Mitschrieb zu Höhere Mathematik IV: Variationsrechnung

Dr. Müller-Rettkowski

Vorlesung Wintersemester 2003/2004

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 4. Januar 2005

Mitschrieb der Vorlesung Höhere Mathematik IV
von Herrn Dr. Müller-Rettkowski im Wintersemester 2003/2004
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die Problemstellung

Die Funktion $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ heißt **stückweise glatt** (stückweise stetig differenzierbar), falls f auf $[a, b]$ stetig ist und f' auf $[a, b]$ höchstens endlich viele Unstetigkeiten der folgenden Art hat: Ist c eine Unstetigkeit von f', so sollen

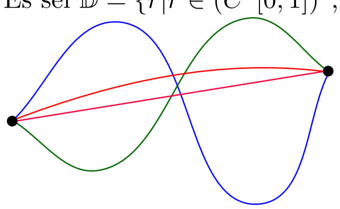
$$f'(c+) = \lim_{\substack{x \mapsto c \\ x > c}} f'(x) \text{ und } f'(c-) = \lim_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} f(x)$$

existieren und endlich sein.

$$\left(\hat{C}^1[a, b]\right)^n = \left\{\vec{f} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n, \text{ jede Komponentenfunktion von } \vec{f} \text{ ist stückweise glatt}\right\}$$

1.1 Kürzeste Verbindung zweier Punkte im Raum

Es sei $\mathbb{D} = \{\vec{r}|\vec{r} \in (\hat{C}^1[0, 1])^3, \ \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \ \vec{r}(1) = \vec{r}_1\}$.



Gesucht ist $\vec{r} = \vec{r}_{min} \in \mathbb{D}$ mit $L(\vec{r}_{min}) \leq L(\vec{r})$ für alle $\vec{r} \in \mathbb{D}$, wobei $L(\vec{r}) := \int\limits_0^1 \|\vec{r}'(t)\| \mathrm{d}t$ die Länge der durch $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $0 \leq t \leq 1$, beschriebenen Raumkurve ist. Die Lösungen des Problems sind Geraden:

$$\vec{r}_{min}(t) = \vec{r}_0 + t\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

1.2 Geodätische Probleme

Gegeben ist eine Fläche F im $\mathbb{R}^3$, etwa in impliziter Darstellung $\phi(x, y, z) = 0$. A und B seien gegebene Punkte auf F mit den Ortsvektoren $\vec{r}_A$ und $\vec{r}_B$. Es sei $\mathbb{D} = \{\vec{r}|\vec{r} \in (\hat{C}^1[0, 1])^3, \ \vec{r}(0) = \vec{r}_A, \ \vec{r}(1) = \vec{r}_B\}$. Es ist

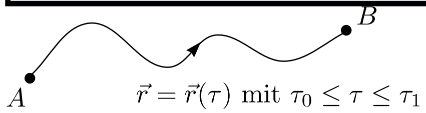
$$L(\vec{r}) = \int\limits_0^1 \|\vec{r}'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

auf $\mathbb{D}$ zu minimieren unter der Nebenbedingung $\phi(\vec{r}(t)) = 0$ für $0 \leq t \leq 1$.

1.3 „Fermatsches Prinzip“

Gegeben sei ein Medium $G \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $(x, y, z) \in G$ und der Geschwindigkeit des Lichts $v = v(x, y, z)$ an dieser Stelle. A, $B \in G$ seien Punkte. Gesucht ist der Weg des Lichtes in G von A nach B. Das Fermatsche Prinzip besagt nun:

> Das Licht wählt den Weg, den es in kürzester Zeit zurücklegen kann.



$\vec{r}(\tau_0) = \vec{r}_A$, $\vec{r}(\tau_1) = \vec{r}_B$

Die Zeit von A nach B auf der Kurve $\vec{r} = \vec{r}(\tau)$ ist nun:

$$T(\vec{r}) = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

Die mathematische Formulierung lautet folgendermaßen:

$$\mathbb{D} = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(\tau) \in \left(\hat{C}^1[\tau_0, \tau_1]\right)^3, \vec{r}(\tau_0) = \vec{r}_A, \vec{r}(\tau_1) = \vec{r}_B \right\}$$

Gesucht ist nun $\vec{r} = \vec{r}_{min}(\tau) \in \mathbb{D}$ mit $T(\vec{r}_{min}) \leq T(\vec{r}) \; \forall \; \vec{r} \in \mathbb{D}$, wobei gilt:

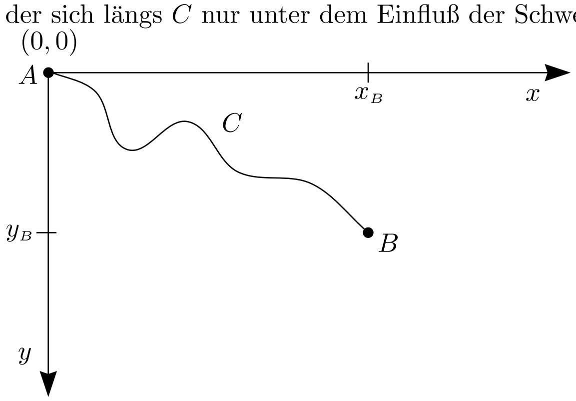
$$T(\vec{r}) = \int \frac{\|\vec{r}'(\tau)\|}{v(\vec{r}(\tau))} \, \mathrm{d}\tau$$

Ist die Kurve eben mit der Darstellung $y = y(x)$ mit $a \leq x \leq b$, dann folgt:

$$T(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v(x, y(x))} \, \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \text{Minimum auf } \mathbb{D}$$

1.4 Das Problem der Brachystochrone

Durch 2 Punkte A und B in einer senkrecht gedachten Ebene ist eine Kurve C so zu legen, daß ein Massenpunkt, der sich längs C nur unter dem Einfluß der Schwerkraft bewegt, in kürzester Zeit von A nach B gelangt.



Nach dem Energieerhaltungssatz gilt nun:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy = 0$$

Damit erhalten wir durch Auflösen v:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Gesucht ist nun $y = y(x)$ mit $y(0) = 0$, $y(x_B) = y_B$, daß folgender Ausdruck minimal wird für $y \in \hat{C}^1[0, x_B]$:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{x_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}} \,\mathrm{d}x$$

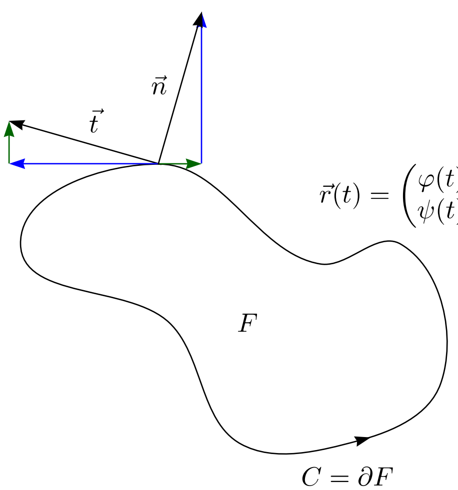
Das Integral $\int\limits_0^{x_B} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y(x)}}$ muß damit existieren für $y(x) \geq 0$. Wir vertauschen einfach die Bezeichnungen der Achsen oben. $T(y)$ lautet jetzt:

$$\boxed{T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{\tilde{x}_B} \sqrt{\frac{1 + y'(x)}{x}} \,\mathrm{d}x}$$

Dies stellt nun kein Problem dar, da das Integral $\int\limits_0^{x_B} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ existiert.

1.5 Isoperimetrische Probleme

Gegeben ist die Zahl l. Gesucht ist eine geschlossene ebene Kurve der Länge l, die eine möglichst große Fläche berandet.



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \text{ für } 0 \leq t \leq 1$$

$$\iint\limits_F \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}o = \oint\limits_{\partial F} \vec{v} \cdot \vec{n} \,\mathrm{d}s$$

A ist der Inhalt von F und der berechnet sich nach:

$$A = \iint\limits_F 1 \,\mathrm{d}o$$

Wähle nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 1$:

$$\iint\limits_F \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \,\mathrm{d}o = A = \oint\limits_{\partial F} x n_1 \,\mathrm{d}s$$

Für den Tangentenvektor $\vec{t}$ gilt $\vec{t} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{pmatrix}$. Da der Normalenvektor $\vec{n}$ auf diesem senkrecht steht, können wir $\vec{n}$ schreiben als $\vec{n} = \begin{pmatrix} \psi'(t) \\ -\varphi'(t) \end{pmatrix}$. Des weiteren ist $\vec{r}(0) = \vec{r}(1)$ und damit gilt für das geschlossene Integral:

$$A = \oint\limits_{\partial F} \varphi(t)\psi'(t) \,\mathrm{d}s = \boxed{\int\limits_0^1 \varphi(t)\psi'(t) \,\mathrm{d}t}$$

Gegeben ist $\mathbb{D} = \left\{ \vec{r} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \in \left(\hat{C}^1[0,1] \right)^2, \vec{r}(0) = \vec{r}(1), \vec{r}'(t) \neq \vec{o}, \vec{r} \text{ injektiv auf } (0,0) \right\}$. Gesucht ist dann $\vec{r} \in \mathbb{D}$ mit $A(\vec{r})\,(= A(\varphi, \psi)) = \int\limits_0^1 \varphi(t)\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ ist maximal unter der Nebenbedingung $\int\limits_0^1 \|\vec{r}'(t)\|\,\mathrm{d}t = l$.

Außerdem folgt mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 2$:

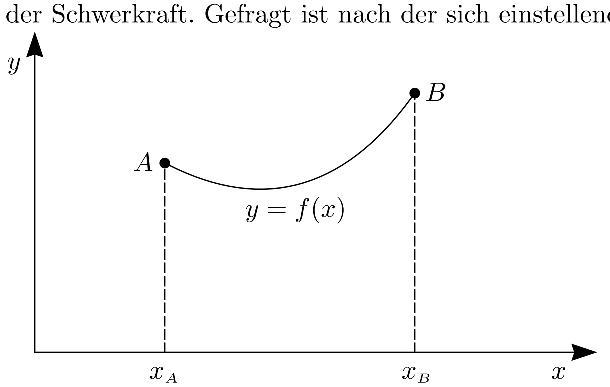
$$\iint\limits_F \vec{\nabla} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}o = 2A = \oint\limits_{\partial F} (xn_1 + yn_2)\ \mathrm{d}s = \oint\limits_{\partial F} [\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)]\ \mathrm{d}t$$

$$A = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial F} [\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)]\ \mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{2} \int\limits_0^1 [\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)]\ \mathrm{d}t}$$

Auch diese Formel werden wir später noch benötigen.

1.6 Kettenlinie

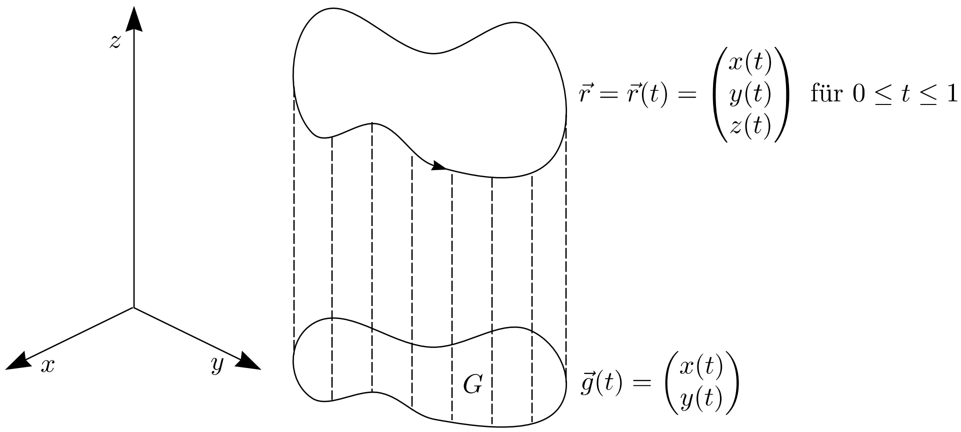
Ein nicht dehnbares homogenes Kabel der Länge l wird in den Punkten A und B aufgehängt. Es unterliegt der Schwerkraft. Gefragt ist nach der sich einstellenden Form $y = f(x)$.



