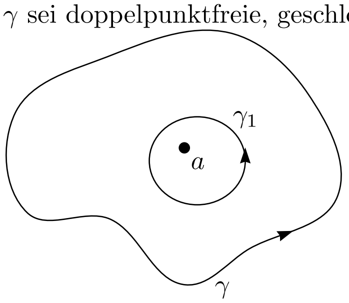
$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Beispiel:

Wir betrachten folgendes Fundamentalbeispiel:

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{1}{(z-a)^k}\,\mathrm{d}z$$

γ sei doppelpunktfreie, geschlossene Kurve um a. k seinen ganze Zahlen: $k \in \mathbb{Z}$.



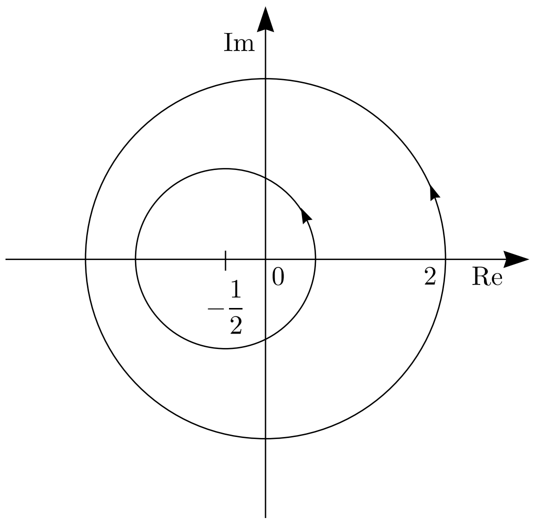
$G = \mathbb{C} \setminus \{z = -a\}$

$m = 1, \gamma_1 : |z-a| = r$

Daraus folgt nun:

$$\oint\limits_{|z-a|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^k} = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & \text{für} \quad k = 1 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq 1 \end{cases}$$

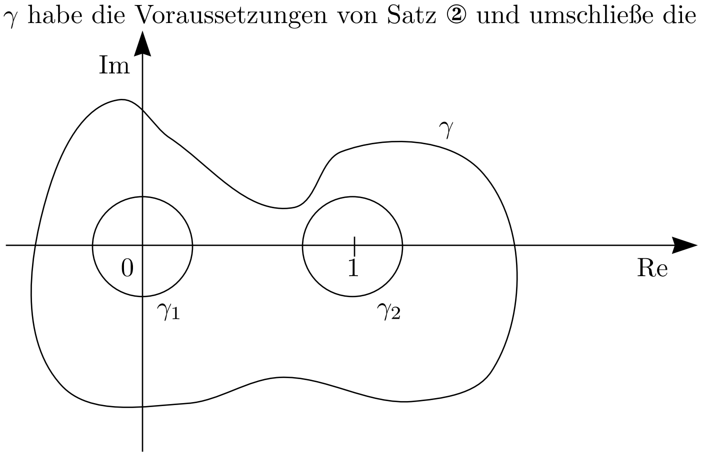
Beispiel:



$$\int\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z^2} = \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2}\,dz = 2\pi i$$

Beispiel:

γ habe die Voraussetzungen von Satz ② und umschließe die Punkte 0 und 1.



γ_1 und γ_2 seinen genügend kleine Kreise um 0,1, die das äußere Gebiet nicht schneiden.

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$$

Durch Partialbruchzerlegung folgt:

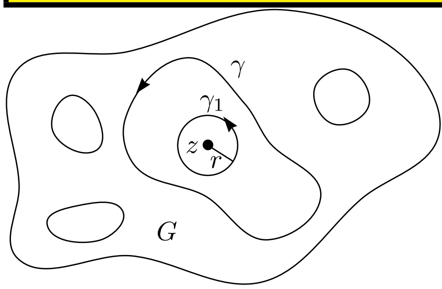
$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

$$\underbrace{\oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z}}_{2\pi i} + \underbrace{\oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1}}_{0} + \underbrace{\oint\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z}}_{0} + \underbrace{\oint\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1}}_{2\pi i} = 4\pi i$$

Satz ③ (Integralformel von Cauchy):

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein beliebiges Gebiet, $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sei holomorph. $\gamma \subset G$ sei geschlossene, doppelpunktfreie, positiv orientierte, stückweise glatte Kurven, deren Innengebiet zu G gehört. Dann gilt für jedes z in diesem Innengebiet:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$



Wenn wir die Funktion f in Real- und Imaginärteil zerlegen, dann gilt die Potentialgleichung:

$$u_{xx} + v_{yy} = 0$$

Die Formel im Satz wird in zwei Dimensionen angewendet, um diese Differentialgleichung zu lösen.

Beweis:

Mittels des Satzes 2 folgt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\substack{\gamma_1 \\ |\zeta - z| = r}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta + \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta}_{f(z)}$$

$$\lim_{r \mapsto 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\xi - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

Wir gehen auf die Definition des Linienintegrals zurück:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(z)}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t$$

$$I_r = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \left(f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(z) \right) \,\mathrm{d}t$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) \,\mathrm{d}z \right| \leq \text{Länge von } \gamma \cdot \max |f(z)| \,, z \in \gamma$$

$$|I_r| \leq 2\pi \max \left| f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - f(z) \right| , 0 \leq t \leq \pi$$

Dies geht für $r \mapsto 0$ gegen 0 aufgrund der Stetigkeit von f.

Beispiel:

Mit dem Satz ② folgt:

$$\oint_\gamma \frac{2\zeta-1}{\zeta(\zeta-1)}\,\mathrm{d}\zeta = \oint_{\gamma_1} \frac{2\zeta-1}{\zeta(\zeta-1)}\,\mathrm{d}\zeta + \oint_{\gamma_2} \frac{2\zeta-1}{\zeta(\zeta-1)}\,\mathrm{d}\zeta = \oint \frac{\frac{2\zeta-1}{\zeta-1}}{\zeta-0}\,\mathrm{d}\zeta + \oint_{\gamma_2} \frac{\frac{2\zeta-1}{\zeta}}{\zeta-1}\,\mathrm{d}\zeta$$

Nun ergibt sich mit Satz ③:

$$2\pi\mathrm{i}\left.\frac{2\zeta-1}{\zeta-1}\right|_{\zeta=0} + 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{2\zeta-1}{\zeta}\right|_{\zeta=1}$$

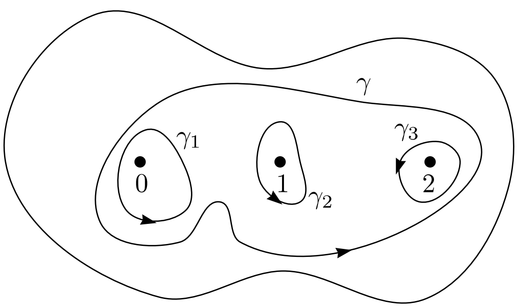
Beispiel:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dieses Beispiels behandeln wir mit zwei Arten. Einmal mit Satz ② und dann mit Satz ③.

- Lösung mit Satz ②:



Durch Partialbruchzerlegung folgt wiederum:

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}$$

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \oint_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{z} + \oint_{\gamma_2} -\frac{\mathrm{d}z}{z-1} + \frac{1}{2}\oint_{\gamma_3} \frac{\mathrm{d}z}{z-2} = \pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i} + \pi\mathrm{i} = 0$$

- Lösung mit Satz ③:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

$$\oint_\gamma \tilde{f}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{j=1}^{3}\oint_{\gamma_j} \tilde{f}(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-2)} = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)}}{\zeta-0}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$z = 0, \tilde{f}(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Somit folgt:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)}}{\zeta - 0} \,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\tilde{f}(0) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} = \pi\mathrm{i}$$

Die restlichen Integrale folgen dann analog, wobei wir dasselbe Endergebnis wie mit Satz ② erhalten.

Kapitel 4

Potenzreihenentwicklungen, Taylorreihe

4.1 Laurent-Reihe

Wir wollen uns nun mit Reihen folgender Form beschäftigen:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k$$

Dieses erinnert stark an Fourierreihen:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \lim_{N\mapsto\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

Diese Reihen sind **konvergent**, falls $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ konvergieren. Nun kommen wir zu den LAURENT-Reihen. Eine LAURENTreihe um z_0 ist von der Form:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil}}$$

Satz ①:

Es seien $r = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$, $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$. Dann konvergiert die LAURENT-Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ für alle z mit $r < |z| < R$. Beim Konvergenzbereich handelt es sich also um einen Kreisring. Divergenz liegt vor für $|z| < r$ oder $|z| > R$ oder auch falls $R < r$. Gilt $r < R$, so stellt $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ in $r < |z| < R$ eine holomorphe Funktion f dar. Für $r < \varrho_1 < \varrho_2 < R$ ist die Konvergenz auf dem Kreisring $\{z | \varrho \leq |z| \leq \varrho_2\}$ gleichmäßig. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und jedes ϱ mit $r < \varrho < R$ gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Begründung:

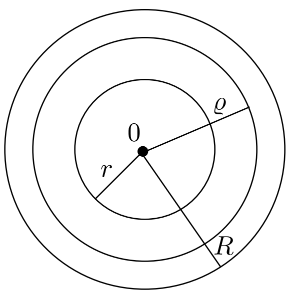
$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \underbrace{\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^k}_{w^k}$$

Nun gilt für den Konvergenzradius für diese Reihe:

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{r}$$

Für den Konvergenzbereich für den Hauptteil gilt:

$$z_0 = 0 : \frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{r} : |z| > r$$



Der **Nebenteil** konvergiert für $|z| < R$. Für $|\zeta| = \varrho$ liegt gleichmäßige Konvergenz vor. Wir integrieren:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta|=\varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} = \oint\limits_{|\zeta|=\varrho} \left[\frac{1}{\zeta^{k+1}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \zeta^n\right] \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta|=\varrho} \underbrace{\zeta^{n-k-1}\,\mathrm{d}\zeta}_{\neq 0 \text{ nur für } n=k} = a_k$$

Satz ②:

Es sei f im Kreisring $\{z | r < |z| < R\}$ holomorph ($r \geq 0$, $0 < R \leq \infty$). Dann gilt dort:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Für $r < \varrho < R$ gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0|=\varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

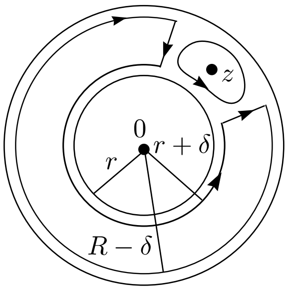
Die LAURENTentwicklung von f in $r < |z-z_0| < R$ ist **eindeutig**.

