Mitschrieb zu Höhere Mathematik IV: Die Wellengleichung

Dr. Müller-Rettkowski

Vorlesung Sommersemester 2003

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 4. Januar 2005

Mitschrieb der Vorlesung Höhere Mathematik IV
von Herrn Dr. Müller-Rettkowski im Sommersemester 2003
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitende Bemerkungen

1.1 Einfache partielle Differentialgleichungen

Am Anfang stellt sich die Frage, wie man überhaupt definieren kann, was eine Welle ist.

Definition:

Eine Welle ist eine Störung, die sich zeitlich im Raum ausbreitet: $u = u\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$.

Betrachten wir hierzu verschiedene Fälle:

a.) Gesucht sei eine Funktion $u(x,t)$ mit $u_t(x,t) = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
Alle Lösungen lauten hier folgendermaßen:

$$u(x,t) = \varphi(x)$$

φ ist hierbei beliebig.

b.) Gesucht sei eine Funktion $u(x,t)$ mit $u_{xt}(x,t) = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.
Wir wenden unsere obigen Erkenntnisse an:

$$u_x(x,t) = \varphi(x)$$

Durch nochmalige Integration folgt:

$$u(x,t) = \int^{x} \varphi(s)\,\mathrm{d}s + \Psi(t) = \tilde{\varphi}(x) + \Psi(t)$$

φ und Ψ seien beliebig.

Nun kommt die Gleichung, mit der wir uns näher beschäftigen wollen. In Büchern findet man hierzu die Begriffe Wellengleichung, Transportgleichung und Advektionsgleichung. Gesucht ist $u = u(x,t)$ mit $u_t(x,t) - cu_x(x,t) = 0$ mit $c = \text{const.} > 0$. Die Konstante c kann man hierbei als Geschwindigkeit interpretieren.

1.2 Erste Möglichkeit der Lösung

Wir machen den Ansatz in Form einer Separation der Variablen (Separationsansatz, Variablentrennung):

$$\boxed{u(x,t) = f(x)g(t) \neq 0}$$

(Der Fall $u(x,t) = 0$ ist trivial.) Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich hierbei:

$$f(x)\dot{g}(t) - cf'(x)g(t) = 0$$

Wir dividieren durch $f(x) \cdot g(t) \neq 0$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{c}\frac{\dot{g}(t)}{g(t)}$$

Diese Gleichung muß nun für alle (x,t) gelten. Dies kann nur dann der Fall sein, wenn beide Seiten konstant sind:

$$\boxed{\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{c}\frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = \lambda}$$

Wir bekommen also folgende Differentialgleichungen:

$f'(x) = \lambda f(x)$ und $g(t) = \lambda c g(t)$

Die Lösungen dieser linearen Differentialgleichungen 1.Ordnung sind:

$f(x) = \exp(\lambda x)$ und $g(t) = \exp(\lambda c t)$

Durch Multiplikation der Einzellösungen ergibt sich:

$$\boxed{u(x,t) = f(x)g(t) = \exp(\lambda(x+ct)) \text{ mit } \lambda = \text{const.}}$$

Übung:

Versuche die Gleichung mit einem Summenansatz zu lösen:

$$\boxed{u(x,t) = f(x) + g(t)}$$

Als Lösung erhält man dann:

$$\boxed{u(x,t) = \lambda(x+ct) \text{ mit } \lambda = \text{const.}}$$

Sätzchen:

Ist $z = w(x,y)$ Lösung der Gleichung $a(x,y)z_x + b(x,y)z_y = 0$, so ist auch $z = \varphi(w(x,y))$ Lösung für jede differenzierbare Funktion φ.

Beweis:

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$a(x,y) \cdot \varphi'(w(x,y))w_x + b(x,y)\varphi'(w(x,y))w_y = 0$

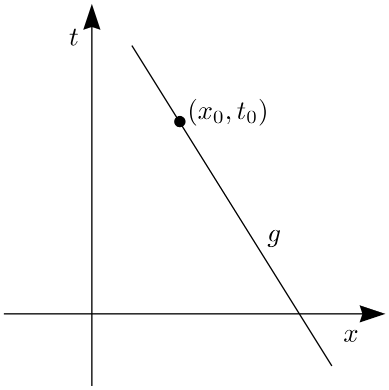
Klammert man $\varphi'(w(x,y))$ aus, so ist die Lösung ersichtlich.

Lemma:

Gilt für $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $u_t - cu_x = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ mit $u(x,0) = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$, dann ist $u(x,t) = 0$ $\forall$ $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Es handelt sich um eine Eindeutigkeitsaussage.

Beweis:



$$\vec{y}(s) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sei $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$, $t_0 \neq 0$. Zu zeigen ist dann $u(x_0, t_0) = 0$

$$u_{(g)} = u(x_0 - cs, t_0 + s) = z(s)$$

$$z'(s) = -cu_x(x_0 - cs, t_0 + s) + u_t(x_0 - cs, t_0 + s) = 0$$

$$z(s) = \text{const.} = z(0) = u(x_0, t_0) = z(-t_0) = u(x_0 + ct_0) = 0$$

Satz ①:

Wir betrachten:

$$\boxed{u_t(x,t) - cu_x(x,t) = 0} \qquad (\star)$$

Es gibt differenzierbare Lösungen der Form $u(x,t) = \varphi\,(x + ct)$ mit beliebigem φ. Alle C^1-Lösungen der Gleichung $(\star)$ erhält man in der Form $u(x,t) = \varphi\,(x + ct)$ mit einer beliebigen C^1-Funktion $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

Beweis:

i.) $u(x,t) = \varphi(x + ct)$ ist eine Lösung von $(\star)$. Dies wurde schon gezeigt (siehe Separationsansätze und Lemma).

ii.) Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Lösung unserer Gleichung $(\star)$. Es ist dann zu zeigen, daß es ein $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ gibt mit $u(x,t) = \varphi\,(x + ct)$. (Wenn u also schon Lösung der Gleichung ist, dann muß es sich in der gleichen Form darstellen lassen.) Definiere $\varphi(\tau) := u(\tau, 0)$. Nachzurechnen ist nun:

$$u(x,t) = \varphi\,(x + ct) = u(x + ct, 0)$$

Wir betrachten hierzu $v(x,t) = u(x,t) - u(x + ct, 0)$. (Wenn Satz ① korrekt ist, dann muß immer $v = 0$ sein $\forall\ (x,t)$.) Durch Differentiation folgt:

$$v_t = u_t - cu_x\,(x + ct, 0)$$

$$cv_x = cu_x - cu_x\,(x + ct, 0)$$

1.) $v_t - cv_x = u_t - cu_x = 0$

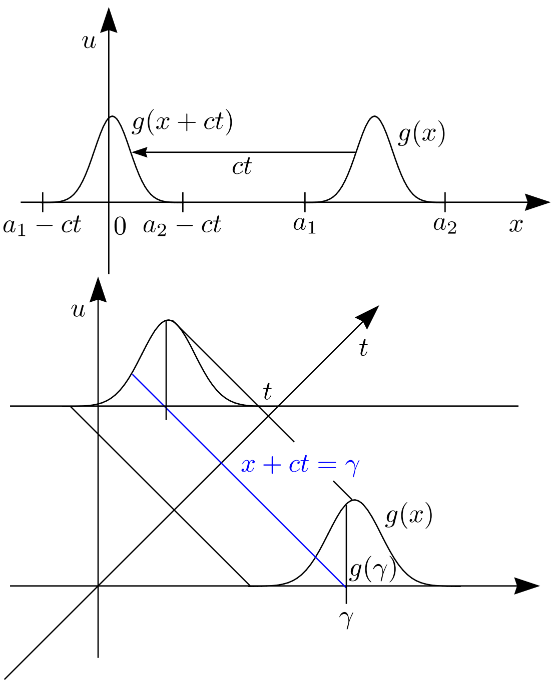
2.) $v(x, 0) = 0$

v erfüllt daher die Voraussetzungen des Lemmas. Damit gilt $v(x,t) = 0$.

1.2.1 Lösung eines Anfangswertproblems

Wir wollen nun folgendes Anfangswertproblem lösen:

$\underbrace{u_t - cu_x}_{\substack{u(x,t)= \\ g(x+ct)}} = 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $u(x,0) = g(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$



Durch $u_t(x,t) - cu_x(x,t) = 0$ wird eine sich nach links mit der Geschwindigkeit c unverzerrt ausbreitende Störung „beschrieben“(Welle). Beachte dazu Blatt 1, Aufgabe 4: Lösung der Differentialgleichung $u_t(x,t) + c(x,t)u_x(x,t) = 0$ mit $u(x,0) = f(x)$.

1.3 Lösungsmöglichkeiten der inhomogenen Wellengleichung

Wir betrachten nun die inhomogene Wellengleichung $u_t(x,t) - cu_x(x,t) = f(x,t)$ mit $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ und $u(x,0) = g(x)$. Die Funktion u sei Lösung. Wir betrachten $z(s) = u(x - cs, t + s)$ und $z(0) = u(x,t)$. Weiterhin gilt $z(-t) = g(x + ct) = u(x + ct, 0)$. Wir differenzieren dies nach s:

$$z'(s) = u_t\left(x - cs, t + s\right) - cu_x\left(x - cs, t + s\right) = f(x - cs, t + s)$$

Durch Integration erhalten wir dann:

$$z(0) - z(-t) = u(x,t) - g(x + ct) = \int\limits_{-t}^{0} z'(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{-t}^{0} f(x - cs, t + s)\,\mathrm{d}s$$

Damit folgt durch die Substitution $s \mapsto \sigma = t + s$:

$$\boxed{u(x,t) = \underbrace{g\left(x + ct\right)}_{\substack{\text{Alle Lösungen} \\ \text{der homogenen} \\ \text{Gleichung}}} + \underbrace{\int\limits_{0}^{t} f\left(x - c\left(\sigma - t\right), \sigma\right)\,\mathrm{d}\sigma}_{\substack{\text{Spezielle Lösung } p(x,t) \\ \text{der inhomogenen Gleichung}}} \text{ mit } p(x,0) = 0}$$

Wir machen die Probe:

$$u_x = g'(x+ct) + \int\limits_0^t f_x\left(x + c\left(t - s\right), s\right)\,\mathrm{d}s$$

$$cu_x = cg'(x+ct) + c\int\limits_0^t f_x\left(x + c\left(t - s\right), s\right)\,\mathrm{d}s$$

$$u_t = cg'(x+ct) + f(x,t) + c\int\limits_0^t f_x\left(x + c\left(t - s\right), s\right) \text{ (Differentiation von Parameterintegralen)}$$

Durch Subtraktion folgt dann:

$$\boxed{u_t - cu_x = f(x,t)}$$

Wir formulieren außerdem das Problem $P(f,g)$, das gegeben ist durch:

$$\boxed{P(f,g) = \begin{cases} u_t(x,t) - cu_x(x,t) = f(x,t) \\ \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}}$$

$P(f,g)$ ist nur **linear**, wenn aus der Tatsache, daß u_1 das Problem $P(f_1,g_1)$ löst, folgt, daß auch u_2 das Problem $P(f_2,g_2)$ löst. Oder anders formuliert: $\alpha u_1 + \beta u_2$ löst das Problem $P(\alpha f_1 + \beta f_2, \alpha g_1 + \beta g_2)$ mit α, $\beta \in \mathbb{R}$. Man nennt dies auch das **Superpositionsprinzip**. Betrachten wir nun also unsere Gesamtlösung:

- $u_1(x,t) = g(x+ct)$ löst $P(0,g)$.
  Es handelt sich also um die homogene Lösung.
- $u_2(x,t) = \int\limits_0^t f(x + c(t-s), s)\,\mathrm{d}s$ löst $P(f,0)$.
  Wir haben hier die inhomogene Lösung.

Wir notieren uns nochmal das wichtige Lemma von vorher:

> Löst u das Problem $P(0,0)$, dann gilt $u = 0$.

Folgerung:

Lösen u_1, u_2 das Problem $P(f,g)$, dann gilt $u_1 = u_2$. Dies folgt aus dem Lemma, da $u_1 - u_2$ das Problem $P(0,0)$ löst. $P(f,g)$ ist infolgedessen **eindeutig lösbar**.
Notieren wir uns nun nochmal die Lösung von $P(f,g)$:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t f(x + c(t-s), s)\,\mathrm{d}s + g(x+ct)$$

Die Lösung hängt stetig ab von f und g.Es sei u_n Lösung von $P(f_n,g_n)$. Gilt $f_n \mapsto f$ für $n \mapsto \infty$ und $g_n \mapsto g$ für $n \mapsto \infty$, so hat man mit $u_n \mapsto u$ die Lösung von $P(f,g)$.

Beispiel:

Wir betrachten folgende partielle Differentialgleichung:

$$u_t + u_x = xt$$

In diesem Falle gilt $c = -1$ und $f(x,t) = xt$.

Beispiel:

$u_t - cu_x = v(x+ct)$

Hier gilt also $f(x,t) = v(x+ct)$. Die Störfunktion ist also gerade eine homogene Lösung. Damit folgt:

$f(x + c\,(t-s)\,, s) = v(x + c(t-s) + cs) = v(x+ct)$

Wir erhalten dann folgende inhomogene Lösung:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x+ct)\,\mathrm{d}s = t \cdot v(x+ct)$$

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen hatten wir eine ähnliche Lösung.

Beispiel:

$u_t - cu_x = v\,(x-ct)$

$$u(x,t) = \int\limits_0^t v(x+ct-2sc)\,\mathrm{d}s$$

Wir führen die Variable τ ein über $\tau = x + ct - 2sc$. Dann gilt außerdem $\mathrm{d}s = -\frac{1}{2c}\,\mathrm{d}\tau$, womit sich ergibt:

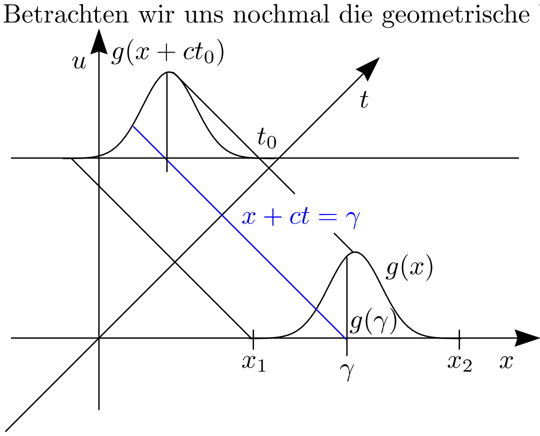
$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

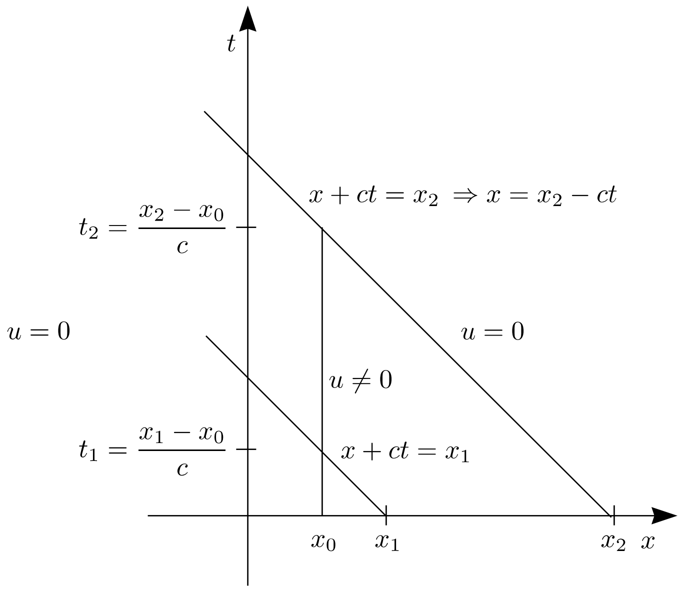
Analog gilt für folgendes Problem:

$u_t + cu_x = v(x+ct)$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

Betrachten wir uns nochmal die geometrische Veranschaulichung:





1.4 Wellengleichung

Wir betrachten folgende inhomogene lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

$$\boxed{u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t) \text{ mit } (x,t) \in \mathbb{R}^2} \qquad (1)$$

$f(x,t)$ kann man immer als Wirkung von außen, die auf das System wirkt, interpretieren. Hat u die Einheit cm und t die Einheit s, so könne wir c als Geschwindigkeit interpretieren.

- 1.Möglichkeit:

  Wir bezeichnen im folgenden die erste partielle Ableitung nach t mit ∂_t und die erste partielle Ableitung nach x mit ∂_x. Damit gilt also:

  $$\partial_t^2 u(x,t) - c^2 \partial_x^2 u(x,t) = \left(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2\right) u(x,t) = (\partial_t - c\partial_x) \underbrace{(\partial_t + c\partial_x)\, u(x,t)}_{v(x,t)} = f(x,t)$$

  Die partielle Differentialgleichung zerfällt somit in zwei verschiedene Differentialgleichungen 1.Ordnung:

  1.) $v_t - cv_x = f(x,t)$
  Hieraus können wir v mit Satz ② berechnen.

  2.) $u_t + cu_x = v(x,t)$
  Aus dieser Gleichung folgt dann u mit Satz ②.

  Damit gilt also:

  $$\boxed{u_t(x,t) + cu_x(x,t) = \underbrace{\int_0^t f(x + c(t-s), s)\, \mathrm{d}s + \varphi(x + ct)}_{\tilde{f}(x,t)} \text{ mit beliebigem } \varphi}$$

  Mit Satz ② kann dann die Lösung $u(x,t)$ hingeschrieben werden. Als Übungsvorschlag kann man folgende Gleichung so behandeln:

  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = xt$

- 2.Möglichkeit: Koordinatentransformation, Herleitung wie mit d'Alembert

  Unser Vorgehen ist folgendermaßen: Wir zerlegen das Problem in P_1 und P_2. Aus P_1 resultieren dann alle Lösungen der homogenen Gleichung:

  $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

  Mit P_2 bestimmen wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung:

  $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

  Durch Addition folgt dann die gesamte Lösung. Mit der vorherigen Zerlegung ergibt sich:

  $$(\partial_t - c\partial_x)\underbrace{(\partial_t + c\partial_x)\,u}_{v} = 0$$

  $$u_t - cu_x = v(x,t)$$

  $$v_t + cv_x = 0$$

  Aus der zweiten Gleichung erhalten wir mit Satz ①:

  $$v(x,t) = \varphi\,(x+ct)$$

  Durch Einsetzen in die erste Gleichung ergibt sich:

  $$u_t + cu_x = \varphi\,(x+ct)$$

  Mit dem Beispiel von vorher folgend dann alle Lösungen (da man immer eine homogene Lösung dazuaddieren kann):

  $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \Psi(x-ct) \text{ mit beliebigem } \varphi,\, \Psi}$$

  Wir können die Funktion umschreiben, indem wir das Integral auseinanderziehen:

  $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{x+ct} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2c}\int\limits_{0}^{x-ct} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \Psi(x-ct)}$$

Satz ③:

Jede Lösung der Gleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ erhält man in der Form $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, wobei F, G beliebige C^2-Funktionen sind. (Lösung durch Koordinatentransformation $\xi = x+ct$, $\tau = x-ct$)

(Siehe auch Blatt 1, Aufgabe 1)

Beispiel:

Es soll folgendes Anfangswertproblem gelöst werden:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \text{ mit } (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0$$

$$u(x,0) = g(x),\ u_t(x,0) = h(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R}$$

Die Differentialgleichung ist invariant gegen die Transformation $t \mapsto -t$. Wir notieren uns nochmal:

1.) $v(x,t) = \varphi(x+ct)$

2.) $u_t(x,t) + cu_x(x,t) = \varphi(x+ct)$

Bestimme φ und Ψ, so daß die Anfangsbedingungen erfüllt sind. Widmen wir uns der ersten Bedingung:

$u(x,0) = g(x) = \Psi(x)$

Durch Einsetzen von $t = 0$ in die zweite Gleichung erhalten wir:

$h(x) + cg'(x) = \varphi(x)$

Dann ergibt sich mit der Lösungsformel:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} (h(\tau) + cg(\tau))\,\mathrm{d}\tau + g(x-ct)$$

Damit folgt dann noch durch eine kleine Umformung die D'ALEMBERTsche Formel:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right)}$$

Das ganze wird zum Schluß noch als Satz formuliert.

Satz ④:

Es seien $g \in C^2$ und $h \in C^1$, dann gelten für

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\left(g(x+ct) + g(x-ct)\right)$$

die Gleichungen:

1.) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ mit $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

2.) $u(x,0) = g(x)$, $u_t(x,0) = h(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

Dieser Satz kann durch Einsetzen der Lösungsformel in die Wellengleichung bewiesen werden. $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ kann außerdem leicht in diese Form überführt werden (Blatt 1, Aufgabe 2).

Übung:

1.) Führe die Probe durch!

2.) Interpretiere anschaulich die folgenden Fälle:

   a.) $h = 0$, $g(x) \neq 0$ für $x_1 \leq x \leq x_2$

   b.) $h(x) \neq 0$ für $x_1 \leq x \leq x_2$, $g(x) = 0$

Wir betrachten nochmals:

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \qquad (\star)$$

Wir können eine Lösung $\tilde{u}(x,t)$ von $(\star)$ sofort angeben:

$$\boxed{\tilde{u}(x,t) = a_1 x + a_2 t}$$

Diese Funktion ist uns aber zu trivial. Wir verwenden daher den Ansatz:

$$\boxed{u(x,t) = \phi(a_1 x + a_2 t)}$$

Wir leiten dies ab:

$u_{xx} = a_1^2 \phi''(a_1 x + a_2 t)$

$u_{tt} = a_2^2 \phi''(a_1 x + a_2 t)$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir dann:

$\left[a_2^2 - c^2 a_1^2\right] \phi''(a_1 x + a_2 t) = 0$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

- $\phi''(a_1 x + a_2 t) = 0$

  Diese Lösung liefert uns nichts neues.

- $a_2^2 - c^2 a_1^2 = 0$

  Dies liefert uns folgende Beziehung:

  $\frac{a_2^2}{a_1^2} = c^2$

  Mit $a_1 = 1$ erhalten wir $a_2 = \pm c$.

Daher erhalten wir

$u(x,t) = \phi(a_1 x + a_2 t) = \boxed{\phi(x \pm ct)}$

Wir bekommen also das Ergebnis, welches wir früher schon auf anderem Wege erhalten haben.

Geometrische Interpretation:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,\mathrm{d}s$$

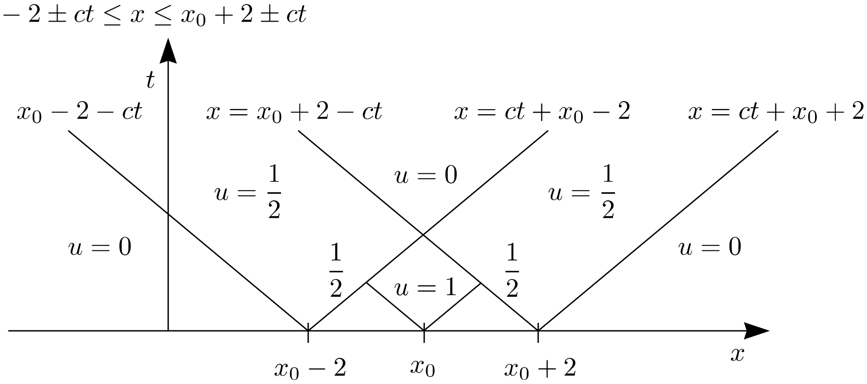
Wir betrachten den Fall für $h = 0$ und $g \neq 0$ auf einem kleinen Intervall auf der x-Achse. Als konkretes Beispiel nehmen wir:

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x - x_0| \leq 2 \\ 0 & \text{für} \quad |x - x_0| > 2 \end{cases}$$

Also gilt:

$x_0 - 2 \leq x + ct \leq x_0 + 2$

$x_0 - 2 \pm ct \leq x \leq x_0 + 2 \pm ct$



Spezielle Lösung:

Wir betrachten:

$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$

1.4.1 Methode von Duhamel

Wir führen damit auf viele Probleme des vorhergehenden Typs zurück. $s \geq 0$ sei fest. Wir betrachten nun folgendes Problem:

$$\boxed{v_{tt}(x,t) - c^2 v_{xx}(x,t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{v(x,s) = 0,\ v_t(x,s) = f(x,s) \text{ für } x \in \mathbb{R} \qquad (\star)}$$

Wir müssen dieses Problem auf die Zeit $t = 0$ transformieren, damit wir die D'ALEMBERTsche Formel anwenden können. $v = v(x,t)$ sei Lösung von $(\star)$. Dann ist $w(x,t) := v(x,t+s)$ Lösung folgenden Problems:

$w_{tt}(x,t) - c^2 w_{xx}(x,t) = 0$ für $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$

$w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = f(x,s)$ für $x \in \mathbb{R} \qquad (\star\star)$

Ist $w = w(x,t)$ Lösung von $(\star\star)$, so ist $v(x,t) := w(x,t-s)$ Lösung von $(\star)$. Damit gilt:

$$w(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} h(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi$$

Damit erhalten wir als Lösung von $(\star)$ für $t \geq s \geq 0$:

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi = u(x,t;s)}$$

Wir nennen diese Lösung im folgenden $u(x,t;s)$.

Satz ⑤:

Es sei folgendes Problem $(\star\star\star)$ gegeben:

$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$
$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$

Dann ist $u(x,t)$ eine Lösung dieses Problems:

$$\boxed{u(x,t) := \int\limits_0^t u(x,t;s)\,\mathrm{d}s \text{ für } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0 \text{ mit } u(x,t;s) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi}$$

Beweis:

Es gilt trivialerweise $u(x,0)=0$. Durch einmaliges Differenzieren folgt:

$$u_t(x,t)=u(x,t;t)+\int\limits_0^t u_t(x,t;s)\,\mathrm{d}s$$

Wir differenzieren zum zweiten mal:

$$u_{tt}(x,t)=u_t(x,t;t)+\int\limits_0^t u_{tt}(x,t;s)\,\mathrm{d}s$$

$u_t(x,0)=0$

Nach der Voraussetzung ergibt sich weiter:

$$u_{tt}(x,t)=f(x,t)+\int\limits_0^t u_{tt}(x,t;s)\,\mathrm{d}s$$

$$c^2u_{xx}(x,t)=c^2\int\limits_0^t u_{xx}(x,t;s)\,\mathrm{d}s$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\boxed{f(x,t)+\int\limits_0^t\left[u_{tt}(x,t;s)-c^2u_{xx}(x,t;s)\right]\,\mathrm{d}s=0}$$

Es kann außerdem gezeigt werden, daß dies die Lösung des inhomogenen Problems darstellt:

$$\boxed{u(x,t):=\int\limits_0^t u(x,t;s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2c}\int\limits_0^t\int\limits_{\xi=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s}$$

Wir machen nun die Substitution $s\mapsto\sigma=t-s$, womit gilt:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2c}\int\limits_0^t\int\limits_{\xi=x-c\sigma}^{x+c\sigma} f(\xi,t-\sigma)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma}$$

Dies ist die Lösung des Problems:

$u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)$ für $x\in\mathbb{R}$, $t>0$

$u(x,0)=u_t(x,0)=0$ für $x\in\mathbb{R}$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)+\int\limits_{s=0}^t u(x,t;s)\,\mathrm{d}s$$

Übung:

Es sei $f(x,t) = xt$. Dann ist eine Lösung des Problems gegeben durch:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{6}xt^3}$$

Übung:

Nach gleicher Methode kann auch $u_t - cu_x = f(x,t)$ mit $u(x,0) = 0$ gelöst werden (siehe Blatt 2, Aufgabe 2).