Bedingung:

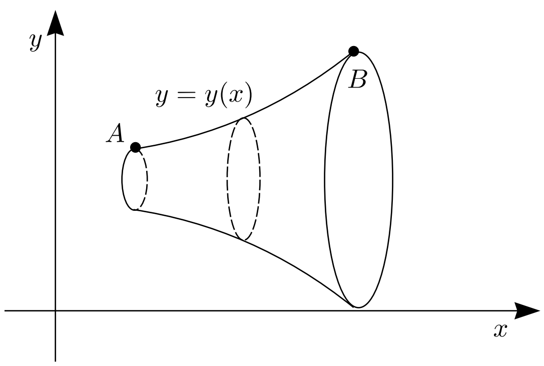
Die Schwerpunktskoordinate ist für die gesucht Lösung minimal. Gesucht ist $y = f(x)$ mit $f(x_A) = y_A$, $f(x_B) = y_B$, für die $\int\limits_{x_A}^{x_B} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$ minimal ist unter der Nebenbedingung $\int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'(x)}\,\mathrm{d}x = l$.

1.7 Minimalflächenprobleme/Plateau-Problem



Gesucht ist die Fläche F: $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in G$ und $z(t) = f(x(t), y(t))$ für $0 \leq t \leq 1$ derart, daß der Inhalt von $F = A(f) = \iint\limits_G \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}(x, y)$ minimal wird.

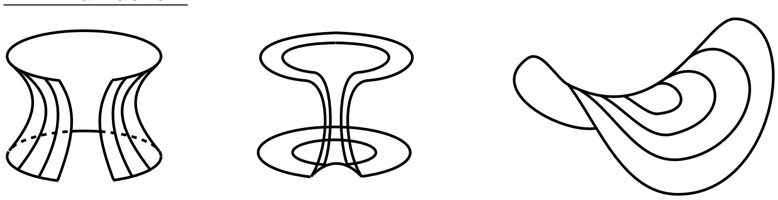
1.7.1 Minimale Rotationsfläche



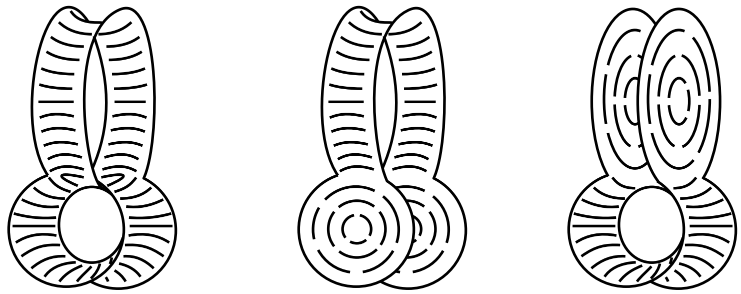
Gesucht ist Kurve $y = y(x)$ durch A und B derart, daß der durch Rotation der Kurve um die x-Achse entstehende Körper minimale Oberfläche hat.

1.7.2 Beispiele zum Plateau-Problem

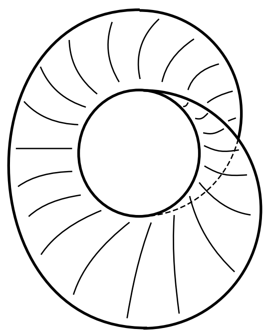
1.) Minimalflächen:



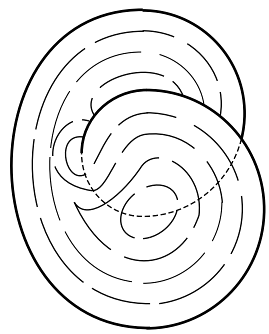
2.) Zwei Flächentypen bilden drei verschiedene Oberflächen:



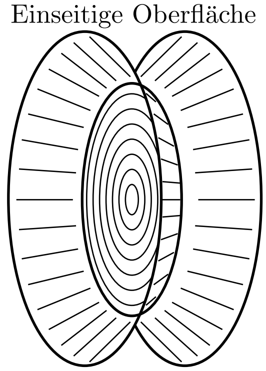
3.) Sonstige Flächen:



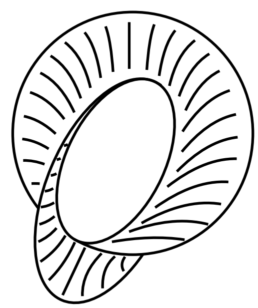
Einseitige Oberfläche



Zweiseitige Oberfläche



System bestehend aus drei Oberflächen



Zusammengefügte Kurve

1.8 Hamilton-Prinzip

Wir stellen uns vor, daß der Zustand eines physikalischen Systems zur Zeit t durch einen Vektor $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ mit $t \in [t_0, t_1]$ festgelegt wird. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ sei die zugehörige Lagrange-Funktion. Der im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ bei bekannten Zuständen $\vec{\varphi}_0 = \vec{\varphi}(t_0)$ (Anfang) und $\vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi}(t_1)$ (Ende) ablaufende Vorgang wird durch die Kurve $\vec{x} = \vec{\varphi}_m(t)$ beschrieben, die das Wirkungsintegral

$$S(\vec{\varphi}) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t); \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t))\,\mathrm{d}t$$

minimal (oder wenigstens stationär) macht und $\vec{\varphi}_m(t_0) = \vec{\varphi}_0$ und $\vec{\varphi}_m(t_1) = \vec{\varphi}_1$ erfüllt.

Zusammenfassung aus den vorhergehenden Beispielen:

Jeweils liegt eine Vorschrift vor, die Funktionen aus einer Funktionenmenge ($\mathbb{D}$) eindeutig eine reelle Zahl zuordnet. Wir haben also folgende Vorschrift:

$F : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$

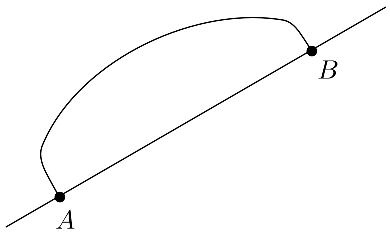
F nennt man nun **Funktional** („Funktionfunktion"). Gesucht sind Elemente y aus $\mathbb{D}$, für die $F(y)$ **extremal** wird. In HMII hatten wir folgendes Problem:

$f : M \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$

$y = f(x_1, \ldots, x_m)$

Hier hatten wir endlich viele Unbekannte. Nun betrachten wir aber $y = F(\varphi)$ und hier handelt es sich um „unendlich viele Unbekannte"zur Festlegung einer Funktion.

1.) Gesucht ist eine C^2-Funktion, welche die kürzeste Verbindung zweier Punkte einer Geraden beschreibt, die in den Punkten A und B senkrecht auf der Geraden steht.



Man wird feststellen, daß dieses Problem keine Lösung besitzt.

2.) Voraussetzung, daß eine Lösung existiert, muß rückwirkend bestätigt werden.

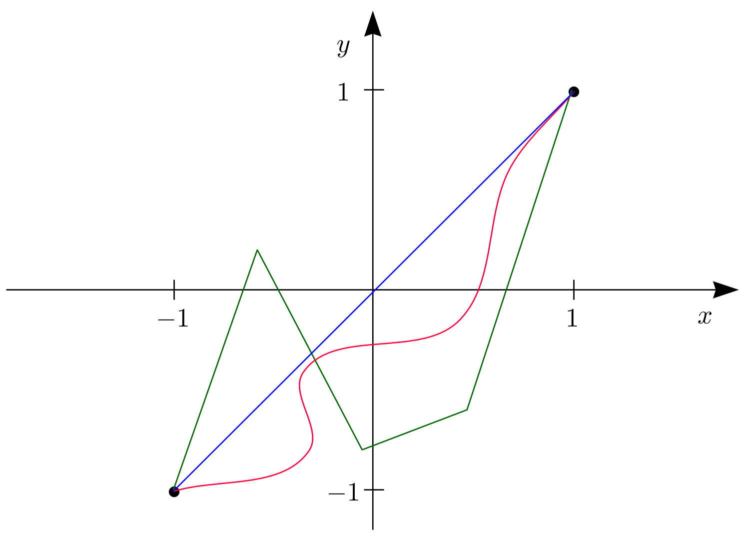
„Die größte ganze Zahl G ist gleich 1."

Da $1 \in \mathbb{Z}$, folgt $G \geq 1$. Falls $G > 1$ folgt, $G^2 > G$. Dies geht nicht, da mit G aus $G^2 \in \mathbb{Z}$ und G schon die größte ganze Zahl ist. Daraus folgt dann $G = 1$. Wir haben wir vorausgesetzt, daß es eine größte ganze Zahl gibt, weshalb wir auf diesen Unsinn kommen!

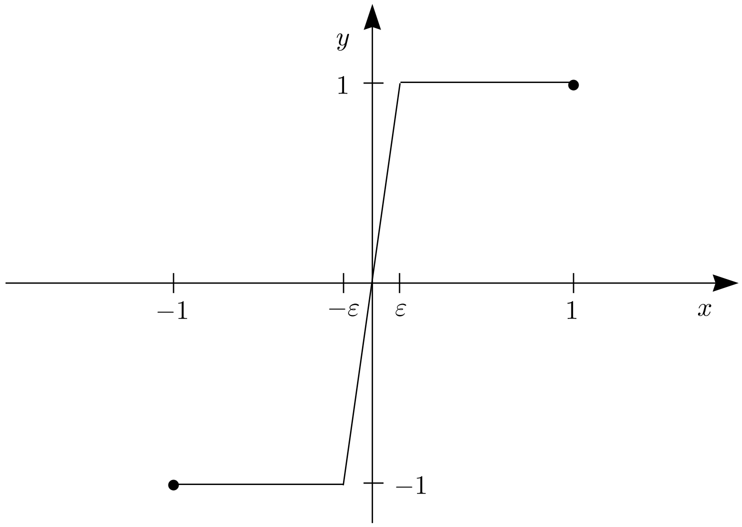
3.) Minimum auf $\mathbb{D}$:

$$F(y) = \int\limits_{-1}^{+1} x^4 y'^2 \,\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{D} = \left\{ y \in \hat{C}^1[-1,+1] | y(-1) = -1, y(1) = 1 \right\}$$



Da $F(y) \geq 0$, ist die Frage nach einem Minimum keinesfalls sinnlos! Aus $y' = 0$ folgt $y(x) = \text{const.} \notin \mathbb{D}$. Wenn das Problem also durch y_m lösbar ist, muß $F(y_m) > 0$ sein. Es sei $y_m \in \mathbb{D}$ eine Lösung, also gelte $F(y_m) = a > 0$.



$$y_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad -1 \le x \le -\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}x & \text{für} \quad -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ 1 & \text{für} \quad \varepsilon \le x \le 1 \end{cases}$$

Durch Nachrechnen erhält man:

$$\frac{1}{2}F(y_\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon x^4 \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_\varepsilon^1 0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^\varepsilon = \frac{1}{5}\varepsilon^3$$

$$0 < F(y_\varepsilon) = \frac{2}{5}\varepsilon^3\,(< a)$$

Also erhalten wir:

$$\varepsilon < \sqrt[3]{\frac{5}{2}a}$$

Das geht für jede Zahl $a > 0$. Unser Problem hat folglich keine Lösung!