Beweis:

Hier benötigen wir außerdem die **geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1$$

Mit Satz ③ folgt nun:



$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r+\delta} \frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{1}{\zeta} f(\zeta) \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta)\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}\,\mathrm{d}\zeta = \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{1}{\zeta} f(\zeta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^k}\,\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta)\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^k}{z^k}\,\mathrm{d}\zeta = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=R-\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta \right)}_{a_k} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta)\zeta^k\,\mathrm{d}\zeta \right) z^{-k-1}
\end{aligned}
$$

Das erste Integral stellt die Koeffizienten a_k dar. Für den zweiten Ausdruck folgt durch Transformation der Summe:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r+\delta} f(\zeta)\zeta^k\,\mathrm{d}\zeta \right) z^{-k-1} = \sum_{l=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=r+\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{l+1}}\,\mathrm{d}\zeta \right) z^l = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}
$$

Somit ergibt sich nun:

$$
\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}}
$$

Definition:

Ist f holomorph in $\{z||z-z_0| < R\} \setminus \{z_0\}$ aber in z_0 nicht holomorph, so heißt z_0 **isolierte Singularität**.

z_0 sei eine isolierte Singularität. Berechne in $0 < |z - z_0| < R$ die Laurentreihe:

$$
f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \ldots + \frac{a_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots
$$

Definition:

z_0 heißt **hebbare** Singularität, falls $a_{-k} = 0$ für $k = 1, 2, \ldots$ (Hauptteil=0), heißt **Polstelle** der Ordnung $m \in \mathbb{N}$, falls $a_k = 0$, $k = m+1, \ldots$ und $a_{-m} \neq 0$. z_0 heißt **wesentliche Singularität**, falls $a_k \neq 0$ für unendliche viele $k \in \mathbb{N}$. a_{-1} heißt **Residuum** von f an der Stelle z_0 und wir schreiben $\mathrm{Res}(f, z_0)$.

$$
\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}, |z| > 0
$$

Für das sogenannte Residuum folgt nun mit $k = -1$:

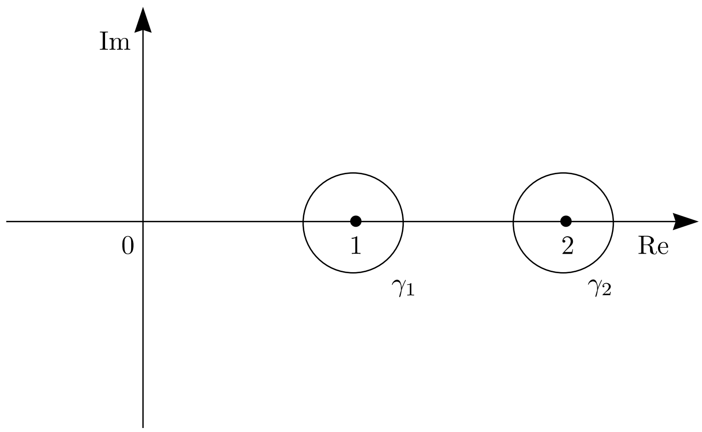
$$\mathrm{Res}(f; z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \text{ für } 0 < \varrho < R$$

Beispiel:

- Folgende Funktion soll um 1 entwickelt werden, so daß Konvergenz in $\frac{3}{2}$ vorliegt.

  $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

  1 und 2 sind isolierte Singularitäten:

  Wir suchen somit die LAURENTreihe, die im Bereich $0 < |z-1| < 1$ konvergiert. Damit folgt:

  $$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k =$$
  $$= -\frac{1}{z-1}\left(1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 + \ldots\right) = -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) - (z-1)^2 - \ldots$$

  Somit folgt für das Residuum einfach durch Ablesen:

  $$\mathrm{Res}(f; 1) = -1$$

- Nun soll die Funktion um 1, aber mit Konvergenz in $\frac{5}{2}$, entwickelt werden. Der relevante Bereich ist somit $|z-1| > 1$. Dann folgt:

  $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^k} =$$
  $$= \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \ldots$$

  Hier ist der Koeffizient a_{-1} nicht vorhanden, woraus man aber nicht schließen darf, daß das Residuum 0 ist. Nur die erste LAURENTreihe bei der isolierten Singularität liefert uns somit das Residuum.

- Wir entwickeln um 0, wobei Konvergenz in $\frac{\mathrm{i}}{2}$ vorliegen soll. Gesucht ist deshalb eine Reihe folgender Form:

  $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } |z| < 1$$

Somit erhalten wir zwei geometrische Reihen, welche miteinander multipliziert werden:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{(1-z)\cdot 2\cdot \left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^j, |z| < 1$$

Mittels des Cauchy-Produktes und der geometrischen Summe folgt als Ergebnis:

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k}$$

Eine andere Möglichkeit auf das Ergebnis zu kommen, wäre eine Partialbruchzerlegung.

Satz ③ (Taylorentwicklung):

Ist f holomorph in $D = \{z | |z-z_0| < R\}$, dann gilt für $z \in D$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \text{ mit } a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) \text{ für } 0 < \varrho < R$$

Beweis:

Mittels des Satzes 2 folgt:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, 0 < |z-z_0| < R$$

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k+1}\,\mathrm{d}\zeta \text{ für } k = 1, 2, \ldots$$

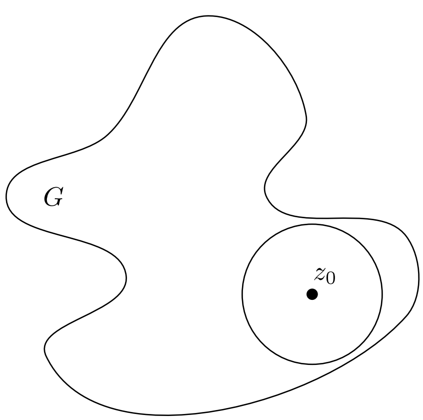
Mit Hilfe des Cauchy-Riemannschen Integralsatzes können wir sagen, daß hier das Ergebnis 0 ist:

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{k+1}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Somit fallen die Koeffizienten a_{-k} weg, woraus dann folgt:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, 0 < |z-z_0| < R = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, |z-z_0| < R$$

Folgerung ①:



Eine holomorphe Funktion ist in ihrem Definitionsgebiet beliebig oft differenzierbar.

Folgerung ②:

Ist f holomorph in $|z - z_0| < R$, so gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \, \mathrm{d}\zeta \text{ für } 0 < \varrho < R$$

Dies ist die schon bekannte Cauchy-Integralformel. Diese Beziehung können wir noch verallgemeinern:

$$f(z_0)^{(k)} = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varrho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \text{ mit } 0 < \varrho < R \text{ und } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Beispiel:

$$\oint\limits_{|\zeta| = 1} \frac{\mathrm{e}^{\zeta}}{\zeta^4} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{2\pi \mathrm{i}}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{\pi \mathrm{i}}{3} \qquad z_0 = 0, \varrho = 0, f(z) = \mathrm{e}^z . k = 3$$

4.2 Isolierte Singularität und Residuensatz

Wir fassen nochmals zusammen:

z_0 sei isolierte Singularität. Wir haben die Laurentreihe von oben. z_0 heißt nun **hebbar**, falls $a_k = 0$, $k = -1, -2, -3, \ldots$. z_0 heißt **Polstelle** der Ordnung m, falls $a_{-k} = 0$, $k = m + 1, m + 2, \ldots$. z_0 heißt **wesentliche** Singularität, falls $a_{-k} \neq 0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$.

Beispiel:

- Hebbare Singularität:

  $$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

  $z_0 = 0$ ist eine isolierte Singularität. Wir berechnen die Laurentreihe:

  $$f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \ldots$$

  Es gilt nun $f(0) = 1$, womit gezeigt ist, daß $z = 0$ eine hebbare Singularität ist. Wir können dies auch folgendermaßen ausdrücken:

  $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z)$ bleibt beschränkt.

- Polstelle:

  $$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \stackrel{0<|z-1|<1}{=} -\frac{1}{z-1} - 1 - (z-1) \mp \ldots$$

  $z_0 = 1$ ist somit Polstelle 1.Ordnung.

  $$f(z) = \frac{1}{(\sin(z_0))^2}$$

$z=0$ ist eine isolierte Singularität. Wir schreiben die LAURENTreihe hin:

$$f(z)=\frac{1}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\mp\ldots\right)^2}=\frac{1}{(z+zo(1))^2}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{(1+o(1))^2}=\frac{1}{z^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(o(1))^k\right)^2=$$
$$=\frac{1}{z^2}(1+o(1))^2=\frac{1}{z^2}+\frac{a}{z}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$$

Wir haben hier somit eine Polstelle 2.Ordnung.

- Wesentliche Singularität:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}$$

$z=0$ ist eine wesentliche Singularität.