1.5 Bemerkungen zu „Wellen“

Wir betrachten im folgenden physikalische Probleme, die auf Gleichungen der Art vorher führen. x, y, $z := \vec{r}$ seien nun räumliche Variable. $t \in \mathbb{R}$ stellt die Zeitvariable dar. Wir betrachten also $u = u(\vec{r},t)$. Die n-dimensionale ($n = 1, 2, 3$) Wellengleichung ist:

$$\boxed{\Box_n u(\vec{r},t) = u_{tt}(\vec{r},t) - c^2 \triangle_n u(\vec{r},t) = 0 \text{ mit } \triangle = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}}$$

Wir wollen jetzt auch Lösungen der dreidimensionalen Wellengleichung angegeben:

$$u_{tt}(\vec{r},t) - c^2\left[u_{xx}(\vec{r},t) + u_{yy}(\vec{r},t) + u_{zz}(\vec{r},t)\right] = 0$$

Es gelte folgender Ansatz:

$$u(\vec{r},t) = a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = \vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t \text{ mit } \vec{a} \in \mathbb{R}^3$$

$$u(\vec{r},t) = \phi\left(\vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t\right)$$

Dies leiten wir ab:

$$u_{tt} = a_4^2\phi''(\vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t)$$

$$\vec{\nabla}u = \vec{a}\phi'(\vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t)$$

$$\triangle u = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}u = \vec{a}\cdot\vec{a}\phi''(\vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir:

$$\Box u = \left(a_4^2 - c^2\|\vec{a}\|^2\right)\phi''\left(\vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t\right) = 0$$

Wir bekommen also folgende Bedingung:

$$\boxed{c^2 = \frac{a_4^2}{\|\vec{a}\|^2}}$$

Das Ergebnis bisher lautet:

Für jedes $\phi \in C^2$ ist durch $u(\vec{r},t) = \phi(\vec{a}\cdot\vec{r} + a_4t)$ mit $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $a_4 \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $\Box u = 0$ gegeben, falls gilt:

$$\boxed{c^2 = \frac{a_4^2}{\|\vec{a}\|^2}}$$

Diese Bedingung wird nun wie folgt erfüllt:

$$\vec{a} = \vec{n},\ \|\vec{n}\| = 1 \Rightarrow a_4 = \pm c$$

Damit erhält man:

$$u_1(\vec{r},t) = F\left(\vec{n}\cdot\vec{r} + ct\right)$$

$$u_2(\vec{r},t) = G\left(\vec{n}\cdot\vec{r} - ct\right)$$

$u(\vec{r},t) = F(\vec{n}\cdot\vec{r}+ct) + G(\vec{n}\cdot\vec{r}-ct)$ sind für beliebige C^2-Funktionen Lösungen von $\Box u(\vec{r},t) = 0$ mit $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ und $t \geq c$. $\varphi(\vec{r},t) = \vec{n}\cdot\vec{r} \pm ct$ heißt **Phasenfunktion** von u_1, u_2. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle ausbreitet, nennen wir **Phasengeschwindigkeit**.
Es sei $t = t_0$ fest und $\gamma \in \mathbb{R}$: Dann wird durch $\vec{n}\cdot\vec{r} \pm ct_0 = \gamma$ eine Ebene beschrieben mit Normalenvektor $\vec{n}$. Deswegen heißen $u_1(\vec{r},t)$ und $u_2(\vec{r},t)$ **ebene Wellen**. Bestimmte ebene Wellen sind **harmonische Wellen**. Für $n = 1$ (Dimension) gilt:

$$u(x,t) = \sin\left(x - ct\right)$$

Um das Argument innerhalb des Sinus dimensionslos zu machen, schreiben wir die sogenannte Wellenzahl k vor das Argument:

$$u(x,t) = \sin\left[k\left(x - ct\right)\right]$$

Mit der Amplitude u_0 erhalten wir dann:

$$\boxed{u(x,t) = u_0 \sin\left[k\left(x - ct\right)\right]}$$

Außerdem sind folgende Begriffe wichtig:

- <u>Wellenlänge λ:</u>

  $$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- <u>Schwingungsdauer T:</u>

  $$T = \frac{2\pi}{kc}$$

Damit gilt nun:

$$kc = \omega,\ \frac{1}{T} = \nu$$

$$u(x,t) = u_0 \sin\left(kx - kct\right) = u_0 \sin\left(kx - \omega t\right) = u_0 \sin\left[\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right] = u_0 \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

Man kann die Welle auch komplex schreiben:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(kx - \omega t\right)\right]$$

Physikalische Interpretationen finden sich dann in Real- und Imaginärteil. In drei Dimensionen gilt nun:

$$u(\vec{r},t) = u_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(k\vec{n}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right]$$

$k\vec{n} = \vec{k}$ bezeichnet man auch als **Wellenvektor** (englisch: propagation vector). Der Betrag dieses Vektors ist dann gerade die Wellenzahl.
Nun führen wir weitere Bezeichnungen ein. Es sei folgendes Vektorfeld $\vec{A}$ gegeben:

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} A_1(\vec{r},t) \\ A_2(\vec{r},t) \\ A_3(\vec{r},t) \end{pmatrix}$$

Hier gelten dann folgende Kurzschreibweisen:

$$\vec{A}_{tt} = \begin{pmatrix} A_{1_{tt}} \\ A_{2_{tt}} \\ A_{3_{tt}} \end{pmatrix}, \triangle \vec{A} = \begin{pmatrix} \triangle A_1 \\ \triangle A_2 \\ \triangle A_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}_{tt} - c^2 \triangle \vec{A} = 0$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{F}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \vec{A}_0 F\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t\right)$$

$\vec{A}$ heißt **longitudinal**, falls $\vec{A}(\vec{r}, t) \times \vec{k} = \vec{o} \,\forall\, \vec{r}, t$ (parallel zueinander). $\vec{A}$ heißt **transversal**, falls $\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{k} = 0$ $\forall\, \vec{r}, t$ (senkrecht zueinander) gilt.

1.6 Kugelwellen

Wir betrachten nun im folgenden räumlich anschwellende (abfallende) Kugelwellen. Wir nehmen dazu an, daß wir eine Lösung $u = u(\vec{r}, t)$ mit $u_{tt}(\vec{r}, t) - c^2 \triangle u(\vec{r}, t) = 0$ haben, die nur von $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt. Es gelte nun $u(\vec{r}, t) =: v(r, t)$. Welcher Gleichung genügt dann v? Wir transformieren dazu die ursprüngliche Gleichung in Kugelkoordinaten, so daß der Winkelanteil herausfällt.

$$u(x, y, z, t) = v\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t\right)$$

Durch Differentiation folgt dann:

$$u_x = v_r \cdot r_x,\ u_{xx} = v_{rr} r_x^2 + v_r r_{xx}$$

In mehreren Dimensionen gilt:

$$\boxed{\triangle u = v_{rr} \|\vec{\nabla} r\|^2 + v_r \triangle r}$$

Weiterhin gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}, \|\vec{\nabla} r\| = 1}$$

$$\triangle r = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} r = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Wir erinnern uns an dieser Stelle:

$$\vec{\nabla} \cdot (f(r) \vec{g}(r)) = \vec{\nabla} f(r) \cdot \vec{g}(r) + f(r) \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(r)$$

Angewendet auf unsere Rechnung folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{r} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \vec{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right) \frac{\vec{r}}{r} + \frac{3}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}$$

Somit gilt:

$$\boxed{v_{tt}(r, t) - c^2 \left(v_{rr} + \frac{2}{r} v_r\right) = 0}$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} v_r = \frac{1}{r}\left(r v_{rr} + v_r + v_r\right) = \frac{1}{r}\left[(r v_r)_r + v_r\right] = \frac{1}{r}\left(r v_r + v\right)_r = \frac{1}{r}\left[(r v)_r\right]_r = \frac{1}{r}(r v)_{rr}$$

Damit folgt für unsere Gleichung:

$$\boxed{rv_{tt} - c^2(rv)_{rr} = 0}$$

$(rv)_{tt} - c^2(rv)_{rr} = 0$

Es handelt sich genau um unsere eindimensionale Wellengleichung, deren Lösung wir sofort angeben können:

$rv(r,t) = \phi(r+ct) + \Psi(r-ct)$ mit beliebigem ϕ, Ψ

Man nennt also folgendes eine **Kugelwelle**:

$$\boxed{v(r,t) = \frac{1}{r}\phi(r+ct) + \frac{1}{r}\Psi(r-ct)}$$

1.6.1 Stehende Wellen

Es handelt sich hierbei um Lösungen der Wellengleichung $u_{tt} - c^2\triangle u = 0$ folgender Form:

$$\boxed{u(\vec{r},t) = f(\vec{r})g(t)}$$

Die Variablen sind also gerade separiert. Wir haben also eine feste Form, während die Amplitude von der Zeit abhängt. Nullstellen von f heißen **Knoten**.

Beispiel:

Wir betrachten:

$u_{tt} - u_{xx} = 0$

Eine mögliche Lösung ist:

$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) + \sin(x-t)\right) = \sin(x)\cos(t)$

Die Knoten sind gerade die Nullstellen der Sinusfunktion:

$x_k = k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$

1.7 Zylinderwellen

Dieselbe Rechnung wie vorher liefert (mit $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2+y^2}$):

$\triangle u = v_{rr} + v_r\triangle r$

Schauen wir uns nochmals $\triangle r$ an:

$\triangle r = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \vec{r} \cdot \left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{r} \cdot 2 = \frac{1}{r}$

Damit folgt wieder für die Gleichung:

$$\boxed{v_{tt} = c^2\left(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r\right)}$$

Es handelt sich um die **Zylinderwellengleichung**. Gesucht sind Lösungen der Form, daß die Zeitabhängigkeit harmonisch ist:

$$\boxed{v(\vec{r},t) = f(r)\exp(\mathrm{i}\omega t)}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$-\omega^2 f(r)\exp(\mathrm{i}\omega t) = c^2\exp(\mathrm{i}\omega t)\left[f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)\right]$$

$$-\omega^2 f(r) = c^2\left[f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)\right]$$

Dann erhalten wir:

$$\boxed{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \frac{\omega^2}{c^2}f(r) = 0} \text{ für } r > 0$$

Für gewisse Parameter handelt es sich um eine BESSELsche Differentialgleichung. Diese kann man mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz lösen (siehe HM III). Gesucht sind Lösungen der Form:

$$\boxed{v(r,t) = f(r)\exp(\mathrm{i}\omega t)}$$

$u(x,y,t) = \exp\left[\mathrm{i}\left(k\vec{n}\cdot\vec{r} + \omega t\right)\right]$

Wir wählen $\vec{n}$ folgendermaßen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \text{ mit beliebigem } \vartheta$$

$u(x,y,t) = \exp\left[\mathrm{i}k\left(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta\right)\right]\exp(\mathrm{i}\omega t)$

Führe in der (x,y)-Ebene nun Polarkoordinaten (r,φ) ein:

$$u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, t) = \tilde{v}(r,\varphi,t) = \exp\left(\mathrm{i}rk\cos(\vartheta-\varphi)\right)\exp(\mathrm{i}\omega t)$$

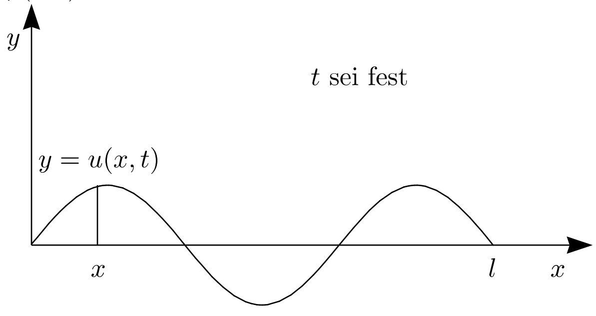
$$v(r,t) = \exp(\mathrm{i}\omega t)\underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\exp\left(\mathrm{i}rk\cos(\vartheta-\varphi)\right)\,\mathrm{d}\vartheta}_{f(r)}$$

Dies ist eine Lösung der BESSELschen Differentialgleichung. Dieses Integral hängt nicht von φ ab. (Man beachte das Additionstheorem $\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi = \cos(\vartheta-\varphi)$.)

1.8 Beispiele aus der Physik

1.8.1 Die schwingende Saite

$u(x,t)$ bezeichnet die Auslenkung aus der Ruhelage a der Stelle x zur Zeit t. $\varrho(x)$ sei die Dichte der Saite. $\varphi(x,t)$ sei die Dichte der Kraft, die von außen vertikal auf die Stelle zur Zeit t wirkt.



$u(0,t) = 0 = u(l,t)\,\forall\, t$

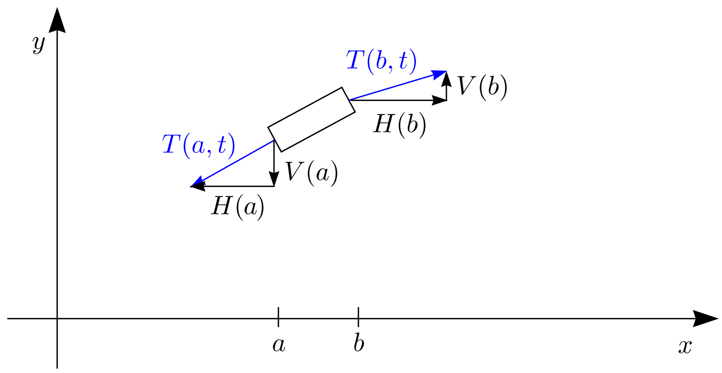
Gegeben sei $u(x,0)$. Gesucht sei dann $u(x,t)$:

$$\vec{T}(x,t) = \begin{pmatrix} H(x,t) \\ V(x,t) \end{pmatrix}$$

$\vec{T}$ sei die Kraft an der Stelle x zur Zeit t, die von der Spannung herrührt. Die andere Kraft wirkt **tangential**. Die Tangentenrichtung $\tau(x,t)$ sei gegeben durch:

$$\tau(x,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ u_x(x,t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(x,t) \times \tau(x,t) = \vec{o} \Rightarrow V(x,t) = H(x,t)u_x(x.t)$$



$\varphi(x,t)$ sei die Kraftdichte und $\varrho(x)$ die Massendichte der Saite.

$H(a,t) = H(b,t) = H = \text{const.}$

Die Kraft auf die Saite ergibt sich nun zu:

$$H\left(u_x(b,t) - u_x(a,t)\right) + \int_a^b \varphi(x,t)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Newton}}{=} \int_a^b \varrho u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}x$$

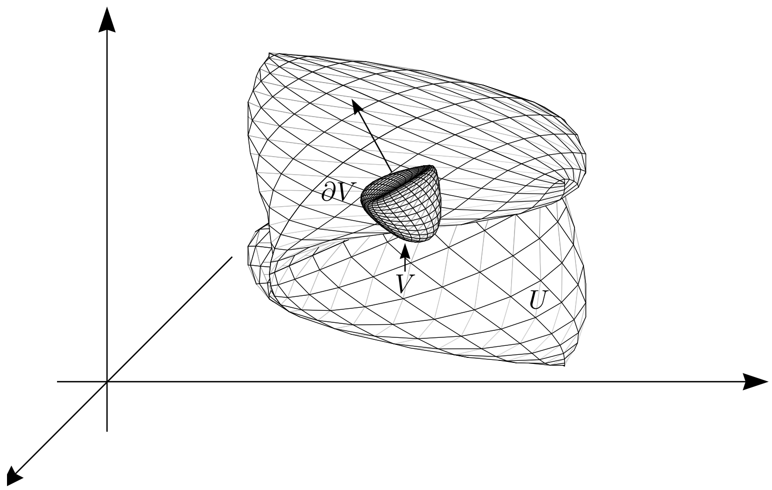
Damit folgt daraus:

$$\int_a^b \left[H \cdot u_{xx}(x,t) + \varphi(x,t) - \varrho(x)u_{tt}(x,t)\right]\,\mathrm{d}x = 0$$

Da dies für alle Stellen x und t gelten muß, haben wir (Widerspruchsbegründung oder Mittelwertsatz):

$$\boxed{u_{tt}(x,t) - \frac{H}{\varrho(x)}u_{xx}(x,t) = \frac{\varphi(x,t)}{\varrho(x)} \text{ mit } c = \sqrt{\frac{H}{\varrho}}}$$

Im Falle $n = 3$ gilt:



In diesem Falle sei x ein Punkt im Dreidimensionalen. $U \subseteq \mathbb{R}^3$ sei elastisch. $V \subseteq U$ ist das Volumen und ∂V die Oberfläche des Körpers.

$$\int\limits_V \varrho(x) u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}o$$

Mit dem GAUSSschen Satz ergibt sich dann:

$$\int\limits_V \varrho(x) u_{tt}(x,t)\,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,\mathrm{d}\tau$$

Daraus folgt dann:

$$\boxed{\int\limits_V \left(\varrho(x) u_{tt}(x,t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\,\mathrm{d}\tau = 0}$$

Auch hier muß dann gelten wie zuvor:

$$\boxed{\varrho(x) u_{tt}(x,t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{F}(x,t) = 0}$$

Oft gilt, daß die Kraft nur vom Gradienten von u abhängig ist: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{\nabla}u)$. Unter Vernachlässigung höherer Terme, also mit einer Linearisierung folgt:

$$\vec{F}\left(\vec{\nabla}u\right) \approx -a\vec{\nabla}u$$

Was hier dahinter steckt, ist das HOOKEsche Gesetz. a ist eine Konstante, die von den elastischen Eigenschaften des Körpers abhängig ist. Damit erhalten wir:

$$\boxed{\varrho(x) u_{tt} - a\triangle u = 0}$$

1.8.2 Bemerkungen zu den Maxwellschen Gleichungen

Wir benötigen hier folgenden Entwicklungssatz eines doppelten Kreuzproduktes:

$$a \times (b \times c) = (a\cdot c)\, b - (a\cdot b)\, c$$

Damit ergeben sich Beziehungen, welche in Zukunft noch benötigt werden:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{c}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{c}\right) - \triangle\vec{c}$$

$$\boxed{\triangle\vec{c} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{c}\right) - \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{c}\right)}$$

Es sei nun $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t)$. Damit notieren wir uns die vier MAXWELLschen Gleichungen:

1.) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu\vec{H}_t$

2.) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon\vec{E}_t + \sigma\vec{E}$

3.) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\varrho}{\varepsilon_0}$

4.) $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$

Es seien μ, ϱ, σ und $\varepsilon = \text{const}$. Mit der dritten MAXWELLschen Gleichung folgt:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \triangle\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\varrho - \triangle\vec{E}$$

Darüber hinaus gilt unter Verwendung der zweiten Gleichung:

$$-\mu\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)_t = -\mu\left(\varepsilon\vec{E}_{tt} + \sigma\vec{E}_t\right)$$

Damit erhalten wir schließlich durch Gleichsetzen:

$$\boxed{\triangle\vec{E} - \mu\varepsilon\vec{E}_{tt} - \mu\sigma\vec{E}_t = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\varrho}$$

Analog gilt:

$$\boxed{\triangle\vec{H} - \mu\varepsilon\vec{H}_{tt} - \mu\sigma\vec{H}_t = 0}$$

Diese nennt man auch **Telegraphengleichung**.

1.8.3 Telegraphengleichung

$$\boxed{u_{tt} - c^2 u_{xx} + a u_t + b u = 0}$$

Wir stellen uns vor, daß wir einen langen Leiter haben. Durch diesen Leiter fließe ein Strom $i = i(x, t)$ und es herrsche eine Spannung $v = v(x, t)$. In diesem Leiter sollen die Größen R (Widerstand), L (Induktivität), C (Kapazität) und G (Verlustkoeffizient) gleichmäßig verteilt sein. Dann gilt für die Spannung mittels des Ohmschen Gesetzes:

$$\boxed{v_x + Ri + Li_t = 0}$$

Nach dem Gesetz über Ladungserhaltung gilt außerdem:

$$\boxed{i_x + Cv_t + Gv = 0}$$

Wir differenzieren die erste Gleichung nach x:

$$v_{xx} + Ri_x + Li_{tx} = 0$$

Außerdem differenzieren wir die zweite Gleichung nach t und multiplizieren sie mit L:

$$LCv_{tt} + LGv_t + Li_{tx} = 0$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichung folgt:

$LCv_{tt} - v_{xx} + LGv_t - Ri_x = 0$

Durch Einsetzen der obigen zweiten Gleichung erhalten wir dann schließlich:

$LCv_{tt} - v_{xx} + LGv_t + RCv_t + RGv = 0$

$$\boxed{v_{tt} - \frac{1}{LC} v_{xx} + \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) v_t + \frac{R}{L}\frac{G}{C} v = 0}$$

Wir verwenden nun folgende Bezeichnungen:

$a = \dfrac{G}{c} + \dfrac{R}{L}$, $\alpha = \dfrac{R}{L}$, $\beta = \dfrac{G}{C}$

$a = \alpha + \beta$, $b = \alpha\beta$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} + au_t + bu = 0 \qquad (1)$

Den Term au_t in Gleichung (1) nennt man **dissipativen Term**. Zur Lösung machen wir folgenden „Separationsansatz":

$u(x,t) = \lambda(t)\varphi(x,t)$

Allgemein gilt (siehe HM I);

$$\boxed{(\lambda(t)\varphi(x,t))^{(k)} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{(k-l)} \varphi^{(l)}}$$

Damit folgt dann für $k = 2$:

$u_t = \lambda'(t)\varphi(x,t) + \lambda(t)\varphi_t(x,t)$

$u_{tt} = \lambda''(t)\varphi(x,t) + 2\lambda'\varphi_t + \lambda(t)\varphi_{tt}$, $u_{xx} = \lambda(t)\varrho_{xx}(x,t)$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir:

$\lambda(t)\varphi_{tt} - c^2\lambda\varphi_{xx} + \varphi_t\,(2\lambda' + a\lambda) + \varphi(a\lambda' + \lambda'' + b\lambda) = 0$

Der Zeitableitung φ_t soll herausfallen. Damit haben wir folgende gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung: $2\lambda' + a\lambda = 0$. Die Lösung können wir einfach angeben (siehe HM I):

$\lambda(t) = \exp\left(-\dfrac{a}{2}t\right)$

Damit folgt dann:

$\lambda'' + a\lambda' + b\lambda = \lambda(t)\left(b - \dfrac{a^2}{4}\right) = -\lambda(t) \cdot \dfrac{1}{4}\,(\alpha - \beta)^2$

Durch Einsetzen erhalten wir wieder:

$$\boxed{\varphi_{tt} - c^2\varphi_{xx} + \underbrace{\left(b - \frac{a^2}{4}\right)}_{=:A} \varphi(x,t) = 0} \qquad (2)$$

Unser 1.Ergebnis ist: $u(x,t) = \exp\left(-\dfrac{\alpha+\beta}{2}t\right)\varphi(x,t) = \exp\left(-\dfrac{a}{2}t\right)\varphi(x,t)$ ist Lösung, falls $\varphi = \varphi(x,t)$ Lösung von (2) ist. Für $A = 0$ haben wir:

$\varphi(x,t) = F(x + ct) + G(x - ct)$

$$\boxed{u(x,t) = \exp\left(-\frac{a}{2}t\right)[F(x+ct) + G(x-ct)]}$$

Hierbei handelt es sich um eine gedämpfte Welle, die relativ unverzerrt ist. Im Falle $A = 0$, also $RC = GL$ kann man gute Signale aussenden. Für $A \neq 0$ ($\alpha \neq \beta$) versuchen wir Lösungen in Form fortschreitender ebenen Wellen darzustellen, nämlich $\varphi(x,t) = F(x-ct)$. Diese bezeichnet man auch als Front- bzw. Pulslösung.

$$\varphi_{xx} = F'', \; \varphi_{tt} = c^2 F''$$

Durch Einsetzen in die Gleichung erhalten wir:

$$c^2 F'' - c^2 F'' + AF = 0$$

Daraus sieht man, daß $F = 0$ gelten muß, da $A \neq 0$. Lösungen in der Form $\varphi(x,t) = F(x-ct)$ gibt es also nicht, der Ansatz ist unbrauchbar. Wir versuchen es mit einem neuen Ansatz (siehe auch Blatt 6, Aufgabe 3):

$$\varphi(x,t) = F(x-\gamma t) \text{ mit } \gamma \neq c$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\gamma^2 F''(x-\gamma t) - c^2 F''(x-\gamma t) + AF(x-\gamma t) = 0$$

Wir setzen $x - \gamma t = \tau$ und dividieren durch $\gamma^2 - c^2$:

$$F''(\tau) + \frac{A}{\gamma^2 - c^2} F(\tau) = 0$$

Lösungen dieser Differentialgleichung 2.Ordnung sind:

$$\boxed{F(\tau,\gamma) = \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{A}{\gamma^2 - c^2}}\tau\right) \text{ für } \gamma \neq c}$$

Wir erhalten weitere Lösungen durch Superposition:

$$\boxed{\varphi(x,t) = \int\limits_{\substack{\gamma \\ \gamma \neq c}} g(\gamma) \exp\left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{A}{\gamma^2 - c^2}}(x-\gamma t)\right) \mathrm{d}\gamma}$$

Eine Überlagerung von Wellen verschiedener Geschwindigkeiten führt zu **Dispersion**. Fassen wir nochmals zusammen: Wir haben uns die Telegraphengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} + a u_t + bu = 0$ angeschaut. Mittels des Ansatzes

$$u(x,t) = \exp\left(-\frac{a}{2}t\right)\varphi(x,t)$$

ergibt sich dann $\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx} + A\varphi = 0$ mit $b - \frac{a^2}{4} = A$. Für $A \neq 0$ machen wir nun Gebrauch vom Ansatz $\varphi(x,t) = \exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)]$ und erhalten durch Einsetzen:

$$-\omega^2 \varphi - c^2\left(-k^2\right)\varphi + A\varphi = 0$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 + A$$

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + A} = c(k) k$$

Wir lösen nach $c(k)$ auf:

$$c(k) = \frac{1}{k}\sqrt{c^2 k^2 + A}$$

Falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit von k (oder auch ω) abhängt, spricht man von **Wellendispersion**. Eine Differentialgleichung heißt **dispersiv**, falls sie Lösungen der Form $\exp\left(\mathrm{i}\left[kx-\omega t\right]\right)$ besitzt mit $\omega=\omega(k)\in\mathbb{R}$ mit $\omega''(k)\neq 0$. Im Fall $\omega(k)\in\mathbb{C}$ heißt die Differentialgleichung **diffusiv**. Dazu wollen wir die **Wärmeleitungsgleichung** (Blatt 3, Aufgabe 2/3/4) untersuchen:

$$u_t - Du_{xx} = 0$$

Durch Einsetzen des obigen Ansatzes erhalten wir:

$$\left(-\mathrm{i}\omega - D\left[-k^2\right]\right)\exp\left(\mathrm{i}\left[kx-\omega t\right]\right)=0$$

Daraus folgt $\omega = -\mathrm{i}Dk^2\in\mathbb{C}$. Dies Gleichung ist also diffusiv.

Zusammenfassung:

Wir haben uns beschäftigt mit:

1.) Schwingende Saite

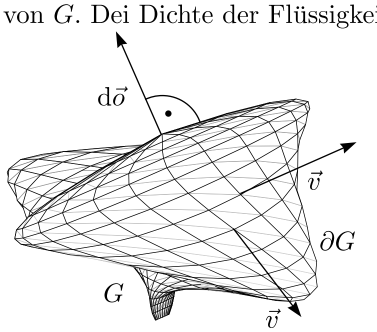
2.) Umformung der Maxwellgleichungen
Dies führte dann zur Telegraphengleichung.

3.) Lösung der Telegraphengleichung

4.) Erhaltungsaussagen (Conservation Laws) der Physik
Damit wollen wir uns jetzt beschäftigen.