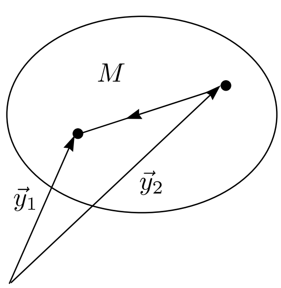
Bemerkungen:

1.) Es wird $\mathbb{D}$ fast ausschließlich $\subset \hat{C}^1$. Es handelt sich um einen Vektorraum. $\mathbb{D}$ ist jedoch im allgemeinen kein Vektorraum. Als Beispiel betrachten wir:

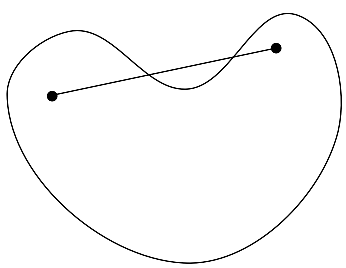
$$\mathbb{D} = \left\{y \in C^1[a,b] | y(a) = a_1, y(b) = b_1\right\} \left(a_1^2 + b_1^2 \neq 0\right)$$

Dies ist kein Vektorraum, denn aus y_1, $y_2 \in \mathbb{D}$ folgt $y_1(a) + y_2(a) = 2a_1$. $\mathbb{D}$ ist sehr oft eine **konvexe** Menge.

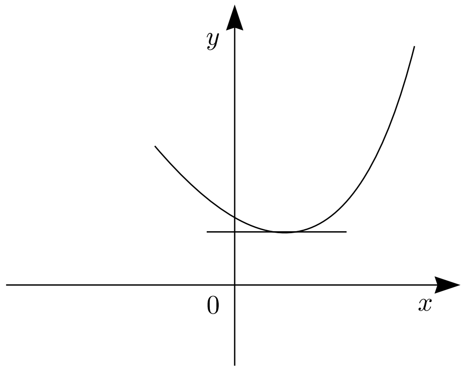
Konvex



Nicht konvex



$\mathbb{D}$ heißt konvex, falls aus $y_1,\ y_2 \in M$ folgt, daß $t\vec{y}_1 + (1-t)\vec{y}_2 \in M$ für alle $t \in [0,1]$. Eine konvexe Funktion $y = f(x)$ ist beispielsweise:



Für konvexe Funktionen gilt nach unserer Definition $f'' \geq 0$. (Die Ableitung liegt immer außerhalb der Menge.) Ist unsere Menge $\mathbb{D}$ konvex?

$a_1 \stackrel{!}{=} ty_1(a) + (1-t)y_2(a) = ta_1 + (1-t)a_1 = a_1$

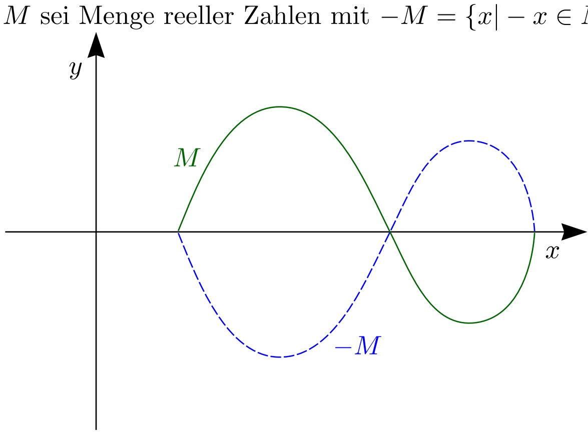
$b_1 \stackrel{!}{=} ty_1(b) + (1-t)y_2(b) = b_1$

Die Voraussetzungen zur Konvexität sind also erfüllt.

Kapitel 2

Grundlegendes zur Optimierung

Y sei ein Vektorraum mit $\mathbb{D} \subset Y$. Außerdem sei ein Funktional $F : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben. Gibt es ein $\overline{y} \in \mathbb{D}$ mit $F(\overline{y}) \leq F(y)\ \forall\ y \in \mathbb{D}$, so heißt $\overline{y}$ **globaler Minimumpunkt** für F auf $\mathbb{D}$. Gilt $F(\overline{y}) < F(y)\ \forall\ y \neq \overline{y}$ mit $y \in \mathbb{D}$, so heißt $F(\overline{y})$ striktes (eigentliches) Minimum; $\overline{y}$ minimiert F eindeutig.
M sei Menge reeller Zahlen mit $-M = \{x| - x \in M\}$. Hier gilt dann $\min(M) = -\max(M)$.



Lemma ①:

$\overline{y}$ minimiert F auf $\mathbb{D} \leftrightarrow F(\overline{y}+v) - F(\overline{y}) \geq 0\ \forall\ v \in Y$ mit $\overline{y}+v \in \mathbb{D}$.
$\overline{y}$ minimiert F auf $\mathbb{D}$ eindeutig $\leftrightarrow F(\overline{y}+v) - F(\overline{y}) > 0\ \forall\ v \in Y$ mit $\overline{y}+v \in \mathbb{D}$ und $v \neq 0$.

Beispiel:

Es liegt der Vektorraum $Y = C^1[a,b]$ und $\mathbb{D} = \{y \in C[a,b], y(a) = 0, y(b) = 1\}$ vor.

$$F(y) = \int\limits_a^b y'^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Das Integral ist auf jeden Fall größer als Null, womit es sinnvoll ist, ein Minimum auf $\mathbb{D}$ zu suchen. Mit $y \in \mathbb{D}$ und $v \in Y$ gilt $y + v \in \mathbb{D}$, falls $v(a) = v(b) = 0$ ist.

$\mathbb{D}_0 = \{v \in Y|v(a) = v(b) = 0\}$

Betrachte für beliebiges $v \in \mathbb{D}_0$ mit $\overline{y} \in \mathbb{D}$ den Ausdruck $F(\overline{y}+v) - F(\overline{y})$. Das Ziel ist, $\overline{y} \in \mathbb{D}$ so zu finden, daß dieser Ausdruck ≥ 0 wird für alle $v \in \mathbb{D}_0$. $\overline{y} \in \mathbb{D}$ sei fest: $y \in \mathbb{D} \leftrightarrow y = \overline{y} + v,\ v \in \mathbb{D}_0$. Außerdem gilt $|\mathbb{D} = \overline{y} + \mathbb{D}_0|$. Es sei als Übung aufgefaßt, sich darüber Gedanken zu machen. Ein Ausdruck dieser Form kam in HM schon zweimal vor, nämlich bei linearen Gleichungssystemen und linearen Differentialgleichungen. Wir schätzen nun ab:

$$F(\overline{y}+v)-F(\overline{y})=\int\limits_a^b \left[v'(x)^2+2y'(x)v'(x)\right]\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b 2y'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,(>0)$$

Das Gleichheitszeichen gilt für $v'(x)=0\ \forall\ x$. Damit folgt dann, daß $v(x)=\text{const.}$ und mit $v(a)=v(b)=0$, daß $v=0$ ist. Gibt es nun $\overline{y}\in\mathbb{D}$ mit $\int\limits_a^b \overline{y}'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=0\ \forall\ v\in\mathbb{D}_0$. Eine Möglichkeit wäre, daß $\overline{y}'=\alpha$ ist. Dann ist das Integral aufgrund der Randbedingungen für $v'(x)$ gleich Null. Daraus folgt dann:

$$\overline{y}=\frac{y_1-y_2}{a-b}x+\frac{y_2a-y_1b}{a-b}$$

$$\boxed{F(\overline{y})=\frac{(y_1-y_2)^2}{a-b}}$$

$\overline{y}(x)$ ist **die Minimalfunktion** und $F(\overline{y})$ **das Minimum**.

2.1 Satz von du Bois-Reymond/Lagrange/Fundamentallemma der Variationsrechnung

Satz ①:

E sei $g\in C^0[a;b]$ und es gelte $\int\limits_a^b g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x=0\ \forall\ h\in C^1[a,b]$ mit $h(a)=h(b)=0$ ($\forall\ h\in\mathbb{D}_0$). Dann ist $g(x)=\text{const.}\ \forall\ x\in[a,b]$.

Beweis:

Wähle $\tilde{h}(x)=\int\limits_a^x\left[g(t)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\,\mathrm{d}t$. $\left(\int\limits_a^x (g(t)-C)\,\mathrm{d}t\right)$ Es sei $\tilde{h}\in\mathbb{D}_0$: $\tilde{h}\in C^1[a,b]$, $\tilde{h}(a)=0$, $\tilde{h}(b)=0$. Wir benötigen außerdem:

$$\tilde{h}'(x)=g(x)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Die Voraussetzung liefert nun:

$$0=\int\limits_a^b g(x)\tilde{h}'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_a^b \tilde{h}'(x)^2\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \tilde{h}'(x)\left[g(x)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b \tilde{h}'(x)g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(\tau)\,\mathrm{d}\tau\int\limits_a^b \tilde{h}'(x)\,\mathrm{d}x=0$$

Daraus folgt dann $\tilde{h}'(x)=0\ \forall\ x$ und damit:

$$\boxed{g(x)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\text{const.}}$$

Folgerung ①:

$f,\, g \in C^0[a,b]$. Es gelte $\int\limits_a^b [f(x)h(x) + g(x)h'(x)]\,\mathrm{d}x = 0 \;\forall\; h \in \mathbb{D}_0$. Dann gilt $f(x) = g'(x) \;\forall\; x \in [a,b]$.

Beweis:

Es sei $u(x)$ die Stammfunktion von $f(t)$:

$$u(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Damit folgt dann durch partielle Integration:

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] h(x)\Bigg|_{x=a}^{b}}_{=0} - \int\limits_a^b \left[\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] h'(x)\,\mathrm{d}x$$

Also gilt weiterhin:

$$\int\limits_a^b [f(x)h(x) + g(x)h'(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \underbrace{\left[g(x) - \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]}_{\in C^0[a,b]} h'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \,\forall\, h \in \mathbb{D}_0$$

Mit Satz ① folgt dann:

$$g(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \Leftrightarrow \boxed{g'(x) = f(x)}$$

Folgerung ②:

Es sei $f \in C^0[a,b]$ und es gelte $\int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\forall\; h \in \mathbb{D}_0$. Dann gilt $f = 0$. Beweisen kann man dies, indem man in der Folgerung ① $g = 0$ setzt.

Satz ② (Verallgemeinerung von Folgerung ②):

Es sei $f \in C^0[a,b]$ und $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $\mathbb{D}_0^{(m)} = \{y \in C^m[a,b] \,|\, h^{(k)}(a) = h^{(k)}(b) = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$ gegeben. Es gelte $\int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;\forall\; h \in \mathbb{D}_0^{(m)}$. Die Behauptung ist nun, daß $f(x) = 0 \;\forall\; x \in [a,b]$.

$\mathbb{D}_0^{(m)} \subset \mathbb{D}_0$

Aus Satz ② erhalten wir Folgerung ②.

Beweis:

Wir wissen:

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0\,\forall\, h \in \mathbb{D}_0$$

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0\,\forall\, h \in \mathbb{D}_0^{(m)}$$

Mit Satz ② folgt dann $f = 0$.

Beweis:

Wir nehmen an, daß $f \neq 0$. Daraus folgt dann $f(c) > 0$ für ein $C \in (a,b)$. Es gibt ein Intervall $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$ mit $f(x) > 0$ für $x \in [\alpha, \beta]$ und stetigem f. Wähle:

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} [(x-\alpha)(\beta-x)]^m & \in \mathbb{D}_0^{(m)} \\ \\ 0 & \text{für} \quad x < \alpha,\, x > \beta \end{cases}$$

Setze dies nun in die Voraussetzung ein:

$$0 = \int\limits_a^b f(x)\tilde{h}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\tilde{h}(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

Dabei handelt es sich um einen Widerspruch.