Nun ist noch eine Sache ungeklärt, und zwar, was nichtisolierte Singularitäten sind. Betrachten wir hierzu den komplexen Logarithmus:

$\log(z)=\ln|z|+\mathrm{i}\arg(z).-\pi<\arg(z)<\pi$

Jeder Punkt der negativen reellen Achse ist nichtisolierte Singularität.

$$f(z)=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$z=0$ ist nichtisolierte Singularität. Für $z_k=\frac{1}{k\pi}$ wird der Nenner 0. Ab einem gewissen k befinden sich alle Punkte innerhalb eines Kreises mit Radius ε. Diese Folge konvergiert, $z=0$ ist Häufungspunkt dieser Folge, womit sie eine nichtisolierte Singularität darstellt.

Bemerkung:

$f(z)$ sei bei einer wesentlichen Singularität nicht definiert. Betrachten wir $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$. Es sei $z=\mathrm{i}y$, womit für $y\mapsto 0$ kein Grenzwert existiert. Für $z=x>0$ und $x\mapsto 0$ folgt $|\mathrm{e}^z|\mapsto\infty$.

Satz ①:

> f hat in z_0 eine Polstelle der Ordnung m. Genau dann gibt es eine holomorphe Funktion g mit $g(z_0)\neq 0$ und $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$. Dann hat $\dfrac{1}{f(z)}$ Nullstellen m-terr Ordnung in z_0.

Beispiel:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}:\frac{1}{f(z)}=(z-1)(z-2)$$

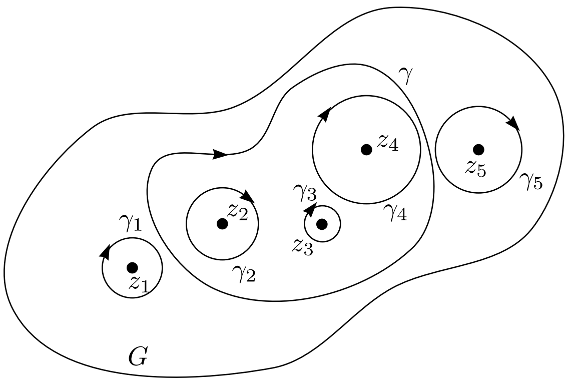
Nun gilt:

$$f(z)(z-z_0)^m=a_m+a_{m+1}(z-z_0)+\ldots=g(z),g(z_0)=a_m\neq 0$$

Beispiel:

$$f(z)=\frac{1}{\sin^2 z}:\frac{1}{f(z)}=\sin^2 z$$

Satz ② (Residuensatz):



G sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. $f : G \setminus \{z_1, \ldots z_n\} \mapsto \mathbb{C}$ sei holomorph. z_1, z_2, …, z_n seien die isolierten Singularitäten von f. γ sei eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve in G mit $z_j \notin \gamma$ ($j = 1$, …, n); γ sei positiv orientiert. Dann gilt:

$$\boxed{\oint\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\sum_j \mathrm{Res}(f; z_j)\right)}$$

z_j sei innerhalb von γ, beispielsweise $j = 2, 3, 4$.

Beweis:

Mittels des zweiten Cauchy-Integralsatzes folgt:

$$\oint\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_j \oint\limits_{K_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_j 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}(f; z_j) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\sum_j \mathrm{Res}(f; z_j)$$

Beispiel:

1.) z_0 sei Polstelle m-terr Ordnung. Dazu multiplizieren wir die Reihe mit $(z - z_0)^m$ durch:

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}$$

Wir leiten diesen Ausdruck $m - 1$ mal nach z ab:

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} D^{m-1}\left[(z - z_0)^m f(z)\right]_{z=z_0} = \mathrm{Res}(f; z_0)}$$

Für $m = 1$ gilt beispielsweise:

$$\boxed{\mathrm{Res}(f; z_0) = (z - z_0) f(z)\big|_{z=z_0}}$$

Hat f die Form $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ mit $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Dann ist z_0 Polstelle 1.Ordnung. g und H seien außerdem holomorph. Dann folgt mit obiger Formel:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}; z_0\right) = (z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)}\bigg|_{z=z_0}$$

Da g und h holomorph sind, können wir diese in eine Reihe entwickeln:

$$h(z) = h(z_0) + (z - z_0)h'(z_0) + (z - z_0)o(1) = (z - z_0)h'(z_0) + (z - z_0)o(1)\ (z \mapsto z_0)$$

Durch Ausklammern von $(z - z_0)$ folgt:

$$h(z) = (z - z_0)(h'(z_0) + o(1))$$

Damit folgt nun durch Einsetzen:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h}{g}; z_0\right) = (z - z_0)\frac{g(z)}{(z - z_0)\left(h'(z_0) + o(1)\right)}\Bigg|_{z=z_0} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

2.) Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$\oint\limits_{|\zeta|=2} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{\zeta}}}{\zeta - 1}}_{f(\zeta)} \, d\zeta = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f;0) + \operatorname{Res}(f;1)\right)$$

0 ist eine wesentliche Singularität und 1 eine Polstelle 1.Ordnung. Damit berechnen wir die Residuen an diesen beiden Stellen:

$$\operatorname{Res}(f;1) = (z - 1)\ \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z - 1}\Bigg|_{z=1} = e$$

Da bei 0 eine wesentliche Singularität vorliegt, können wir obige Formel nicht anwenden. Wir müssen die LAURENTreihe bilden:

$$\frac{1}{z-1}e^{\frac{1}{z}} = -\left(1 + z + z^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots\right) \text{ für } |z| < 1$$

Wir multiplizieren die ersten Koeffizienten aus, wobei wir a_{-1} erhalten:

$$-\left(1 + z + z^2 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots\right) = \ldots - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right)\ldots$$

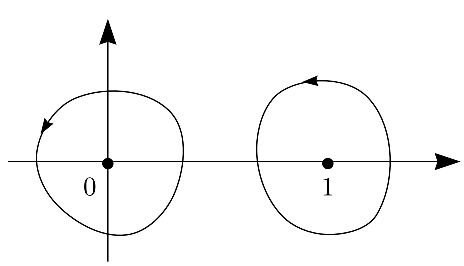
Mittels der Reihenentwicklung für die Exponentialfunktion folgt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e - 1$$

Somit folgt für das Residuum:

$$\operatorname{Res}(f;0) = 1 - e$$



4.3 Auswertung (reeller uneigentlicher) Integrale

4.3.1 Linienintegrale mit Residuensatz

In HM II hatten wir ein Linienintegral folgendermaßen berechnet:

$$\oint_{\gamma} h(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b h(z(t))\dot{z}(t)\,\mathrm{d}t$$

$\gamma : z = z(t), a \leq t \leq b$

$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Satz ①:

$G = \{z, |z| \leq 1\}$; $z_1, z_2, \ldots \in G$ seien isolierte Singularitäten der auf $G \setminus \{z_1, z_2, \ldots\}$ holomorphen Funktion f mit $|z_j| \neq 1\ \forall\, j$. Dann hat man:

$$\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t = 2\pi\left(\sum_l \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z}; z_l\right) + \mathrm{Res}\left(\frac{f(z)}{z}; 0\right)\right) \text{ für } 0 < |z_l| < 1$$

Beweis:

$z(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$

$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}z\,\mathrm{d}t$

$$\int_0^{2\pi} f\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\,\mathrm{d}t = \oint_{|z|=1} f(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$$

Dies ergibt dann den Residuensatz.

Beispiel:

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\mathrm{i}}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{\cos z}{z}; 0\right) = 2\pi\left(z\cdot\frac{\cos z}{z}\right) = 2\pi\cos(z)\big|_{z=0} = 2\pi$$

Beispiel:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a^2 - 2a\cos t + 1}$$

Dies stellt natürlich kein geschlossener Integrationsweg dar. Da wir aber eine periodische Funktion haben, folgt:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a^2 - 2a\cos t + 1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a^2 - 2a\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) + 1}, a \in \mathbb{C}$$

Außerdem gilt nun:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{-a\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + (1 + a^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - a}\,\mathrm{d}t$$

Durch Umformung von $f(z)$ folgt:

$$f(z) = \frac{z}{-az^2 + (1+a^2)z - a} = \frac{z}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}$$

Damit können wir nun das Integral berechnen:

$$I = -\frac{1}{a}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{i}} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}.$$

a und $\dfrac{1}{a}$ sind Polstellen 1.Ordnung. Wir wenden den Residuensatz an:

$$|a| < 1 : \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}; a\right) = \frac{1}{a-\frac{1}{a}}$$

$$|a| < 1 : I = -\frac{1}{a}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot 2\pi\mathrm{i}\left(a - \frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}\frac{1}{a-\frac{1}{a}} = \frac{1}{1-a^2}$$

Als Übung ist zu zeigen:

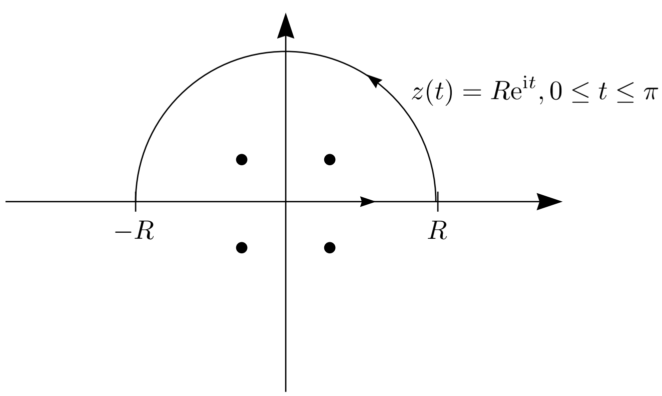
$$|a| > 1 : I = \frac{1}{a^2-1}$$

4.3.2 Uneigentliche Integrale mit Residuensatz

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}, f(x) = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

Die Singularitäten, also die Nullstellen des Nenners, sind folgende:

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$



Satz ②:

$G \subseteq \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $\{z|\mathrm{Im}(z) \geq 0\} \subset G$. $f : G \mapsto \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, von denen keine reell ist. z_1, z_2, …, z_S liege in der oberen Halbebene ($\mathrm{Im}(z_k) > 0, k = 1, \ldots, S$). Es gelten nun:

$$\lim_{R\mapsto\infty} \int\limits_0^\pi f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{R\mapsto\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{S} \operatorname{Res}(f; z_k)$$