1.9 Kontinuitätsgleichung

Diese beschreibt die Erhaltung der Masse einer strömenden Flüssigkeit. Dazu sei ein beschränktes Gebiet $G\subseteq\mathbb{R}^3$ gegeben. G befindet sich außerdem innerhalb der strömenden Flüssigkeit und ∂G sei die Oberfläche von G. Dei Dichte der Flüssigkeit sei $\varrho(\vec{r},t)$; die Strömungsgeschwindigkeit wird mit $\vec{v}=\vec{v}(\vec{r},t)$ bezeichnet.



t fest

Durch Integration über die Dichte erhalten wir die Masse der Flüssigkeit innerhalb des Gebietes:

$$\boxed{M=\int\limits_G \varrho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}\tau} \qquad (1)$$

M ändert sich, wenn Flüssigkeit durch ∂G in G hinein- oder aus G herausströmt. Während der Zeitspanne $\mathrm{d}t$ ändert sich M wie folgt:

$$\boxed{\Delta M=-\mathrm{d}t\int\limits_{\partial G}\varrho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma}} \qquad (2)$$

Leiten wir die Formel (1) für die Masse zeitlich ab, so erhalten wir:

$$\Delta M = \mathrm{d}t \int\limits_G \varrho_t(\vec{r},t)\,\mathrm{d}\tau$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) resultiert also:

$$\int\limits_G \varrho_t(\vec{r},t)\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{d}\tau \int\limits_{\partial G} \varrho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = 0$$

Mittels des Gaussschen Satzes erhalten wir dann wieder:

$$\boxed{\int\limits_G \left[\varrho_t(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot(\varrho(\vec{r},t))\,\vec{v}(\vec{r},t)\right]\,\mathrm{d}\tau = 0}$$

Also folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot(\varrho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)) + \varrho_t(\vec{r},t) = 0}$$

1.9.1 Erhaltungssatz

Die zeitliche Änderung der Gesamtmenge einer physikalischen Größe (gegeben mittels einer Dichtefunktion/Konzentration $u(\vec{r},t)$), die in einem Raumbereich G enthalten ist, rührt her vom Fluß $\vec{\phi}(\vec{r},t)$ dieser Größe durch den Rand ∂G von G und der Geschwindigkeit, mit der die Größe im Gebiet erzeugt oder vernichtet wird (beschrieben durch $f(\vec{r},t,u(\vec{r},t))$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_G u(\vec{r},t)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\partial G} \vec{\phi}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{\sigma} + \int\limits_G f\left(\vec{r},t,u(\vec{r},t)\right)\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

Die Gleichung sieht dann im allgemeinen Fall so aus:

$$u_t(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\vec{\phi}(\vec{r},t)}_{\vec{\phi}=\varrho\vec{v}} = f(\vec{r},t,u(\vec{r},t)) \qquad (2)$$

Es ist $u = \varrho$ (Dichte) und $f = 0$ (Erzeugung). Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich aus $\varrho = \varrho(\vec{r}(t),t)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho(\vec{r}(t),t) = \varrho_t + \vec{\nabla}\varrho(\vec{r}(t),t)\cdot\vec{v}$$

Des weiteren folgt aus Gleichung (2):

$$\vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v}) + \varrho_t = 0$$

$$\vec{\nabla}\varrho\cdot\vec{v} + \varrho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \varrho_t = 0$$

Durch Einsetzen erhalten wir dann:

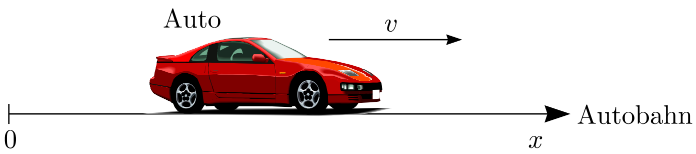
$$\vec{\nabla}\varrho\cdot\vec{v} + \varrho\vec{\nabla}\cdot\vec{v} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho(\vec{r}(t),t) - \vec{\nabla}\varrho\cdot\vec{v} = 0$$

Damit folgt dann schließlich:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho(\vec{r}(t),t)}$$

Kontinuitätsgleichung = „Erhaltungssatz“

1.9.2 Verkehrsfluß



$u(x,t) = \varrho(x,t)$ sei die Verkehrsdichte (=Anzahl der Autos pro Längeneinheit) und $\phi(x,t) = q(x,t)$ sei die Flußgeschwindigkeit des Verkehrs, also die Anzahl der Autos pro Zeiteinheit, die zur Zeit t den Punkt x passieren. $f = 0$ bedeutet, daß Autos die Straße nicht verlassen und auch keine neue Autos hinzukommen. $[x_1, x_2]$ sei ein Stück der Autobahn. Die Gesamtzahl der Autos auf diesem Abschnitt ist gegeben durch:

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Für die Zahl der Autos pro Zeiteinheit, die zur Zeit t bei x_1 auf das Stück $[x_1, x_2]$ fahren minus die Zahl der Autos die bei x_2 das Stück $[x_1, x_2]$ verlassen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{x_1}^{x_2} \varrho(x,t)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varrho_t(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Man kann dies auch schreiben als:

$$q(x_1,t) - q(x_2,t) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} q_x(x,t)\,\mathrm{d}x$$

Damit erhalten wir durch Gleichsetzen:

$$\boxed{\varrho_t(x,t) + q_x(x,t) = 0}$$

Es ist $q = G(\varrho(x,t))$, die Flußgeschwindigkeit hängt also von ϱ ab. Damit gilt $q_x = G'(\varrho(x,t))\varrho_x$. Wir erhalten eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\boxed{\varrho_t(x,t) + G'(\varrho(x,t))\varrho_x(x,t) = 0}$$

Beispiel:

$$q = \gamma\varrho\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right)$$

γ sei die mittlere freie Geschwindigkeit und ϱ_1 das Maximum der Autodichte. Außerdem kann man noch einen Korrekturterm aufgrund eines Bremseffekts unter Zunahme der Dichte berücksichtigen:

$$q = q\varrho\left(1 - \frac{\varrho}{\varrho_1}\right) - k\varrho_x \text{ mit } k > 0 = \text{const.}$$

Durch Einsetzen dieser Funktion in die partielle Differentialgleichung erhalten wir:

$$\varrho_x(x,t) + \underbrace{\gamma\left(1 - 2\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)}_{\varrho}\varrho_x(x,t) = k\varrho_{xx}$$

$k\varrho_{xx}$ nennen wir Viskositätskorrektur.

$$\boxed{\varrho_t + \varrho\varrho_x = k\varrho_{xx}}$$

Diese Gleichung nennt man BURGER's Gleichung (Modell für kompressible Flüssigkeiten).

Kapitel 2

Eindimensionale Wellengleichung

Wir betrachten wieder die eindimensionale Wellengleichung:

$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$

c sei konstant und außerdem größer als Null. Man verwendet folgende Begriffe:

- ➢ Halbunendliche Saite: $x \geq 0$
- ➢ Unendliche Saite: $x \in \mathbb{R}$
- ➢ Endliche Saite: $a \leq x \leq b$

Wir erinnern uns: Für $Lu = 0$ sei die allgemeine Lösung gegeben durch:

$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ mit beliebigem F, G

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \Psi(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

Dann gilt für die allgemeine Lösung:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{x-cs}^{x+cs} f(y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s}$$

Man kann dies auch schreiben als:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s}$$

Im weiteren sollen nun folgende drei Begriffe geklärt werden:

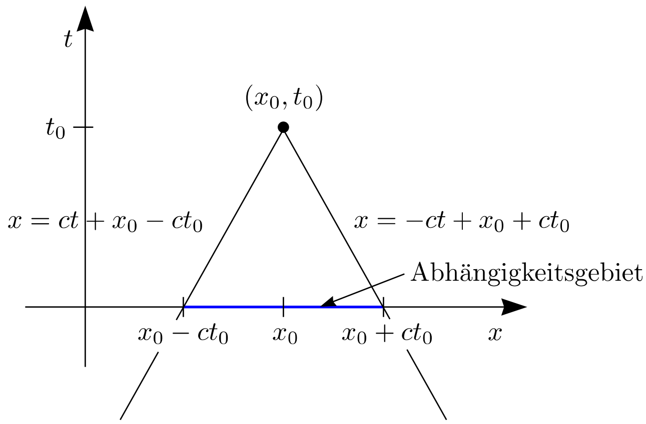
- ➢ Abhängigkeitsgebiet
- ➢ Bestimmtheitsgebiet
- ➢ Einflußgebiet

$Lu = 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \Psi(x)$

Wir gehen nun in die x-t-Ebene und nehmen uns einen beliebigen Punkt (x_0, t_0):

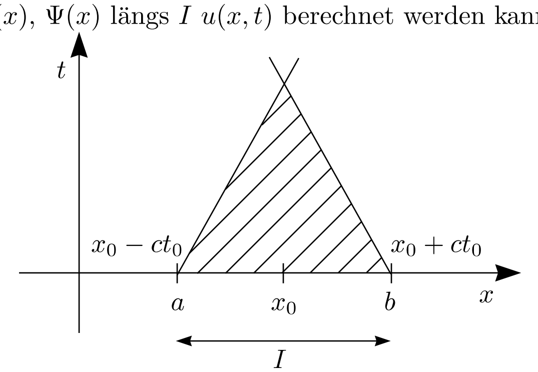
Definition:



Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $t_0 > 0$ gegeben. Das Abhängigkeitsgebiet $A(x_0, t_0)$ des Punktes (x_0, t_0) ist das Intervall der Anfangskurve ($t = 0$, x-Achse), in dessen Punkten die Anfangsdaten φ und Ψ benötigt werden, um $u(x_0, t_0)$ auszurechnen.

$$\boxed{A(x_0, t_0) = \{(x, 0) | |x - x_0| \leq ct_0\}}$$

Die Geraden $x = ct + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R} =$ const. heißen **+-Charakteristiken** für L; die Gerade $x = -ct + \delta$ mit $\delta \in \mathbb{R} =$ const. heißen **−-Charakteristiken** für L.
Das **Bestimmtheitsgebiet** (**Fortsetzungsgebiet**) des Intervalls I der Anfangskurve ($t = 0$) sind alle Punkt (x, t) der Halbebene $t > 0$ mit $A(x, t) \subset I$. Das sind alle Punkte (x, t) mit $t > 0$, für die aus den Anfangsdaten $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ längs I $u(x, t)$ berechnet werden kann.



Daher muß gelten:

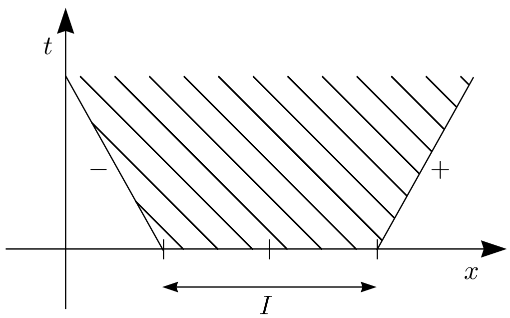
$$x_0 - ct_0 \leq x - ct \leq x + ct \leq x_0 + ct_0$$

Welche Punkte erfüllen alle diese Ungleichungen? Dazu verarbeiten wir die erste und die letzte Ungleichung, womit dann folgt:

$$-c(t_0 - t) \leq x - x_0 \leq c(t - t_0)$$

Da $c > 0$ folgt $t \leq t_0$ und $|x - x_0| \leq c(t_0 - t)$. Damit können wir nun da Bestimmtheitsgebiet mathematisch beschreiben:

$$\boxed{B(I) = \{(x, t) | |x - x_0| \leq c(t_0 - t)\} \text{ mit } I = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]}$$



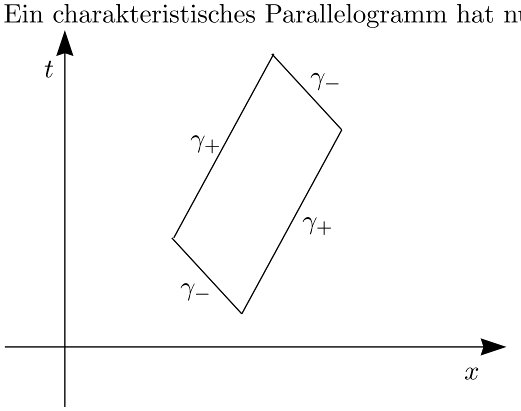
Das **Einflußgebiet** $E(I)$ des Intervalls I der Anfangskurve ($t=0$) sind die Punkte (x,t) der Halbebene $t>0$, für die gilt, daß das Abhängigkeitsgebiet $A(x,t)\cap I\neq\{\}$. Das ist der Bereich der Halbebene $t>0$, außerhalb dessen sich die Werte von u nicht ändern, wenn die Anfangsdaten φ, Ψ nur in I geändert werden.

$$\boxed{I=[x_0-ct_0,x_0+ct_0]:\ E(I)=\{(x,t)|t>0,-ct+x_0-ct_0\leq x\leq ct+x_0+ct_0\}}$$

2.1 Die Parallelogrammidentität

$Lu=u_{tt}-c^2u_{xx}$

Ein charakteristisches Parallelogramm hat nur charakteristische Seiten.



- γ_+: $x-ct=\gamma_1=\text{const.}$
- γ_-: $x+ct=\gamma_2=\text{const.}$

Vorbereitungen:

K sei Kurve in der (x,y)-Ebene. Wir wollen folgendes Integral berechnen:

$$I=\int\limits_K[h(x,y)\,\mathrm{d}x+g(x,y)\,\mathrm{d}y]$$

Dazu benötigen wir eine Parameterdarstellung $\vec{r}(t)$ der Kurve mit $t\in[a,b]$:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$$

Haben wir diese Parameterdarstellung, so kann das Integral einfach berechnet werden:

$$I=\int\limits_{t=a}^{b}[h(x(t),y(t))\dot{x}(t)+g(x(t),y(t))\dot{y}(t)]\ \mathrm{d}t=\int\limits_{t=a}^{b}\vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t\text{ mit }\vec{v}(x,y)=\begin{pmatrix}h(x,y)\\g(x,y)\end{pmatrix}$$

Wir stellen nun die Charakteristiken mittels Parameterdarstellung dar:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} ct + \gamma_1 \\ t \end{pmatrix}, \; \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$$

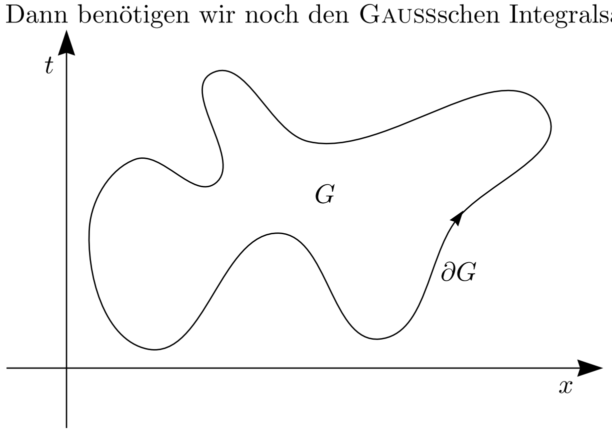
$$\vec{\varrho}(t) = \begin{pmatrix} -ct + \gamma_2 \\ t \end{pmatrix}, \; \dot{\vec{\varrho}}(t) = \begin{pmatrix} -c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt mittels der Kettenregel:

$$u_{\gamma_+} = u(\vec{r}(t)), \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{\gamma_+} = \vec{\nabla} u(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = c u_x + u_t$$

$$u_{\gamma_-} = u(\vec{r}(t)), \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_{\gamma_-} = -c u_x + u_t$$

Dann benötigen wir noch den Gaussschen Integralsatz in der Ebene:



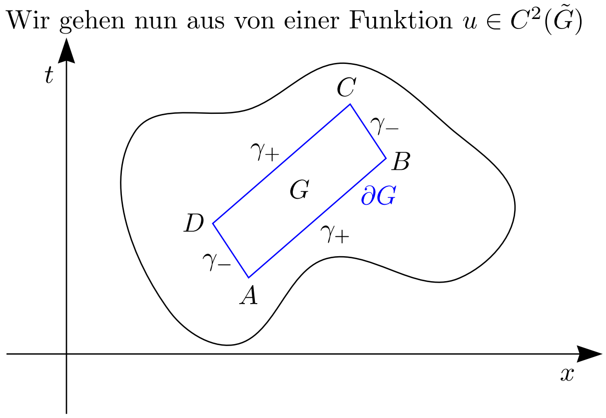
G sei Gebiet in der (x,t)-Ebene, ∂G sei außerdem positiv orientiert und genügend gutartig. Des weiteren sei $P = P(x,t)$, $Q = Q(x,t) \in C^2(\overline{G})$ gegeben. Dann gilt:

$$\iint\limits_G \underbrace{[Q_x - P_t]}_{Lu} \, \mathrm{d}(x,t) = \oint\limits_{\partial G} [P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}t]$$

Angewendet auf unser Problem resultiert:

$$\iint\limits_G \left(u_{tt} - c^2 u_{xx}\right) \, \mathrm{d}(x,t) = \iint\limits_G \left[\left(-c^2 u_x\right)_x - \left(-u_t\right)_t\right] \, \mathrm{d}(x,t) = \oint\limits_{\partial G} \left(-u_t \, \mathrm{d}x - c^2 u_x \, \mathrm{d}t\right)$$

Wir gehen nun aus von einer Funktion $u \in C^2(\tilde{G})$



$G = (ABCD)$ sei charakteristisches Parallelogramm in $\tilde{G}$. Dazu berechnen wir das Integral I:

$$I = \iint_G Lu\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \oint_{\partial G} \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \int_A^B \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) + \int_B^C \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) + \int_C^D \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) + \int_D^A \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= -c\int_A^B (u_t + cu_x)\,\mathrm{d}t + c\int_B^C (u_t - cu_x)\,\mathrm{d}t - c\int_C^D (u_t + cu_x)\,\mathrm{d}t + c\int_D^A (u_t - cu_x)\,\mathrm{d}t =$$

$$= -c\int_A^B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\gamma_+}\,\mathrm{d}t + c\int_B^C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\gamma_-}\,\mathrm{d}t - c\int_C^D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\gamma_+}\,\mathrm{d}t + c\int_D^A \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\gamma_-}\,\mathrm{d}t$$

$$\iint_G Lu\,\mathrm{d}(x,t) = -c\,[u(B) - u(A)] + c\,[u(C) - u(B)] - c\,[u(D) - u(C)] + c\,[u(A) - u(D)] =$$

$$= \boxed{2c\,[u(A) + u(C) - u(B) - u(D)]}$$

Wir formulieren dies als Satz:

Satz ①:

Es sei $Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$ und $G = (ABCD)$ sei charakteristisches Parallelogramm für L. Ist $u \in C^2(\overline{G})$, so gilt:

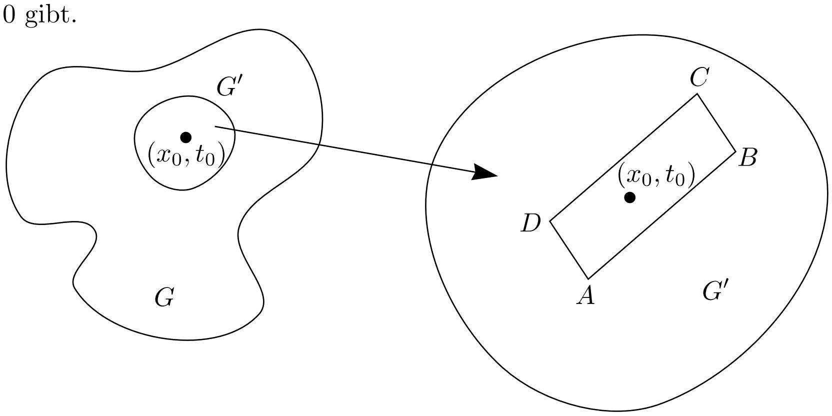
$$\iint_{(ABCD)} Lu(x,t)\,\mathrm{d}(x,t) = 2c\,(u(A) + u(C) - u(B) - u(D))$$

Satz ②:

$G \subseteq \mathbb{R}^2(x,t)$ sei ein Gebiet, wobei $u \in \mathbb{C}^2(G)$. Dann gilt:
$Lu = 0$ in $G \Leftrightarrow u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ für jedes charakteristische Parallelogramm $(ABCD)$, das in G liegt.

Nachweis:

„$\Rightarrow$“ folgt aus Satz ①. „$\Leftarrow$“ zeigen wir folgendermaßen. Wir nehmen an, daß es ein $(x_0, t_0) \in G$ mit $Lu(x_0, t_0) > 0$ gibt.



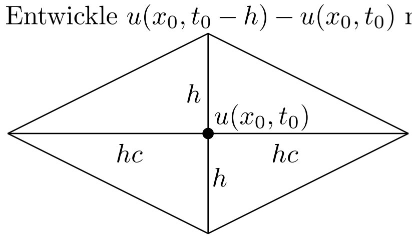
Da Lu stetig ist in G, gibt es ein $G' \subset G$, $(x_0, t_0) \in G'$ mit $Lu(x,t) > 0$. Wähle das charakteristische Parallelogramm $(ABCD) \subset G'$ mit $(x_0, t_0) \in (ABCD)$. (Nach Voraussetzung gilt: $a(A)+u(C) = u(B)+u(D)$.) Dann folgt nach ①:

$$0 < \iint\limits_{(ABCD)} Lu \,\mathrm{d}(x,t) = 0$$

Dies stellt also ein Widerspruch dar.

Übung:

Entwickle $u(x_0, t_0 - h) - u(x_0, t_0)$ mit dem Satz von Taylor bis zur 2.Ordnung und lassen h gegen Null gehen.

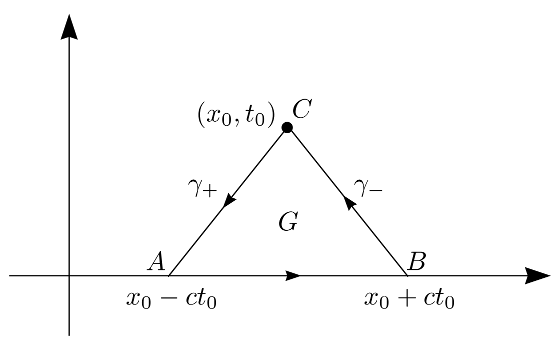


2.2 Cauchy-Anfangswertproblem

Es soll folgendes Anfangswertproblem (Cauchy-Anfangswertproblem) gelöst werden:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ mit $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \Psi(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ $\qquad (\star)$



Gesucht ist $u(x_0, t_0)$.

$$\iint\limits_{\triangle(ABC)} Lu(x,t)\,\mathrm{d}(x,t) = \iint\limits_{\triangle(ABC)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_A^B \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) + \int\limits_B^C \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) + \int\limits_C^A \left(-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right) =$$

$$= \int\limits_{x-ct_0}^{x_0+ct_0} -\Psi(x)\,\mathrm{d}x + c\left(u(x_0,t_0) - u(x_0+ct_0,0)\right) - c\left(u(x_0-ct_0,0) - u(x_0,t_0)\right)$$

$$\boxed{u(x_0,t_0) = \frac{1}{2c}\int\limits_{t=0}^{t_0}\int\limits_{x=x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)} f(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2c}\int\limits_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0}\Psi(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0-ct_0)+\varphi(x_0+ct_0)\right)}$$

Satz ③:

1.) Genügt u dem Problem ($\star$), so hat u die obige Darstellung (D'ALEMBERTsche Formel).

2.) Sind $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$ und $f \in C^1(\mathbb{R} \times (t > 0))$, so ist u gemäß der D'ALEMBERTschen Formel in $C^2(\mathbb{R} \times (t > 0)) \cap C^1(\mathbb{R} \times (t \geq 0))$.

Beispiel:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2$ mit $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$u(x, 0) = x$ für $x \in \mathbb{R}$

$u_t(x, 0) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

- 1.Schritt:
  Wir suchen zuerst eine stationäre Lösung:

  $$u_1 = u_1(x) = -\frac{1}{12c^2} x^4$$

- 2.Schritt:
  Wir machen einen Ansatz für die gesuchte Funktion $u(x, t)$:

  $$u(x, t) = u_1(x) + w(x, t)$$

  Für w erhalten wir dann folgendes homogenes Problem:

  $$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$$

  $$w(x, 0) = x + \frac{1}{12c^2} x^4, \; w_t(x, 0) = 0$$

  Dieses Problem ist nun einfach mit der D'ALEMBERTschen Formel zu lösen:

  $$\boxed{w(x, t) = \frac{1}{2} [w(x - ct, 0) + w(x + ct, 0)]}$$

2.2.1 Eindeutigkeit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe: Energieintegralmethode

Es geht wieder um folgendes Problem:

$$Lu(x, t) = f(x, t) \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \; u_t(x, 0) = \Psi(x) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \qquad (\star)$$

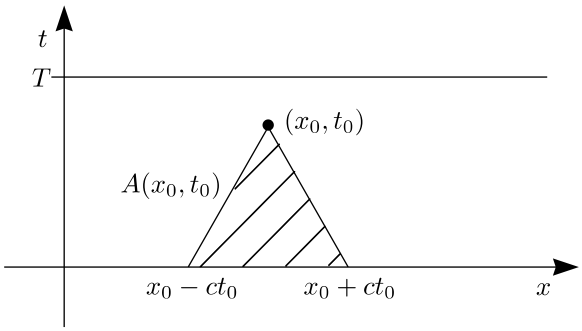
Das Problem ($\star$) besitzt genau eine Lösung, welche durch die D'ALEMBERTsche Formel gegeben ist.

- Erste Möglichkeit zur Begründung:
  Ist $\tilde{u}$ eine weitere Lösung, so gilt für $w = u - \tilde{u}$:

  $$Lw = 0, \; w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0$$

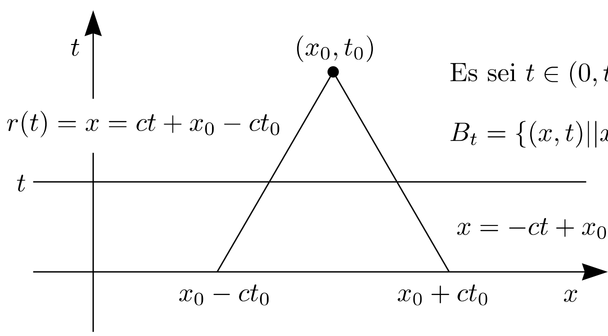
  Satz ③ liefert dann $w(x, t) = 0$.

Satz ④:



Für $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,T)) \cap C^1(\mathbb{R} \times [0,T))$ gelte $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < T$. Es sei (x_0, t_0), $x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in (0,T)$ beliebig aber fest. Aus $u = u_t = 0$ folgt dann auf $A(x_0, t_0)$, daß $u = 0$ im Bestimmtheitsgebiet $B(A(x_0, t_0))$ ist $((x,t) = 0 \;\forall\; (x,t) \in B)$.

Beweis:



Es sei $t \in (0, t_0]$ fest.

$B_t = \{(x,t) | |x - x_0| \leq c(t_0 - t)\}$

$B_0 = A(x_0, t_0)$, $B_t = \{(x_0, t_0)\}$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{r(t)}^{R(t)} \left(u_t^2 + c^2 u_x^2\right) \, \mathrm{d}x$$

$$E(t) \geq 0 \,\forall\, t \text{ und } E(0) = \frac{1}{2} \int\limits_{A(x_0,t_0)} \left(u_x^2(x,0) + c^2 u_t^2(x,0)\right) \, \mathrm{d}x = 0$$

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß $E(t) = 0$ für $0 \le t \le t_0$. Das Vorgehen hierzu ist, $\dot{E}(t)$ zu bilden ($\dot{R}(t) = -c$, $\dot{r}(t) = c$):

$$\dot{E}(t) = \frac{1}{2}\left[\dot{R}(t)\left(u_t^2\left(R(t),t\right) + c^2u_x^2\left(R(t),t\right)\right) - \dot{r}(t)\left(u_t^2\left(r(t),t\right) + c^2u_x^2\left(r(t),t\right)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{r(t)}^{R(t)}\left(2u_tu_{tt} + 2c^2u_xu_{xt}\right)\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}c\left[\left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\left(R(t),t\right) + \left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\left(r(t),t\right)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{r(t)}^{R(t)}\left(2u_tu_{tt} + 2c^2\left(u_xu_t\right)_x - 2c^2u_tu_{xx}\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}c\left[\left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\left(R(t),t\right) + \left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\left(r(t),t\right)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{r(t)}^{R(t)}\left[2u_t\underbrace{\left(u_{tt} - c^2u_{xx}\right)}_{=0} + 2c^2\left(u_xu_t\right)_x\right]\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{2}c\left[\left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\left(R(t),t\right) + \left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\left(r(t),t\right)\right] + c^2\left[\left(u_xu_t\right)\left(R(t),t\right) - \left(u_xu_t\right)\left(r(t),t\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}c\left[\left(u_t^2 + c^2u_x^2 - 2cu_xu_t\right)\left(R(t),t\right) + \left(u_t^2 + c^2u_x^2 + 2cu_xu_t\right)\left(r(t),t\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}c\left[\left(u_t - cu_x\right)^2\left(R(t),t\right) + \left(u_t + cu_x\right)^2\left(r(t),t\right)\right] \le 0$$

Da $E(t) \ge 0$, $E(0) = 0$ und $\dot{E}(t) \le 0$ gilt für $0 \le t \le t_0$, haben wir somit folgende Erkenntnis gewonnen:

$$E(t) = 0 = \frac{1}{2}\int\limits_{B_t}\left(u_t^2 + c^2u_x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

Damit ist also $u(x,t) = \text{const.}\ \forall\ (x,t) \in B\left(A(x_0,t_0)\right)$. Mit $u(x,0) = 0$ folgt dann $u(x,t) = 0\ \forall\ (x,t) \in B\left(A(x_0,t_0)\right)$.