Bemerkung zu dem letzten Beispiel:

$F(y) = \int\limits_a^b y'(x)^2\,\mathrm{d}x$ wird eindeutig auf $\mathbb{D} = \{<\in C^1[a,b], y(a) = y_1, y(b) = y_2\}$ durch $\overline{y}(x)$ minimiert:

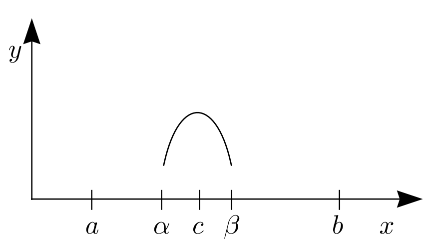
$$\overline{y}(x) = \frac{y_1 - y_2}{a-b}x + \frac{y_2 a - y_1 b}{a-b}$$

Dann soll $\tilde{F}(y)$ Minimum auf $\mathbb{D}$ werden:

$$\tilde{F}(y) = 25\int\limits_a^b \left(y'(x)^2 + \sin^3(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

Die Lösung ist:

$$\tilde{F}(\overline{y}+v) - \tilde{F}(\overline{y}) = F(\overline{y}+v) - F(\overline{y}) \geq 0$$



Lemma ②:

$\overline{y}$ minimiert F auf $\mathbb{D}$. $\Leftrightarrow$ $\overline{y}$ minimiert $c_1^2 F + c_2$ auf $\mathbb{D}$ ($c_1 \neq 0$, $c_2 = \text{const.}$)

2.2 Variationsproblem mit Nebenbedingung

Satz ③:

$\mathbb{D}$ sei Teilmenge des Vektorraums Y. Es seien N Nebenbedingungen $g_1, \ldots, g_N$ gegeben und F sei auf $\mathbb{D}$ definiertes Funktional. Es mögen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ und ein $\overline{y} \in \mathbb{D}$ derart existieren, daß $\overline{y}$ [eindeutig bestimmte] Minimalfunktion von $\tilde{F} = F + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_N g_N$ ist. Dann minimiert $\overline{y}$ das Funktional F [eindeutig] auf der Menge $\{y \in \mathbb{D} | g_j(y) = g_y(\overline{y}),\, j = 1, \ldots, N\}$.

Mittels $g_j(\overline{y}) = l_j$ mit $l_j = 1, \ldots, N$ können die $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ eliminiert werden.

Beweis:

Nach Voraussetzung wissen wir:

$\tilde{F}(y) \geq \tilde{F}(\overline{y})\, \forall\, y \in \mathbb{D}$

Durch Einsetzen von $\tilde{F}$ folgt:

$$F(y) + \sum_{j=1} \lambda_j g_j(y) \geq F(\overline{y}) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j g_j(\overline{y})\, \forall\, y \in \mathbb{D}$$

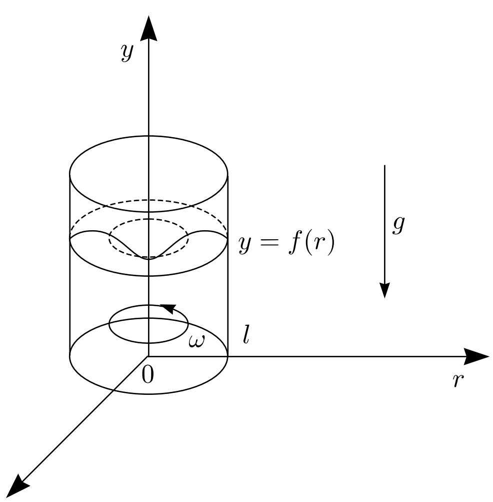
$$F(y) \geq F(\overline{y}) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \left(g_j(\overline{y}) - g_j(y)\right)\, \forall\, y \in \mathbb{D}$$

Daraus ergibt sich dann:

$f(y) \geq F(\overline{y})\, \forall\, y \in \mathbb{D},\, g_j(\overline{y}) = g_j(y)$ mit $j = 1, \ldots, N$

Die λ nennt man auch **Lagrangesche Multiplikatoren**.

2.2.1 Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit



Im Zylinder befindet sich Wasser der konstanten Dichte ϱ vom Volumen V. Gesucht ist die sich einstellende freie Oberfläche, die folgendermaßen charakterisiert ist:

- Das Volumen V bleibt unverändert.

- Die potentielle Energie wird minimal.

Wir berechnet das Volumen der Flüssigkeit:

$$G(y) = V = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{l} \int_{y=0}^{f(r)} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}y = 2\pi \int_{r=0}^{l} r f(r)\,\mathrm{d}r$$

Des weiteren benötigen wir die Energie:

$$E(f) = \int \left[gy\,\mathrm{d}m + \frac{1}{2} r^2\omega^2\,\mathrm{d}m \right]$$

Das Massenelement dm kann außerdem aus der Dichte und dem Volumenelement berechnet werden:

$$\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$$

Damit folgt:

$$E(f) = \int_{0}^{2\pi} \int_{r=0}^{l} \int_{y=0}^{f(r)} \left[gy - \frac{1}{2} r^2\omega^2 \right] \varrho r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}y = 2\pi\varrho \int_{r=0}^{l} \left[\frac{1}{2} g f(r)^2 - \frac{1}{2} r^2\omega^2 f(r) \right] r\,\mathrm{d}r =$$

$$= \pi\varrho \int_{r=0}^{l} \left[g f(r)^2 - r^2\omega^2 f(r) \right] r\,\mathrm{d}r$$

Formulierung der Aufgabe:

Gesucht ist $y = f(r)$ mit $0 \le r \le l$, die $E(f)$ minimiert auf $\mathbb{D} = \{f \in C[0,l], f(r) \ge 0\}$ unter der Nebenbedingung $g(f) = V$. Betrachte nun $\tilde{E}(f) = E(f) + \lambda g(f)$:

$$g(f) = 2\pi \int_{0}^{l} r f(r)\,\mathrm{d}r = \pi\varrho \cdot \frac{2}{\varrho} \cdot \int_{0}^{l} r f(r)\,\mathrm{d}r$$

Wir wählen den Multiplikator geschickt:

$$\tilde{\lambda} g(f) = \tilde{\lambda} \cdot 2\pi \int_{0}^{l} r f(r)\,\mathrm{d}r = \boxed{\pi\varrho \cdot \lambda \cdot \int_{0}^{l} r f(r)\,\mathrm{d}r \text{ mit } \lambda = \frac{2\tilde{\lambda}}{\varrho}}$$

Dann ist folgendes auf $\mathbb{D}$ zu untersuchen (Für alle $f \in \mathbb{D}$ und alle $v \in [0,l]$ mit $f + v \in \mathbb{D}$):

$$\boxed{\tilde{E}(f) = \pi\varrho \int_{r=0}^{l} \left[\left(g f(r)^2 - r^2\omega^2 f(r) \right) r + \lambda r f(r) \right]\,\mathrm{d}r}$$

$$\tilde{E}(f+v) - \tilde{E}(f) = \pi\varrho \int_{r=0}^{l} \left[g(f+v)^2(r) - r^3\omega^2 (f+v)(r) + \lambda r (f+v)(r) - g f^2(r) + r^3\omega^2 f(r) - \lambda r f(r) \right]\,\mathrm{d}r =$$

$$= \pi\varrho \int_{r=0}^{l} \left[g r v^2 + 2 g r f(r) v(r) - r^3\omega^2 v(r) + \lambda r v(r) \right]\,\mathrm{d}r$$

Wir schätzen die Funktion nach unten ab:

$$\tilde{E}(f+v)-\tilde{E}(f)=\pi\varrho\int\limits_{r=0}^{l}\left[grv^2+\left(2gfv-r^2\omega^2v+\lambda v\right)r\right]\,\mathrm{d}r \geq \pi\varrho\int\limits_{r=0}^{l}\left[2gf-r^2\omega^2+\lambda\right]rv(r)\,\mathrm{d}r$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $\int\limits_{r=0}^{l}\varrho rv^2\,\mathrm{d}r=0$, das heißt nur für $v(r)=0\ \forall\ v$.

$$\int\limits_{r=0}^{l}\left[2gf-r^2\omega^2+\lambda\right]rv(r)\,\mathrm{d}r=0\,\forall\,v \text{ mit } f+v\in\mathbb{D}$$

Dies bedeutet nach unserer vorherigen Sätzen, daß der Ausdruck in der Klammer gleich Null sein muß:

$$\boxed{y=f(r)=\frac{1}{2g}\left(r^2\omega^2-\lambda\right)}$$

Für $y=\overline{f}(r)=\frac{1}{2g}\left(r^2\omega^2-\lambda\right)$ gilt:

$\tilde{E}(\overline{f}+v)-\tilde{E}(\overline{f})>0\,\forall\,v$ mit $f+v\in\mathbb{D}$ und $v\neq 0$

Das λ wird nun mit $V=2\pi\int\limits_{r=0}^{l}rf(r)\,\mathrm{d}r$ eliminiert. $\overline{f}\geq 0$ bedeutet, daß $r^2\omega^2-\lambda\geq 0$ und damit $\lambda\leq 0$. Durch Einsetzen von $\overline{f}$ für f folgt:

$$-\lambda=\frac{2g}{\pi l^2}V-\frac{\omega^2l^2}{2}V-\frac{\omega^2l^2}{2}\;(\geq 0)$$

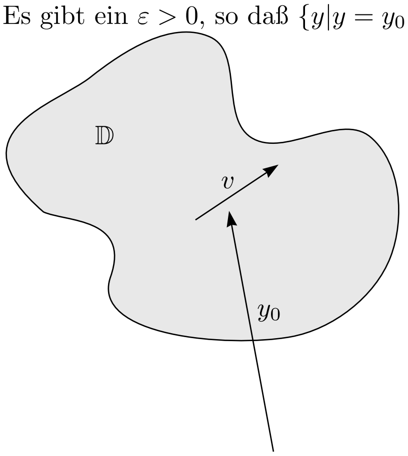
Damit erhalten wir eine Bedingung für ω:

$$\boxed{\omega^2\leq\frac{4g}{\pi l^4}V}$$

Kapitel 3

Die Variation eines Funktionals

Es sei Y ein Vektorraum mit $\mathbb{D} \subset Y$ und F: $\mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$ sei ein Funktional. Es sei $y_0 \in \mathbb{D}_0$ und $v \in Y$ mit:
Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß $\{y|y = y_0 + \varepsilon v, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0\} \subset \mathbb{D}$.



Wir betrachten jetzt $\varphi(\varepsilon) = F(y_0 + \varepsilon v)$ mit φ: $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \mapsto \mathbb{R}$ und $\varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Wir definieren nun $\varphi'(0) = \delta F(y_0; b)$. Diese heißt 1.Variation von F in y_0 in Richtung v (1. Gateaux-Ableitung von F in y_0 in Richtung v).

<u>Ausführliche Formulierung:</u>

$$\delta F(y_0; v) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon} (\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon} (F(y_0 + \varepsilon v) - F(y_0))$$

Hierbei handelt es sich gerade um die Definition der Richtungsableitung aus HMII. Beispiele hierfür sind:

$$\varphi''(0) = \delta^2 F(y_0; v)$$

Dieses wird als 2. Variation bezeichnet.