Bemerkung:

Wir hatten in HM I folgendes definiert:

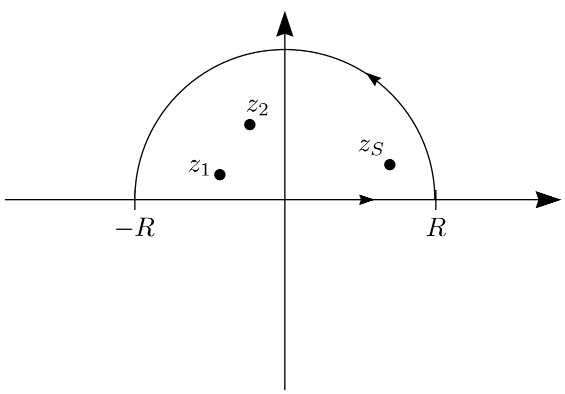
$$I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\substack{R\mapsto\infty\\ \tilde{R}\mapsto\infty}} \int\limits_{\tilde{R}}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{wobei}\ \lim_{R\mapsto\infty}, \lim_{\tilde{R}\mapsto-\infty}\ \text{unabhängig voneinander sind.}$$

Somit gilt:

$$I=\lim_{R\mapsto\infty}\int\limits_{0}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\tilde{R}\mapsto-\infty}\int\limits_{\tilde{R}}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ein kann sein, daß eine Integral nur als CAUCHYscher Hauptwert, aber nicht als uneigentliches Integral existiert.

Beweis:



$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\pi} f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)\mathrm{i}\cdot R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{S}\mathrm{Res}(f;z_k)$$

$$\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{S}\mathrm{Res}\,(f;z_k) - \mathrm{i}\int\limits_{0}^{\pi} f\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

Wenn wir den Grenzübergang von $R\mapsto\infty$ bilden, folgt Satz ②.

Beispiel:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^4}, f(z)=\frac{1}{1+z^4}, z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}, z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

$$\lim_{R\mapsto\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$

Wir schätzen ab:

$$\left|\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \pi\max_{0\leq t\leq\pi}\frac{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}|}{|1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}|}\leq\pi\frac{R}{R^4-1}\mapsto 0 \text{ für } R\mapsto\infty$$

Damit folgt das Ergebnis:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4};\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4};\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}\right)\right)$$

Dies sind Polstellen 1.Ordnung. Damit folgt:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4};\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^4};\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}\right) = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Das Ergebnis ist somit:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$$

$$0 \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}x \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Beispiel:

Wir berechnen das vorige Integral allgemein:

$$\boxed{f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^n}}$$

Da es sich um Polstellen erster Ordnung handelt, folgt:

$$\mathrm{Res}(f,a_\nu) = \frac{g(x)}{h'(x)}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^n},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1+2k)}\right) = \left.\frac{1}{nz^{n-1}}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1+2k)}} = \frac{1}{n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1+2k)}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi(1+2k)}{n}}} = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}\cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}}$$

Wir berechnen die Anzahl der Residuen im Intervall $[0;\pi]$:

$$\frac{\pi+2k\pi}{n} \leq \pi$$

$$\pi + 2k\pi \leq n\pi$$

$$2k\pi \leq \pi(n-1)$$

$$k \leq \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

Damit gilt:

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1 & \text{für} \quad n \text{ gerade} \\ \frac{n}{2} - \frac{1}{2} & \text{für} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für das Integral folgt nun für gerades n:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^n} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i}^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^n},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1+2k)}\right)$$

Die Summe berechnen wir mittels der Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \text{ für } q \neq 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} \cdot \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}} = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}} = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} \cdot \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}\right)^k = -\frac{1}{n}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\cdot\left(\frac{n}{2}-1+1\right)}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}-1} =$$
$$= -\frac{1}{n}\frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}\cdot\frac{n}{2}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}-1} = -\frac{1}{n}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{n}}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}-1} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{-1-1}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}} =$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}$$

Damit folgt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^n} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i}^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+z^n}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1+2k)}\right) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}} = 2\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Setzen wir nun $n = 4$, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^4} = 2\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = 2 \cdot \frac{\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{2}$$

Damit folgt also unser zuvor berechnetes Ergebnis.

Kapitel 5

Differentialgleichungen

5.1 Implizite Differentialgleichung 1.Ordnung

Es sei $F(x, y, y') = 0$ gesucht mit $y = \varphi(x)$ und $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = \forall\, x \in I$. Die Kurvendarstellung in impliziter Form lautet:

$\phi(x, y) = c$

Beispiel:

$x^2 + y^2 = 9$

In Parameterdarstellung schreiben wir:

$x = \Psi(t) y = \chi(t)$

Beispiel:

$x = \sqrt{5}\cos(t)$

$y = \sqrt{5}\sin(t)$

$0 \leq t \leq 2\pi$

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(G)$ und $D_3F(x, y, y') \neq 0$ in G. Wir nehmen an, daß $y = \varphi(x) \in C^2(I)$ ($\hat{=}$ 2 mal stetig differenzierbar) eine Lösung der Differentialgleichung ist.

1.) $\varphi''(x) = 0$

   $\varphi(x) = ax + b$ mit a, $b =$ const. ist eine Lösung, falls $F(x, ax + b, a) = 0$. $y = \varphi(x) = ax + b$ ist Lösung, falls $F(x, ax + b, a) = 0\ \forall\, x \in I$ gilt.

   Beispiel:

   1.) Clairautsche Differentialgleichung

      $y = xy' + g(y')$

      $ax + b = ax + g(a)$

      $b = g(a)$

      Damit folgt, daß $y = \varphi(x) = ax + g(a)$ eine Lösung für jedes a darstellt. Es handelt sich jedoch um keine beliebige Gerade, da die Abhängigkeit $b = g(a)$ besteht.

2.) $y = xf(y') + g(y')$

$ax + b = xf(a) + g(a)$

$a \overset{!}{=} f(a), b \overset{!}{=} g(a)$

Für jedes a mit $f(a) = a$ ist die Gerade $y = \varphi(x) = ax + g(a)$ Lösung.

2.) $\varphi''(x) \neq 0 \; \forall \; x \in I$

$t = \varphi'(x) \Rightarrow x = \Psi(t), t \in J$

$y = \varphi(x) \Rightarrow y = \varphi(\Psi(t)) = \chi(t), t \in J$

Es sei $y = \varphi(x)$ eine Lösung in Parameterdarstellung mit $x = \Psi(t)$, $y = \chi(t)$.

$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0 \, \forall \, x \in I$

Damit folgt dann:

$F(\Psi(t), \chi(t), t) = 0$

$\chi(t) = \varphi(\Psi(t))$

Durch Ableiten nach t resultiert:

$\chi'(t) = \varphi'(\Psi(t))\Psi'(t) = \dot{\Psi}(t)t$

Die Lösungen der Gleichung $f(\Psi(t), \chi(t), t) = 0$ sind $x = \Psi(t)$, $y = \chi(t)$. $\dot{\chi}(t) = t\dot{\Psi}(t)$, $t \in J$ liefert eine Parameterdarstellung für Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, y') = 0$.

Beispiel:

$$y = \underbrace{xf(y')}_{xy'^2} + \underbrace{g(y')}_{y'}$$

$\chi = \Psi(t)f(t) + g(t)$

$\dot{\chi}(t) = t\dot{\Psi}(t)$

$$\dot{\chi}(t) = \underbrace{\dot{\Psi}(t)f(t)}_{t^2-t} + \underbrace{\Psi(t)\dot{f}(t)}_{2t} + \dot{g}(t) = t\,\underbrace{\Psi'(t)}_{1}$$

$\dot{\Psi}(t)\,(f(t) - t) + \Psi(t)\dot{f}(t) + \dot{g}(t) = 0$

Beispiel:

Wir betrachten wieder die CLAIRAUTsche Differentialgleichung:

$y = xy' + g(y')$

$f(t) = t$

$x = \Psi(t) = -\dot{g}(t)$

$y = \chi(t) = -\dot{g}(t)t + g(t)$

$y = xy' + y'^2, g(t) = t^2$

$x = \Psi(t) = -2t$

$y = \chi(t) = -2t^2 + t^2 = -t^2$

Es sei $y = ax + a^2$ eine Lösung. Die explizite Lösung lautet:

$$y = -\frac{1}{4}x^2$$

Jede Tangente an $y = -\frac{1}{4}x^2$ hat die Form $y = ax + a^2$. Jede Gerade der Form $y = ax + a^2$ ist Tangente an $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form $\phi(y, y', y'') = 0$, in der x nicht explizit auftritt.

$$y'' + \frac{g}{l}\sin y = 0$$

Wir suchen y' als Funktion von y. $y' = p(y) \Rightarrow y = y(x)$. Welcher Gleichung muß $p = p(t)$ genügen, damit $y'(x) = p(y(x))$ Lösung von $\phi(y, y', y'') = 0$ ist?

$$\phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t))$$

$$y''(x) = \dot{p}(y(x))y'(x) = \dot{p}(y(x))p(y(x))$$

$$p = p(t)$$

Das Vorgehen ist nun folgendes:

1.) Löse $\phi(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0, \in I$.

2.) Berechne $y(x)$ aus $y'(x) = p(y(x))$.

Beispiel:

Es sei folgende Differentialgleichung gegeben:

$$y'' = yy' + y^2$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$y(1) = 0, y'(1) = -1$$

Wir gehen nach obiger Anleitung vor.