2.3 Stetige Abhängigkeit von den Daten

Wir haben also folgendes Problem:

$$P_0(\varphi,\ \Psi,\ f) = \begin{cases} Lu = u_{tt} - c^2u_{xx} = f(x,t) \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \Psi(x) \text{ für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Die Lösung kann mittels der D'ALEMBERTschen Formel berechnet werden:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=x-cs}^{x+cs} f(y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

Es sei nun $\mathcal{L}_0$: $C^2(\mathbb{R})\times C^1(\mathbb{R})\times C^1(\mathbb{R}\times(r>0)) \mapsto C^2(\mathbb{R}\times(t>0))$ die Lösung des Problems, also $\mathcal{L}_0(\varphi,\Psi,f) := u$. $\mathcal{L}_0$ ist „stetig" in $(\tilde{\varphi},\tilde{\Psi},\tilde{f})$ bedeutet dann nach HM I, daß es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß aus $\|(\varphi,\Psi,f) - (\tilde{\varphi},\tilde{\Psi},\tilde{f})\| < \delta$ folgt:

$$\|\mathcal{L}_0\left(\tilde{\varphi},\tilde{\Psi},\tilde{f}\right) - \mathcal{L}_0\left(\varphi,\Psi,f\right)\| < \varepsilon$$

Wir definieren eine Norm in $C^2(\mathbb{R})$, $C^1(\mathbb{R})$:

$$\|\lambda\| := \sup\left\{|\lambda(x)|\,|x \in \mathbb{R}\right\}$$

Für $C^1(\mathbb{R}\times t>0)$ gilt:

$$\|g\| = \sup\left\{|g(x,t)|, x \in \mathbb{R}, t > 0\right\}$$

$$\|(\lambda,\mu,g)\| := \|\lambda\| + \|\mu\| + \|g\|$$

Für eine Norm müssen folgende Eigenschaften gelten (siehe HM I):

- ➢ $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0$ nur für $u = 0$
- ➢ $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$
- ➢ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

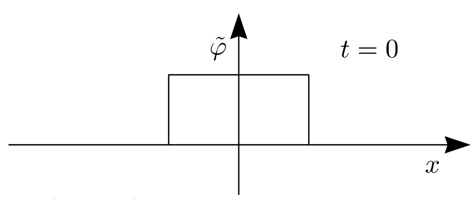
Diese Eigenschaften können als Übung gezeigt werden. Außerdem soll als Übung gezeigt werden, daß aus $\|\varphi - \tilde{\varphi}\| < \delta$, $\|\Psi - \tilde{\Psi}\| < \delta$, $\|f - \tilde{f}\| < \delta$ die Ungleichung $\|u - \tilde{u}\| < \varepsilon$ folgt mit folgendem δ:

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + t_0 + \frac{1}{2}t_0^2}$$

Andere Formulierung:

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $\varphi_n \mapsto \tilde{\varphi}$, $\Psi_n \mapsto \tilde{\Psi}$, $f_n \mapsto \tilde{f}$ für $n \mapsto \infty$ folgt:

$$\mathcal{L}_0\left(\varphi_n, \Psi_n, f_n\right) \mapsto \mathcal{L}_0\left(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f}\right)$$



$\mathcal{L}_0\left(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f}\right)$ für $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\Psi}$, $\tilde{f} \in \mathbb{C}^0$ heißt **verallgemeinerte Lösung** von $P_0(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$, falls es Folgen (φ_n), (Ψ_n), (f_n) mit $(\varphi_n) \in C^2(\mathbb{R})$, $(\Psi_n) \subset C^1(\mathbb{R})$, $(f_n) \subset C^1(\mathbb{R} \times (t > 0)$ gibt mit $\mathcal{L}_0(\varphi_n, \Psi_n, f_n) \mapsto \mathcal{L}(\tilde{\varphi}, \tilde{\Psi}, \tilde{f})$ für $n \mapsto \infty$.
Wir fassen unsere Ergebnisse zusammen. Das Problem $P_0(\varphi, \Psi, f)$ ist wohldefiniert:

- ➢ Existenz (d'Alembertsche Formel)
- ➢ Eindeutigkeit (Satz ④)
- ➢ Stetige Abhängigkeit von f, φ, Ψ

Beispiel:

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ im $\mathbb{R}^2$

Wir schauen uns zwei Lösungen der Gleichung an (Beweis durch holomorphe Funktionen):

$$v(x, y) = 0 \text{ und } w(x, y) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

Was passiert mit den Anfangsbedingungen?

$$v(x, 0) = 0 \text{ und } v_y(x, 0) = 0$$

$$w(x, 0) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x) \text{ und } w_y(x, 0) = 0$$

Für $\lambda \mapsto \infty$ gilt:

$$\left(0, \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x), 0\right) \mapsto (0, 0, 0)$$

Die Daten konvergieren also gegeneinander. Falls das Cauchy-Problem für die Potentialgleichung wohldefiniert wäre, müßten $w(x, y) \mapsto v(x, y)$ für $\lambda \mapsto \infty$ gelten. Das gilt nicht, da:

$$\lim_{\lambda \mapsto \infty} \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)\cosh(\lambda y) = \infty \text{ für } y > 0$$

2.3.1 Zur Struktur der Terme in der d'Alembertschen Formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=x-cs}^{x+cs} f(y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

Wir führen nun folgende Bezeichnung ein:

$$(Iw)(x,t) := \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} w(s)\,\mathrm{d}s$$

Hiermit erhalten wir:

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(I\varphi)(x,t)\right] + (I\Psi)(x,t) + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=x-cs}^{x+cs} f(y,t-s)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

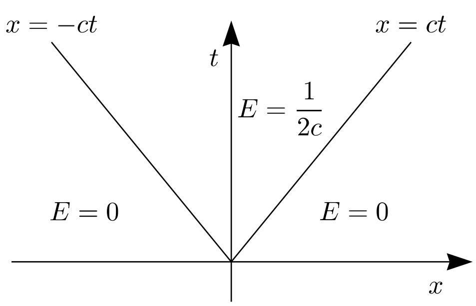
$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(I\varphi)(x,t)\right] + (I\Psi)(x,t) + \int\limits_{s=0}^{t} \left(If(\bullet,s)\right)(x,t-s)\,\mathrm{d}s$$

Wir betrachten die Heaviside-Funktion:

$$\boxed{H(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t < 0 \end{cases}}$$

$$E(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct-|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & \text{für} \quad |x| \leq ct \\ 0 & \text{für} \quad |x| > ct \end{cases}$$

$$(x,t) \mapsto E(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct-|x|)$$



Wir führen das sogenannte Faltungsprodukt ein:

$$(f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

Mit der Substitution $y \mapsto s = x - y$ geht das Integral über in:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)\,\mathrm{d}s = (g \star f)(x)$$

Das Produkt ist kommutativ, man kann also f und g vertauschen. Die Variable, welche bei der Faltung eine Rolle spielt, sei $\bullet$ und t ein Parameter (weil E innerhalb $\frac{1}{2c}$ und außerhalb gleich 0 ist):

$$(E(\bullet,t)\star\Psi)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}E(x-y,t)\Psi(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2c}\int\limits_{|x-y|\leq ct}\Psi(y)\,\mathrm{d}y=(I\Psi)(x,t)$$

Die Funktion sei nun so gutartig, daß man die Zeitableitung in das Integral ziehen kann:

$$\partial_t(I\varphi)(x,t)=\partial_t\left(E(\bullet,t)\star\varphi\right)(x)=\left(\partial_t E(\bullet,t)\star\varphi\right)(x)$$

$$(E\star f)(x,t)=\int\limits_{\xi=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\tau=0}^{\infty}E(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=\frac{1}{2c}\int\limits_{\tau=0}^{\infty}\int\limits_{\xi=-\infty}^{+\infty}H\left(c(t-\tau)-|x-\xi|\right)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau=$$

$$=\frac{1}{2c}\iint\limits_{|x-\xi|\leq c(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau$$

$$-c(t-\tau)\leq x-\xi\leq c(t-\tau)$$

$$x-c(t-\tau)\leq\xi\leq x+c(t-\tau)\text{ für }0\leq\tau\leq t$$

Wir betrachten die δ-Funktion und deren Eigenschaften. Die δ-Funktion wird in der **Distributionstheorie** als Großvater der Distributionen bezeichnet.

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & \text{für}\quad x\neq 0\\ \infty & \text{für}\quad x=0\end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$$

$$(\delta\star f)(x)=(f\star\delta)(x)=f(x)$$

Die δ-Funktion ist also das neutrale Element der Faltung. $u(x,t)=(E\star f)(x,t)$ löst $u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t)$.

$$L(E\star f)(x,t)=f(x,t)$$

$$(LE\star f)(x,t)=(\delta\star f)(x,t)$$

Durch Vergleich ergibt sich also $LE=\delta$. E heißt **Fundamentallösung** (siehe Blatt 4, Aufgabe 2; schwache Lösung) der Wellengleichung $Lu=u_{tt}-c^2u_{xx}$, falls gilt „$LE=\delta$“. Die GREENsche Funktion ist eine Fundamentallösung, welche bestimmte Randbedingungen erfüllt.
Wir notieren uns nochmals die D'ALEMBERTsche Formel:

$$u(x,t)=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\Psi(x)\,\mathrm{d}s}_{R(x,t)}+\frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)\,\mathrm{d}s$$

Außerdem betrachten wir folgendes Problem (siehe Aufgabe 2 auf 5.Übungsblatt):

$$u_{tt}-u_{xx}+u+2u_t=0$$

$u_{tt} - u_{xx} = -u - 2u_t = \underbrace{T(u, u_t)(x,t)}_{f(x,t)}$

Ein Iterationsverfahren bietet sich hier an:

$u(x,t) = R(x,t) + \tilde{T}(u, u_t)(x,t)$

$u^{(n)}(x,t) = R(x,t) + \tilde{T}(u^{(n-1)}, u_t^{(n-1)})(x,t)$

Hier setzt man dan $u^{(0)}(x,t) = 0$.

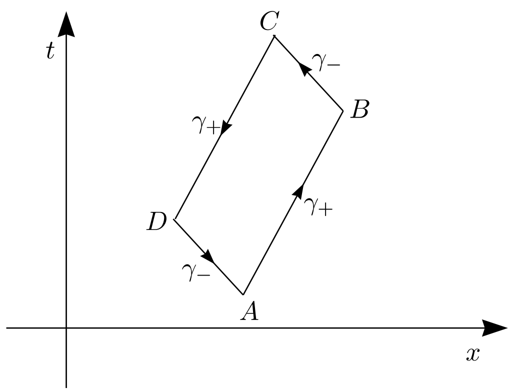
2.3.2 Einige Beispiele/Darboux-Problem, Gausat-Problem, Charakteristisches Problem

Besonders in der Gasdynamik sind diese Beispiele wichtig.

1.) Darboux-Problem:

$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx}$

Die Charakteristiken sind $x = \pm ct + \alpha$.



$$\iint\limits_{(ABCD)} Lu(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 2c\,[u(A) - u(B) + u(C) - u(D)]$$

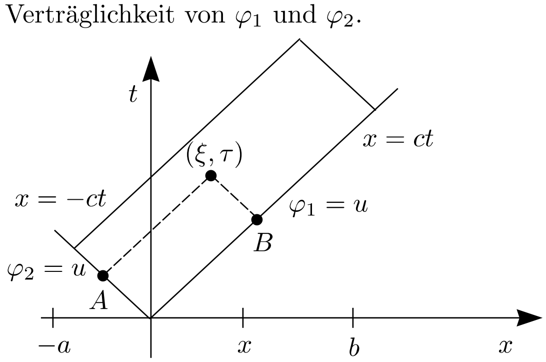
Es seien im folgenden a, $b > 0$ und konstant.

$Lu = f(x,t)$

$u\left(x, \frac{x}{c}\right) = \varphi_1(x)$ für $0 \le x \le b$

$u\left(x, -\frac{x}{c}\right) = \varphi_2(x)$ für $-a \le x \le 0$

Des weiteren soll gelten $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ (**Verträglichkeitsbedingung**). Man spricht hier von einer Verträglichkeit von φ_1 und φ_2.



Man erhält dann, was wir hier nicht explizit vorrechnen, für die Koordinaten der Punkte A und B:

$$B = \left(\frac{c\tau+\xi}{2}, \frac{c\tau+\xi}{2c}\right)$$

$$A = \left(\frac{\xi-c\tau}{2}, -\frac{\xi-c\tau}{2c}\right)$$

Wir integrieren nun $Lu = f$ über das Parallelogramm $(0, B, (\xi,\tau), A)$.

$$\iint f(x,t)\,\mathrm{d}(x,t) = 2c\left[\varphi_1(0) - \varphi_1\left(\frac{c\tau+\xi}{2}\right) + u(\xi,\tau) - \varphi_2\left(\frac{\xi-c\tau}{2}\right)\right]$$

Durch Auflösen erhält man nun $u(\xi,\tau)$.

$$0 \leq \frac{c\tau+\xi}{2} \leq b \Leftrightarrow -c\tau \leq \xi \leq 2b - c\tau$$

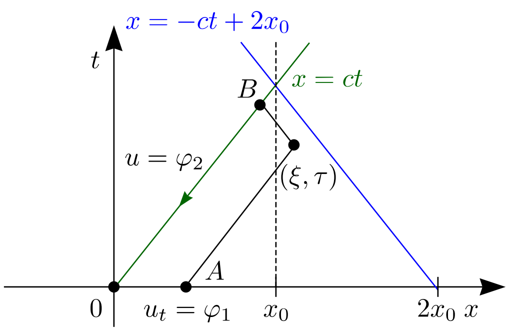
$$-a \leq \frac{\xi-c\tau}{2} \leq 0 \Leftrightarrow c\tau - 2a \leq \xi \leq c\tau$$

Wir betrachten nun das Anfangswert-Randwertproblem:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$

$$u_t(x,0) = \varphi_1(x) \text{ für } 0 \leq x \leq 2x_0$$

$$u\left(x, \frac{x}{c}\right) = \varphi_2(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_0$$



$A = (\xi - c\tau, 0)$ und $B\left(\frac{\xi+c\tau}{2}, \frac{\xi+ct}{2c}\right)$

$$\iint\limits_{(ABCD)} Lu(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 2c\left[u(A) - u(B) + u(C) - u(D)\right]$$

$$\iint\limits_{G} Lu\,\mathrm{d}(x,t) = \oint\limits_{\partial G}\left[-u_t\,\mathrm{d}x - c^2 u_x\,\mathrm{d}t\right]$$

- Integration über $+$-Charakteristik

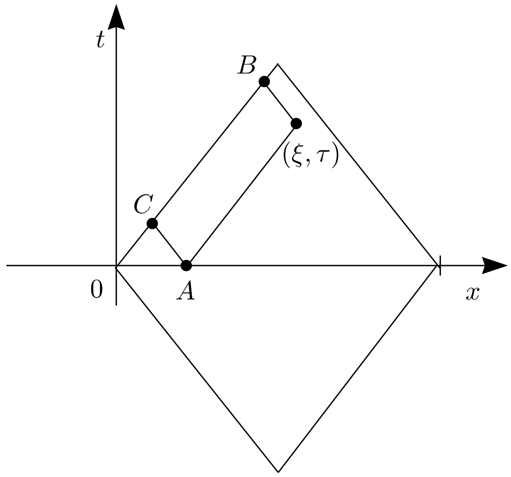
$$\int\limits_M^N \Omega = -c\left[u(N) - u(M)\right]$$

- Integration über $-$-Charakteristik

$$\int\limits_M^N \Omega = +c\left[u(N) - u(M)\right]$$

$$I = \iint f(x,t)\,\mathrm{d}(x,t) = \int\limits_0^{\xi - c\tau} -\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x - c\,[u(\xi,\tau) - u(\xi - c\tau, 0)] +$$

$$+ c\left[\varphi_2\left(\frac{\xi + c\tau}{2}\right) - u(\xi,\tau)\right] - c\left[\varphi_2(0) - \varphi_2\left(\frac{\xi + ct}{2}\right)\right]$$



Wir integrieren nun über $(A, B, (\xi,\tau), C)$:

$$\iint f(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 2c\left[u(\xi - c\tau, 0) - u(\xi,\tau) + \varphi_2\left(\frac{\xi + c\tau}{2}\right) - \varphi_2\left(\frac{\xi - c\tau}{2}\right)\right]$$

$u(\xi,\tau)$ erhält man nun, indem man $u(\xi - c\tau, 0)$ eliminiert. Man setzt $u(\xi - c\tau, 0)$ aus Gleichung (1) in Gleichung (2) ein und erhält die Lösung:

$$0 \le \frac{\xi + c\tau}{2} \le x_0$$

$$0 \le \xi - c\tau \le 2x_0$$

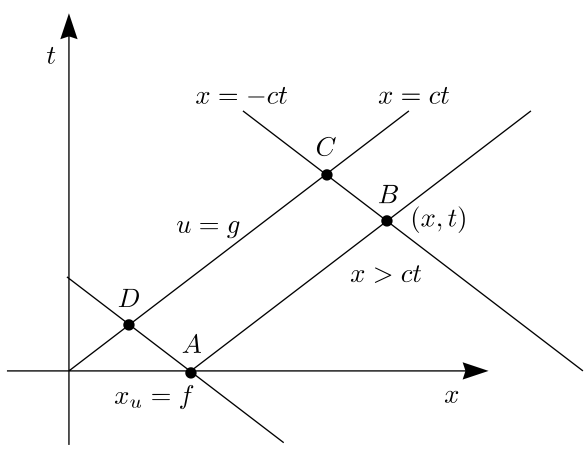
2.) <u>Gausat-Problem:</u>

Für $ct < x < \infty$ sei folgendes Problem gegeben:

$$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u(ct,t) = u\left(\tau, \frac{\tau}{c}\right) = g(t) \text{ für } t > 0,\ \tau = ct$$



Man erhält somit durch Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$

$f(x) = F(x) + G(x)$

$g(t) = F(2ct) + G(0)$

Damit können wir bestimmen:

$F(x) = g\left(\frac{x}{2c}\right) + G(0)$

$G(x) = f(x) - g\left(\frac{x}{2c}\right) - G(0)$

Dann erhält man die allgemeine Lösung, da $G(0)$ verschwindet:

$$\boxed{u(x,t) = g\left(\frac{1}{2c}(x+ct)\right) + f(x-ct) - g\left(\frac{1}{2c}(x-ct)\right)}$$

Durch eine Probe kann nun noch überprüft werden, daß die Anfangsbedingungen wirklich erfüllt sind. Wenn die Gleichung inhomogen ist, gehen wir folgendermaßen vor:

$Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$

$u(x,0) = f(x)$

$u(ct,t) = g(t)$ für $t > 0$

Wir führen eine Integration über das charakteristische Parallelogramm durch:

$$\boxed{u(x,t) = g\left(\frac{1}{2c}(x+ct)\right) + f(x-ct) - g\left(\frac{1}{2c}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\cdot \iint\limits_{(ABCD)} h(\xi,\tau)\,\mathrm{d}(\xi,\tau)}$$

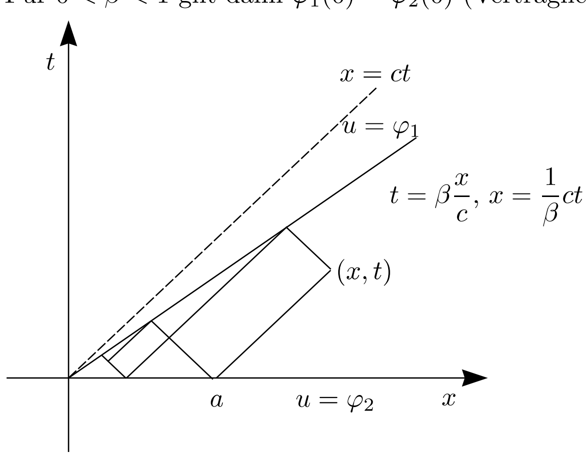
Dies kann durch einfaches Nachrechnen gezeigt werden. Betrachten wir nun folgendes Problem:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$u(x,0) = \varphi_1(x)$ für $0 \le x \le a$

$u\left(x, \beta\frac{x}{c}\right) = \varphi_2(x)$ für $0 \le x \le a$

Für $0 < \beta < 1$ gilt dann $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ (Verträglichkeitsbedingung).



Man kann somit eine Iteration aufstellen. Man erhält dann eine unendliche Folge immer kleiner werdender charakteristischer Parallelogramme. Wir wollen jedoch nun anders vorgehen. Dazu notieren wir uns die allgemeine Lösung:

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Durch Einsetzen der ersten Bedingung folgt:

$$\varphi_1(x) = F(x) + G(x)$$

$$\varphi_2(x) = F\left((1+\beta)x\right) + G\left((1-\beta)x\right)$$

Dann erhalten wir aus der ersten Gleichung:

$$F\left((1+\beta)x\right) = \varphi_1\left((1+\beta)x\right) - G\left((1+\beta)x\right)$$

Mit der zweiten Gleichung ergibt sich dann:

$$\varphi_2(x) - \varphi_1\left((1+\beta)x\right) = G\left((1-\beta)x\right) - G\left((1+\beta)x\right)$$

Wir führen nun neue Bezeichnungen ein:

$$(1+\beta)x =: X,\ \alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta} \text{ für } 0 < \beta < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$$

Damit folgt dann:

$$\varphi_2\left(\frac{X}{1+\beta}\right) - \varphi_1(X) = G\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}X\right) - G(X)$$

$$\varphi_2\left(\frac{X}{1+\beta}\right) - \varphi_1(X) = G(\alpha X) - G(X)$$

Die linke Seite ist uns natürlich immer bekannt; wir setzen diese gleich $P(X)$ und erhalten dann folgende Funktionalgleichung:

$$P(X) = G(\alpha X) - G(X) \text{ mit } 0 < \alpha < 1$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit -1:

$$-P(X) = G(X) - G(\alpha X)$$

Wir betrachten dies an der Stelle αX:

$$-P(\alpha X) = G(\alpha X) - G(\alpha^2 X)$$

$$-P(\alpha^2 X) = G(\alpha^2 X) - G(\alpha^3 X)$$

Wir addieren diese P, wobei sich eine Teleskopsumme ergibt:

$$-\sum_{j=0}^{n} P(\alpha^j X) = G(X) - G(\alpha^{n+1} X)$$

1.) Stetigkeit:
Die Funktion ist in x_0 stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varrho > 0$ gibt, so daß aus $x \in D$ und $|x - x_0| < \varrho = 0$ folgt, daß $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist.

2.) f ist stetig in $x_0 \in D$:

$$\lim_{x \mapsto x_0} f(x) = f(x_0)$$

Aus der Stetigkeit von G folgt:

$$G(X) - G(0) = -\sum_{j=0}^{\infty} P(\alpha^j X)$$

$$F(X) = \varphi_1(X) - G(0) + \sum_{j=0}^{\infty} P(\alpha^j X)$$

$$\boxed{u(x,t) = \varphi_1(x+ct) + \sum_{j=0}^{\infty} P\left(\alpha^j(x+ct)\right) - \sum_{j=0}^{\infty} P(\alpha^j(x-ct))}$$

Als Übung kann man Bedingungen an φ_1 und φ_2 stellen, so daß die Summe konvergent ist. Es muß aufspaltbar sein, so daß man $alpha^j(x)$ immer ausklammern kann (geometrische Reihe).

Beispiel:

Es sei $\varphi_1(x) = 0$ und $\varphi_2(x) = x^2$. Dann erhalten wir:

$$P(\alpha^j X) = \left(\frac{\alpha^j X}{1+\beta}\right)^2 = \alpha^{2j} \cdot \frac{X^2}{(1+\beta)^2}$$

Dann erhalten wir folgendes geometrische Reihe, deren Wert wir einfach berechnen können (siehe HM I):

$$u(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} \left[\frac{1}{(1+\beta)^2}\left[(x+ct)^2 - (x-ct)^2\right]\right] = \frac{4xct}{(1+\beta)^2} \cdot \frac{1}{1-\alpha^2} = \boxed{\frac{c}{\beta}xt}$$

2.4 Die Wellengleichung im halbunendlichen Intervall

Wir haben also folgendes Problem:

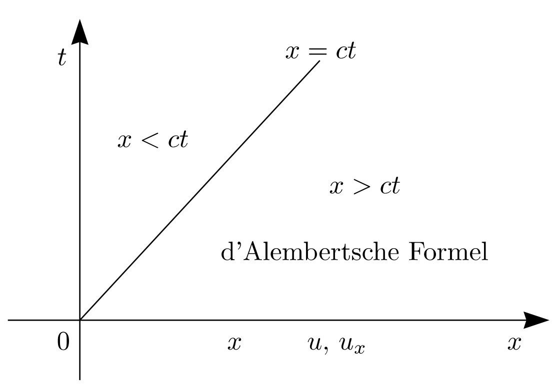
$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$ für $x > 0$, $t > 0$

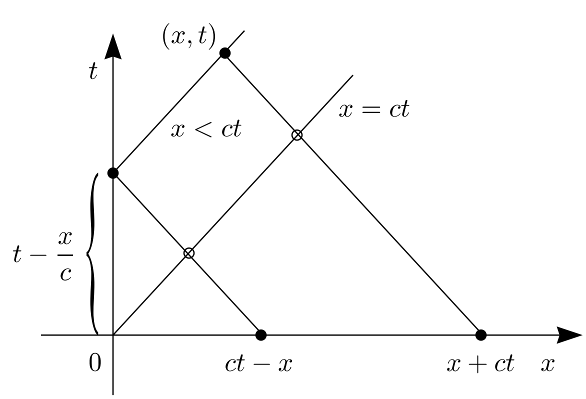
$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \Psi(x)$

Außerdem kann man eine Linearkombination verschiedener Randbedingungen vorgeben:

$\alpha u(0,t) - \beta u_x(0,t) = B(t)$ für $t > 0$

$\alpha\lambda(t) - \beta u_x(0,t) = B(t)$ für $t > 0$





Wir integrieren also über das Trapez T, wobei wir das Integral mit $F(x,t)$ bezeichnen wollen:

$$\iint\limits_T Lu\,\mathrm{d}(\xi,\tau) = A(x,t)$$

$$\iint\limits_T Lu\,\mathrm{d}(\xi,\tau) = -\int\limits_{ct-x}^{ct+x} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + c\left[u(x,t) - \varphi(x+ct)\right] - c\left[u\left(0, t - \frac{x}{c}\right) - u(x,t)\right] + c\left[\varphi(ct-x) - u\left(0, t-\frac{x}{c}\right)\right]$$

Mit der Abkürzung $\lambda(t) = u(0,t)$ erhalten wir durch Auflösen nach $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}F(x,t) + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{ct+x} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\right] + \lambda\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Wir betrachten nun den homogenen Fall $f(x,t) = 0$, womit auch $F(x,t) = 0$ folgt:

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2c}\left[\Psi(ct+x) + \Psi(ct-x)\right] + \frac{1}{2}\left[\varphi'(x+ct) + \varphi'(ct-x)\right] - \frac{1}{c}\lambda'\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Darüber hinaus gilt:

$$u(0,0) = \lim_{x\mapsto 0} u(x,0) = \varphi(0),\; u(0,0) = \lim_{t\mapsto 0} u(0,t) = \lambda(0) \Rightarrow \lambda(0) = \varphi(0)$$

$$u_x(0,t) = \frac{1}{c}\Psi(ct) + \varphi'(ct) - \frac{1}{c}\lambda'(t) \overset{!}{=} \frac{\alpha}{\beta}\lambda(t) - \frac{1}{\beta}B(t)$$

Wir erhalten nun:

$$\lambda'(t) + \frac{c\alpha}{\beta}\lambda(t) + \underbrace{\left(-\frac{c}{\beta}B(t) - \Psi(ct) - c\varphi'(ct)\right)}_{P(t)} = 0$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1.Ordnung der Form:

$$y'(x) + a(x)\cdot y(x) = r(x) \text{ mit } A(x) = \int\limits_{x_0}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s$$

Die allgemeine Lösung einer solchen Gleichung können wir angeben:

$$y = C\cdot\exp\left(-A(x)\right) + \exp\left(-A(x)\right)\cdot\int r(s)\exp(A(s))\,\mathrm{d}s$$

Falls $a(x)$ für $x_0 = 0$ konstant ist, geht die allgemeine Lösung über in:

$$\boxed{y(x) = C\cdot\exp(-a\cdot x) + \int r(s)\cdot\exp(a(s-x))\,\mathrm{d}s}$$

Wenden wir diese Formel nun auf unser ursprüngliches Problem an:

$$\lambda(t) = \varphi(ct) + \int\limits_0^t \exp\left[\frac{\alpha}{\beta}c(s-t)\right]\overbrace{\left(\frac{c}{\beta}B(s) + \Psi(cs) - c\frac{\alpha}{\beta}\varphi(s)\right)}^{-P(s)}\,\mathrm{d}s$$

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\Psi(s)\,\mathrm{d}s & \text{für} \quad x > ct \\[2ex] \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{x+ct}\Psi(s)\,\mathrm{d}s + \lambda\left(t-\frac{x}{c}\right)\;\left[u\left(0, t-\frac{x}{c}\right)\right] & \text{für} \quad 0 < x < ct \end{cases}}$$

Spezialfall $f = \varphi = \Psi = 0$:

$$\lambda(t) = \frac{c}{\beta} \int_0^t \exp\left[\frac{\alpha}{\beta} c\,(s-t)\right] B(s)\,\mathrm{d}s$$

Es resultiert die Lösung des Problems:

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x > ct \\ \dfrac{c}{\beta} \displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{c}} \exp\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(s - t + \frac{x}{c}\right)\right] B(s)\,\mathrm{d}s & \text{für} \quad x < ct \end{cases} \quad \text{für } \beta \neq 0}$$

Spezialfall $\alpha \neq 0,\ \beta = 0,\ f = 0$:

$$\boxed{u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s & \text{für} \quad x > ct \\ \dfrac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) - \Psi(ct-x)\right] + \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_{ct-x}^{ct+x} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \dfrac{1}{\alpha} B\left(t - \dfrac{x}{c}\right) & \text{für} \quad 0 < x < ct \end{cases}}$$

Als Übung kann folgendes gezeigt werden: u ist auch C^2 $(x > 0, t > 0)$, falls φ, $B \in C^2$, $\Psi \in C^1$, $\alpha\varphi(0) = B(0)$, $\alpha\Psi(0) = B'(0)$, $c^2\varphi''(0) = \frac{1}{\alpha}B''(0)$

2.5 Verschiedene Anfangswert-Randwertprobleme

2.5.1 Fortsetzungsmethode

Wir behandeln die Probleme (siehe Aufgabenblatt 6, Aufgabe 2)

$$P_1(f,\psi,\varphi,B) \begin{cases} Lu = u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & \text{für} \quad x > 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x) & \text{für} \quad x > 0 \text{ (Anfangsbedingung)} \\ u(0,t) = B(t) & \text{für} \quad t > 0 \text{ (Randbedingung)} \end{cases}$$

und $P_2(f,\varphi,\psi,B)$, das aus $P_1(f,\varphi,\psi,B)$ entsteht, wenn man die Randbedingung durch $u_x(0,t) = B(t)$ für $t > 0$ ersetzt.