1.) f: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ist ein Funktional mit $Y = \mathbb{D} = \mathbb{R}^n$.

$$\delta f(y_0; v) = D_v f(y_0) = \vec{\nabla} f(y_0) \cdot v$$

2.) f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi(\varepsilon) = f(y + \varepsilon v)$

$$\boxed{\varphi'(0) = \delta f(y_0, v) = f'(y_0) \cdot v}$$

φ sei zweimal differenzierbar:

$$\varphi'(\varepsilon) = f'(y_0 + \varepsilon v)v, \; \varphi''(\varepsilon) = f''(y_0 + \varepsilon v) \cdot v^2$$

Damit gilt:

$$\boxed{\varphi''(0) = \delta^2 f(y_0; v) = f''(y_0) \cdot v^2}$$

Wir wollen nun $f(y_0 + \varepsilon v)$ in eine Taylor-Reihe entwickeln:

$$f(y_0 + \varepsilon v) = f(y_0) + f'(y_0) \cdot \varepsilon v + \frac{1}{2} f''(y_0) \cdot \varepsilon^2 v^2 + O(\varepsilon^2) = f(y_0) + \varepsilon \delta f(y_0; v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 f(y_0; v) + O(\varepsilon^2)$$

Die Verallgemeinerung ist:

$$\boxed{F(y_0 + \varepsilon v) = F(y_0) + \varepsilon \delta F(y_0, v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \delta^2 F(y_0, v) + O(\varepsilon^2)}$$

Analog gilt für $\varphi(\varepsilon)$:

$$\boxed{\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \varphi''(0) + O(\varepsilon^2),\ \varepsilon \mapsto 0}$$

$$f_{x_i} = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[f(x_1, x_2, \dots, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\right] \text{ mit } (x_1, x_2, \dots, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) = \vec{x} + \varepsilon \vec{e}_i$$

$$\delta F(y; v) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[F(y + \varepsilon v) - F(y)\right]$$

Definition:

$\mathbb{D}$ heißt **offen**, wenn es zu jedem $y \in \mathbb{D}$ auch ein $\varepsilon > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft:

$\{z \| \|z - y\| < \varepsilon\} \subset \mathbb{D}$

Wir wollen an dieser Stelle den Begriff „Norm“ wiederholen. Man kann eine Norm auf verschiedene Art und Weise definieren:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\|\vec{x}\| = \max\left(|x_j|, j = 1,\ 2,\ 3\right)$$

Die Eigenschaften der Norm sind:

- $\|\vec{x}\| \geq 0 \ (= 0 \leftrightarrow \vec{x} = \vec{o})$
- $\|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|$
- $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Es sei $I = [a, b]$ und $G \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann definieren wir folgende Norm:

$$\boxed{\|x\|_{\hat{C}^1(I)} = \max\left(|y(x)|, |y'(x)|\right)}$$

Lemma ①:

Y sei Vektorraum, $\mathbb{D} \subset Y$ und F, G: $\mathbb{D} \mapsto \mathbb{R}$ seien Funktionale, für welche die $\delta F(y;v)$ und $\delta G(y;v)$ existieren, wobei $y \in \mathbb{D}$, $v \in Y$ fest sind. Dann gelten:

- $\delta(F+G)(y;v) = \delta F(y;v) + \delta G(y;v)$
- $\delta(cF)(y;v) = c\delta F(y;v)$ für $c \in \mathbb{R}$

  Die in y in Richtung v Gateaux-differenzierbaren Funktionale bilden einen reellen Vektorraum bezüglich der üblichen Operationen bei Funktionen.
- $\delta F(y;cv) = c\delta F(y;v)$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\delta F(y;-v) = -\delta F(y;v)$

Wir wollen die beiden letzten Eigenschaften beweisen:

1.) Fall $c = 0$:

$$\delta F(y;0) = 0$$

$$\delta F(y;0) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[F(y+\varepsilon\cdot 0) - F(y)\right] = 0$$

2.) Fall $c \neq 0$:

$$\delta F(y;cv) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[F(y+\varepsilon cv) - F(y)\right] = c \cdot \lim_{\eta \mapsto 0} \frac{1}{\eta}\left(F(y+\eta v) - F(y)\right) = c\delta F(y,v) \text{ mit } \eta = c\varepsilon$$

Lemma ②:

y, $v \in \mathbb{D}$, Y mit ε, η seien derartig, daß die im folgenden auftretenden Grenzwerte alle existieren:

1.) $\delta F(y+\eta v;v) = \left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}F(y+\varepsilon v)\right|_{\varepsilon=\eta}$

2.) $\delta^2 F(y;cv) = c^2\delta^2 F(y;v)$ mit $c \in \mathbb{R}$

Wir beweisen die erste Aussage:

$$\delta F(y+\eta v;v) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[F(y+\eta v+\varepsilon v) - F(y+\eta v)\right] = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi(\varepsilon+\eta) - \varphi(\eta)\right] = \varphi'(\eta) = \left.\varphi'(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=\eta}$$

Nun bleibt noch die zweite:

$$\delta^2 F(y;v) = \varphi''(0) = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(0)\right] = \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\delta F(y+\varepsilon v;v) - \delta F(y;v)\right]$$

Bezeichnungen/Abkürzungen:

$$F(y) = \int\limits_G f(x, y(x), Dy(x))\,\mathrm{d}x \text{ mit } x \in \mathbb{R}^n,\ y(x) \in \mathbb{R}^N \text{ und } G \subseteq \mathbb{R}^N\ (N = 1,\, 2,\, 3)$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ y_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \vdots \\ y_n(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{pmatrix}$$

Alle möglichen partiellen Ableitungen 1.Ordnung aller Koordinatenfunktionen nennen wir $(D_\alpha y_i(x))$.

$$Dy(x) = \Big(\underbrace{D_1 y_1(x), \ldots, D_1 y_n(x)}_{D_1 y(x)}, \underbrace{D_2 y(x), \ldots, D_2 y_n(x)}_{D_2 y(x)}, \underbrace{D_3 y_1(x), \ldots, D_3 y_n(x)}_{D_3 y(x)}, \ldots, \underbrace{D_N y_1(x), \ldots, D_N y_n(x)}_{D_N y(x)}\Big) \in \mathbb{R}^{nN}$$

$f : U \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nN}$

$f = f(x, z, p)$

$\vec{\nabla}_z f = (f_{z_1}, \ldots, f_{z_n}) = f_z$

$\vec{\nabla}_p f = (f_{p_1}, \ldots, f_{p_{nN}}) = f_p$

Behandeln wir zwei Spezialfälle, die sehr häufig auftreten:

- $n = 1$:
  y ist eine skalare Funktion und $Dy(x)$ ist der Gradient von y.
- $N = 1$:
  Es handelt sich um eine Raumkurve. $Dy(x)$ ist die Tangente an die Raumkurve.

$\delta F(y; v) = ?$

$$\varphi(\varepsilon) = F(y + \varepsilon v) = \int\limits_G f(x; y(x) + \varepsilon v(x), y'(x) + \varepsilon v'(x))\,\mathrm{d}x$$

$$\varphi'(\varepsilon) = \int\limits_G \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} f(x, y(x) + \varepsilon v(x), Dy(x) + D\varepsilon v(x))\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_G \left[f_z \cdot v\,(x, y + \varepsilon v, Dy + D\varepsilon v) + f_p \cdot Dv(x, y + \varepsilon v, Dy + \varepsilon Dv)\right]\,\mathrm{d}x$$

$$\varphi'(0) = \delta F(y, v) = \int\limits_G \left[f_z \cdot v(x, y(x), Dy(x)) + f_p \cdot Dv(x, y(x), Dy(x))\right]\,\mathrm{d}x$$

Man kann dies auch in Koordinatendarstellung schreiben:

$$f_z \cdot v = \sum_{j=1}^{n} f_{z_j} \cdot v_j$$

Allgemein merken wir uns:

$$\boxed{\delta F(y; v) = \int\limits_G \Big[\underbrace{f_z(x, y(x), Dy(x))}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot v(x) + \underbrace{f_p(x, y(x), Dy(x))}_{\in \mathbb{R}^{nN}} \cdot Dv(x)\Big]\,\mathrm{d}x}$$

Schauen wir uns dazu noch einige Spezialfälle an:

- $\underline{n = 1,\ N = 1}$:

$$\boxed{F(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x}$$

- $\underline{n = 1,\ N}$:

$$\boxed{F(y) = \int\limits_G f(x, y(x), \vec{\nabla} y(x))\,\mathrm{d}x,\ G \subseteq \mathbb{R}^N}$$

- $n,\ N = 1$:

$$\boxed{F(y) = \int\limits_a^b f(x, \vec{y}(x), \vec{y}\,'(x))\,\mathrm{d}x}$$

Beispiel:

$$F(y) = \int\limits_0^1 \|y'(x)\|\,\mathrm{d}x \qquad N = 1,\ z = n,\ p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) = n$$

Da wir nur eine Variable haben gilt $Dy = (y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_n'(x))$.

$$f(x, z, p) = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2}$$

$$f_z = 0,\ f_p = (f_{p_1}, \ldots, f_{p_n}) = \frac{p}{\|p\|},\ f_p(x, y(x), Dy(x)) = \frac{y'(x)}{\|y'(x)\|}$$

$$\boxed{\delta F(y; v) = \int\limits_0^1 \frac{y'(x) \cdot v'(x)}{\|y'(x)\|}\,\mathrm{d}x}$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\boxed{\delta F(y; v) = \left.\frac{y'(x) \cdot v(x)}{\|y'(x)\|}\right|_0^1 - \int\limits_0^1 v(x) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y'(x)}{\|y'(x)\|}\right] \mathrm{d}x}$$

Beispiel:

Es gelte $n = 2$ und $N = 1$.

$$F(y) = F(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 y_1(x) y_2'(x)\,\mathrm{d}x$$

Diese Funktional wird benötigt bei der Berechnung von Flächeninhalten geschlossener Flächen.

$$f(x, z, p) = f(x, z_1, z_2, p_1, p_2) = z_1 p_2$$

Um unsere Formel anwenden zu können, benötigen wir:

$$f_z = (f_{z_1}, f_{z_2}) = (p_2, 0)$$

$$f_p = (f_{p_1}, f_{p_2}) = (0, z_1)$$

$$\delta F(y; v) = \int\limits_0^1 [p_2 v_1 + z_1 v_2']|_{\substack{x, y_1(x), y_2(x),\\ y_1'(x), y_2'(x)}}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [y_2'(x) v_1(x) + y_1(x) v_2'(x)]\,\mathrm{d}x$$

Durch partielle Integration folgt dann mit $v_2 = v_1 = 0$:

$$\delta F(y; v) = \int\limits_0^1 [y_2'(x) v_1(x) - y_1'(x) v_2(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} y_2'(x) \\ -y_1'(x) \end{pmatrix}}_{=0} \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Beispiel:

Es sei folgendes Funktional gegeben:

$$F(y) = \int\limits_G \|\vec{\nabla} y(x)\|^2 \,\mathrm{d}x$$

Den Gradienten kann man nur von einer skalaren Funktion bilden, also gilt $n = 1$. Wir berechnen den Fall $x \in G \subseteq \mathbb{R}^3$, also haben wir $N = 3$.

$$p \in \mathbb{R}^3,\ Dy(x) = \vec{\nabla} y(x)$$

$$f = f(x_1, x_2, x_3, y(x_1, x_2, x_3), D_1 y, D_2 y, D_3 y)$$

Mit unserer eingeführten Schreibweise folgt dann:

$$f(x, z, p) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p \cdot p$$

Damit gilt nun:

$$f_z = 0,\ f_p = 2p,\ f_p(x, y(x), \vec{\nabla} y) = 2\vec{\nabla} y$$

$$\delta F(y; v) = 2 \int\limits_G \vec{\nabla} y(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) \,\mathrm{d}x$$

Wir setzen voraus, daß v auf der Oberfläche ∂G des Gebiets G gleich Null ist.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(v \vec{\nabla} y\right) = \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} y + v \triangle y$$