1.) $pp' = tp + p^2$

Eine Lösung hiervon ist $p = 0 = y'(x)$, womit durch Integration folgt:

$$y(x) = \text{const.}$$

Diese Funktion erfüllt jedoch nicht das Anfangswertproblem und stellt somit keine Lösung dar!

$$p'(t)\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}p(t) = t\mathrm{e}^{-t}$$

$$\left(p\mathrm{e}^{-t}\right)' = t\mathrm{e}^{-t}$$

Somit ergibt sich:

$$p\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(t-1) + C_1, p(t) = -t - 1 + C_1\mathrm{e}^{+t}$$

2.) $y'(x) = -y(x) - 1 + C_1\mathrm{e}^{+y(x)}$

$$\underbrace{y'(1)}_{-1} = -\underbrace{y(1)}_{0} - 1 + C_1\underbrace{\mathrm{e}^{y(1)}}_{1}$$

Damit ergibt sich $C_1 = 0$.

$y'(x) = -y(x) - 1$

$\frac{y'}{y+1} = -1$

Durch Integration folgt:

$\ln(y+1) = -x + C_2$

$\ln\left(y(1)+1\right) - 1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 1$

$\ln\left(y(x)+1\right) = -x + 1$

Somit folgt für die Lösung:

$$\boxed{y(x) = -1 + \mathrm{e}^{1-x}}$$

Beispiel:

$y = y' + y'^2$

$y'(x) = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

$x = \Psi(t) = \ln t + 2t + C_1, t > 0$

$y = \chi(t) = t + t^2$

$\dot{\chi}(t) = t\dot{\Psi}(t)$

$\dot{\Psi}(t) = \frac{1}{t} + 2$

Gesucht ist die Lösung durch $(1,2)$, also $t_0 = (1|-2)$.

$\chi(t_0) = t_0 + t_0^2 = 2$

$\Psi(t_0) = \ln t_0 + 2t + C_1 = 1$

Somit gilt $C_1 = -1$. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

$y = t + t^2$

$x = \ln t + 2t - 1$

Wir behandeln nochmals die Clairautsche Differentialgleichung, aber auf eine andere Art:

$y(x) = xy'(x) + g(y'(x))$

Wir differenzieren zuerst nach x:

$y'(x) = y'(x) + xy''(x) + \dot{g}(y'(x))y''(x)$

$0 = xy''(x) + \dot{g}(y'(x))y''(x)$

Nun kann man $y''(x)$ ausklammern:

$0 = y''(x)\left(x + \dot{g}(y'(x))\right)$

Damit gilt also

$y''(x) = 0$

Und somit folgt schließlich:

$$\boxed{y(x) = ax + b}$$

Wir setzen dies zur Probe in die Differentialgleichung ein, wobei nun eine Beziehung zwischen b und a folgt:

$$\boxed{b = g(a)}$$

Außerdem kann noch der Ausdruck in der zweiten Klammer gleich Null sein:

$$\boxed{x = -\dot{g}(y'(x)) : x = -\dot{g}(t)}$$

$$\boxed{y = -\dot{g}(t)t + g(t)}$$

Dies ist die Methode der Integration durch Differentiation.

Beispiel:

Wir integrieren folgende Differentialgleichung:

$$y' = \phi(x, y) \text{ mit } y(x_0) = y_0$$

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \phi(t, y(t)) \, \mathrm{d}t + y_0$$

Dann kann man eine Lösung durch Iteration finden:

$$y_{n+1}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \phi(t, y_0(t)) \, \mathrm{d}t + y_0 \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$y_0(x) = y_0$$

5.2 Exakte Differentialgleichungen und integrierender Faktor

$$y' = \phi(x, y) = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

Wir multiplizieren mit $g(x, y) \neq 0$ und bringen alles auf eine Seite:

$$f(x, y) + g(x, y)y' = 0$$

Wir suchen eine Lösung in Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$. Wir setzen dies ein und erhalten:

$$f(x(t), y(t)) + g(x(t), y(t)) \cdot \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = 0$$

$$f(x(t), y(t))\dot{x}(t) + g(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0 \qquad (\star)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Wir multiplizieren mit $\mathrm{d}t$ durch:

$$f(x, y) \, \mathrm{d}x + g(x, y) \, \mathrm{d}y = 0 \qquad (1)$$

In dieser Differentialgleichung ist die explizite Form $y = y(x)$ enthalten, die implizite Form $x = x(y)$ und außerdem die Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$. Lösen von (1) bedeutet:

Suche $x = x(t)$, $y = y(t) \in \mathbb{C}^1(J)$ ($J \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$) mit ($\star$). Die Voraussetzung ist nun, daß f, $f \in C^1(G)$, wobei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ ist.

$f^2(x,y) + g^2(x,y) \neq 0$ mit $(x,y) \in G$

Ordne (1) folgendes Vektorfeld zu:

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

($\star$) kann dann so geschrieben werden mit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$:

$$\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$$

$$p(t) = \vec{\nabla} h(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

Ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld, d.h. $\vec{v} = \vec{\nabla} h$, dann ist $h(\vec{r}(t)) = \text{const.}$

Definition:

Die Gleichung (1) heißt **exakt** in G, falls $\vec{v}$ in G ein Potentialfeld ist, d.h.

$D_2 f(x,y) = D_1 g(x,y)$ für $(x,y) \in G$

Satz ①:

Es sei die Differentialgleichung (1) in G exakt und h ein Potentialfeld zu $\vec{v}$. Dann sind alle Lösungen von (1) implizit und $h(x,y) = C$ (beliebig) gegeben. (Jede Höhenlinie von H ist Lösung von (1) und jede Lösung von (1) ist Höhenlinie von h.)

Beweis:

Wir notieren uns nochmals Gleichung (1):

$$f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$D_2 f(x,y) = D_1 f(x,y)$$

a.) $h(x,y) = C$ definiert implizit die Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $h(x(t), y(t)) = C$.

Wir differenzieren dies nach t:

$$0 = \underbrace{\vec{\nabla} h(x(t), y(t))}_{\vec{v}(\vec{r}(t))} \cdot \dot{r}(t) \,\forall\, t \in J$$

b.) $\vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$

$D_t h(\vec{r}(t)) \Rightarrow h(\vec{r}(t)) = \text{const.}$

Beispiel:

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$y' = p(x)q(y)$

$p(x)q(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$

Diese Gleichung ist auf keinen Fall exakt. Deshalb dividieren wir durch $q(y)$ durch:

$$p(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{q(y)}\mathrm{d}y = 0$$

Diese Differentialgleichung ist nun exakt. Also können wir die neue Methode anwenden:

$p(x) = D_1 h$

$q(y) = D_2 h$

Es gilt also:

$D_1 h(x, y) = p(x)$

Daraus resultiert:

$$h(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t + \lambda(y)$$

$$D_2 h(x, y) = \lambda'(y) = -\frac{1}{q(y)} \Rightarrow \lambda(y) = -\int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{q(t)}$$

Also folgt:

$$\boxed{h(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}t}{q(t)} = C}$$

Dies sind alle Lösungen für x_0, y_0 und beliebigem C. Die Lösung durch (x_0, y_0) erhält man für $C = 0$.

5.3 Der integrierende Faktor

Die Differentialgleichung $f(x, y)\,\mathrm{d}x + g(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ sei **nicht** exakt:

$D_2 f(x, y) \neq D_1 g(x, y)$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit einer beliebigen Funktion $\mu(x, y) \neq 0$:

$$\mu(x, y)f(x, y)\,\mathrm{d}x + \mu(x, y)g(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (2)$$

μ soll so bestimmt werden, daß die neue Differentialgleichung (2) jetzt exakt ist. Also muß gelten:

$$\boxed{D_2\,(\mu f) \stackrel{!}{=} D_1\,(\mu g)}$$

Falls dies gilt, heißt μ **integrierender Faktor** (**Eulerscher Multiplikator**). Oben muß nun die Produktregel angewendet werden, womit dann folgt:

$$(D_2\mu(x, y))\,f(x, y) - (D_1\mu(x, y))\,g(x, y) = \mu(x, y)\,(D_1 g(x, y) - D_2 f(x, y)) \qquad (3)$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung. Wir suchen einen Ansatz zur Berechnung von $\mu = \mu(x, y)$. Es sei $\varphi = \varphi(x, y)$ gegeben. Dann suchen wir eine Funktion $H = H(t)$ derart, daß $\mu(x, y) = H(\varphi(x, y))$ ein integrierender Faktor ist. Mittels der Kettenregel ergibt sich dann wieder:

$D_1\mu(x, y) = H'(\varphi(x, y))D_1\varphi(x, y)$

$D_2\mu(x, y) = H'(\varphi(x, y))D_2\varphi(x, y)$

Gleichung (3) geht nun über in:

$$\boxed{H'(\varphi(x, y)) = H(\varphi(x, y)) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{D_2\varphi(x, y) \cdot f - D_1\varphi \cdot g(x, y)}}$$

Falls diese Funktion nur noch von $\varphi(x, y)$ abhängt mit $w(\varphi(x, y))$, dann hat der Ansatz etwas gebracht.

$H'(\varphi(x, y)) = H(\varphi(x, y))w(\varphi(x, y))$

$H'(t) = H(t)w(t)$

Es ist eine lineare homogene Differentialgleichung. Diese Methode wollen wir nun an speziellen Beispielen üben:

1.) $\varphi(x, y) = x$: $\mu(x, y) = H(x)$

$$H'(x) = H(x) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{-g(x, y)}$$

Falls dies nur von x abhängt, dann ist $\mu(x) = H(x)$ ein integrierender Faktor.

2.) $\varphi(x, y) = y$

$$H'(y) = H(y) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{f(x, y)}$$

Dies darf nur von y abhängen.

3.) $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$

$$H'(x^2 + y^2) = H(x^2 + y^2) \cdot \frac{D_1g(x, y) - D_2f(x, y)}{2yf(x, y) - 2xg(x, y)}$$

Auch hier das die Funktion nur von $x^2 + y^2$ abhängen, damit $\mu(x) = H(x)$ integrierender Faktor ist.