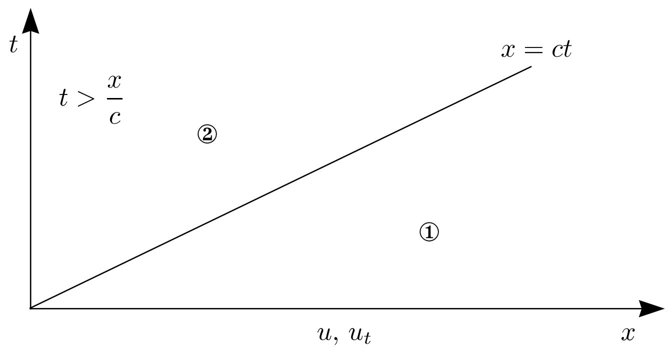
- 1.Schritt: Es genügt, $P_1(f,\varphi,\psi,0)$ ($P_2(f,\varphi,\psi,0)$) zu behandeln.
  - a.) Ist u_1 ($\widetilde{u}_1$) Lösung von $P_1(f,\varphi,\psi,0)$ ($P_2(f,\varphi,\psi,0)$) und u_2 ($\widetilde{u}_2$) Lösung von $P_1(0,0,0,B)$ ($P_2(0,0,0,B)$), so ist $u_1 + u_2$ ($\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2$) Lösung von $P_1(f,\varphi,\psi,B)$ ($P_2(f,\varphi,\psi,B)$).
  - b.) Ist w ($\widetilde{w}$) Lösung von $P_1(-B'', -B(0), -B'(0), 0)$ ($P_2(-xB'', -xB(0), -xB'(0), 0)$), so ist $u(x,t) = w(x,t) + B(t)$ ($\widetilde{u}(x,t) = \widetilde{w}(x,t) + B(t)$) Lösung von $P_1(0,0,0,B)$ ($P_2(0,0,0,B)$).
- 2.Schritt: Zur Lösung von $P_1(f,\varphi,\psi,0)$ ($P_2(f,\varphi,\psi,0)$) setze $f(0,t)$, φ, ψ ungerade (gerade) auf ganz $\mathbb{R}$ zu Funktionen $F(\bullet,t)$, Φ, Ψ fort:

Satz:

Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Sind ϕ, ψ, $F(0,t)$ gerade [ungerde] bezüglich x_0, dann ist auch $u(\circ, t)$ gemäß der D'ALEMBERTschen Formel gerade [ungerade] bezüglich x_0.

$$F(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{für} \quad x > 0 \\ \\ \pm f(-x,t) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}, \; \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{für} \quad x > 0 \\ \\ \pm\varphi(-x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{für} \quad x > 0 \\ \\ \pm\psi(-x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$



Dies betrachtet ist für $x \geq 0$ die Lösung unseres Problems $P_1(f, \varphi, \psi, 0)$, denn es gilt $u(\circ, t) > 0$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c} \cdot \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2s} \cdot \int\limits_{s=0}^{t} \int\limits_{y=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

Die Lösung von $P_1(f, \varphi, \psi, 0)$ $(P_2(f, \varphi, \psi, 0))$ ist also gegeben durch:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\Phi(x-ct) + \Phi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t} \int\limits_{y=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \text{ für } x \geq 0,\, t \geq 0}$$

Wir schreiben die Lösung in eine Form um, die f, ϕ und ψ beinhaltet:

1.) $0 < t < \frac{x}{c}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t} \int\limits_{y=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

2.) $0 < \frac{x}{c} < t$:

$$\Phi(x+ct) = \varphi(x+ct)$$

$$\Phi(x-ct) = -\Phi(ct-x) = -\varphi(ct-x)$$

$$\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{x-ct}^{0} \Psi(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{0}^{x+ct} \Psi(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{ct-x}^{ct+x} \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

Die Lösung für $P_1(0,\varphi,\psi,0)$ lautet damit:

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,\mathrm{d}s & \text{für}\quad 0<t<\frac{x}{c}\\[2ex] \frac{1}{2}\left[\phi(x+ct)-\phi(ct-x)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{ct-x}^{ct+x}\psi(s)\,\mathrm{d}s & \text{für}\quad 0<\frac{x}{c}<t\end{cases}$$

Der erste Term beschreibt die Reflexion am festen Ende.

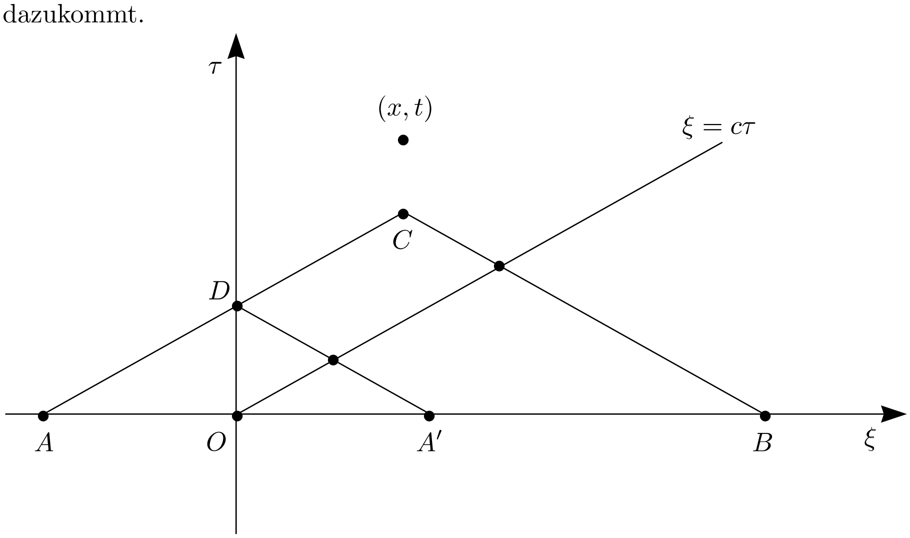
Drückt man auf der rechten Seite die Hilfsfunktionen Φ, Ψ und F durch die gegebenen Funktionen φ, ψ und f aus, so erhält man die Formel am Ende von Z11, bei der für $0<t<\frac{x}{c}$ der Form

$$\frac{1}{2c}\int\limits_{s=0}^{t}\int\limits_{y=x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

dazukommt und für $0<\frac{x}{c}<t$ der Term $\frac{1}{\alpha}B\left(t-\frac{x}{c}\right)$ wegfällt und das Integral über das Viereck (A'BCD)

$$\boxed{\iint\limits_{A'BCD} f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \text{ mit } A=(ct-x,0),\ B=(x+ct,0),\ C=(x,t),\ D=\left(0,t-\frac{x}{c}\right)}$$

dazukommt.



$$\int\limits_{\triangle(ABC)}=\int\limits_{\triangle(AOD)}+\int\limits_{\square(OBCD)}=-\int\limits_{\triangle(OA'D)}+\int\limits_{\square(OBCD)}=\int\limits_{\square(A'BCD)}$$

Satz:

Es sei $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig.

i.) Sind ϕ, ψ, $F(\bullet,t)$ ungerade bezüglich x_0, dann ist auch $u(\bullet,t)$ gemäß der D'ALEMBERTschen Formel ungerade bezüglich x_0. Das heißt, es gilt:

$u(x_0+x,t)=-u(x_0-x,t)\,\forall\,t>0,\,\forall\,x>0$

Daraus folgt dann $u(x_0,t)=0$. ($\tilde{P}_1$: $u(0,t)=B(t)=0$)

ii.) Sind ϕ, ψ, $F(\bullet,t)$ gerade bezüglich x_0, dann ist auch $u(\bullet,t)$ gemäß der D'ALEMBERTschen Formel gerade bezüglich x_0. Das heißt, es gilt:

$$u(x_0+x,t) = +u(x_0-x,t)\,\forall\, t>0,\,\forall\, x$$

Daraus ergibt sich $u_x(x_0,t)=0$. (Siehe $\tilde{P}_2$: $u_x(0,t)=B(t)=0$)

Beweis von i.):

$$u_1(x_0+x,t) = \phi(x_0+(x+ct)) + \phi\left(x_0+(x-ct)\right) = -\phi\left((x_0-x)-ct\right) - \phi\left((x_0-x)+ct\right) = u_1\left(x_0-x,t\right)$$

$$u_2(x_0+x,t) = \int\limits_{x_0+x-ct}^{x_0+x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s \underset{\tau=x_0-s}{=} \int\limits_{-x-ct}^{-x+ct} \psi(x_0-\tau)\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\int\limits_{-x-ct}^{-x+ct} \psi(x_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau \underset{s=x_0+\tau}{=} -\int\limits_{(x_0-x)-ct}^{(x_0-x)+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s = u_2(x_0-x,t)$$

2.6 Die Wellengleichung auf einem endlichen Intervall

Es liegt das Problem

$$(P) = P(f,\varphi,\psi,B_1,B_2)\begin{cases} Lu = u_{tt}-c^2u_{xx} = f(x,t) & \text{für}\quad 0\leq x\leq l,\ t\geq 0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) & \text{für}\quad 0\leq x\leq l \\ u(0,t)=B_1(t),\ u(l,t)=B_2(t) & \text{für}\quad t\geq 0 \\ [u_x(0,t)=B_1(t),\ u_x(l,t)=B_2(t)] & \text{für}\quad t\geq 0 \\ [\alpha u_x(0,t)+\alpha_2 u(0,t)=B_1(t)] & \end{cases}$$

vor. Würden Lösungen in $C^2((0,l),x(t>0))\cap C^1([0,l]\times(t\geq 0))$ gesucht, so hat man die Verträglichkeitsbedingungen zu beachten.

$$\varphi(0)=B_1(0),\ \varphi(l)=B_2(0),\ \psi(0)=B_1'(0),\ \psi(l)=B_2'(0)$$

- 1.Schritt: Transformation der Randbedingungen zu 0

  $U=U(x,t)$ wird gemäß $U(0,t)=B_1(t)$, $U(l,t)=B_2(t)$ gewählt. $u(x,t)=U(x,t)+w(x,t)$ ist genau dann Lösung von (P), wenn w Lösung des Problems $P(\widetilde{f},\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi},0,0)$ mit homogenen Randbedingungen ist. Betrachten wir das Problem für w:

  $$Lw(x,t) = f(x,t) - Lu(x,t) = \tilde{f}(x,t)$$

  $$w(x,0) = \varphi(x)-u(x,0) = \tilde{\varphi}(x)$$

  $$w_t(x,0) = \psi(x)-u_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)$$

  $$w(0,t) = B_1(t)-u(0,t) = \boxed{0},\ w(l,t) = B_2(t)-u(l,t) = \boxed{0}$$

- 2.Schritt:

  Das Lösen von $P(f,\varphi,\psi,0,0)$ wird zerlegt durch Lösen der Probleme $P_1(0,\varphi,0,0,0)$, $P_2(0,0,\psi,0,0)$, $P_3(f,0,0,0,0)$. Die Summe der Einzellösungen u_1, u_2, u_3 ergibt sich Lösung von $P(f,\varphi,\psi,0,0)$.

- 3.Schritt: $P_1(0,\varphi,0,0,0)$, $P_2(0,0,\psi,0,0)$

  Bei P_1 und P_2 handelt es sich um die freie Schwingung einer eingespannten Saite. P_3 ist eine erzwungene Schwingung. Die Probleme P_1 und P_2 löst man mittels eines Separationsansatzes und P_3 mit der Methode von DUHAMEL. Der Separationsansatz $u(x,t)=\alpha(x)\beta(t)$ liefert für $n=1,\,2,\,\ldots$ zunächst:

  $$u_n^{(1)}(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \text{ und } u_n^{(2)}(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)$$

Mit $\hat{\varphi}_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi \quad (n = 1, 2, \ldots)$ und $\hat{\psi}_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi \quad (n = 1, 2, \ldots)$ (FOURIER- koeffizienten) erhält man als Lösungskandidaten für $P_1(0,\varphi,0,0,0)$

$$u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\varphi}_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

nd als Kandidaten für $P_2(0,0,\psi,0,0)$

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{n\pi c}\hat{\psi}_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Dies sind Lösungen im oben formulierten (zweimal stetig differenzierbar) Sinn, falls für die Fourierkoeffizienten $\hat{\varphi}_n$, $\hat{\psi}_n$ erfüllt sind:

$$\hat{\varphi}_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right),\ \hat{\psi}_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ für } n \mapsto \infty$$

Dies gilt beispielsweise, wenn folgendes erfüllt ist:

$$\varphi \in C^4[0,l],\ \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$$

$$\psi \in C^3[0,l],\ \psi(0) = \psi(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0$$

Man kommt mit deutlich schwächeren Bedingungen aus: siehe HM-Skript SCHNEIDER, KNAB: §17, Satz 17.57. Sind diese Bedingungen nicht oder nur teilweise erfüllt (die Reihen sollen konvergent sein), so spricht man wieder von verallgemeinerten Lösungen von $P_1(0,\varphi,0,0,0)$ und $P_2(0,0,\psi,0,0)$. In diesem Sinn ist jetzt mit $\omega_n = \frac{n\pi}{l}c$

$$\boxed{u_0(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{\varphi}_n\cos(\omega_n t) + \frac{1}{\omega_n}\hat{\psi}_n\sin(\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)}$$

eine Lösung von $P_1(0,\varphi,0,0,0) + P_2(0,0,\psi,0,0) = P(0,\varphi,\psi,0,0)$.

Führen wir diese Schritte nun ausführlich aus. Der erste Schritt ist eine Transformation der Randbedingungen zu Null. Wir verwenden den Ansatz $u(x,t) = U(x,t) + w(x,t)$, welcher das Problem für w liefert:

$$Lw(x,t) = f(x,t) - LU(x,t) = \tilde{f}(x,t)$$

$$w(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) = \tilde{\varphi}(x);\ w_t(x,0) = \psi(x) - U_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)$$

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= B_1(t) - U(0,t) \stackrel{!}{=} 0 \\ w(l,t) &= B_2(t) - U(l,t) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}\right\}\text{Bedingung an } U$$

Wähle $U(x,t) = B_1(t) + \frac{x}{l}\left(B_2(t) - B_1(t)\right)$. Damit löst dann w folgendes Problem mit homogenen Randbedingungen:

$$Lw(x,t) = \tilde{f}(x,t)$$

$$w(x,0) = \tilde{\varphi}(x),\ w_t(x,0) = \tilde{\psi}(x)$$

$$w(0,t) = w(l,t) = 0$$

Nach Schritt ② Wir zerlegen in $P_1(0,\varphi,0,0,0)$, $P_2(0,0,\psi,0,0)$ und $P_3(f,0,0,0,0)$:

$$P_1\begin{cases} Lu = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases},\ P_2\begin{cases} Lu = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases},\ P_3\begin{cases} Lu = f \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Die Probleme P_1 und P_2 beschreiben die freie Schwingung einer eingespannten Saite (Separationsmethode). Bei P_3 handelt es sich um eine erzwungene Schwingung (äußere Kräfte) (Duhamel-Methode). Wir verwenden nach Schritt ③ den Ansatz $u(x,t) = \alpha(x)\beta(t)$ für P_1, P_2. Durch Einsetzen folgt dann:

$$\alpha(x)\ddot{\beta}(t) - c^2\alpha''(x)\beta(t) = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\beta}(t)}{\beta(t)} = \frac{\alpha''(x)}{\alpha(x)} = \mu = \text{const.}$$

$\alpha''(x) - \mu\alpha(x) = 0$ für $0 \leq x \leq l$, $\alpha(0) = \alpha(l) = 0$

$\ddot{\beta}(t) - c^2\mu\beta(t) = 0$ für $t \geq 0$, $\beta(0) = 0$

1.) $\alpha(x)\beta(0) = \varphi(x)$ (bleibt offen)

2.) $\alpha(x)\dot{\beta}(0) = 0$

3.) $\alpha(0)\beta(t) = \alpha(l)\beta(t) = 0$

Die Lösung des Randwertproblems ergibt sich zu $\alpha(x) = \exp(\lambda x)$. Daraus erhalten wir $\lambda^2 = \mu$ und somit $\lambda = \pm\sqrt{\mu}$. Die allgemeine Lösung lautet damit:

$$\alpha(x) = C_1 \exp\left(\sqrt{\mu}x\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\mu}x\right)$$

Aus $\alpha(0) = C_1 + C_2 \stackrel{!}{=} 0$ folgt $C_1 = -C_2$ und weiterhin:

$$\boxed{\alpha(x) = C_1\left[\exp\left(\sqrt{\mu}x\right) - \exp\left(-\sqrt{\mu}x\right)\right]}$$

$\alpha(l) \stackrel{!}{=} 0 = C_1\left[\exp\left(\sqrt{\mu}l\right) - \exp\left(-\sqrt{\mu}l\right)\right] \Rightarrow \left[\exp\left(\sqrt{\mu}l\right) - \exp\left(-\sqrt{\mu}l\right)\right] = 0$

Aus $\exp\left(2\sqrt{\mu}l\right) = 1 = \exp\left(2\pi\mathrm{i}\cdot n\right)$ erhalten wir $\sqrt{\mu}l = n\pi\mathrm{i}$ und daraus wiederum $\sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{l}\mathrm{i}$.

$$\boxed{\alpha_n(x) = C_1\left[\exp\left(\frac{n\pi}{l}\mathrm{i}\cdot x\right) - \exp\left(-\frac{n\pi}{l}\mathrm{i}\cdot x\right)\right] = \tilde{C}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right),\ \alpha(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \text{ für } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots}$$

Mit $\mu = -\frac{n^2\pi^2}{l^2}$ lautet das Problem für $\beta(t)$:

$$\ddot{\beta}(t) + c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}\beta(t) = 0 \text{ mit } \dot{\beta}(0) = 0$$

Diese Differentialgleichung besitzt folgende Lösung:

$$\beta_n(t) = \cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \text{ für } n = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Wir erhalten schließlich das Gesamtergebnis:

$$\boxed{u_n(x,t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right) \text{ für } n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots}$$

Des weiteren ist die Bedingung $u(x,0) = \varphi(x)$ zu erfüllen. Wir machen dabei folgenden Ansatz: Gesucht sind Zahlen A_n ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) derart, daß für $\varphi(x)$ gilt:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t)\bigg|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)\bigg|_{t=0}$$

Falls die Reihe „genügend konvergent“ ist, gilt:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Hierbei handelt es sich gerade um die Fourierreihe von $\varphi(x)$. Das ist erfüllt, wenn die A_n die Fourierkoeffizienten der nach $-l \leq x \leq l$ ungeraden fortgesetzten $2l$-periodischen Funktion $\phi(x)$ mit $\phi|_{[0,l]}\, \varphi$ sind.

$$\boxed{A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi = \hat{\varphi}_n \text{ für } n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots}$$

Hierbei handelt es sich um die Fouriertransformierte. Die Lösung von P_1 ist dann:

$$\boxed{u_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\hat{\varphi}_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)}$$

u_{1xx}, u_{1tt} muß eine konvergente Reihe liefern, also muß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2|\hat{\varphi}_n|^2$ $(\sim \frac{1}{n^2};\ \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ für $\varepsilon > 0)$ konvergieren. Als Übung kann durch viermaliges partielles Integrieren gezeigt werden:

$$\hat{\varphi}_n = \int\limits_0^t \varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi$$

Beim Lösen des Problems P_2 erhalten wir analog folgende Bedingungen:

$$\mu = -\frac{n^2\pi^2}{l^2},\ \beta(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}c^2\beta(t) = 0 \text{ mit } \beta(0) = 0$$

Diese Gleichung wird gelöst durch:

$$\beta_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)$$

$$u_n(x,t) = \alpha_n(x)\beta_n(t) = \boxed{\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}ct\right)}$$

Dies erfüllt dann alle Bedingungen bis auf $\psi(x) = u_t(x,0)$. Gesucht sind also Zahlen B_n mit:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{n\pi}{l}c\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Dies läßt sich wieder durch Fouriertransformation verwirklichen:

$$\boxed{B_n\frac{n\pi}{l} = \hat{\psi}_n \text{ mit } \hat{\psi}_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi}$$

Damit gilt für das Problem P_2:

$$\boxed{u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n}{n\pi c}l\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{l}ct\right)}$$

Durch Addition der Einzellösungen $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$, also durch

$$(u_1 + u_2) = u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\hat{\varphi}_n\cos(\omega_n t) + \frac{\hat{\psi}_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \text{ mit } \omega_n = \frac{n\cdot\pi\cdot c}{l}$$

ergibt sich die Lösung von:

$Lu_0 = 0$

$u_0(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$

$u_0(0,t) = u_0(l,t) = 0$

durch Superposition unendlich vieler Lösungen (Reihen). Hierbei handelt es sich um eine Entwicklung nach stehenden Wellen. Wir setzen nun:

$$\hat{\varphi}_n \cos(\omega_n t) + \frac{\hat{\psi}_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) = \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n)$$

Wie berechnet man nun die α_n und δ_n? Dazu benötigen wir erst einmal die Additionstheoreme:

$$\alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n) = \alpha_n \cos(\omega_n t) \cos(\omega_n \delta_n) - \alpha_n \sin(\omega_n t) \sin(\omega_n \delta_n)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\hat{\varphi}_n = \alpha_n \cos(\omega_n \delta_n) \text{ und } -\frac{\hat{\psi}_n}{\omega_n} = \alpha_n \sin(\omega_n \delta_n)$$

δ_n folgt aus der Division und anschließenden Anwendung des Arkustangens. Die α_n erhält man durch Quadrieren und Addition beider Gleichungen. Daraus resultiert dann:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

$$u_0^{(n)}(x,t) = \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

Dabei handelt es sich um eine stehende Welle:

- Knoten:

$$\boxed{x_k = \frac{l}{n} k \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n-1 : u_0(x_k, t) = 0 \,\forall\, t}$$

- Bäuche:

$$\boxed{\tilde{x}_k = \frac{2k+1}{2n} l \text{ für } k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Bei $u_0^{(n)}(x,t)$ schwingt jeder Punkt mit derselben Frequenz $\omega_n = \frac{n\pi}{l} c$. Des weiteren gilt ja bekanntlich $\omega_n = 2\pi\nu_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} c$. Daraus folgen dann die möglichen Wellenlängen λ_n und Frequenzen ν_n auf der Saite der Länge l:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{\omega_n} c = \frac{2l}{n},\ \nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2l}}$$

$\nu_1 = \frac{c}{2l}$ wird Grundfrequenz genannt; die anderen Frequenzen ergeben sich durch $\nu_n = n\nu_1$.

$$\varrho u_{tt} - T u_{xx} = 0 \text{ mit } c = \sqrt{\frac{T}{\varrho}} \text{ und } \nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}$$

u_0 löst $P(0,\varphi,\psi,0,0)$, also $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$. Die allgemeine Lösung der Gleichung ist $u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct)$ (Entwicklung nach fortschreitenden Wellen, Additionstheorem!).

$$u_0^{(n)}(x,t)=\hat{\varphi}_n\cos(\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{c}x\right)+\frac{\hat{\psi}_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\hat{\varphi}_n\left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)\right]+\frac{1}{2}\frac{\hat{\psi}_n}{\omega_n}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)-\cos\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)\right]$$

Für die Lösung von $P_2(0,0,\psi,0,0)$ gilt:

$$u_2(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\hat{\psi}_n}{\omega_n}\sin(\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

Wir betrachten nun wieder $P_3(f,0,0,0,0)$:

$$P_3(f,0,0,0,0)=\begin{cases} Lu=f(x,t) & \text{für}\quad 0\le x\le l,\ t\ge 0\\ u(0,t)=u(l,t)=0 & \text{für}\quad t\ge 0\\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 & \text{für}\quad 0\le x\le l\end{cases}$$

Hier bietet sich dann die Methode von DUHAMEL an. Löse für $0\le\eta\le t$ das Problem P:

$$P=\begin{cases} Lu=0 & \text{für}\quad 0\le x\le l,\ t\ge\eta\\ u(0,t)=u(l,t)=0 & \text{für}\quad t\ge\eta\\ u(x,\eta)=0,\ u_t(x,\eta)=f(x,\eta) & \text{für}\quad 0\le x\le l\end{cases}$$

Man erhält dadurch also das Problem P_2 mit verschiedenen Anfangsbedingungen.

$$u(x,t,\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{f}_n(\eta)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\hat{f}_n(\eta)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi$$

Mit dem Prinzip von DUHAMEL erhält man nun:

$$u_3(x,t)=\int\limits_{\eta=0}^{t}u(x,t,\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

$$\boxed{u_3(x,t)=\int\limits_{\eta=0}^{t}\int\limits_{\xi=0}^{l}\underbrace{\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\right]}_{G(x,\xi,t-\eta)}f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta}$$

$G(x,\xi,t-\eta)$ ist die sogenannte GREENsche Funktion des hier betrachteten Anfangswert-Randwert-Problems.

$$\iint(LG)f=f(x,t)$$

Wir machen die Probe:

$$u_{3tt}-c^2u_{3xx}=f(x,t)$$

$$u_{3tt}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\int\limits_{\xi=0}^{l}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\cos\omega_n(t-\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\right]f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=$$
$$=\int\limits_{\xi=0}^{l}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\right]f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi-\int\limits_0^t\int\limits_{\xi=0}^{l}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\omega_n\sin\omega_n(t-\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\right]f(\xi,\eta)$$

$$u_{3xx}(x,t) = -\int\limits_0^t \int\limits_{\xi=0}^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\frac{1}{\omega_n}\frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\omega_n(t-\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\right] f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

$$-c^2u_{3xx}(x,t) = +\int\limits_0^t \int\limits_{\xi=0}^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\frac{1}{\omega_n}c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\omega_n(t-\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\right] f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

Darüber hinaus gilt ja nun:

$$c^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}\cdot\frac{1}{\omega_n} = \omega_n^2\cdot\frac{1}{\omega_n} = \omega_n$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$u_{3tt} - c^2u_{3xx} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int\limits_{\xi=0}^l f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\,\mathrm{d}\xi\right]\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x,t)$$

Es handelt sich gerade um die Fouriertransformierte von $f(x,t)$. Die Probe geht folglich auf!