Dann folgt unter anderem mit dem Gaussschen Satz:

$$\int\limits_G \vec{\nabla} y(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_G \vec{\nabla} \cdot \left[v \vec{\nabla} y\right] \,\mathrm{d}x - \int\limits_G v \triangle y \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int\limits_{\partial G} v \vec{\nabla} y \cdot n \,\mathrm{do}}_{=0} - \int\limits_G v \triangle y \,\mathrm{d}x = \boxed{-\int\limits_G v \triangle y \,\mathrm{d}x}$$

3.1 Plateau-Problem

$$F(y) = \int\limits_G \|D_1 y(x) \times D_2 y(x)\| \,\mathrm{d}x$$

Es gelte $G \subseteq \mathbb{R}^2$ und $n = 2$, also $x = (x_1, x_2)$. Außerdem haben wir $N = 3$:

$$y = y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x_1, x_2) \\ y_2(x_1, x_2) \\ y_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$Dy(x) = (D_1 y_1(x), D_1 y_2(x), D_1 y_3(x), D_2 y_1(x), D_2 y_2(x), D_2 y_3(x))$$

$$f = f(x, z, p) = f(x_1, x_2, z_1, z_2, z_3, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

In HMI hatten wir folgendes berechnet:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2$$

Also gilt damit:

$$f = \sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)\left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right) - \left(p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6\right)^2}$$

$$f_{p_1} = \frac{1}{2f} \cdot \left[2p_1 \cdot \left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right) - 2\left(p_1p_4 + p_2p_4 + p_3p_6\right) \cdot p_4\right]$$

$$f_{p_2} = \frac{1}{2f} \cdot \left[2p_2 \cdot \left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right) - 2\left(p_1p_4 + p_2p_4 + p_3p_6\right) \cdot p_5\right]$$

$$f_{p_3} = \frac{1}{2f} \cdot \left[2p_3 \cdot \left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right) - 2\left(p_1p_4 + p_2p_4 + p_3p_6\right) \cdot p_6\right]$$

$$f_{p_4} = \frac{1}{2f} \cdot \left[2p_4 \cdot \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) - 2\left(p_1p_4 + p_2p_4 + p_3p_6\right) \cdot p_1\right]$$

$$f_{p_5} = \frac{1}{2f} \cdot \left[2p_5 \cdot \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) - 2\left(p_1p_4 + p_2p_4 + p_3p_6\right) \cdot p_2\right]$$

$$f_{p_6} = \frac{1}{2f} \cdot \left[2p_6 \cdot \left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) - 2\left(p_1p_4 + p_2p_4 + p_3p_6\right) \cdot p_3\right]$$

Für p_1, p_2 und p_3 gilt also:

$$f_p = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)\left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right) - \left(p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6\right)^2}} \left[D_1y\|D_2y\|^2 - \left(D_1y \cdot D_2y\right)D_2y\right]$$

Analog folgt für p_4, p_5 und p_6:

$$f_p = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)\left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right) - \left(p_1p_4 + p_2p_5 + p_3p_6\right)^2}} \left[D_2y\|D_1y\|^2 - \left(D_1y \cdot D_2y\right)D_1y\right]$$

Wir notieren damit das Endergebnis:

$$\boxed{\delta F(y;v) = \int\limits_G \frac{\|D_2y\|^2\left(D_1y \cdot D_1v\right) + \|D_1y\|^2\left(D_2y \cdot D_2v\right) - \left(D_1y \cdot D_2y\right)\left(D_2y \cdot D_1v + D_1y \cdot D_2v\right)}{\left[\|D_1y\|^2\|D_2y\|^2 - \left(D_1y \cdot D_2y\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}(x_1, x_2)}$$

Beispiel:

$F(y) = y^2(b)$

$\delta F(y,v) = \varphi'(0)$, $\varphi(\varepsilon) = F(y + \varepsilon v) = \left(y + \varepsilon v\right)^2(b) = y^2(b) + 2\varepsilon y(b)v(b) + \varepsilon^2 v^2(b) = 2y(b)v(b)$

Beispiel:

Wir haben $F : \mathbb{D} \subset Y \mapsto \mathbb{R}$, wobei F **linear** sei, also folgende Eigenschaften besitzt:

- $F(y_1 + y_2) = F(y_1) + F(y_2)$
- $F(\alpha y) = \alpha F(y)$

Ein lineares Funktional ist beispielsweise:

$$F(y) = \int\limits_a^b y(x)\,\mathrm{d}x,\; F(y) = y'(x)$$

$\delta F(y;v) = \varphi'(0) = F(v)$, $\delta^2 F(y;v) = 0$

Dies ist genau das, was man bei linearen Funktionen erwartet, nämlich $y'(x) = \text{const.}$ und $y''(x) = 0$.

$\varphi(\varepsilon) = F(y + \varepsilon v) = F(y) + \varepsilon F(v)$

3.2 Konvexität

Auf dem ersten Übungsblatt hatten wir gezeigt:

$f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$

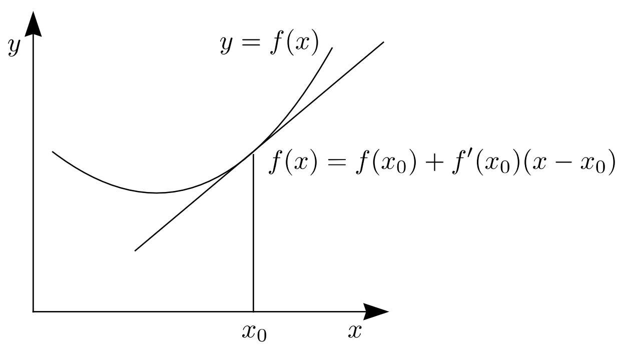
Es sei hier z_1, $t_2 \in [0,1]$ $\forall$ x_1, $x_2 \in I$ und $t_1 + t_2 = 1$.

Definition:

Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ heißt konvex, falls $f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$ $\forall$ t_1, t_2 wie oben und $\forall$ x_1, $x_2 \in G$ gilt, falls G selbst konvex ist.

Ist $f \in C^1(I)$, dann gilt: f ist konvex auf I genau dann, wenn die Ableitung f' monoton wachsend ist. Daraus folgt:

$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)\, \forall\, x,\, x_0 \in I$



Definition:

f: $G \subseteq \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ heißt **konvex auf G**, falls $f \in C^1(G)$ und $f(x) - f(x_0) \geq \vec{\nabla} f(x_0) \cdot (x - x_0)$ $\forall$ x, $x_0 \in G$ beziehungsweise $f(x + v) - f(x) \geq \vec{\nabla} f(x) \cdot v$.

Beispiel:

Es sei die Funktion $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Unser Ziel ist, folgendes zu zeigen:

$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$

Der Gradient unserer Funktion ist $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = 2\vec{x}$. Also muß gelten:

$2\vec{x}_0 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \leq \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{x}_0\|^2$

Durch Umformen folgt nun mit der Schwarzschen Ungleichung:

$2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$

$2\vec{x}_0 \cdot \vec{x} - 2\|\vec{x}_0\|^2 \leq \|\vec{x}_0\|^2 + \|\vec{x}\|^2 - 2\|\vec{x}_0\|^2$

Beispiel:

$f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ für $x \in \mathbb{R}^n$

$\vec{\nabla} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} \leq f(\vec{x} + \vec{v}) - f(\vec{x}) = \|\vec{x} + \vec{v}\| - \|\vec{x}\|$

Für den Gradienten gilt:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$

$$\vec{\nabla} f(x) \cdot \vec{v} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{\|\vec{x}\|} = \frac{\vec{x} \cdot (\vec{x} + \vec{v})}{\|\vec{x}\|} - \|\vec{x}\| \leq \frac{\|x\| \|x + v\|}{\|x\|} - \|x\| = f(\vec{x} + \vec{v}) - f(\vec{x})$$

Der letzte Schritt folgt aus der CAUCHY-SCHWARZschen-Ungleichung.

Beispiel:

$g(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,(= f(1, x, y))$

Wir schauen uns dazu ganz allgemein folgende Funktion an:

$g(\vec{x}) = \sqrt{1 + \|\vec{x}\|^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$, $\vec{\nabla} g(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{g(\vec{x})}$

$\vec{\nabla} g(x) \cdot \vec{v} \leq g(\vec{x} + \vec{v}) - g(\vec{x})$

- Aussage ①:
  Es sei $f\colon G \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ein Gebiet. f sei auf G konvex und besitze in $x_0 \in G$ eine stationäre Stelle (das heißt mit $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{o}$). Dann wird f in x_0 minimal.
- Aussage ②:
  Ist f auf G strikt konvex, so besitzt f höchstens einen stationären Punkt x_0 in G.

Beweis:

Wir nehmen an, daß x_0, x_1 mit $x_0 \neq x_1$ stationäre Punkte sind. Dann gilt:

$f(x) > f(x_0)$ für $x \neq x_0$

$f(x) > f(x_1)$ für $x \neq x_1$

Die erste Beziehung gilt für alle x, also insbesondere auch für x_1. Die zweite Ungleichung gilt natürlich auch für x_0, womit also folgt:

$f(x_1) > f(x_0)$ und $f(x_0) > f(x_1)$

Dies stellt ein Widerspruch dar, womit die Aussage bewiesen ist.

Beispiel:

1.) $f(x) = \|x\|^2$ ist strikt konvex auf $\mathbb{R}^n$.
2.) $f(x) = \|x\|$ ist konvex auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Dies kann man zeigen durch:

$$\vec{\nabla} f(x) \cdot v = \frac{x \cdot v}{\|x\|} \leq \|x + v\| - \|x\|$$

Beispiel:

Zu zeigen ist, daß $g(x)$ strikt konvex auf $\mathbb{R}^n$ ist:

$g(x) = \sqrt{1 + \|x\|^2}$

Wir verwenden obige Funktion $f(y) = \|y\|$ mit $y \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann ist $g(x) = f(1, x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$.

$g(x + v) - g(x) = f(1, x + v) - f(1, x) = f((1, x) + (0, v)) - f(1, x) \geq \vec{\nabla} f(1, x) \cdot (0, v)$

$\vec{\nabla} f(y) = \dfrac{y}{\|y\|}, \vec{\nabla} f(1, x) = \dfrac{(1, x)}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}$

Wir multiplizieren skalar mit $(0, v)$:

$\vec{\nabla} f(1, x) \cdot (0, v) = \dfrac{(1, x) \cdot (0, v)}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} = \dfrac{x \cdot v}{\sqrt{1 + \|x\|^2}} = \vec{\nabla} g(x) \cdot v$

Das Gleichheitszeichen gilt für:

$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ x + v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$

Für $\lambda = 1$ gilt $x + v = x$ und damit $v = 0$, womit dies gezeigt ist.

Übung:

Es ist zu zeigen, daß $\vec{\nabla} g(x) \cdot v \leq g(x + v) - g(x)$ ist.

Kapitel 4

Konvexe Funktionale

Definition:

$F\colon \mathbb{D} \subset Y \mapsto \mathbb{R}$ sei Funktional. F heißt auf $\mathbb{D}$ **konvex** [**strikt konvex**], falls aus y und $y+v$ folgt, daß $\delta F(y;v)$ existiert und $F(y+v) - F(y) \geq \delta F(y;v)$. [Gleichheit gilt nur für $v = 0$.]

Satz ①:

Es sei F auf $\mathbb{D}$ [strikt] konvex. Dann minimiert jedes $y_0 \in \mathbb{D}$, für das $\delta F(y_0;v) = 0 \ \forall \ y_0 + v \in \mathbb{D}$ gilt, F auf $\mathbb{D}$ [eindeutig].