Beispiel:

Schauen wir uns folgende lineare inhomogene Differentialgleichung an:

$y' + p(x)y + g(x) = 0$

Daraus folgt:

$$\underbrace{(p(x)y + q(x))}_{f(x,y)}\,\mathrm{d}x + \underbrace{1}_{g(x,y)}\,\mathrm{d}y = 0$$

Nun gilt:

$D_2f(x, y) = p(x)$

$D_1g(x, y) = 0$

Nun ergibt sich mit der obigen Beziehung:

$$\frac{D_1 g(x,y) - D_2 f(x,y)}{-g} = \frac{-p(x)}{-1} = p(x)$$

$H'(x) = H(x)p(x)$

Somit folgt:

$$\mu(x) = H(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Als Übung soll der Rest dieser Aufgabe gelöst werden.

Beispiel:

$y - \left(x^2 + y^2 + x\right) y' = 0$

$y\,\mathrm{d}x - \left(x^2 + y^2 + x\right)\,\mathrm{d}y = 0$

$D_1 g(x,y) - D_2 f(x,y) = -2x - 1 - 1 = -2\,(x+1)$

Die Differentialgleichung ist somit nicht exakt. Die Fälle (1) und (2) liegen nicht vor.

$\varphi(x,y) = x^2 + y^2$

$$H'(y) = H(y) \cdot \frac{-2\,(x+1)}{2y^2 + 2x\,(x^2 + y^2 + x)} = -\frac{2\,(x+1)}{2(x^2+y^2)(x+1)} = -\frac{1}{x^2+y^2}$$

Wir haben somit nur eine Abhängigkeit von $x^2 + y^2$; unser Ansatz führt infolgedessen zum Ziel. $\mu(x,y) = H(x^2+y^2)$ läßt sich aus $H'(t) = H(t)\left(-\frac{1}{t}\right)$ berechnen.

$$H(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

Somit folgt also:

$$\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x - \left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

Nun müssen wir zu dem entsprechenden Vektorfeld ein Potential bestimmen.

$$D_1 h = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$D_2 h = -\left(1 + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Nach einigen Rechenschritten folgt:

$$\boxed{h(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - y}$$

Für die Lösung in impliziter Form folgt dann:

$$\boxed{\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - y = C}$$

Schauen wir uns zum Abschluß noch einmal folgendes an:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi + g(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\eta = 0$$

Falls dieses Integral wegunabhängig ist, dann ist hierdurch die Lösung implizit gegeben.

$\Leftrightarrow D_2 f(\xi,\eta) = D_1 g(\xi,\eta)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t,y_0)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{y_0}^{y} g(x_0,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Die Exaktheit ist also eine andere Formulierung für die Wegunabhängigkeit eines Integrals. Als Vorbereitung zu unserem nächsten Thema wollen wir uns nochmals die inhomogene Differentialgleichung 1.Ordnung anschauen:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Dies wird multipliziert mit:

$$\mu(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Damit folgt dann:

$$(\mu y)'(x) = \mu(x)q(x)$$

$$\mu(x)y(x) - \mu(x_0)y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} \mu(t)q(t)\,\mathrm{d}t$$

Somit folgt:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{\frac{y(x_0)}{\mu(x)}}_{\substack{\text{Lösung der}\\ \text{homogenen}\\ \text{Gleichung}}} + \underbrace{\frac{1}{\mu(x)}\int\limits_{x_0}^{x} \mu(t)g(t)\,\mathrm{d}t}_{\substack{\text{Lösung der inhomogenen}\\ \text{Gleichung } y_p \text{ mit } y_p(x_0)=0}}}$$

Es handelt sich um alle Lösungen, falls x_0 beliebig ist. Für $g(x) = 0$ folgt daraus auch die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y(x) = \frac{y(x_0)}{\mu(x)} = \frac{C}{\mu(x)} \text{ mit beliebigem } C$$

5.4 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir betrachten die Differentialgleichung $L_y(x) = y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ mit $x \in I$ und gegebenem p, q und f. Diese Funktionen seien außerdem stetig und beschränkt.

Problem:

Es seien $x_0 \in I$ und α, $\beta \in \mathbb{R}$. Gesucht wird $y \in C^2(I)$ mit $L_y(x) = f(x)$ und $x \in I$ Außerdem sei $y(x_0) = \alpha$ und $y'(x_0) = \beta$. Das Problem (P) wird mit $A(f;\alpha,\beta)$ bezeichnet. $y \in A(f;\alpha,\beta)$ soll bedeuten: y löst $A(f;\alpha,\beta)$.

Satz ①:

Das Problem $A(f;\alpha,\beta)$ ist für jedes Tripel von Daten $\{f;\alpha,\beta\}$ eindeutig lösbar.

Folgerung:

Es sei $y \in A(0;0,0)$. Dann gilt:

$$\left\{\begin{array}{l} Ly(x)=0 \\ y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow y=0$$

Satz ② (Linearität/Superposititon):

Aus $y_1 \in A(f_1;\alpha_1,\beta_1)$ und $y_2 \in A(f_2;\alpha_2,\beta_2)$ und $C_1=\text{const.}$, $C_2=\text{const.}$ folgt:
$Cy_1+C_2y_2 \in A\left(C_1f_1+C_2f_2;C_1\alpha_1+C_2\alpha_2,C_1\beta_1+C_2\beta_2\right)$

Wir bezeichnen die Menge aller Lösungen als:

$\mathcal{L}=\{y|Ly=f \text{ auf } I\}$

Diese Menge nennt man die „allgemeine Lösung". Die „allgemeine Lösung der homogenen Gleichung" lautet:

$\mathcal{L}_H=\{y|Ly=0 \text{ auf } I\}$

Satz ③:

Es sei $y_p \in \mathcal{L}$ gegeben. Dann gilt $\mathcal{L}=y_o+\mathcal{L}_H$, d.h. genau:

1.) Jede Funktion der Form y_p+y_0 mit $y_0 \in \mathcal{L}_H$ liegt in $\mathcal{L}$.

2.) Hat man $y \in \mathcal{L}$, so gibt es ein $y_0 \in \mathcal{L}_H$ mit $y=y_p+y_0$.

Begründung:

1.) $L(y_p+y_0)=Ly_p+Ly_0=f+0=f$

2.) $L(y-y_p)=Ly-Ly_p=f-f=0$
Dies bedeutet, daß $y-y_p=y_0$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

5.4.1 Beschreibung der Lösung

Nun wollen wir die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{L}_H$ charakterisieren. Mit Satz ① ergibt sich:

1.) $y_{h_1} \in A(0,1,0)$ existiert:

$y_{h_1} \neq 0$

$y_{h_1}(x_0)=1$
$y'_{h_1}(x_0)=0$

2.) $y_{h_2} \in A(0,0,1)$ existiert:

$y_{h_2} \neq 0$

$y_{h_2}=0$
$y'_{h_2}=1$

Kleiner Satz:

y_1, y_2 seien auf I linear unabhängig. Dann folgt aus $C_1 y_{h_1}(x) + C_2 y_{h_2}(x) = 0$, dass $C_1 = C_2 = 0$ ist.

Beweis:

$C_1 y_{h_1}(x_0) + C_2 y_{h_2}(x_0) = 0 = C_1$

Wir differenzieren:

$C_1 y'_{h_1}(x_0) + C_2 y'_{h_2}(x_0) = 0 = -C_2$

Damit ist die Aussage gezeigt.

Satz ④:

Es sei $\mathcal{L}_H = \{g | y = C_1 y_{h_1} + C_2 y_{h_2}; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig}\}$. $\{y_{h_1}, y_{h_2}\}$ ist Basis.

Beweis:

1.) $C_1 y_{j_1} + C_2 y_{h_2} = \mathcal{L}_H \; \forall \; C_1, \, C_2$

$L\left(C_1 y_{h_1} + C_2 y_{h_2}\right) = C_1 L y_{h_1} + C_2 L y_{h_2} = 0$

2.) $y \in \mathcal{L}_H$. Zu zeigen ist:

$y = \tilde{C}_1 y_{h_1} + \tilde{C}_2 y_{h_2}$ mit passenden $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$

$\tilde{C}_1 = y(x_0), \tilde{C}_2 = y'(x_0)$

$y = y(x_0) y_{h_1} + y'(x_0) y_{h_2} \Rightarrow w(x) = y(x) - y(x_0) y_{h_1}(x) - y'(x_0) y_{h_2}(x) \stackrel{!}{=} 0 \, \forall \, x$

$w \in \mathcal{L}_H; w(x_0) = 0, w'(x_0) = 0$

$w \in A(0,0,0) \Rightarrow w(x) = 0 \, \forall \, x$ (Folgerung aus Satz ①)

Alle Lösungen der homogenen Gleichung hat man, wenn man zwei linear unabhängige Lösungen hat, davon sind alle Linearkombinationen zu bilden; y_{h_1} und y_{h_2} leisten dies beispielsweise.

Jede Basis von $\mathcal{L}_H$ heißt **Fundamentalsystem** von L. Beispielsweise bilden y_{h_1} und y_{h_2} ein Fundamentalsystem von L.

5.4.2 Wronski-Matrix/Wronski-Determinante

Es sei u, $v \in C^1(I)$. Dann nennt man folgende Matrix die Wronski-Matrix von u und v:

$$\left(\mathcal{W}(u,v)\right)(x) = \det \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{pmatrix}$$

Satz:

Es seien u, $v \in C^1(I)$. $\left(\mathcal{W}(u,v)\right)(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$. Dann sind u, v linear unabhängig auf I. Sind u, v linear abhängig auf I, so ist $w(u,v)(x) = 0 \; \forall \; x$.