Problem $P(0,\varphi,\Psi,B_1,B_2)$:

Wir behandeln nun die zweite Methode zur Lösung von $P(0,\varphi,\Psi,B_1,B_2)$:

- 1.Schritt:

  Wir erstellen als erstes eine ungerade Fortsetzung von φ, Ψ nach $[-l,0]$. Ausgehend davon wollen wir eine auf ganz $\mathbb{R}$ $2l$-periodische Funktion erhalten. Das Problem ohne Randbedingungen kann mit der D'ALEMBERTschen Formel gelöst werden.

- 2.Schritt: Lösung von $P(0,0,0,B_1,B_2)$:

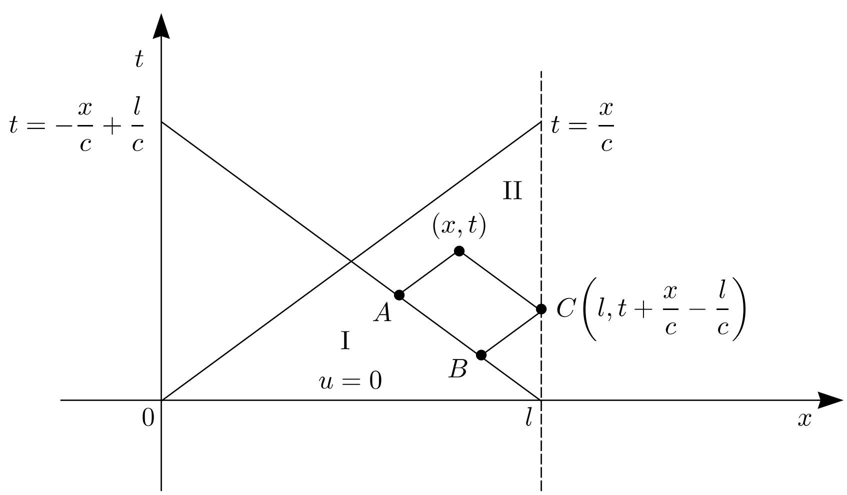
  $$P(0,0,0,B_1,B_2)\begin{cases} u_{tt} - c^2u_{xx} = 0 & \text{für} \quad 0\leq x\leq l,\ t\geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{für} \quad 0\leq x\leq l \\ u(0,t) = B_1(t),\ u(l,t) = B_2(t) & \end{cases}$$

  Der Ausgangspunkt ist nun:

  $$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

  Gesucht sind f und g. Wir definieren folgendes:

  $$\overline{B}_1(t) = \begin{cases} B_1(t) & \text{für} \quad t\geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t<0 \end{cases};\ \overline{B}_2(t) = \begin{cases} B_2(t) & \text{für} \quad t\geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad t<0 \end{cases}$$



Im Gebiet I gilt:

$$u(x,t) = 0 \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \text{ und } 0 \leq t \leq -\frac{x}{c} + \frac{l}{c}$$

Für das Gebiet II folgt durch Umlaufen des eingezeichneten Parallelogramms:

$$u(x,t) - \underbrace{u(A)}_{0} + \underbrace{u(B)}_{0} - u(C) = 0$$

$$u(x,t) = B_2\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right) \text{ für } -\frac{x}{c} + \frac{l}{c} \leq t \leq \frac{x}{c}$$

Daraus ergibt sich dann:

$$u(x,t) = \overline{B}_2\left(t + \frac{x}{c} - \frac{l}{c}\right) \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{x}{c}$$

Ein Vergleich mit oben liefert dann $f(s) = 0$ für $s \leq 0$. Wir setzen nun die entsprechenden Randbedingungen ein. Für $x = 0$ folgt:

$$\overline{B}_1(t) = f(t) + g(t)$$

Daraus resultiert nun auch $g(s) = 0$ für $s \leq 0$. Gesucht sind f und g – definiert auf ganz $\mathbb{R}$ – derart, daß $u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ Lösung wird. Für $x = l$ erhalten wir außerdem:

$$\overline{B}_2(t) = f\left(t - \frac{l}{c}\right) + g\left(t + \frac{l}{c}\right)$$

Wir ersetzen in der obigen Darstellung (siehe vorherige Seite) für $\overline{B}_1(t)$ die Variable t durch $t - \frac{l}{c}$:

$$\overline{B}_1\left(t - \frac{l}{c}\right) = f\left(t - \frac{l}{c}\right) + g\left(t - \frac{l}{c}\right)$$

Durch Subtraktion der letzten beiden Gleichungen folgt dann:

$$\overline{B}_2(t) - \overline{B}_1\left(t - \frac{l}{c}\right) = g\left(t + \frac{l}{c}\right) - g\left(t - \frac{l}{c}\right) =: p(t)$$

Nun machen wir das gleiche Spiel mit $\overline{B}_2(t)$ mit der Substitution $t \mapsto t - \frac{l}{c}$:

$$\overline{B}_2\left(t - \frac{l}{c}\right) = f\left(t - \frac{2l}{c}\right) + g(t)$$

Auch hier ergibt sich wieder durch Subtraktion:

$$\overline{B}_1(t) - \overline{B}_2\left(t - \frac{l}{c}\right) = f(t) - f\left(t - \frac{2l}{c}\right) =: q(t)$$

Es wir t durch $t - 2n\frac{l}{c}$ ersetzt und aufsummiert:

$$\sum_{n=0}^{k} p\left(t - 2n\frac{l}{c}\right) = \sum_{n=0}^{k}\left[g\left(t - (2n-1)\frac{l}{c}\right) - g\left(t - (2n+1)\frac{l}{c}\right)\right]$$

Hierbei handelt es sich offensichtlich um eine Teleskopsumme folgender Bauart:

$$\sum_{n=0}^{l}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots$$

Angewendet auf unser Problem ergibt sich:

$$\sum_{n=0}^{k} p\left(t-2n\frac{l}{c}\right)=g\left(t+\frac{l}{c}\right)-g\left(t-(2k+1)\frac{l}{c}\right)$$

Wir machen an dieser Stelle die Ersetzung $t \mapsto t-\frac{l}{c}$ und lösen nach $g(t)$ bzw. $f(t)$ auf:

$$g(t)=g\left(t-2(k+1)\frac{l}{c}\right)+\sum_{n=0}^{k} p\left(t-(2n+1)\frac{l}{c}\right),\ f(t)=f\left(t-2(k+1)\frac{l}{c}\right)+\sum_{n=0}^{k} q\left(t-2n\frac{l}{c}\right)$$

Wir lassen $k \mapsto \infty$ laufen:

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty} p\left(t-(2n+1)\frac{l}{c}\right),\ f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} q\left(t-2n\frac{l}{c}\right)$$

Es folgt dann:

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{B}_1\left(t-\frac{x}{c}-2n\frac{l}{c}\right)-\overline{B}_2\left(t-\frac{x}{c}-(2n+1)\frac{l}{c}\right)\right]+\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{B}_2\left(t+\frac{x}{c}-(2n+1)\frac{l}{c}\right)-\overline{B}_1\left(t+\frac{x}{c}-2(n+1)\frac{l}{c}\right)\right]=\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir:

$$\boxed{\begin{aligned}u(x,t)=\overline{B}_1\left(t-\frac{x}{c}\right)&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\overline{B}_1\left(t-\frac{x}{c}-2n\frac{l}{c}\right)-\overline{B}_1\left(t+\frac{x}{c}-2n\frac{l}{c}\right)\right]+\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{B}_2\left(t+\frac{x}{c}-(2n+1)\frac{l}{c}\right)-\overline{B}_2\left(t-\frac{x}{c}-(2n+1)\frac{l}{c}\right)\right]\end{aligned}}$$

Wir machen die Probe. Dabei stellen wir fest, daß sowohl $u(x,0)=0$ als auch $u_t(x,0)=0$ erfüllt sind. Des weiteren gilt:

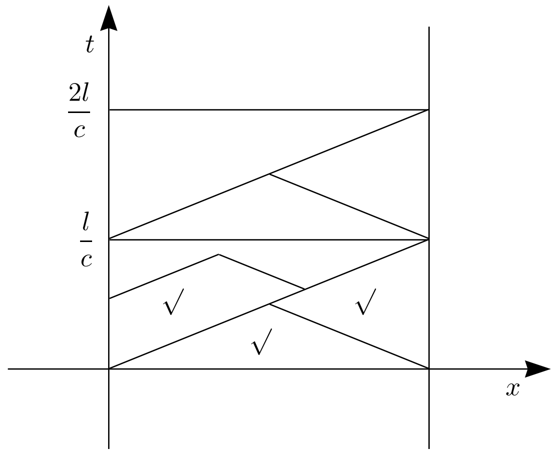
$$u(0,t)=\overline{B}_1(t)-B_1(t) \text{ für } t\geq 0$$

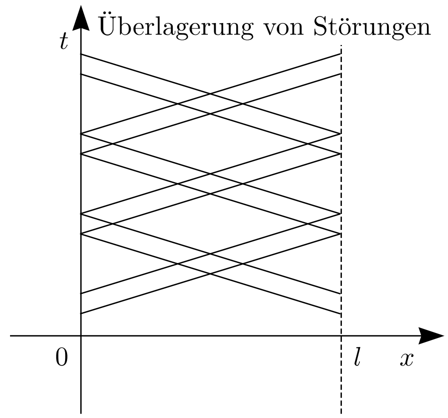
$$\begin{aligned}u(l,t)=\overline{B}_1\left(t-\frac{l}{c}\right)&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\overline{B}_1\left(t-(2n+1)\frac{l}{c}\right)-B_1\left(t-(2n-1)\frac{l}{c}\right)\right]+\\&\sum_{n=0}^{\infty}\left[\overline{B}_2\left(t-2n\frac{l}{c}\right)-\overline{B}_2\left(t-2(n+1)\frac{l}{c}\right)\right]\end{aligned}$$

Mit der Tatsache, daß es sich schon wieder um eine Teleskopsumme handelt, resultiert:

$$u(l,t)=\overline{B}_1\left(t-\frac{l}{c}\right)-\overline{B}_1\left(t-\frac{l}{c}\right)+\overline{B}_2(t)=\overline{B}_2(t)=B_2(t)$$

Damit geht die Probe auf.





(Siehe Aufgabenblatt 6, Aufgabe 1)

2.6.1 Transmissionsprobleme

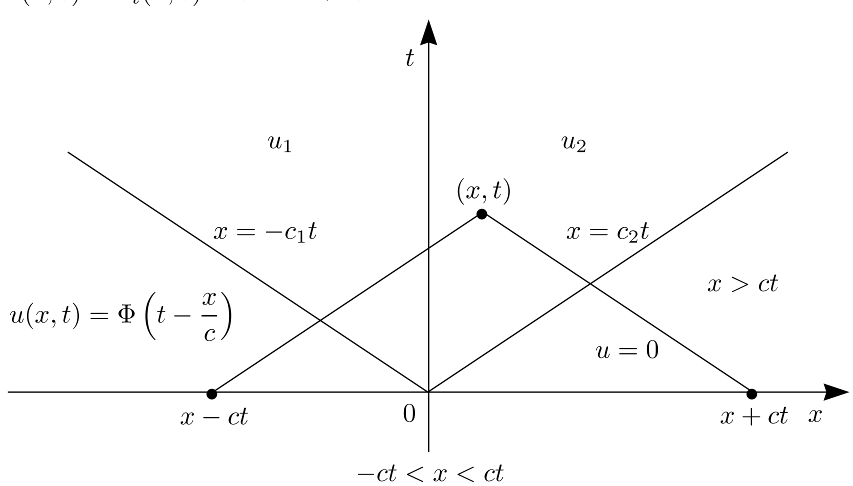
Angenommen, wir haben zwei Saiten mit verschiedenen physikalischen Eigenschaften (ϱ, c), die aber an einer Stelle fest miteinander verbunden sind: Die Wellengleichungen für getrennten Probleme lauten dann:

$$Lu = \begin{cases} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} = 0 & \text{für} \quad x < 0 \text{ und } t \geq 0 \\ u_{tt} - c_2^2 u_{xx} = 0 & \text{für} \quad x > 0 \text{ und } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \text{ für } x > 0$$

Die Lösung des Anfangswertproblems $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ (für $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$) ist:

$$u(x,t) = \begin{cases} \Phi\left(t - \frac{x}{c}\right) & \text{für} \quad x < ct \quad \text{mit} \left.\begin{cases} u(x,0) = \Phi\left(-\frac{x}{c}\right) \\ u_t(x,0) = \Phi'\left(-\frac{x}{c}\right) \end{cases}\right\} x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x > ct \end{cases}$$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ für $x > 0$



$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(-\frac{x-ct}{c}\right) + 0\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} \Phi'\left(-\frac{s}{c}\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\Phi\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(t - \frac{x}{c}\right) - \underbrace{\frac{1}{2}\Phi(0)}_{\overset{!}{=}0}$$

Gesucht ist

$$u(x,t) = \begin{cases} u^{(1)}(x,t) & \text{für} \quad x < 0,\ t > 0 \\ u^{(2)}(x,t) & \text{für} \quad x > 0,\ t > 0 \end{cases}$$

mit $u_{tt} - c_1^2 u_{xx} = 0$ für $t \geq 0$, $x < 0$ und $u_{tt} - c_2^2 u_{xx} = 0$ für $t \geq 0$, $x > 0$ mit den folgenden Bedingungen:

$u(x,0) = \Phi\left(-\frac{x}{c_1}\right)$ für $x < 0$, $u(x,0) = 0$ für $x > 0$

$u_t(x,0) = \Phi'\left(-\frac{x}{c_1}\right)$ für $x < 0$, $u_t(x,0) = 0$ für $x > 0$

Die **Übergangsbedingungen** (Matching Conditions) stellen nun einen Zusammenhang zwischen den beiden Problemen her:

$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t)$

$u_x^{(1)}(0,t) = u_x^{(2)}(0,t)$

Wir können die allgemeine Lösung der beiden Gleichungen hinschreiben:

$u^{(1)}(x,t) = F_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + G_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right)$

$u^{(2)}(x,t) = F_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right) + G_2\left(t + \frac{x}{c_2}\right)$

- $x > c_2 t$:

  $u^{(2)}(x,t) = 0$ für $x > c_2 t \qquad (1)$

- $x < -c_1 t$:

  $u^{(1)}(x,t) = \Phi\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \qquad (3)$

- $0 < x < c_2 t$:

  $u^{(2)}(x,t) = F_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \qquad (2)$

  F_2 ist durch Randbedingungen bestimmbar.

- $-c_1 t < x < 0$:

  $u^{(1)}(x,t) = \Phi\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + G_1\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \qquad (4)$

  $\Phi(0) = 0$, $F_2(0) = 0$, $G_1(0) = 0$

Hier hilft die Vorstellung von ein- und auslaufenden Wellen weiter. (1) ist logisch, da es sich um ein halboffenes Intervall handelt. Für $x < 0$ sind die Anfangsbedingungen zu erfüllen; deshalb ist (4) die allgemeine Lösung. (3) hat die Struktur von (2), nur ist alles verdreht. Zu bestimmen sind nun noch die Funktionen F_1 und G_1. Mittels der Übergangsbedingungen folgt nun:

$u^{(1)}(0,t) = \Phi(t) + G_1(t) \stackrel{!}{=} F_2(t) = u^{(2)}(0,t)$

$u_x^{(1)}(0,t) - \frac{1}{c_1}\Phi'(t) + \frac{1}{c_1}G_1'(t) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{c_2}F_2'(t) = u_x^{(2)}(0,t)$

Man erhält dann folgende einfache Differentialgleichungen:

$F_2'(t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}\Phi'$

$G_1'(t) = \dfrac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}\Phi'$

Durch Integration erhält man dann:

$$F_2(t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}\Phi(t)$$

$$G_1(t) = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}\Phi(t)$$

Also gilt:

- $x > c_2 t$:

  $u^{(2)}(x,t) = 0$ für $x > c_2 t$

- $x < -c_1 t$:

  $$u^{(1)}(x,t) = \Phi\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$$

- $0 < x < c_2 t$:

  $$\boxed{u^{(2)}(x,t) = \frac{2c_2}{c_1 + c_2}\Phi\left(t - \frac{x}{c_2}\right)} \qquad \text{(Transmission)}$$

- $-c_1 t < x < 0$:

  $$\boxed{u^{(1)}(x,t) = \Phi\left(t - \frac{x}{c_1}\right) + \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}\Phi\left(t + \frac{x}{c_1}\right)} \qquad \text{(Reflexion)}$$

Man definiert nun Reflexions- und Transmissionskoeffizient wie folgt:

$$\boxed{T = \frac{2c_2}{c_1 + c_2},\ R = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}}$$

Hierbei gilt nun darüber hinaus $R + 1 = T$.

Kapitel 3

Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir zunächst die homogene Differentialgleichung:

$\mathbb{R}^3 \ni x = (x_1, x_2, x_3)$, $t \in \mathbb{R}^+ : u_{tt}(x,t) - \triangle_3 u(x,t) = 0$

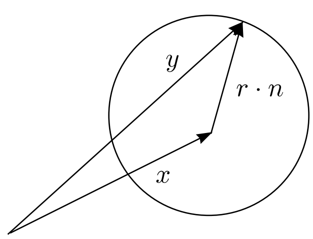
$\triangle_3 = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$

Vorbemerkung:

Mit $\mathrm{d}\tau$ wird im folgenden das Volumenelement, mit $\mathrm{d}\sigma$ das Oberflächenelement und mit $\mathrm{d}\omega$ Das Oberflächenelement speziell der Einheitskugel bezeichnet.

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \|y - x\| < r\}$

$S(x,r) = \partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 | \|y - x\| = r\}$



$y \in S(x,r) \Leftrightarrow y = x + rn$

n ist hierbei der äußere Einheitsnormalenvektor auf der Kugeloberfläche.

3.1 Kugelkoordinaten

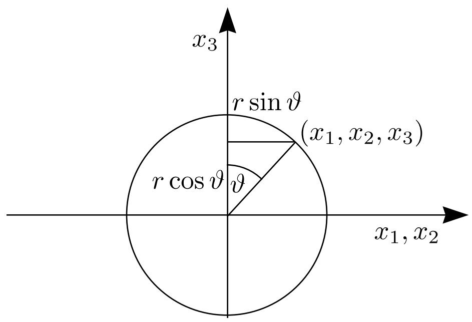
Wir benutzen die Größen r, ϑ, φ:

$x_1 = \varrho \cos\varphi \sin\vartheta$

$x_2 = \varrho \sin\varphi \sin\vartheta$

$x_3 = \varrho \cos\vartheta$

Dies gilt für $0 \leq \varrho \leq r$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.



$$x = x(\varrho, \vartheta, \varphi) = \varrho \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für beliebige Koordinatentransformationen $x = x(u, v, w)$; $y = y(u, v, w)$ und $z = z(u, v, w)$:

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \Rightarrow \mathrm{d}V = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Mittels dieser Funktionaldeterminante berechnen wir das Volumenelement:

$$\det(x_\varrho, x_\vartheta, x_\varphi) = \varrho^2 \sin\vartheta$$

Also gilt für das Volumenelement:

$$\mathrm{d}\tau = \varrho^2 \sin\vartheta \mathrm{d}(\varrho, \vartheta, \varphi)$$

Das Oberflächenelement kann mittels Kreuzprodukt berechnet werden:

$$\mathrm{d}\sigma = \|x_\vartheta \times x_\varphi\|\, \mathrm{d}(\vartheta, \varphi)$$

$$\mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}(\vartheta, \varphi) = \varrho^2\, \mathrm{d}\omega \text{ mit } \mathrm{d}\omega = \sin\vartheta\, \mathrm{d}(\vartheta, \varphi)$$

Der Normaleneinheitsvektor ist dann gegeben durch:

$$n(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Satz ①:

Es gilt folgende Beziehung:

$$\int\limits_{\substack{|y-x|<r \\ (y\in B(x,r))}} f(y)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\varrho=0}^{r} \left[\int\limits_{|y-x|=r} f(y)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}\varrho$$

Beweis:

Wir integrieren in Kugelkoordinaten:

$$\int\limits_{y\in B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\varrho=0}^{r}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} f(x+\varrho n)\varrho^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}(\varrho,\vartheta,\varphi) = \int\limits_{\varrho=0}^{r} \left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} f(x+\varrho n(\vartheta,\varphi))\varrho^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta\right] \mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int\limits_{\varrho=0}^{r} \left[\int\limits_{y\in S(x,\varrho)} f(y)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}\varrho$$

Des weiteren gilt:

$$\int\limits_{|y-x|=\varrho} f(y)\,\mathrm{d}\sigma = \varrho^2 \int\limits_{|y-x|=1} f(y)\,\mathrm{d}\omega = \varrho^2 \int\limits_{\|n\|=1} f(x+\varrho n)\,\mathrm{d}\omega$$

3.2 Sphärisches Mittel der Funktion $h = h(y) \in C^0(\mathbb{R}^3)$

Über $S(x,r)$ bilden wir den Mittelwert von h über der Oberfläche:

$$M_h(r;x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S(x,r)} h(y)\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} h(x+rn)\,\mathrm{d}\omega$$

Darüber hinaus können wir das sphärische Mittel einer zeitabhängigen Funktion h definieren:

$$M_h(r,t;x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} h(x+rn,t)\,\mathrm{d}\omega$$

Aus $h \in C^k(\mathbb{R}^3 \times \{t>0\})$ folgt $M_h \in C^k(\mathbb{R}^3 \times (t>0))$.

$$M_h(0,t;x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} h(x,t)\,\mathrm{d}\omega = h(x,t)$$

Problem:

Gesucht ist $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (t>0)) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \times (t \geq 0))$ mit $u_{tt}(y,t) - c^2 \triangle_3 u(y,t) = 0$, $y \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$.

$u(y,0) = \varphi(y)$, $u_t(y,0) = \psi(y)$ mit $y \in \mathbb{R}^3$

- 1.Schritt:

  Wir nehmen an, daß das Problem lösbar ist. Es sei $u = u(y,t)$ gegeben und $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$ beliebig. Integriere die Gleichung über $B(x,t)$:

  $$\int\limits_{|y-x|<r} u_{tt}(y,t)\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = c^2 \int\limits_{|y-x|<r} \triangle_3 u(y,t)\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = c^2 \int\limits_{|y-x|<r} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} u\right)(y,t)\,\mathrm{d}\tau_{(y)}$$

  $$\int\limits_G \vec{\nabla} \cdot \vec{w}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{\partial G} \vec{w} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

  Mit dem Gaussschen Integralsatz folgt dann:

  $$\begin{aligned} I &= c^2 \int\limits_{\|y-x\|<r} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} u\right)(y,t)\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = c^2 \int\limits_{\|y-x\|=r} \vec{\nabla} u(y,t) \cdot n_y\,\mathrm{d}\sigma = \\ &= c^2 r^2 \int\limits_{\|n\|=1} \underbrace{\vec{\nabla} u(x+rn,t) \cdot n(x+rn)}_{\partial_r u(x+rn,t)}\,\mathrm{d}\omega = c^2 r^2 \partial_r \frac{4\pi}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} u(x+rn,t)\,\mathrm{d}\omega = \\ &= c^2 r^2 \cdot 4\pi \cdot \partial_r M_h(r,t;x) \end{aligned}$$

Wir notieren uns nochmals die Wellengleichung:

1.) $u_{tt}(y,t) - c^2 \triangle_3 u(y,t) = 0$ für $y \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$

2.) $u(y,0) = \varphi(y)$

3.) $u_t(y,0) = \psi(y)$

Außerdem hatten wir das sphärische Mittel eingeführt:

$$h = h(x) : M_h(r;x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\|y-x\|=r} h(y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$h = h(x,t) : M_h(r,t;x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{\|y-x\|=r} h(y,t)\,\mathrm{d}\sigma$$

1.) u genüge (1), (2), (3). $(x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (t > 0)$ sei beliebig und fest.

$$\int\limits_{\|y-x\|<r} u_{tt}(y,t)\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = 4\pi c^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r} M_u(r,t;x)$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\|y-x\|<r} u_{tt}(y,t)\,\mathrm{d}\tau &= \partial_t^2 \int\limits_{\|y-x\|<r} u(y,t)\,\mathrm{d}\tau = \partial_t^2 \int\limits_{\varrho=0}^{r} \left[\int\limits_{\|y-x\|=\varrho} u(y,t)\,\mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}\varrho = \\ &= \partial_t^2 \int\limits_{\varrho=0}^{r} \varrho^2 \left[\int\limits_{\|n\|=1} u(x+\varrho n,t)\,\mathrm{d}\omega\right] \mathrm{d}\varrho = 4\pi\partial_t^2 \int\limits_{\varrho=0}^{r} \varrho^2 \cdot \frac{1}{4\pi} \left[\int\limits_{\|n\|=1} u(x+\varrho n,t)\,\mathrm{d}\omega\right] \mathrm{d}\varrho = \\ &= 4\pi\partial_t^2 \int\limits_{\varrho=0}^{r} \varrho^2 M_u(\varrho,t;x)\,\mathrm{d}\varrho\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{\int\limits_{\|y-x\|<r} u_{tt}(y,t)\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = 4\pi c^2 r^2 \partial_r M_u(r,t;x) = 4\pi \int\limits_{\varrho=0}^{r} \varrho^2 \partial_t^2 M_u(\varrho,t;x)\,\mathrm{d}\varrho}$$

$$c^2 r^2 \partial_r M_u(r,t;x) = \int\limits_{\varrho=0}^{r} \varrho^2 \partial_t^2 M_u(\varrho,t;x)\,\mathrm{d}\varrho$$

Durch partielles Differenzieren nach r fällt das Integral weg:

$$c^2\left[2r\partial_r M_u(r,t;x) + r^2\partial_r^2 M_u(r,t;x)\right] = r^2\partial_t^2 M_u(r,t;x)$$

Es kann noch durch $r \neq 0$ dividiert werden:

$$c^2\left[2\partial_r M_u(r,t;x) + r\partial_r^2 M_u(r,t;x)\right] = r\partial_t^2 M_u(r,t;x)$$

Wir setzen $M_u(r,t;x) := \lambda$ und formen den Ausdruck geschickt um:

$$c^2(\lambda' + \lambda' + r\lambda'') = c^2(\lambda' + (r\lambda')') = (\lambda + r\lambda')' = ((r\lambda)')'$$

Damit erhalten wir also:

$$c^2\partial_r^2\left[rM_u(r,t;x)\right] = \partial_t^2\left[rM_u(r,t;x)\right]$$

Wir führen eine neue Variable ein, nämlich $U(r,t;x) := rM_u(r,t;x)$ und schreiben damit die Gleichung:

$$\boxed{\left(U_{tt} - c^2 U_{rr}\right)(r,t) = 0 \text{ für } r > 0 \text{ und } t > 0}$$

Wir wissen, daß $U(0,t) = 0$ für $t > 0$ gilt.

$$U(r,0) = r \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \int\limits_{\|n\|=1} u(x+rn,0)\,\mathrm{d}\omega = \frac{r}{4\pi} \cdot \int\limits_{\|n\|=1} \varphi(x+rn)\,\mathrm{d}\omega = rM_\varphi(r;x)$$

Analog folgt:

$$U_t(r,0) = r \cdot M_\psi(r;x)$$

Also schreiben wir uns nochmals das Problem für $U(r,t) = rM_u(r,t;x)$ hin:

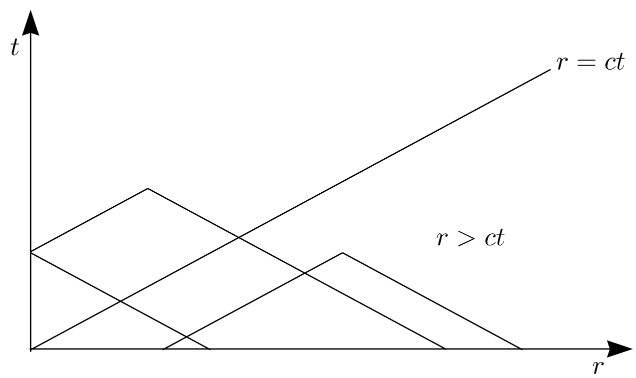
$U_{tt} - c^2 U_{rr} = 0$ für $r > 0$ und $t > 0$

$$U(r,0) = rM_\varphi(r;x)$$
$$U_t(r,0) = rM_\psi(r;x)$$
$$U(0,t) = 0$$

Wir erinnern uns nochmals an das sphärische Mittel:

$$M_u(r,t;x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} u(x+rn,t)\,\mathrm{d}\omega$$

$$M_u(0,t;x) = u(x,t)$$
$$\partial_r U(r,t) = M_u(r,t;x) + r\partial_r M_u(r,t;x)$$
$$\partial_r U(r,t)|_{r=0} = u(x,t)$$



Für $r > ct$ bekommen wir die Lösung einfach durch Anwendung der D'ALEMBERTschen Formel:

$$U(r,t) = \frac{1}{2}\left[(r+ct)M_\varphi(r+ct,x) + (r-ct)M_\varphi(r-ct;x)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{r-ct}^{r+ct} sM_\psi(s;x)\,\mathrm{d}s$$

Für $0 < r < ct$ gilt dann:

$$U(r,t) = \frac{1}{2}\left[(r+ct)M_\varphi(r+ct;x) - (ct-r)M_\varphi(ct-r;x)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{ct-r}^{ct+r} sM_\psi(s;x)\,\mathrm{d}s$$

Außerdem gilt durch Differentiation nach r und Einsetzen von $r = 0$:

$$\partial_r U(r,t)|_{r=0} = \frac{1}{2}\left[M_\varphi(ct;x) + ct\partial_r M_\varphi(ct;x) + M_\varphi(ct;x) + ct\partial_r M_\varphi(ct;x)\right] + \frac{1}{2c}\left[ctM_\psi(ct;x) + ctM_\psi(ct;x)\right]$$

$$u(x,t) = \underbrace{M_\varphi(ct;x) + ct\partial_r M_\varphi(ct;x)}_{\partial_t(tM_\varphi(ct;x))} + tM_\psi(ct;x)$$

1.) Unser 1.Ergebnis ist nun:
Ist u Lösung des CAUCHY-Problems (1), (2), (3) im $\mathbb{R}^3$, so gilt:

$u(x,t) = \partial_t(tM_\varphi(ct;x)) + tM_\psi(ct;x)$

2.) Ist $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$, so ist durch $(L) u(x,t) := \partial_t(tM_\varphi(ct;x) + tM_\psi(ct;x)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$ eine Lösung des CAUCHY-Problems (1), (2), (3) gegeben.
Es sei $h \in C^2$ und $u_h(x,t) := tM_h(ct;x)$. Es gelten allgemein:

$\boxed{(u_h)_{tt} - c^2 \triangle u_h(x,t) = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0}$

$\boxed{u_h(x,0) = 0,\ (u_h)_t(x,0) = h(x)}$

Daraus folgt die obige Behauptung.