Beweis:

Es sei $y \in \mathbb{D}$ beliebig. Unser Ziel ist es zu zeigen, daß $F(y) - F(y_0) \geq 0$. Setze hierzu $v = y - y_0$. Dann folgt hieraus $y = y_0 + v$. Dann können wir die Definition anwenden:

$F(y) - F(y_0) \geq \delta F(y_0, v) = 0$

Wenn $v \neq 0$ ist, gilt das Gleichheitszeichen.

Beispiel:

1.) $Y = C[a,b]$, ϱ, $\beta \in C[a,b]$, $\varrho(x) > 0$ für $x \in [a,b]$

$$F(y) = \int\limits_a^b \left[\varrho(x)y^2(x) + \beta(x)y(x)\right] \,\mathrm{d}x$$

Es ist das Minimum auf $\mathbb{D}$ zu berechnen:

$$\delta F(y;v) = \int\limits_a^b \left[f_z \cdot v + f_p \cdot v'\right] \,\mathrm{d}x$$

Es gilt hier $n = 1$, da es sich um ein skalares Feld handelt. Außerdem gilt $N = 1$, da wir nur die Variable x haben. ($v(x) \in \mathbb{R}$)

$f(x,z,p) = \varrho(x)z^2 + \beta(x)z,\ f_p = 0,\ f_z = 2\varrho(x)z + \beta(x)$

Für unser Integral benötigen wir nun:

$f_z(x,y(x),y'(x)) \cdot v(x) = 2\varrho(x)y(x) \cdot v(x) + \beta(x) \cdot v(x)$

$$\delta F(y;v) = \int_a^b [2\varrho(x)y(x) \cdot v(x) + \beta(x) \cdot v(x)] \, \mathrm{d}x$$

Schauen wir uns nun die Konvexität des Funktionals an:

$$\begin{aligned} F(y+v) - F(y) &= \int_a^b \left[\varrho(x)\left(y^2 + 2yv + v^2\right) + \beta(y+v) - \varrho(x)y^2 - \beta y\right] \mathrm{d}x = \\ &= \int_a^b \varrho(x)v^2(x) \, \mathrm{d}x + \delta F(y,v) \geq \delta F(y;v) \end{aligned}$$

Gleichheit gilt nur für $v = 0$. F ist strikt konvex auf $\mathbb{D} = Y = C[a,b]$. Nach Satz ① ist $y_0 \in \mathbb{D}$ aus $\delta F(y_0; v) = 0 \;\forall\; v \in Y$ zu berechnen.

$$F(y) = \int_a^b \left[\varrho(x)y^2 + \beta(x)y\right] \mathrm{d}x$$

$$\delta F(y_0;v) = \int_a^b [2\varrho(x)y_0(x)v(x) + \beta(x)v(x)] \, \mathrm{d}x = 0 \,\forall\, v \in C[a,b]$$

$$\delta F(y_0;v) = \int_a^b [2\varrho(x)y_0(x) + \beta(x)] \, v(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Nach einem der Fundamentalsätze der Variationsrechnung folgt, daß der Klammerausdruck gleich Null ist:

$$\boxed{y_0(x) = -\frac{\beta(x)}{2\varrho(x)} \text{ für } a \leq x \leq b}$$

2.) $F(y) = \int_a^b \left[\sin^3(x) + y^2(x)\right] \mathrm{d}x$

Dieses Funktional soll minimal werden auf $\mathbb{D} = \{y \in C[a,b],\, y(a) = a_1,\, y(b) = b_1\}$ mit $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. Mit $y \in \mathbb{D}$ und $v \in Y$ gilt $y + v \in \mathbb{D}$.

$v \in \mathbb{D}_0 = \{\tilde{y} \in C[a,b] | \tilde{y}(a) = \tilde{y}(b) = 0\}$

Es genügt, den Störterm, welcher nur von x abhängt, wegzulassen und den restlichen Ausdruck zu untersuchen:

$$F(y) = \int_a^b y^2(x) \, \mathrm{d}x$$

$F(y+v) - F(y) \geq \delta F(y;v) \,\forall\, v \in \mathbb{D}_0$

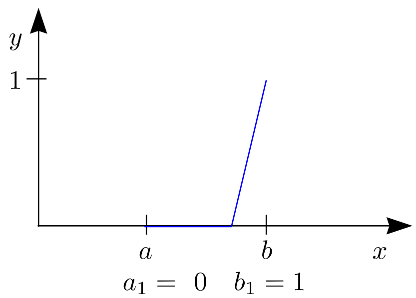
Dies gilt auf jeden Fall, da dies nach Beispiel 1 mit $\varrho = 1$ und $\varrho = 0$ so ist. Gleichheit gilt genau dann, wenn:

$$\int_a^b v^2(x) \, \mathrm{d}x = 0$$

Es resultiert also $v = 0 \in \mathbb{D}_0$; $F = F(y)$ ist auf $\mathbb{D}$ strikt konvex. Nach Satz ① ist $\delta F(y_0, v) = 0 \; \forall \; v \in \mathbb{D}_0$ zu lösen.

$$2 \int\limits_a^b y_0(x) v(x) \, \mathrm{d}x = 0 \, \forall \, v \in \mathbb{D}_0$$

Daraus folgt $y = y_0(x) = 0 \; \forall \; x \notin \mathbb{D}$, womit das Problem nicht lösbar ist.



3.) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ und es gelte $n = 1$ und $N = 3$.

$$F(y) = \int\limits_G \|\vec{\nabla} u\|^2 \, \mathrm{d}x$$

$Y = C^1(\overline{G})$, $\mathbb{D} = \{y \in C^1(\overline{g}) | y(x) = g(x), \, x \in \partial G\}$, $y|_{\partial G} = g$

Es sei $y \in \mathbb{D}$ und $v \in Y$. Dann ist $y + v \in \mathbb{D}$ genau dann, wenn $v \in \mathbb{D}_0$ mit $\mathbb{D}_0 = \{y \in C^1(\overline{G}) | y|_{\partial G} = 0\}$.

$$\partial F(y; v) = 2 \int\limits_G \vec{\nabla} y(x) \vec{\nabla} v(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} F(y+v) - F(y) &= \int\limits_G \left[\|\vec{\nabla}\|^2 + 2\vec{\nabla} y \cdot \vec{\nabla} v + \|\vec{\nabla} v\|^2 - \|\vec{\nabla} y\|^2 \right] \, \mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_G \|\vec{\nabla} v\|^2 \, \mathrm{d}x + \delta F(y, v) \geq \delta F(y; v) \, \forall \, v \in \mathbb{D}_0 \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $v = \text{const.}$ mit $v \in \mathbb{D}_0$. Da an den Rändern $v = 0$ gilt, ist $v = 0$ überall erfüllt. $F(y)$ ist damit auf $\mathbb{D}$ strikt konvex. Nach Satz ① müssen wir nun $y_0 \in \mathbb{D}$ aus $\delta F(y_0; v)$ bestimmen:

$$\delta F(y_0; v) = 2 \int\limits_G \vec{\nabla} y_0(x) \cdot \vec{\nabla} v(x) \, \mathrm{d}x = 0 \, \forall \, v \in \mathbb{D}_0$$

Satz:

Falls es ein $y_0 \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ mit $\triangle y_0(x) = 0$ für $x \in G$ ($y_0 \in \mathbb{D}$) und $y_0(x) = g(x)$ für $x \in \partial G$, dann gilt $F(y) > F(y_0) \; \forall \; y \in \mathbb{D}$ mit $y \neq y_0$.

Beweis:

Es sei $v \in \mathbb{D}_0$:

$$\int\limits_G \vec{\nabla} y_0 \cdot \vec{\nabla} v \, \mathrm{d}x$$

Es gilt nach HMII:

$\vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla} y_0) = \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} y_0 + v\triangle y_0$

Damit folgt nach dem GAUSSschen Satz:

$$\int\limits_G \vec{\nabla} y_0 \cdot \vec{\nabla} v \,\mathrm{d}x = \int\limits_G \vec{\nabla} \cdot (v\vec{\nabla} y_0)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int\limits_G v\triangle y_0 \,\mathrm{d}x}_{=0} = \int\limits_{\partial G} v\vec{\nabla} y_0 \cdot n \,\mathrm{d}o = 0 = \delta F(y_0, v)$$

Der vorletzte Schritt folgt dadurch, daß auf dem Rand $v = 0$ ist.

Wir behandeln im folgenden eindimensionale Probleme:

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

In Integranden haben wir eine Funktion $f = f(x, z, p)$ mit $x \in [a, b]$ und $(z, p) \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ (Gebiet). Außerdem setzen wir voraus, daß f_z und f_p stetig ist, daß also f_z, $f_p \in C([a, b] \times \mathbb{D})$.

$\mathbb{D}^{a,b} = \{y \in C^1[a, b], (y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}, 0 \leq x \leq b\}$

Die Funktionen, welche bei b willkürlich sind, aber bei a vorgeschrieben wird, liegen in $\mathbb{D}^b$:

$\mathbb{D}^b = \{y \in \mathbb{D}^{a,b} | y(a) = a_1\}$

Die Funktionen, welche sowohl bei a als auch bei b vorgeschrieben sind, liegen in $\mathbb{D}$:

$\mathbb{D} = \{y \in \mathbb{D}^b | y(b) = b_1\}$

Und natürlich benötigen wir noch:

$\mathbb{D}_0 = \{y \in C^1[a, b] | y(a) = y(b) = 0\}$

Man erkennt, daß $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}^b \subset \mathbb{D}^{a,b}$ und $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}^{a,b}$.

Definition:

$f = f(x, z, p)$ heißt **[stark] konvex bezüglich** z, p (f bei festgehaltenem x bezüglich z, p konvex ist), falls $f(x, z + \varphi, p + \psi) - f(x, z, p) \geq f_z(x, z, p)\varphi + f_p(x, z, p)\psi \;\forall\; (x, z + \varphi, p + \psi), (x, z, p) \in [a, b] \times \mathbb{D} =: S$ gilt. Gleichheit gilt nur, falls $\varphi \cdot \psi = 0$ gilt.

Beispiel:

Es sei $f(x, z, p) = p^2$. Dann gilt $f_z = 0$ und $f_p = 2p$.

$f(x, z + \varphi, p + \psi) - f(x, z, p) = (p + \psi)^2 - p^2 = 2p\psi + \psi^2 \geq f_p(x, z, p) \cdot \psi + 0 \cdot \varphi$

Gleichheit gilt nur im Falle $\psi = 0$. Daher gilt auch für beliebiges φ, daß $\varphi \cdot \psi = 0$ ist; es liegt also **starke Konvexität** vor.

Beispiel:

Betrachten wir:

$u = f(x, z, p) = xp + z,\; f_p = x,\; f_z = 1$

Hierbei handelt es sich um eine Ebene im (u, z, p)-Raum.

$f(x, z + \varphi, p + \psi) - f(x, z, p) = x(p + \psi) + z + \varphi - xp - z = x\psi + \varphi = f_p\psi + f_z\varphi$

Wir haben **immer** das Gleichheitszeichen, womit die Funktion konvex, aber **nicht** stark konvex ist.

Lemma:

f sei bezüglich z, p [stark] konvex. Dann gilt $F(y+v)-F(y) \geq \delta F(y;v)\ \forall\ y,\ y+v \in \mathbb{D}^{a,b}$. [Gleichheit gilt nur, falls $v(x) = \text{const.}$ für $a \leq x \leq b$.]