Beweis:

$C_1 u(x_0) + C_2 v(x_0) = 0 \,\forall\, x \overset{!}{\Rightarrow} C_1 = C_2 = 0$

$C_1 u'(x_0) + C_2 v'(x_0) = 0 \,\forall\, x$

Dies schreiben wir in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'/x_0) & v'(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \text{ (siehe HM II)}$$

Satz ⑥:

Es seien u, $v \in \mathcal{L}_H$ und u, v seien auf I linear unabhängig. Dann gilt $\mathcal{W}(u,v)(x) \neq 0 \;\forall\; x$.

Beispiel:

Betrachten wir folgende Funktionen:

$$u(x) = x^2, v(x) = x|x| \qquad -1 \leq x \leq 1$$

Die Funktionen sind linear unabhängig, wie sich an den Schaubildern erkennen läßt. Dies soll als Übung gezeigt werden durch:

$$\mathcal{W}(u,v)(x) = 0 \,\forall\, x$$

u, v können nicht Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2.Ordnung sein.

Widerspruchsbeweis:

Es gibt ein $x_0 \in I$ mit $\mathcal{W}(u,v)(x_0) = 0$. Dann betrachten das Gleichungssystem für α_1, α_2:

$$\begin{pmatrix} u(x_0) & v(x_0) \\ u'(x_0) & v'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aus $\mathcal{W}(u,v)(x_0) = 0$ folgt:

Beweis:

Es sei u, $v \in \mathcal{L}_H$. Dann folgt:

$$u'' = -pu' - qu$$

$$v'' = -pu' - qv$$

Wir leiten eine Differentialgleichung für die Wronski-Determinante her:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(u,v)'(x) &= \left(uv' - u'v\right)'(x) = u'v' - u'v' + uv'' - u''v = u\left(-pv - qv\right) - v\left(-pu' - qu\right) = \\ &= -p\left(uv' - vu'\right) = -p(x)\mathcal{W}(u,v)(x) \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}(u,v)'(x) = -p(x)\mathcal{W}(u,v)(x)$$

Für die Lösung folgt:

$$\boxed{\mathcal{W}(u,v)(x) = C\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right) = \mathcal{W}(u,v)(x_0)\exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right) \,\forall\, x}$$

5.5 Lösen des Problems $A(f;\alpha,\beta)$

Wir wollen lösen:

$Ly(x) = f(x), x \in I; y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$

Vorbemerkung:

Es seien u, $w \in C^2(I)$.

$L(u \cdot w)(x) = w''(x)u(x) + w'(x)\left(2u'(x) + p(x)u(x)\right) + w(x)Lu(x)$

Hat man $\boldsymbol{u \in \mathcal{L}_H}$ **mit** $\boldsymbol{u \neq 0}$, so gilt $L(u,w)(x) = w''(x)u(x) + w'\left(2u' + p(x)u(x)\right)$.

Satz ⑧:

Es sei $u \in \mathcal{L}_H u \neq 0$. Dann gilt: Ist w allgemeine Lösung von $w''(x) + w'\left(2\dfrac{u'(x)}{u(x)} + p(x)\right) = \dfrac{f(x)}{u(x)}$ (1), so ist $y(x) = u(x)w(x)$ die allgemeine Lösung von $Ly = f$.

(1) ist lineare homogene Gleichung 1.Ordnung für w. Die Ordnung wurde also reduziert. Da $Cu(x)$, $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls $\in \mathcal{L}_H$ ist, heißt dieses Vorgehen auch Variation der Konstanten.

$$\mu(x) = \int_{x_0}^{x} \left(2\frac{u'(t)}{u(t)} + p(t)\right) \mathrm{d}t = \ln \frac{u^2(x)}{u^2(x_0)} + \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{u^2(x)}{u^2(x_0)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Wir multiplizieren Gleichung (1) mit $\mu(x)$:

$$\left(w'(x)\mu(x)\right)' = \mu(x)\frac{f(x)}{u(x)}$$

Durch Integration von x_0 bis x folgt:

$$w'(x)\mu(x) = w'(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mu(t)\frac{f(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$w'(x) = w'(x_0)\frac{}{\mu(x)} + \frac{1}{\mu(x)}\int_{x_0}^{x} \mu(t)\frac{f(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s\, w(x) = w(x_0) + w'(x_0)\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\mu(s)} + \int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{s} \mu(t)\frac{f(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t\right]\frac{1}{\mu(s)}\,\mathrm{d}s$$

Damit folgt:

$$y(x) = u(x) + w(x) = w(x_0)u(x) + w'(x_0)u(x)\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(s)} + u(x)\int_{x_0}^{x}\left[\int_{x_0}^{s} f(t)\frac{\mu(t)}{u(t)}\,\mathrm{d}t\right]\frac{1}{\mu(s)}\,\mathrm{d}s$$

$u(x)$, $u(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(s)}$ sind linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung:

$$\det\begin{pmatrix} u(x) & u(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(s)} \\ u'(x) & u'(x)\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mu(s)} + u(x)\frac{1}{\mu(x)} \end{pmatrix} = u^2(x)\frac{1}{\mu(x)} \neq 0$$

Suche die Linearkombination von $u(x)$ und $u(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(s)}$, die das Problem $A(0,1,0)$ bzw. $A(0,0,1)$, d.h. wie sind $w(x_0)$, $w'(x_0)$ zu wählen? Dann ist $\alpha y_{h_1}+\beta y_{h_2}$ Lösung von $A(0;\alpha,\beta)$.

Beispiele:

$y''-y'\cos(x)+y\sin(x)=\sin(x)$

Die homogene Gleichung lautet:

$y''-y'\cos(x)+y\sin(x)=0$

Gesucht ist eine Lösung $u=u(x)$. Wir machen folgenden Ansatz:

$u(x)=\exp\left(v(x)\right)$

$u'(x)=v'(x)\exp\left(v(x)\right)$

$u''(x)=\left(v'(x)^2+v''(x)\right)\exp\left(v(x)\right)$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$v''(x)+v'(x)^2-v'(x)\cos(x)+\sin(x)=0$

$v''(x)+\sin(x)+v'(x)\left(v'(x)-\cos(x)\right)=0$

$\left(v'-\cos(x)\right)'+v'(x)\left(v'(x)\cos(x)\right)=0$

Wähle $v'=\cos(x)$ und $v=\sin(x)$.

$\boxed{u(x)=\exp\left(\sin(x)\right)}$

Dies ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir wählen nun einen anderen Ansatz. Wir suchen $u\in\mathcal{L}_H$ in der Form $ux)=v(\sin(x))$. Gesucht ist $v=v(t)$ derart, daß $u(x)=v\sin(x)$ Lösung ist.

$u'(x)=\cos(x)v'(\sin(x))$

$u''(x)=\sin(x)v'(\sin(x))+\cos^2(x)v''(\sin(x))$

$\cos^2(x)v''(\sin(x))-\sin(x)v'(\sin(x))-\cos^2(x)v'(\sin(x))+v(\sin(x))\sin(x)=0$

$\left(1-\sin^2(x)\right)v''(\sin(x))-\sin(x)v'(\sin(x))-\left(1-\sin^2(x)\right)v'(\sin(x))+v(\sin(x))\sin(x)=0$

Wir $\sin(x)=t$ folgt:

$\left(1-t^2\right)v''(t)-tv'(t)-\left(1-t^2\right)v'(t)+tv(t)=0$

$\left(1-t^2\right)\left(v''(t)-v'(t)\right)-t\left(v'(t)-v(t)\right)=0$

$\left(1-t^2\right)\left(v'(t)-v(t)\right)'-t\left(v'(t)-v(t)\right)=0$

$v'(t)=v(t)\Rightarrow v(t)=\mathrm{e}^t$

Somit gilt also:

$\boxed{u(x)=\exp\left(\sin(x)\right)}$

Schauen wir uns die inhomogene Gleichung an:

$y''-\underbrace{y'\cos(x)+y\sin(x)}_{-(y\cos(x))'}=\sin(x)$

$(y' - y\cos(x))' = \sin(x)$

Durch Integration folgt:

$y' - y\cos(x) = C_1 - \cos(x)$

Wir multiplizieren mit dem integrierenden Faktor $\exp(-\sin(x))$.

$(y\exp(-\sin(x)))' = C_1\exp(-\sin(x)) - \cos(x)\exp(-\sin(x))$

$$y(x)\exp(-\sin(x)) = C_2 + C_1\int\limits_{x_0}^{x}\exp(-\sin(t))\,\mathrm{d}t + \exp(-\sin(x))$$

$$\boxed{y(x) = C_2\exp(\sin(x)) + C_1\exp(\sin(x))\int\limits_{x_0}^{x}\exp(-\sin(t))\,\mathrm{d}t + \underbrace{1}_{y_p} \qquad C_1, C_2 \text{ beliebig}}$$

Beispiel:

$y''(x) + \left(1 - x^2\right)y(x) = 0$

Ist $y = y(x)$ Lösung, so ist auch $u(x) = y(-x)$ Lösung. Dies soll als Übung gezeigt werden. Es gibt Lösungen, die gerade Funktionen sind und ungerade Funktionen sind. Wir machen folgenden Ansatz:

$u(x) = v(x^2)$

Als Übung wäre dann zu zeigen, daß sich durch diesen Ansatz folgende Differentialgleichung ergibt:

$2t\,(2v' + v)' + (1 - t)\,(2v' + v) = 0$

Ein anderer möglicher Ansatz ist:

$u(x) = \exp(v(x))$

$u''(x) = \left(v''(x) + v'(x)^2\right)\exp(v(x))$

$v''(x) + v'(x)^2 + (1 - x^2) = 0$

Durch Anwendung der dritten binomischen Formel resultiert:

$v''(x) = 1 + (v' - x)(v' + x) = 0$

$(v'(x) + x)' + (v' + x)\,(v' - x) = 0$

Wähle $v'(x) = -x$, wobei dann folgt:

$v(x) = -\dfrac{1}{2}x^2$

Dann folgt die Lösung:

$$\boxed{u(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

Es gibt α_1, α_2 mit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ als Lösungen. Bilde hiermit die Funktion $y = \alpha_1 u + \alpha_2 v$. Da u, $v \in \mathcal{L}_H$, gilt auch $y \in \mathcal{L}_H$.