Einschub:

(L) lautet nun folgendermaßen:

$u(x,t) = \partial_t u_\varphi(x,t) + u_\psi(x,t)$

Zu zeigen ist, daß $\partial_t^2(\partial_t u_\varphi) - c^2 \triangle (\partial_t u_\varphi) = 0$ ist. Außerdem muß gelten:

$\partial_t u_\varphi(x,0) = \varphi(x)$

$\partial_t(\partial_t u_\varphi)(x,0) = 0$

$\left[(u_\varphi)_{tt} - c^2 \triangle u_\varphi\right]_t = 0 = ((u_\varphi)_t)_{tt}\, c^2 \triangle (u_\varphi)_t$

Mit $u_\varphi(x,0) = 0$ erhalten wir dann außerdem:

$\left(\partial_t^2 u_\varphi\right)(x,0) = c^2 \triangle u_\varphi(x,0) = 0$

$$u_h(x,t) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} h(x+ctn)\,\mathrm{d}\omega \in C^2$$

$$(u_h)_t(x,0) = M_h(0;x) + t\partial_t\, M_h(ct,x)\big|_{t=0} = h(x)$$

$$(u_h)_t(x,t) = \frac{u_h(x,t)}{t} + \frac{ct}{4\pi} \int\limits_{\|n\|=1} \vec{\nabla} h(x+ctn)\cdot n\,\mathrm{d}\omega$$

Mittels Satz ① und dem GAUSSschen Satz resultiert dann:

$$(u_h)_t(x,t) = \frac{u_h(x,t)}{t} + \underbrace{\frac{ct}{4\pi}\cdot\frac{1}{c^2t^2}}_{\frac{1}{4\pi ct}} \int\limits_{\|y-x\|=ct} \vec{\nabla} h(y)\cdot n\,\mathrm{d}\sigma = \frac{u_h(x,t)}{t} + \frac{1}{4\pi ct} \int\limits_{\|y-x\|<ct} \triangle h(y)\,\mathrm{d}\tau$$

$$(u_h)_{tt}(x,t) = -\frac{1}{t^2} u_h(x,t) + \frac{1}{t}(u_h)_t(x,t) - \frac{1}{4\pi ct^2} \int\limits_{\|y-x<ct} \triangle h(y)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi ct}\partial_t \left[\int\limits_{\|y-x\|<ct} \triangle h(y)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

Wir setzen den Ausdruck für $(u_h)_t(x,t)$ aus der ersten Gleichung in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned}(u_h)_{tt}(x,t) &= \frac{1}{4\pi ct}\partial_t\left[\int\limits_{\|y-x\|<ct} \triangle h(y)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{4\pi ct}\partial_t\left[\int\limits_{\varrho=0}^{ct} \varrho^2 \int\limits_{\|n\|=1} \triangle h(x+\varrho n)\,\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\varrho = \\ &= \frac{c}{4\pi ct}\cdot c^2t^2\cdot\int\limits_{\|n\|=1} \triangle h(x+ctn)\,\mathrm{d}\omega = c^2\cdot\frac{t}{4\pi}\cdot\triangle\int\limits_{\|n\|=1} h(x+ctn)\,\mathrm{d}\omega = c^2\triangle u_h(x,t)\end{aligned}$$

$$u_h(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{\|n\|=1} h(x+ctn)\,\mathrm{d}\omega$$

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \partial_t\left(tM_\varphi(ct;x)\right) + tM_\psi(ct;x) = \partial_t\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\|x-y\|=ct}\varphi(y)\,\mathrm{d}\tau_{(y)}\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\|y-x\|=ct}\psi(y)\,\mathrm{d}\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\|n\|=1}\left[\varphi(x+ctn) + \vec{\nabla}\varphi(x+ctn)\cdot ctn\right]\mathrm{d}\omega + \ldots = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int\limits_{\|y-x\|=ct}\left[\varphi(y) + \vec{\nabla}\varphi(y)\cdot(y-x)\right]\mathrm{d}\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int\limits_{\|y-x\|=ct}\left[\varphi(y) + \vec{\nabla}\varphi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)\right]\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

Bemerkung:

1.) Für $n = 3$ ist im allgemeinen die Lösung weniger regulär als die Anfangsdaten (wegen $\vec{\nabla}\varphi$ in der Lösung).

2.) Das CAUCHY-Problem hängt im folgenden Sinn stetig von den Anfangsbedingungen ab. Aus $\varphi_k \mapsto \varphi$, $\vec{\nabla}\varphi_k \mapsto \vec{\nabla}\varphi$, $\psi_k \mapsto \psi$ folgt dann $u_k \mapsto u$ für $k \mapsto \infty$.

   $\Box u_k = 0$

   $u_k = \varphi_k$ für $t = 0$

   $u_{k_t} = \psi_k$ für $t = 0$

   Also gilt:

   $\Box u = 0,\ u = \varphi,\ u_t = \psi$

Beispiel:

$u_{tt}(x,t) - c^2\triangle_3 u(x,t) = 0$

Die Lösung soll nur vom Abstand $\|x\|$ eines bestimmten Punktes abhängen:

$u(x,t) = v(\|x\|,t),\ v = v(r,t)$

$c^2(rv)_{rr} = (rv)_{tt}$

Dann folgt sofort die Lösung:

$$\boxed{v(r,t) = \frac{1}{r}\left[F(r+ct) + G(r-ct)\right]}$$

Dies hatten wir bereits im ersten Kapitel so gemacht. Wir setzen jetzt speziell die Funktionen gleich:

$F(s) = G(s) = \frac{1}{2}s\Phi(s),\ \Phi(s) = \Phi(-s)$

Hieraus folgt dann:

$$v(r,t) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(r+ct)+\Phi(r-ct)}{2} + ct\dfrac{\Phi(r+ct)-\Phi(r-ct)}{2r} & \text{für} \quad r > 0 \\ \\ \Phi(ct) + ct\Phi'(ct) & \text{für} \quad r = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = v(\|x\|,t)$ ist die sphärisch symmetrische Lösung des Problems $\Box u = 0$.

$u(x,0) = \Phi(\|x\|)$

$u_t(x,0) = 0$

Wähle $\tilde{\Phi}(r) = \sqrt{|r^2-1|}$. Zu $\tilde{\Phi}$ gehört die Lösung $\tilde{u}$. Wir haben also folgendes Problem:

$\Box\tilde{u} = 0$

$\tilde{u}(x,0) = \tilde{\Phi}(r)$

$\tilde{u}_t(x,0) = 0$

Wir berechnen $\tilde{u}(0,t)$:

$$\tilde{u}(0,t) = \frac{|c^2t^2-1| \mp c^2t^2}{\sqrt{|c^2t^2-1|}}$$

Daraus resultiert:

$$\tilde{u}\left(0,\frac{1}{c}\right) = \infty$$

Wähle Φ_k mit $\Phi_k \mapsto \tilde{\Phi}$ für $k \mapsto \infty$ ($\Phi_k(s) = \Phi_k(-s)$).

3.3 Cauchy-Problem für $n = 2$/Absteigemethode (Method of descend)

Gesucht ist ein $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (t>0)) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \times (t \geq 0))$. Mit $\Box_2 u(x,t) = u_{tt} - c^2\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0$ mit $u(x,0) = \varphi(x)$ und $u_t(x,0) = \psi(x)$ bei $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$.

$\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Betrachte das Problem formal als dreidimensionales Problem, das von x_3 unabhängig ist. $\overline{u} = \overline{u}(x_1,x_2,x_3,t)$ genüge folgendem Problem:

$u_{tt} - c^2\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0$, $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$

$u(x_1,x_2,x_3,0) = \overline{\varphi}(x_1,x_2,x_3) := \varphi(x_1,x_2)$

$u_t(x_1,x_2,x_3,0) = \overline{\psi}(x_1,x_2,x_3) := \psi(x_1,x_2)$

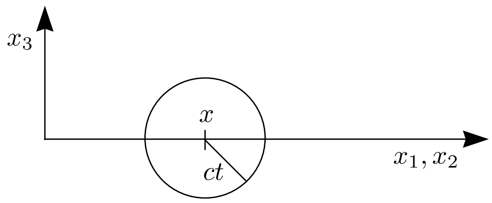
$\overline{u}$ ist bekannt und daraus ergibt sich $u(x,t) = \overline{u}(x_1,x_2,0,t)$ mit $\overline{x} := (x_1,x_2,0)$.

$$u(x,t) = \overline{u}(\overline{x},t) = \partial_t\left(tM_{\overline{\varphi}}(ct;\overline{x})\right) + tM_{\overline{\psi}}(ct;\overline{x}) =$$

$$= \partial_t\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{\|(y_1,y_2,y_3)-(x_1,x_2,0)\|=ct} \overline{\varphi}(y_1,y_2,y_3)\,\mathrm{d}\sigma_{(y_1,y_2,y_3)}\right] + \text{analog}$$

Betrachten wir nun:

$$\int\limits_{\|(y_1,y_2,y_3)-(x_1,x_2,0)\|=ct} \varphi(y_1,y_2)\,\mathrm{d}\sigma_{(y_1,y_2,y_3)}$$



Wir schreiben die Kugelfläche in Parameterdarstellung an:

$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + y_3^2 = c^2t^2$

$y_3 = \pm\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}$, $\|y - x\|^2 \leq c^2t^2$

$$\vec{r}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \|\vec{r}_{y_1} \times \vec{r}_{y_2}\| \,\mathrm{d}(y_1, y_2) = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \,\mathrm{d}(y_1, y_2)$$

Wir erhalten als Ergebnis (wobei die Integration über einen Kreis läuft):

$$u(x,t) = \partial_t \left[\frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\| \leq ct} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \,\mathrm{d}(y_1, y_2) \right] + \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\| < ct} \frac{\psi(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \,\mathrm{d}(y_1, y_2)$$

(Siehe Aufgabenblatt 9, Aufgabe 1: $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^1$)

Satz ③:

Für $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ist das Cauchy-Problem eindeutig lösbar in $\mathbb{R}^3 \times (t > 0)$. Die Lösung wird durch obige Formel angegeben.

3.4 Das Cauchy-Problem für die inhomogene Gleichung ($n = 2$, 3)/ Duhamel-Methode

$\Box u(x,t) = f(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$

Betrachte für τ mit $0 < \tau < t$ das Problem. Die Lösung sei dann $w(x,t;\tau)$.

$u_{tt} - c^2 \triangle u = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $t > \tau$

$u(x,\tau) = 0$, $u_t(x,\tau) = f(x,\tau)$ für $x \in \mathbb{R}^n$

Nach dem Prinzip von Duhamel ist die Lösung von oben:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t,\tau) \,\mathrm{d}\tau$$

Wir schauen uns die inhomogenen Probleme an:

$u_{tt} - c^2 \triangle_n u = f(x,t)$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$

$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \qquad (\star)$

Dies kann man analog zur eindimensionalen Gleichung mit der Methode von DUHAMEL lösen: Suche $w = w(x,t;\eta)$, $0 < \eta < t$ mit $w_{tt} - c^2\triangle_n w = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq \eta$. Die Inhomogenität „rutscht" in die Anfangsbedingungen:

$w(x,\eta;\eta) = 0$, $w_t(x,\eta;\eta) = f(x,\eta)$ für $x \in \mathbb{R}^n$

Dann löst $w(x,t)$ das Problem $(\star)$:

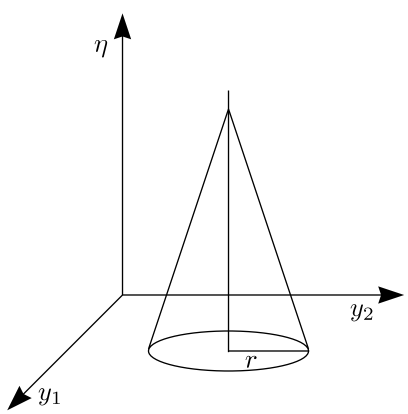
$$w(x,t) = \int\limits_0^t w(x,t;\eta)\,\mathrm{d}\eta$$

Für $n = 2$ erhalten wir mit $t \mapsto t - \eta$, $\varphi = 0$ und $\Psi = f$:

$$u(x,t) = \int\limits_{\eta=0}^t \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\|\leq c(t-\eta)} \frac{f(y,\eta)}{\sqrt{c^2(t-\eta)^2 - \|y-x\|^2}}\,\mathrm{d}(y_1,y_2)\,\mathrm{d}\eta$$

Wir schauen uns den Integrationsbereich an:

$(y,\eta):\ 0 \leq \eta \leq ct$, $\|y - x\| \leq c(t-\eta)$



Für $n = 3$ gilt (Satz ② (1)) mit $\eta \mapsto \eta' = c(t-\eta)$:

$\eta = 0 \leftrightarrow \eta' = ct$

$\eta = t \leftrightarrow \eta' = 0$

$\mathrm{d}\eta' = -c\,\mathrm{d}\eta$

$\eta = t - \dfrac{\eta'}{c}$

$$u(x,t) = \int\limits_{\eta=0}^t \left[\frac{1}{4\pi c^2(t-\eta)} \int\limits_{\|y-x\|=c(t-\eta)} f(y,\eta)\,\mathrm{d}\sigma_{(y)}\right]\mathrm{d}\eta \underset{\substack{\eta\mapsto\eta'=\\c(t-\eta)}}{=} \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{\eta'=0}^{ct}\left[\int\limits_{\|y-x\|=\eta'} \frac{f\left(y, t-\frac{\eta'}{c}\right)}{\eta'}\,\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{d}\eta' =$$
$$= \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{\|y-x\|\leq ct} \frac{f\left(y, t - \frac{\|y-x\|}{c}\right)}{\|y-x\|}\,\mathrm{d}\tau_{(y)}$$

Dies bezeichnet man als **retardiertes Potential**.

- Maxwellgleichungen:
  Für das Vektorpotential und das skalare Potential erhält man inhomogene Wellengleichungen.

- Potentialgleichung:

  $\triangle u = 0$ (POISSONgleichung)

  $\triangle u = \varrho$

  Wenn man diese Gleichung löst, erhält man:

  $$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|y-x\| \leq R} \frac{\varrho(y)}{\|y-x\|^2} \, \mathrm{d}\tau_{(y)}$$

3.5 Abhängigkeits, Bestimmtheits- und Einflußgebiet ($n = 2$, 3)

1.) Abhängigkeitsgebiet von (x_0, t_0): $A_n(x_0, t_0)$

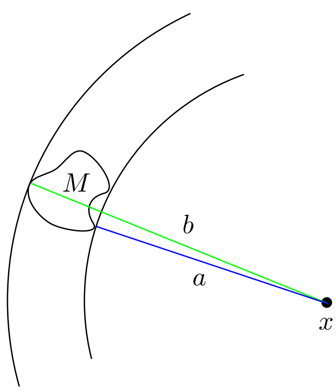
Dies ist der Bereich der Anfangsmannigfaltigkeit, in dessen Punkten φ und ψ gegeben sein müssen, um $u(x_0, t_0)$ zu berechnen für folgendes Problem:

$$u_{tt} - c^2 \triangle_n u = 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x)$$

Aus der Lösungsformel kann man direkt ablesen:

$$A_2(x_0, t_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 | \, \|y - x_0\| \leq ct_0 \right\} = K(x_0, ct_0)$$

$$A_3(x_0, t_0) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 | \, \|y - x_0\| = ct_0 \right\} = S(x_0, ct_0)$$



$M \subseteq \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ sei ein beschränktes Gebiet:

$$\varphi(y) = \psi(y) = 0 \text{ für } y \notin M$$

Frage: Was merkt ein Beobachter an der Stelle x für $t > 0$? Für $n = 2$ gilt:

$$a = \inf_{y \in M} \|x - y\|,\ b = \sup_{y \in M} \|x - y\|$$

Für $t < \frac{a}{c}$ ist $u(x, t) = 0$. Ab $t \geq \frac{a}{c}$ merkt der Beobachter etwas von der Störung und diese Empfindung bleibt für alle Zeiten t. Es sei $t > \frac{b}{c}$, $\varphi = 0$ und $\psi > 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\| \leq ct} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \, \mathrm{d}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{M} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \, \mathrm{d}(y_1, y_2) > 0$$

Dann liegt M in diesem Kreis:

$$M \subset K(x, ct)$$

Es existiert eine vordere Wellenfront, die den Beobachter zur Zeit $t = \frac{a}{c}$ erreicht. Es gibt keine hintere Wellenfront, sondern eine dauerhafte Nachwirkung an der Stelle x. Diese Nachwirkung verhält sich wie $O\left(\frac{1}{t}\right)$ für $t \mapsto \infty$.

Für $n = 3$ gilt:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < \dfrac{a}{c} \\ \neq 0 & \text{für} \quad \dfrac{a}{c} \leq t \leq \dfrac{b}{c} \\ 0 & \text{für} \quad t > \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

Es gibt somit sowohl eine vordere als auch eine hintere Wellenfront. Es gibt keine Dauernachwirkung und es gilt das HUYGENsche Prinzip:

„Eine in einem beschränkten Gebiet wirksame Anfangsstörung wirkt sich an der Stelle x für hinreichend große t nicht aus.

Dies ist übrigens allgemein nicht gültig für gerade Raumdimensionen, also für $n = 2, 4, 6, \ldots$. Dies gilt nicht für $n = 1$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,\mathrm{d}s$$

Hier haben wir keine Diffusion.

2.) Bestimmtheitsgebiet $\mathcal{L}_n(M)$ mit $M \subset \mathbb{R}^n$

Dies ist die Menge der $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, für die $u(x,t)$ allein aus $\varphi(y)$, $\psi(y)$ für $y \in M$ berechnet werden kann.

$$\mathcal{L}_n(M) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t > 0, A_n(x,t) \subset M\right\}$$

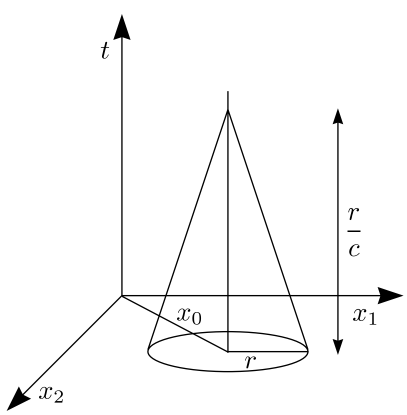
Wir betrachten folgendes Beispiel für $n = 3$:

$$M = K(x_0, r) = \left\{y \in \mathbb{R}^3 | \, \|y - x_0\| \leq r\right\}$$

Die Behauptung sei nun folgende:

$$\mathcal{L}_3(M) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^4 | \, 0 \leq t \leq \frac{r}{c}, \, \|y - x_0\| \leq r - ct\right\}$$

Man spricht in dieser Dimension von einem „Kegel“ über $K(x_0, r)$ mit der Spitze in $\left(x_0, \frac{r}{c}\right)$.



$$A_3(x,t) = \{y | \, \|y - x\| = ct\} = S(x, ct)$$

1.) $(x,t) \in \mathcal{L}_3(\overline{K(x_0,r)}) \Leftrightarrow \boxed{S(x,ct) \subset K(x_0,r)}$

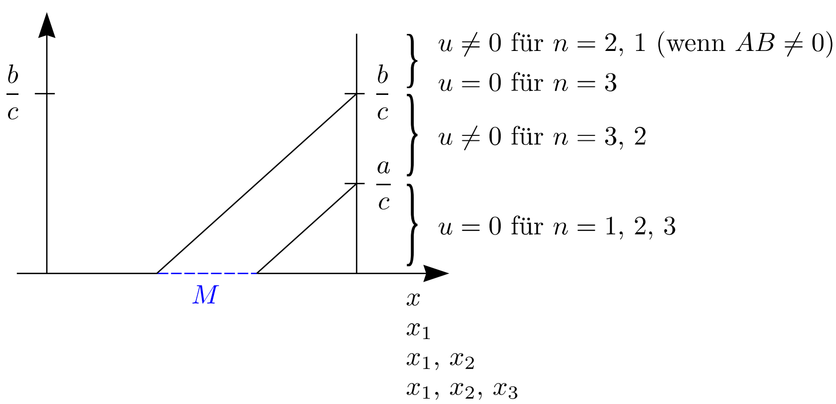
2.) $(x,t) \in \mathcal{L}_3(\overline{K(x_0,r)}) \Leftrightarrow x + nct \in \overline{K(x_0,r)}\ \forall\ n$ mit $\|n\| = 1$

3.) $(x,t) \in \mathcal{L}_3(\overline{K(x_0,r)}) \Leftrightarrow \|x + nct - x_0\| \leq r$

Es handelt sich um eine Mengengleichheit, die nachgewiesen werden muß. Wähle dazu $n = \frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$. Durch Einsetzen folgt dann:

$$\left\| x + \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} ct - x_0 \right\| \leq r$$

$$\left\| (x - x_0)\| \left(1 + \frac{ct}{\|x - x_0\|}\right) \right\| = \left(1 + \frac{ct}{\|x - x_0\|}\right) \|x - x_0\| = \|x - x_0\| + ct \leq r$$



Es sei $n = 2$: $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Die Behauptung ist folgende:

$$\lim_{t \mapsto \infty} u(x,t) = 0,\ u(x,t) = O\left(\frac{1}{r}\right) \text{ für } t \mapsto \infty$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\| \leq ct} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \,\mathrm{d}(y_1 y_2)$$

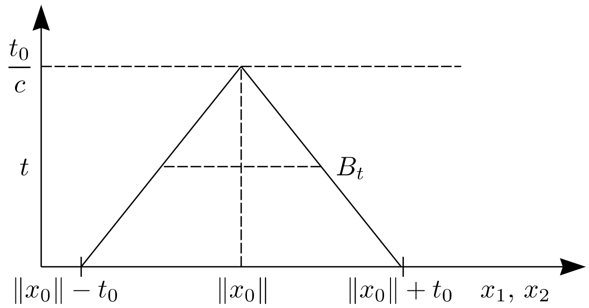
Für $t > \frac{b}{c}$ gilt $\|y - x\| \leq b$ und daraus ergibt sich $\|y - x\| \leq ct$.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\| \leq b} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - \|y - x\|^2}} \,\mathrm{d}(y_1 y_2) \leq \frac{1}{2\pi c} \int\limits_{\|y-x\| \leq b} \frac{\psi(y)}{\sqrt{c^2t^2 - b^2}} \,\mathrm{d}(y_1 y_2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi c} \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2t^2 - b^2}} \int\limits_M \psi(y) \,\mathrm{d}(y_1 y_2) = \frac{\text{const.}}{\sqrt{c^2t^2 - b^2}} \leq \frac{\text{const.}}{t}$$

3.6 Eindeutigkeitssatz

Satz ④:

Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times |t \geq 0|)$. Für das Anfangswertproblem $u_{tt} - c^2 \triangle_n u(x,t) = 0$ (für $x \in \overline{K(x_0,t_0)}$ und $t \geq 0$), $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0\ \forall\ x \in \overline{K(x_0,t_0)}$ gilt: $u(x,t) = 0\ \forall\ (x,t) \in \mathcal{L}_n(\overline{K(x_0,t_0)})$ $(\{(x,t) | 0 \leq t \leq \frac{t_0}{c}, \|x - x_0\| \leq t_0 - ct\})$.



t sei beliebig aber fest in $0 \leq t \leq \frac{t_0}{c}$ und:

$B_t = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_0\| \leq t_0 - ct\}$ mit $B_0 = \sqrt{(x_0, t_0)}$, $B_{\frac{t_0}{c}} = \{x_0\}$

Dies stellt für $n = 3$ eine Kugel und für $n = 2$ einen Kreis dar.

$\partial B_t = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x - x_0\| = t_0 - ct\}$

$u_{tt} - \triangle_2 u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \times \{t \geq 0\}$

$u(x_1, x_2, 0) = \hat{\varphi}(x_1, x_2)$, $u_t(x_1, x_2, 0) = \hat{\psi}(x_1, x_2)$

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_{B_t} \left[u_t^2(x,t) + c^2 \|\vec{\nabla} u\|^2(x,t) \right] \mathrm{d}\tau_x \text{ für } 0 \leq t \leq \frac{t_0}{c}$$

Da $u_t(x, 0) = 0$ (aus Anfangswertbedingung) und $u(x, 0) = 0$ gilt, ist $\vec{\nabla} u(x, 0) = 0$ und damit auch $E(0) = 0$. Für alle t gilt außerdem $E(t) \geq 0$. Weiterhin ist $\dot{E}(t) \leq 0$:

$$\dot{E}(t) \leq 0 \Rightarrow E(t) = 0 \,\forall\, t \Rightarrow u_t(x,t) = \vec{\nabla} u(x,t) = 0 \,\forall\, (x,t) \in \mathcal{L}_n \Rightarrow u(x,t) = \text{const.} = 0 = u(x,0)$$

$$\dot{E}(t) = \frac{1}{2} \partial_t \int\limits_{s=0}^{t_0 - ct} \left[\int\limits_{\|x - x_0\| = \varrho} (\ldots) \,\mathrm{d}\sigma \right] \mathrm{d}\varrho = -\frac{c}{2} \int\limits_{\partial B_t} \left[u_t^2 + c^2 \|\vec{\nabla} u\|^2 \right] \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2} \int\limits_{B_t} \partial_t \left[u_t^2 + c^2 \|\vec{\nabla} u\|^2 \right] \mathrm{d}\tau$$

$$I = \int\limits_{B_t} \left[u_t u_{tt} + c^2 \vec{\nabla} u_t \vec{\nabla} u \right] \mathrm{d}\tau$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$\partial_t \|\vec{\nabla} u\|^2 = \partial t \left(\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} u \right) = 2 \vec{\nabla} u_t \cdot \vec{\nabla} u \Rightarrow \left(\vec{\nabla} u_t \right) \cdot \left(\vec{\nabla} u \right)$$

Wir probieren $\vec{\nabla}(u_t \vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} u_t \cdot \vec{\nabla} u + u_t \vec{\nabla} \vec{\nabla} u$:

$$I = \int\limits_{B_t} \left[u_t \underbrace{(u_{tt} + c^2 \triangle u)}_{0} + c^2 \vec{\nabla} \left(u_t \vec{\nabla} u \right) \right] \mathrm{d}t = \int\limits_{\partial B} c^2 u_t \vec{\nabla} u \cdot n \,\mathrm{d}\sigma$$

$$\dot{E}(t) = \int\limits_{\partial B_t} \underbrace{\left[-\frac{c}{2} \left(u_t^2 + c^2 \|\vec{\nabla} u\|^2 \right) + c^2 u_t \vec{\nabla} u \cdot n \right]}_{-\frac{c}{2}\|a\|^2} \mathrm{d}\sigma$$

$$-\frac{c}{2} \left(u_t^2 + c^2 \|\vec{\nabla} u\|^2 \right) + c^2 u_t \vec{\nabla} u \cdot n = -\frac{c}{2} \left(n u_t n u_t + c \vec{\nabla} u \cdot c \vec{\nabla} u - 2c \vec{\nabla} u \cdot u_t n \right) = -\frac{c}{2} \|n u_t - c \vec{\nabla} u\|^2$$

Somit folgt $\dot{E}(t) \leq 0$.

3.6.1 Beispiele zur höherdimensionalen Wellengleichung

Es sei $k \in \mathbb{R}$ und $u = u(x_1, x_2, t) \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (t \geq 0))$. u genüge der Gleichung $u_{tt} - c^2 \triangle_2 u \mp k^2 u = 0$. Wir betrachten $w = w(x_1, x_2, x_3, t) = \varrho(x_3) \cdot u(x_1, x_2, t)$.

$$w_{tt} - c^2 \triangle_3 w = \underbrace{\left(u_{tt} - c^2 \left(u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}\right)\right)}_{\pm k^2 u} \varrho(x_3) - c^2 \varrho''(x_3)(u(x_1, x_2, t)) = 0 = u(\varrho'' c^2 \pm \varrho k^2) = 0$$

Das heißt, für $\varrho = \varrho(x_3)$ ist $\varrho'' \mp \varrho \cdot \frac{k^2}{c^2} = 0$ zu lösen.

$$\varrho_+(x_3) = A \sin\left(\frac{k}{c} x_3\right) + B \cos\left(\frac{k}{c} x_3\right)$$

$$\varrho_-(x_3) = \tilde{A} \exp\left(\frac{k}{c} x_3\right) + \widetilde{B} \exp\left(-\frac{k}{c} x_3\right)$$

Satz ⑤

Es seien $w_\pm = w_\pm(x_1, x_2, x_3, t)$ und $w_\pm = \varrho_\pm$ mit $\varrho_\pm$ gemäß $(\star)$ gegeben. Dann gilt:

$$w_{\pm tt} - c^2 \triangle_3 w_\pm = 0 \Leftrightarrow u_{\pm tt} - c^2 \triangle_2 u_\pm \pm k^2 u_\pm = 0$$

Übung:

Formuliere den Satz ⑤ für die Gleichung $u_{tt} - c^2 u_{x_1 x_1} \pm k^2 u = 0$, $w = w(x_1, x_2, t) = \varrho(x_2) u(x_1, t)$.

Beispiel zu Satz ⑤:

Wir betrachten Probleme der Art $u_{tt} - \triangle_2 u - k^2 u = 0$ $(c = 1)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$. Die Anfangsbedingungen seien $u(x_1, x_2, 0) = \hat{\varphi}(x_1, x_2)$ und $u_t(x_1, x_2) = \hat{\psi}(x_1, x_2)$. Für $w = w(x_1, x_2, x_3, t) := \exp(k x_3) u(x_1, x_2, t)$ gilt $\Box_3 w = 0$ für $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ und $t \geq 0$.

$$w(x_1, x_2, x_3, 0) = \exp(k x_3) \hat{\varphi}(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$$w_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \exp(k x_3) \hat{\psi}(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2, x_3)$$

Mit Satz ② (von Z18) ergibt sich:

$$w(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{\|y - x\| = t} \psi(y) \, \mathrm{d}\sigma_{(y)} + \partial_t \left[\frac{1}{4\pi t} \int\limits_{\|y - x\| = t} \varphi(y) \, \mathrm{d}\sigma_{(y)} \right]$$

Wir machen folgende Nebenrechnung:

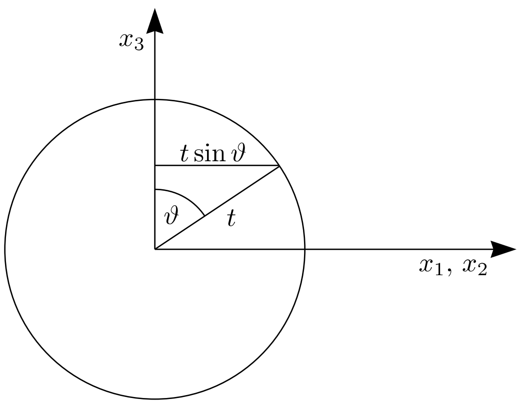
$$I = \frac{1}{4\pi t} \int\limits_{\|y - x\| = t} \varphi(y) \, \mathrm{d}\sigma_{(y)} = \frac{t^2}{4\pi t} \int\limits_{\|n\| = 1} \varphi(x + tn) \, \mathrm{d}\omega \text{ mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \; \mathrm{d}\omega = \sin\vartheta \, \mathrm{d}(\vartheta, \varphi)$$

$$I = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \hat{\varphi}(x_1 + t \cos\varphi \sin\vartheta, x_2 + t \sin\varphi \sin\vartheta) \right] \cdot \exp\left[k x_3 + k t \cos\vartheta\right] =$$

$$= \exp(k x_3) \cdot \frac{t}{4\pi} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \hat{\varphi}(x_1 + t \cos\varphi \sin\vartheta, x_2 + t \sin\varphi \sin\vartheta) \exp(k t \cos\vartheta) \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \right] \mathrm{d}\varphi$$

Damit ergibt sich $w(x,t) = u(x_1,x_2,t)\cdot\exp(kx_3)$. $\exp(kx_3)$ kann aus beiden Integralen herausgezogen und damit gekürzt werden.

$$u(x_1,x_2,t) = \partial_t\left[\frac{t}{4\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\hat{\varphi}(x_1+t\cos\varphi\sin\vartheta, x_2+t\sin\varphi\sin\vartheta)\exp(kt\cos\vartheta)\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}\varphi + \text{analog für } \hat{\psi}$$



Es sei nun $\varphi = t\sin\vartheta$, $\mathrm{d}\varphi = t\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta$:

$$t\cos\vartheta = \begin{cases} +\sqrt{t^2-\varrho^2} & \text{für} \quad 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2} \text{ (obere Halbkugel)} \\[2ex] -\sqrt{t^2-\varrho^2} & \text{für} \quad \frac{\pi}{2}\le\vartheta\le\pi \text{ (untere Halbkugel)} \end{cases}$$

Wir machen wieder eine Nebenrechnung:

$$\int\limits_{\vartheta=0}^{\pi}\ldots = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ldots + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ldots = \int\limits_{\varrho=0}^{t}\left[\hat{\varphi}\left(x_1+\varrho\cos\varphi, x_2+\varrho\sin\varphi\right)\exp\left(k\sqrt{t^2-\varrho^2}\right)\cdot\frac{\varrho}{t}\cdot\frac{\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{t^2-\varrho^2}}\right]+$$

$$+\int\limits_{0}^{t}\hat{\varphi}\left(x_1+\varrho\cos\varphi, x_2+\varrho\sin\varphi\right)\exp\left(-k\sqrt{t^2-\varrho^2}\right)\frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{t\cdot\sqrt{t^2-\varrho^2}} =$$

$$= \int\limits_{\varrho=0}^{t}\hat{\varphi}\left(x_1+\varrho\cos\varphi, x_2+\varrho\sin\varphi\right)\cdot 2\cosh\left(k\sqrt{t^2-\varrho^2}\right)\cdot\frac{\varrho}{t\cdot\sqrt{t^2-\varrho^2}}\,\mathrm{d}\varrho$$

Wieder in $u(x_1,x_2,t)$ eingesetzt, ergibt sich:

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\partial_t\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\varrho=0}^{t}\hat{\varphi}\left(x_1+\varrho\cos\varphi, x_2+\varrho\sin\varphi\right)\cdot\cosh\left(k\sqrt{t^2+\varrho^2}\right)\cdot\frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{t^2-\varrho^2}}\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\hat{\psi}\ldots$$

Wir setzen $\xi_1 = \varrho\cos\varphi$, $\xi_2 = \varrho\sin\varphi$ und $\xi = (\xi_1,\xi_2)$:

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\partial_t\int\limits_{\|\xi\|\le t}\hat{\varphi}(x+\xi)\cosh\left(k\sqrt{t^2-\|\xi\|^2}\right)\frac{\mathrm{d}(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{t^2-\|\xi\|^2}} + \int\hat{\psi}\ldots$$

$u_{tt} - u_{x_1x_2} - u_{x_2x_2} - k^2u = 0$ für $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $t\ge 0$

$u(x_1,x_2,0) = \hat{\varphi}(x_1,x_2)$, $u_t(x_1,x_2,0) = \hat{\psi}(x_1,x_2)$

3.7 Anfangswert-Randwertproblem im $\mathbb{R}^3$ im Halbraum

Beispiel:

Wir betrachten ein Anfangswert-Randwertproblem im Halbraum $\{x_3 \geq 0\} := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\, x_3 \geq 0\}$. Gesucht ist $u = u(x,t)$ mit

$$(P)\begin{cases} \Box u(x,t) = f(x,t) & \text{für} \quad x_3 \geq 0,\, t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\, u_t(x,0) = \psi(x) & \text{für} \quad x_3 \geq 0 \\ u(x_1,x_2,0,t) = h(x_1,x_2,t) & \text{für} \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2,\, t \geq 0 \end{cases}$$

Die gegebenen Funktionen f, φ, ψ und h seien genügend oft stetig differenzierbar.

1.) Besitzt das Problem eine dreimal stetig differenzierbare Lösung in $\{x_3 \geq 0\} \times \{t \geq 0\}$, so sind die folgenden **Verträglichkeitsbedingungen** erfüllt:

$h|_{t=0} = \varphi|_{x_3=0}$, $h|_{t=0} = \psi|_{x_3=0}$

$\left(c^2 \triangle_3 \varphi + f\right)|_{x_3=0} = h_{tt}|_{t=0}$, $\left(c^2 \triangle_3 \psi + f_t\right)|_{x_3=0} = h_{ttt}|_{t=0}$

2.) Es sei u eine Lösung von (P). Gesucht wird $v = v(x,t)$ so, daß für $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t)$ die folgenden Gleichungen und Bedingungen erfüllt sind:

$\Box_3 w(x,t) = F(x,t) := f(x,t) - \Box_3 v(x,t)$ für $x_3 \geq 0$, $t \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} w(x,0) &= \varphi_0(x) := \varphi(x) - v(x,0) \\ w_t(x,0) &= \psi_0(x) := \psi(x) - v_t(x,0) \end{aligned}\right\} x_3 \geq 0$$

1.) $w(x_1,x_2,0,t) = 0$ für $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$

2.) $F = \varphi_0 = \psi_0 = 0$ für $x_3 = 0$

Mit noch freien Funktionen $\widetilde{a} = \widetilde{a}(x_1,x_2,t)$, $\widetilde{b} = \widetilde{b}(x_1,x_2,t)$, $\widetilde{c} = \widetilde{c}(x_1,x_2,t)$ wird für v der Ansatz $v(x,t) = h(x_1,x_2,t) + \widetilde{a}x_3^2 + \widetilde{b}x_3^3 + \widetilde{c}x_3^4$ gemacht. Es ist (1) erfüllt und von (2) ebenfalls $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ für $x_3 = 0$, wie man mit obigen Verträglichkeitsbedingungen einsieht unabhängig von $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ und $\widetilde{c}$. Wir reduzieren das Problem also auf ein anderes mit homogenen Daten $(f,\, \psi,\, \varphi,\, h)$ auf der Hyperebene $\{x_3 = 0\} = \{(x_1,x_2,x_3,t) \in \mathbb{R}^4 | x_3 = 0\}$.

$v(x,t) = h(x_1,x_2,t) + \tilde{a}(x_1,x_2,t)x_3^2 + \tilde{b}(x_1,x_2,t)x_3^3 + \tilde{c}(x_1,x_2,t)x_3^4$

Der Ansatz erfüllt dann Gleichung $(\star)$ unabhängig von $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ und $\tilde{c}$.

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2,0,t) = \Box(u-v) &= f(x_1,x_2,0,t) - \left[v_{tt} - c^2\left(v_{x_1x_2} + v_{x_2x_2} + v_{x_3x_3}\right)\right](x_1,x_2,0,t) = \\ &= f(x_1,x_2,0,t) - \left[h_{tt}(x_1,x_2,t) - c^2\left(h_{x_1x_1} + h_{x_2x_2}\right)(x_1,x_2,t) - c^2 \cdot 2\tilde{a}(x_1,x_2,t)\right] = 0 \end{aligned}$$

Mit einer bestimmten Wahl von $\tilde{a}$ ist $F(x_1,x_2,0,t)$ erfüllt.

3.) Weiteres Vorgehen:

$\Box w = \tilde{F}(x,t)$

$w(x,0) = \tilde{\varphi}_0(x)$, $w_t(x,0) = \tilde{\psi}_0(x)$

$w(x_1,x_2,0,t) = 0$

$\tilde{F}$, $\tilde{\varphi}_0$ und $\tilde{\psi}_0$ seien die nach $x_3 < 0$ ungerade fortgesetzten Funktionen F, φ_0 und ψ_0. Betrachte nun das Problem P_n in $\mathbb{R}^3 \times (t \geq 0)$. Es sei $\tilde{w} = \tilde{w}(x,t)$ die Lösung von P_n. Zu zeigen ist, daß $\tilde{w}$ ungerade in x_3 ist bezüglich dem Nullpunkt.

$\tilde{w}(x_1,x_2,-x_3,t) = -\tilde{w}(x_1,x_2,x_3,t)$

Wir definieren folgende Funktion:

$\hat{w}(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{w}(x_1, x_2, -x_3, t) + \tilde{w}(x_1, x_2, x_3, t)$

$\Box\hat{w}(x_1, x_2, x_3, t) = \tilde{F}(x_1, x_2, -x_3, t) + \tilde{F}(x_1, x_2, x_3, t) = 0$

Also gilt außerdem:

$\hat{w}(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$, $\hat{w}_t(x, 0) = 0$

Daraus ergibt sich also $\hat{w} = 0$ nach dem Eindeutigkeitssatz. $\tilde{w}(x_1, x_2, x_3, t)|_{x_3 \geq 0} = w(x,t)$ ist nun Lösung des w-Problems ohne $\tilde{}$. Daraus folgt dann, daß $u = w + v$ das Ausgangsproblem löst.

Abschließend kann noch angemerkt werden:

a.) Probe sollte gemacht werden, da nur von der Existenz der Lösung u ausgegangen wird

b.) Probleme hinsichtlich der Differenzierbarkeit von $\tilde{\varphi}_0$, $\tilde{\psi}_0$ und $\tilde{F}$ bei $x_3 = 0$.

Beispiel:

Wir wollen das folgende Problem

$$(P)\begin{cases} \Box_3 u(x,t) = h_1(x)\cos(\omega t) + h_2(x)\sin(\omega t) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

mit reellen Funktionen h_1 und h_2 lösen. Dazu setzen wir $h(x) = h_1(x) + \mathrm{i}h_2(x)$. Dann ist folgendes Problem zu lösen:

$$(\overline{P}) = \begin{cases} \Box_3 u(x,t) = h(x)\exp(-\mathrm{i}\omega t) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Die Lösung von (P) ist dann $\mathrm{Re}(u(x,t))$, wenn u das Problem $(\overline{P})$ löst. Es sei $h(x)$ für $\|x\| > R$. Für $t > \frac{\|x\|+R}{c}$ erhalten wir mit der Kirchhoffschen Formel:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\int\limits_{\|y\|\leq R} h(y)\frac{\exp\left(\mathrm{i}k\|y-x\|\right)}{\|y-x\|}\,\mathrm{d}\tau_y \text{ für } x \in \mathbb{R}^3,\ t > \frac{\|x\|+R}{c}$$

Werten wir die Formel aus ($k = \frac{\omega}{c}$):

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{\|y-x\|\leq ct}\frac{h(x)\exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{\|y-x\|}{c}\right)\right]}{\|y-x\|}\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = \frac{1}{4\pi c^2}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\int\limits_{\|y-x\|\leq ct}\frac{h(y)\exp\left[\mathrm{i}k\|y-x\|\right]}{\|y-x\|}\,\mathrm{d}\tau_{(y)}$$

Es sei $h(y) = 0$ für $\|y\| > R$: Falls $t > \frac{\|x\|+R}{c}$ ist, gilt $\{y|\|y\| \leq R\} \subset \{y|\|y-x\| \leq ct\}$. Begründen kann man dies durch $\|y-x\| \leq \|y\| + \|x\| \leq R + ct - R = ct$. Weiterhin gilt für $t > \frac{\|x\|+R}{c}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\exp(-\mathrm{i}\omega t)\int\limits_{\|y\|<R} h(y)\frac{\exp\left[\mathrm{i}k\|y-x\|\right]}{\|y-x\|}\,\mathrm{d}\tau_{(y)} = \exp(-\mathrm{i}\omega t)U(x)$$

Folgerung:

Nach genügend langer Zeit schwingt das Objekt mit der Störung.

Beispiel:

Betrachten wir die HELMHOLTZ-Gleichung/Schwingungsgleichung: $\triangle w + k^2 w = 0$. Diese kann mit dem Separationsantz $\alpha(x)\beta(t)$ gelöst werden. Es sei $h(y) = 0$ und $\|y\| > R$:

$$\tilde{u} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\|y\| \leq R} h(y) \cdot \frac{\exp\left[\mathrm{i}k\|y-x\|\right]}{\|y-x\|} \,\mathrm{d}\tau_{(y)}$$

$$\triangle \widetilde{u} + k^2 \widetilde{u} = h$$

3.8 Die Wellengleichung in beschränkten Raumgebieten (Entwicklung nach Eigenfunktionen des $-\triangle$-Operators)

$G \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein beschränktes Gebiet mit $\overline{G} = G \cup \partial G$. ∂G sei stückweise glatt. Gesucht sei $u = u(x,t)$, definiert für $x \in \overline{G}$, $t \geq 0$. Wir haben also das Problem:

$$\left(u_{tt} - c^2 \triangle_3 u\right)(x,t) = 0 \text{ für } x \in G,\, t > 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\; u_t(x,0) = \psi(x) \text{ für } x \in G$$

$$u(x,t) = 0 \text{ für } x \in \partial G \text{ und } t \geq 0$$

Wir machen einen Separationsansatz. Dies kann man bei beschränkten Gebieten immer versuchen!

$$u(x,t) = v(x)T(t)$$

Wir setzen diesen Ansatz in die obige Gleichung ein und erhalten:

$$T''v - c^2 T \triangle v = 0 \qquad |:(c^2 \cdot vT)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta v}{v}(x) = -\lambda$$

λ sei der Separationsparameter. Wir erhalten also zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$$

$$\triangle v(x) + \lambda v(x) = 0,\; v(x) = 0 \text{ für } x \in \partial G$$

Zu betrachten ist das Eigenwertproblem $-\triangle v(x) = \lambda v(x)$ $(x \in G)$, $v(x) = 0$ $(x \in \partial G)$. Gesucht sind Lösungen $v \neq 0$ und zugehörige λ's, also gerade die Eigenwerte.

1.) Jeder Eigenwert ist **positiv**.

$$-\triangle v = \lambda v \qquad \text{in } G$$

Wir multiplizieren nun mit $\overline{v}(x)$ durch und integrieren:

$$\int\limits_G -\triangle v(x)\overline{v}(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int\limits_G |v(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Außerdem gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} v \overline{v} = -\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} v \overline{v}\right) + \vec{\nabla} v \vec{\nabla} \overline{v} \Rightarrow |\vec{\nabla} v|^2 = \triangle v \overline{v} + \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} v \overline{v}\right)$$

$$\int\limits_G -\triangle v \overline{v}\,\mathrm{d}x + \int\limits_G |\vec{\nabla} v|^2\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_{\partial G} \overline{v}\vec{\nabla} v \cdot n\,\mathrm{d}x}_{=0} \Rightarrow \underbrace{\int\limits_G |\vec{\nabla} v|^2\,\mathrm{d}x}_{\geq 0} = \lambda \underbrace{\int\limits_G |v(x)|^2\,\mathrm{d}x}_{>0}$$

Daraus folgt dann $\lambda = 0$ oder $\lambda > 0$. $\lambda = 0$ bedeutet:

$$\int\limits_G |\vec{\nabla} v|^2 \,\mathrm{d}x = 0$$

Damit erhalten wir schrittweise:

$\vec{\nabla} v = 0$ in G

$v = \text{const.}$ in $\overline{G}$

Aus $v_{\partial G} = 0$ folgt dann $v = 0$ und dies ist nach Definition keine Eigenfunktion.

Übung:

Mit v als Eigenfunktion zu λ ist auch $\overline{v}$ Eigenfunktion zu λ.

2.) v_1 sei Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1. v_2 sei Eigenfunktion zu λ_2 und es gelte $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann gilt $v_1 \perp v_2$.

$$\int\limits_G v_1(x)\overline{v}_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Wir rechnen dies nach:

$-\triangle v_1 = \lambda_1 v_1$

$-\triangle v_2 = \lambda_2 v_2$

Es sei $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int\limits_G v_1(x)v_2(x)\,\mathrm{d}(x) = \int\limits_G [v_1\triangle v_2 - v_2\triangle v_1]\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_G \left[\vec{\nabla}\cdot\left(v_1\vec{\nabla}v_2\right) - \vec{\nabla}\cdot\left(v_2\vec{\nabla}v_1\right) - \vec{\nabla}v_1\cdot\vec{\nabla}v_2 + \vec{\nabla}v_2\cdot\vec{\nabla}v_1\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial G}\left[v_1\vec{\nabla}v_2 - v_2\vec{\nabla}v_1\right]\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

3.) Es gibt abzählbar viele Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3, ... mit $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \ldots$ mit $\lambda_n \mapsto \infty$ für $n \mapsto \infty$.

4.) Zu jedem Eigenwert gibt es höchstens endlich viele Eigenfunktionen (endliche Vielfachheit).

5.) Jede Eigenfunktion v gehört zu $C_1(\overline{G})$.

3.8.1 Entwicklungssatz

Es sei $f \in C^2(\overline{G})$ und $f(x) = 0$ für $x \in \partial G$. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(x) \text{ für } x \in \overline{G}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig (also unabhängig von x) auf $\overline{G}$.

Man hat dann:

$$a_k = \frac{\int\limits_G f(x)v_k(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_G v_k^2(x)\,\mathrm{d}x} \text{ für } k = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

$u(x,t) = v(x)T(t)$ für $v_{1,\,\ldots,\,n}$ mit λ_j

$T''(t) + \lambda_j c^2 T(t) = 0 \Rightarrow T_j(t) = A_j\cos(\sqrt{\lambda_j}ct) + B_j\sin(\sqrt{\lambda_j}ct)$

Ergebnis:

Sind φ, ψ in $\overline{G}$ genügend oft stetig differenzierbar, so ist die Lösung des Anfangswert-Randwertproblems (1), (2), (3) durch die Reihe

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\varphi, v_n) \cos\left(c\sqrt{\lambda_n} t\right) + \frac{(\psi, v_n)}{c\sqrt{\lambda_n}} \sin\left(c\sqrt{\lambda_n} t\right) \right] v_n(x)}$$

gegeben, wobei $(\bullet, \bullet)$ für zwei reellwertige Funktionen f und g folgendermaßen definiert ist:

$$(f,g) = \int\limits_G f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel:

Ist $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ ein Rechteck, so wird das Eigenwertproblem (4)

$$-v_{xx} - v_{yy} = \lambda v(x,y) \text{ mit } (x,y) \in G,\ v(0,y) = v(a,y) = v(x,0) = v(x,b) = 0$$

wieder mit einem Separationsansatz $v(x,y) = X(x)Y(y)$ gelöst. Man erhält die orthonormierten Eigenfunktionen

$$v_{nm}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \text{ für } n,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

Beispiel:

Ist $G = \{(x,y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 < R^2\}$ ein Kreisgebiet, so wird (1), (2), (3) mit Polarkoordinaten geschrieben ($u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, t) := w(r,\vartheta,t)$):

$$\left.\begin{aligned} & w_{tt} - c^2 \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta} \right) = 0 \\ & w(r,\vartheta,0) = f(r,\vartheta)\ (= \varphi(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)) \\ & w_t(r,\vartheta,0) = g(r,\vartheta)\ (= \psi(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)) \\ & w(R,\vartheta,t) = 0 \end{aligned}\right\}\ 0 \le r \le R,\ t \ge 0,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

Der Separationsansatz $w(r,\vartheta,t) = \alpha(r,\vartheta)\beta(t)$ mit $\alpha(r,\vartheta) = \Lambda(r)\Theta(\vartheta)$ liefert für $\Lambda(r)$ eine BESSELsche Differentialgleichung mit Parameter $n \in \mathbb{N}$ von der eine im Nullpunkt reguläre Lösung gesucht wird. Bei der Gleichung für Θ ist zu beachten, daß eine 2π-periodische Lösung $\Theta = \Theta(r)$ gefordert ist.

Kapitel 4

Nichtlineare Wellengleichung

Hier wollen wir die eindimensionale nichtlineare Wellenausbreitung anhand der Gleichung

$$\varrho_t(x,t) + c(\varrho(x,t))\varrho_x(x,t) = 0 \qquad (1)$$

behandeln. Solche Gleichungen erhält man aus Erhaltungssätzen, welche die Form $\varrho_t(x,t) + q_x(x,t) = 0$ (2) haben. Hier bedeuten ϱ die lineare Dichte einer physikalischen Quantität und q der Fluß dieser Größe (die Menge pro Zeiteinheit, die den Punkt x zur Zeit t passiert; $\frac{q}{\varrho}$ ergibt sich Flußgeschwindigkeit). Als ersten Ansatz nimmt man einen funktionalen Zusammenhang $q = Q(\varrho)$ an. (2) geht dann über in $\varrho_t(x,t) + Q'(\varrho(x,t))\varrho_x(x,t) = 0$, eine Gleichung der Form (1) mit $c(\varrho) = Q'(\varrho)$. Gleichung (2) bedeutet in Integralform:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{x_1}^{x_2} \varrho(x,t)\,\mathrm{d}x + q(x,t)\big|_{x=x_1}^{x_2} = 0 \qquad (3)$$

Leider kann dieses Kapitel nicht fortgesetzt werden, da sich der Dozent zwei Wochen vor Ende der Vorlesungszeit an der Schulter verletzt hat.