$y(x_0) = \alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 v(x_0) = 0$

$y'(x_0) = \alpha_1 u'(x_0) + \alpha_2 v'(x_0) = 0$

$y \in A(0, 0, 0) \Rightarrow y(x) = 0\,\forall\, x$

Das heißt also:

$\alpha_1 u(x) + \alpha_2 v(x) = 0$

u, v sind linear abhängig, was ein Widerspruch darstellt.

Satz ⑦:

$u,\, v \in \mathcal{L}_H$. $\mathcal{W}(u,v)(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$. Dann gilt $\mathcal{W}(u,v)(x) \neq 0 \,\forall\, x \in I$.

1.) $u,\, v \in \mathcal{L}_H$ ist linear unabhängig

2.) Variation der Konstanten: $y = C_{1(x)}u + C_{2(x)}v$
$C_1(x)$, $C_2(x)$ so bestimmen, daß $Ly = f$ gilt.

Wird das für $f = 0$ durchgeführt, so erhält man eine zweite von u linear unabhängige Lösung v der homogenen Gleichung:

$$v(x) = u(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\mu(t)}; \mu(t) = u^2(t)$$

$$\mu(t) = u^2(t)\exp\left(\int\limits_{x_0}^{t} p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

$$v(x) = u(x)\int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{u^2(t)}\exp\left(\int\limits_{0}^{t} p(\tau)\,\mathrm{d}t\right)$$

5.6 Potenzreihenansatz

Wir wiederholen das Cauchy-Produkt aus HM I:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_{n-l} b_l\right) x^n$$

Wir wollen uns nun mit folgender Differentialgleichung beschäftigen:

$$\boxed{Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y}$$

Wir nehmen an, daß $p(x)$ und $q(x)$ Potenzreihen sind:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$$

Die Reihen konvergieren innerhalb des gemeinsamen Konvergenzradius:

$|x| < R$

Wenn man sich beispielsweise mit der Schrödinger-Gleichung beschäftigt, erhält man folgende Differentialgleichungen:

- Laguerre-Differentialgleichung:

  $xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$

- Legendre-Differentialgleichung:

  $(1-x^2)y''(x) - 2xy' + n(n+1)y = 0$

- BESSELsche Differentialgleichung:

  $x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y = 0$

- HERMITEsche Differentialgleichung:

  $y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$

Sowohl die LEGENDRE- als auch die BESSELsche Differentialgleichungen treten insbesondere bei kugelsymmetrischen Problemen auf.

$\tilde{L}y = y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y$

$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k, |x| < R$

Gesucht sind Lösungen bei $x = 0$, d.h. für $x > 0$ bzw. $x < 0$. $x = 0$ in der Gleichung oben heißt **Stelle der Bestimmtheit** oder **reguläre singuläre Stelle**.

Beispiel:

Wir betrachten die EULERsche Differentialgleichung:

$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, 0 < x < \alpha$

$y'' + \frac{3}{2}\frac{1}{x}y' - \frac{1}{3x^2}y = 0, p(x) = \frac{3}{2}, q(x) = -\frac{1}{2}$

Wir machen folgenden Ansatz:

$y = x^r, y' = rx^{r-1}, y'' = r(r-1)x^{r-2}$

Durch Einsetzen geht die Differentialgleichung über in:

$2r(r-1) + 3r - 1 = 0$

Durch Auflösen ergibt sich:

$r_1 = +\frac{1}{2}, r_2 = -1$

Damit folgt für die allgemeine Lösung:

$\boxed{y = C_1x^{\frac{1}{2}} + C_2x^{-1} \text{ wobei } C_1, C_2 \text{ beliebige Konstanten sind}}$

Ein anderer Ansatz wird sein:

$$\boxed{y(x,\varrho) = x^{\varrho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}$$

Es handelt sich um einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz (**Methode von Frobenius**).

$Ly = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$

Hier wird als der Ansatz verwendet:

$$\boxed{y(x,\varrho) = x^{\varrho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}$$

$Ly = x^2y'' + \left(p_0x + p_1x^2 + p_2x^3 + \ldots\right)y' + \left(q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots\right)y = 0$

- Regulärer Fall:

  $p_0 = 0, q_0 = q_1 = 0$

  Damit gilt:

  $y''(x) + \text{Potenzreihe} \cdot y' + \text{Potenzreihe} \cdot y = 0$

- Singulärer Fall:

  $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$

$$y(x,\varrho) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\varrho}$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\varrho) x^{k+\varrho-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\varrho)(k+\varrho-1) y^{k+\varrho-2}$$

Mit dem Cauchy-Produkt ergibt sich nun:

$$q(x)y = x^\varrho \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} q_{k-m} c_m\right) x^k$$

$$xp(x)y' = x^\varrho \left(\sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k+\varrho) x^k\right) = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} (m+\varrho) p_{k-m} c_m\right) x^k$$

$$x^2 y'' = x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty} (k+\varrho)(k+\varrho-1) c_k x^k$$

Diese Summen werden in die Differentialgleichung $Ly = x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y$ eingesetzt:

$$x^\varrho \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+\varrho)(k+\varrho-1) c_k + \sum_{m=0}^{k} \left[(m+\varrho) p_{k-m} c_m + q_{k-m} c_m\right]\right] x^k$$

Sie Summanden zu $k = 0$ werden extra geschrieben:

$$x^\varrho \left[\varrho(\varrho-1) c_0 + \varrho p_0 c_0 + q_0 c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+\varrho)(k+\varrho-1) c_k + \sum_{m=0}^{k}\left[(m+\varrho) p_{k-m} c_m + q_{k-m} c_m\right]\right] x^k\right]$$

$$x^\varrho \left[c_0 \left(\varrho(\varrho-1) + \varrho p_0 + q_0\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\left((k+\varrho)(k+\varrho-1) + (k+\varrho)p_0 + q_0\right) c_k + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=0}^{k-1}\left[\left((m+\varrho)p_{k-m} + q_{k-m}\right) c_m\right]\Big) x^k\right]$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$f(\varrho) = \varrho(\varrho-1) + p_0 \varrho + q_0$$

Es handelt sich um das charakteristische Polynom für L. Das Ergebnis lautet mit $y(x,\varrho) = x^\varrho \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$:

$$Ly = x^\varrho c_0 f(\varrho) + x^\varrho \sum_{k=1}^{\infty}\left[f(\varrho+k) c_k + \sum_{m=0}^{k-1}\left[(m+\varrho) p_{k-m} + q_{k-m}\right] c_m\right] x^k$$

Gesucht sind c_0, c_1, … und ϱ derart, daß $Ly = 0$ ist für $x > 0$.

1.) $f(\varrho)c_0 = 0$

2.) $f(\varrho + k)c_k = -\sum\limits_{m=0}^{k-1} \left[(m+\varrho)\, p_{k-m} + q_{k-m}\right] c_m$ mit $k = 1, 2, \ldots$

Es handelt sich hierbei um die Rekursionsformeln für c_k. Falls $f(\varrho + k) \neq 0$ für $k = 1, 2, \ldots$, dann kann man aus (2) alle c_k berechnen, falls c_0 bekannt ist:

$$c_1 = -\frac{1}{f(\varrho+1)} \sum_{m=0}^{0} \left[(m+\varrho)\, p_{1-m} + q_{1-m}\right] c_m = -\frac{1}{f(\varrho+1)} \left(\varrho p_1 + q_1\right) c_0 = \lambda_1(\varrho) c_0$$

$$c_2 = -\frac{1}{f(\varrho+2)} \sum_{m=0}^{1} \left[(m+\varrho)\, p_{2-m} + q_{2-m}\right] c_m = \lambda_2(\varrho) c_0$$

$c_k = \lambda_k(\varrho) c_0$

$\lambda_k(\varrho)$ hängt ab von p_0, p_1, …, p_k, q_0, q_1, …, q_k, ϱ. Damit folgt im Ansatz:

$$y = x^\varrho \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots\right) = c_0 x^\varrho \left(1 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots\right)$$

Es folgt zwingend, daß $c_0 \neq 0$. Damit wählen wir $c_0 = 1$. Aus (1) folgt $f(\varrho) = 0 = \varrho(\varrho - 1) + \varrho p_0 + q_0 = (\varrho^2 - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)$. Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, die man unter anderem auch **determinierende Gleichung** nennt. Wir numerieren die ϱ so, daß $\varrho_1 \geq \varrho_2$. Für komplexe ϱ gilt $\mathrm{Re}\,(\varrho_1) \geq \mathrm{Re}\,(\varrho_2)$. Nun muß gelten:

$$f(\varrho_1 + k) = k(\varrho_1 - \varrho_2 + k) \neq 0\,\forall\, k \in \mathbb{N}$$

$$f(\varrho_2 + k) = k(k - (\varrho_1 - \varrho_2)) \neq 0, \text{ nur falls } \varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$$

- 1.Ergebnis:
  Setze $\varrho = \varrho_1$, dann ist $y_1(x) = x^{\varrho_1} c_0 \left(1 + \lambda_1(\varrho_1)x + \lambda_2(\varrho_1)x^2 + \ldots\right)$ mit $c_0 \neq 0$ eine Lösung zu $Ly = 0$.

  $0 < x < R$

  $-R < x < 0$

- Weiteres Vorgehen:

  1.) Regulärer Fall:

  $q_0 = q_1 = p_0 = 0$

  2.) Singulärer Fall:

  $\varrho_1 - \varrho_2 \notin \mathbb{N}$

  $\varrho_1 - \varrho_2 \in \mathbb{N}$

  $\varrho_1 = \varrho_2$

  Es sind zwei linear unabhängige Lösungen gesucht.