Beweis:

$f(x,y(x)+v(x),y'(x)+v'(x))-f(x,y(x),y'(x)) \geq f_z(x,y,y')v(x)+f_p(x,y,y')v'(x)$

[Gleichheit gilt, falls $v(x)\cdot v'(x)=0$ ist, also $v(x)=\text{const.}$] Wir integrieren dieses Beziehung von a bis b:

$$\int\limits_a^b f(x,y(x)+v(x),y'(x)+v'(x))-f(x,y(x),y'(x))\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b f_z(x,y,y')v(x)+f_p(x,y,y')v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{F(y+v)-F(y) \geq \delta F(y;v)}$$

Satz ②:

Ist f bezüglich z, p [stark] konvex, so ist F auf $\mathbb{D}^b$ (und auf $\mathbb{D}$) [strikt] konvex.

Beweis:

Es gilt nach dem vorhergehenden Lemma:

$F(y+v)-F(y) \geq \delta F(y;v)\,\forall\, y \in \mathbb{D}^b$ und $v \in C^1[a,b]$ mit $v(a)=0$

[Gleichheit gilt für $v(x) = \text{const.} = 0$, da nach Vorgabe $v(a)=0$ ist.] Da $\mathbb{D} \subset \mathbb{D}^b$ haben wir die strikte Konvexität auch auf $\mathbb{D}^b$.

$$F(y+v)-F(y) \geq \delta F(y;v) = \int\limits_a^b \left[f_z(x,y(x),y'(x))v(x)+f_p(x,y(x),y'(x))v'(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

Satz ③:

Gilt für $y_0 \in \mathbb{D}^{a,b}$ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x,y_0(x),y_0'(x)) = f_z(x,y_0(x),y_0'(x))$ (Euler-Gleichung E) für $a \leq x \leq b$, so folgt: $\delta F(y_0;v) = f_p(b,y_0(b),y_0'(b))v(b) - f_p(a,y_0(a),y_0'(a))v(a)\ \forall\ v$ mit $y_0+v \in \mathbb{D}^{a,b}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\delta F(y;v) &= \int\limits_a^b \left[f_z(x,y_0(x),y_0'(x))v(x)+f_p(x,y_0(x),y_0'(x))v'(x)\right]\,\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x,y_0,y_0')v(x)+f_p(x,y_0(x),y_0'(x))v'(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p(x,y_0(x),y_0'(x))v(x)\end{aligned}$$

Satz ④:

Es sei f bezüglich z, p [stark] konvex auf $[a,b] \times \mathbb{D}$ (1) und $y_0 \in \mathbb{D}^{a,b}$ genüge der Gleichung (E) (2). Dann minimiert y_0 das Funktional F

i.) [eindeutig] auf $\mathbb{D}$, falls $y_0 \in \mathbb{D}$

ii.) [eindeutig] auf $\mathbb{D}^b$, falls $y_0 \in \mathbb{D}^b$ und $f_p(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$

iii.) [eindeutig bis auf Konstanten] auf $\mathbb{D}^{a,b}$, falls $f_p(b, y_0(b), y_0'(b)) = f_p(a, y_0(a), y_0'(a)) = 0$

Beweis:

(1) ist die Voraussetzung von Satz ② und (2) die Voraussetzung von Satz ③.

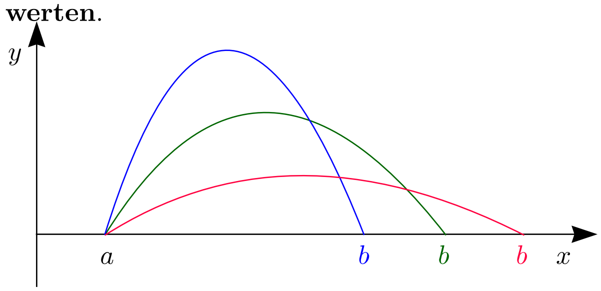
i.) Aus Satz ② folgt, daß F auf $\mathbb{D}$ [strikt] konvex ist. $\delta F(y_0; v)$ wird für alle $v \in \mathbb{D}_0$ nach Satz ③ gleich Null. Satz ① liefert dann die Behauptung.

ii.) F ist auf $\mathbb{D}^b$ [strikt] konvex nach Satz ②. v für $\delta F(y_0; v)$ bedeutet $v(a) = 0$. Nach Satz ① muß ein Minimum die Gleichung $\delta F(y_0; v) = 0 \; \forall \; v$ mit $v(a) = 0$ erfüllen. Hieraus folgt dann $f_p(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$.

iii.) Wir wissen, daß nach dem Lemma gilt $F(y + v) - F(y) \geq \delta F(y_0; v)$ [Gleichheit, falls $v = \text{const.}$]. Nach Satz ① gilt $\delta F(y; v) = 0$, falls $f_p(a, y_0(a), y_0'(a)) = f_p(b, y_0(b), y_0'(b)) = 0$ ist nach Satz ③.

Zu ii.), iii.) und Satz ④:

Probleme, bei denen auf dem Rand nicht vorgegeben ist, bezeichnet man als **Probleme mit freien Randwerten**.



Die bei der Minimierung von F auf $\mathbb{D}^b$ bzw $\mathbb{D}^{a,b}$ zusätzlich auftretenden Randbedingungen heißen die zugehörigen **natürlichen** Randbedingungen.

Zur Euler-Gleichung (E):

Ist $f \in C^2[a,b] \times \mathbb{D}$, so lautet (E) ausführlich:

$$f_{px}(x, y_0, y_0') + f_{pz}(x, y_0, y_0')y_0' + f_{pp}(x, y_0, y_0')y_0'' = f_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

Es handelt sich um ein Randwertproblem für eine nichtlineare Differentialgleichung 2.Ordnung für y_0.
Wir betrachten nun den Satz ④ für Spezialfälle:

- Funktion f hängt nicht von z ab: $f = f(x, p)$

  Hier sei das Problem der Brachystochrone angegeben. Wir suchen die kürzeste Laufzeit:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_{x=0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{x}} \, \mathrm{d}x$$

- Funktion f hängt nicht von x und z ab: $f = f(p)$

  Ein Beispiel hierfür ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten:

$$L(y) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

  $y(a) = a_1$ und $y(b) = b_1$

Corollar ①:

> Es sei $f = f(x,p)$ bezüglich p auf $[a,b] \times I$ [stark] konvex und
>
> i.) $\mathbb{D} = \{y \in C^2[a,b] | y(a) = a_1, y(b) = b_1\}$, $y'(x) \in I$ für $a \leq x \leq b$
>
> dann gilt: Jedes $y_0 \in \mathbb{D}$ mit $f_p(x, y_0'(x)) = \text{const.}$ für $a \leq x \leq b$ minimiert $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y'(x))\,\mathrm{d}x$ [eindeutig] auf der Menge $\mathbb{D}$.
>
> ii.) $\mathbb{D}^b = \{y \in C^1[a,b] | y(a) = a_1, y'(x) \in I\,(a \leq x \leq b)\}$
>
> dann gilt: Jedes $y_0 \in \mathbb{D}^b$ mit $f_p(x, y_0'(x)) = \text{const.}$ für $a \leq x \leq b$ und $f_p(b, y_0'(b)) = 0$ (natürliche Randbedingung) minimiert $F(y) = \int\limits_a^b f(x, y'(x))\,\mathrm{d}x$ eindeutig auf $\mathbb{D}^b$.

Beweis von i.):

$\mathbb{D}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{D}^{a,b}$ womit wir Satz ④ anwenden können. Betrachten wir die Eulersche Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y_0'(x)) = 0$$

Dies gilt, da f nicht von $y(x)$ abhängig ist.

Beweis von ii.):

Es ist $f_p(x, y_0'(x)) = 0$ für $a \leq x \leq b$ und $y_0(a) = a_1$ zu erfüllen.

Corollar ②:

> Es sei $\mathbb{D}$ wie oben und $f = f(p)$ auf I [stark] konvex und $m = \dfrac{b_1 - a_1}{b - a}$. Dann ist $y_0(x) = m(x-a) + a_1 \in \mathbb{D}$ die [eindeutig festgelegte] Minimalfunktion für $F(y) = \int\limits_a^b f(y'(x))\,\mathrm{d}x$ auf $\mathbb{D}$.

Beispiel:

Wir haben folgendes Funktional:

$$F(y) = \int\limits_1^2 \frac{1}{x} y'(x)^2\,\mathrm{d}x \text{ auf } \mathbb{D} = \{y \in C^1[1,2] | y(1) = 0, y(2) = 3\}$$

Als Übung kann gezeigt werden, daß f stark konvex ist. Damit ist das Integral strikt konvex und wir können die Euler-Gleichung verwenden. Nach Corollar ① [Teil i.)] gilt dann:

$$f_p(x, y'(x)) = \frac{2}{x} y'(x) = C_1$$

$$y'(x) = Cx$$

Durch Integration folgt:

$$y(x) = \frac{1}{2} C x^2 + C_2$$

Mittels der Randbedingungen $y(1) = 0$ und $y(2) = 3$ können wir C und C_2 berechnen:

$$0 = \frac{1}{2} C + C_2$$

$$3 = 2C + C_2$$

$$\boxed{y(x) = x^2 - 1}$$

Betrachten wir nur die erste Randbedingung, also $\mathbb{D}^b = \{y \in C^1[1,2] | y(1) = 0\}$, so gilt nach Corollar ② [Teil ii.)]:

$$\frac{2}{x} y'(x) = 0, \; y(1) = 0$$

Damit erhalten wir schließlich $\forall\, x$:

$$\boxed{y(x) = 0}$$

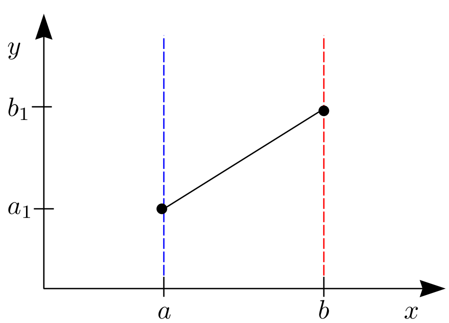
Betrachten wir das Problem schließlich noch auf $\mathbb{D}^{a,b} = \{y \in C^1[a,b]\}$, so folgt $\forall x$:

$$\boxed{y(x) = C}$$

Beispiel:

Die Länge einer Kurve berechnet sich nach:

$$F(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, \mathrm{d}x$$



- Fall ①: $\mathbb{D} :(a, a_1), (b, b_1)$

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} = 0$$

  Daraus folgt $y'(x) = \text{const.}$

- Fall ②: $\mathbb{D}^b : (a, a_1)$

  Es gilt $y'(x) = \text{const.}$ und außerdem:

  $$f_p(y'(b)) = 0 = \frac{y'(b)}{\sqrt{1 + y'(b)}}$$

  Damit ergibt sich $y'(b) = 0$ und somit auch $y'(x) = 0$, womit $y(x) = \text{const.} = \alpha_1$ ist.

- Fall ③: $\mathbb{D}^{a,b}$

  Aus $y'(x) = \text{const.}$, $y'(b) = y'(a) = 0$ folgt $y(x) = C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

4.1 Nachtrag zu [stark] konvexen Funktionen

Vorbereitungen:

Betrachten wir $h \in C^2(I)$ mit dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und a, $b \in I$.

$$h(b) - h(a) = \int\limits_a^b 1 \cdot h'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = [(\tau - b)h'(\tau)]_a^b - \int\limits_a^b (\tau - b)h''(\tau)\,\mathrm{d}t = (b - a)h'(a) + \int\limits_a^b (b - \tau)h''(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

1.) $h(b) - h(a) = (b - a)h'(a) + \int\limits_a^b (b - \tau)h''(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

   Mit $b = 1$ und $a = 0$ folgt dann:

2.) $h(1) - h(0) = h'(0) + \int\limits_0^1 (1 - \tau)h''(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

   Setzen wird $b = p + \psi$ und $a = p$, so gilt außerdem:

3.) $h(p + \psi) - h(p) = \psi h'(p) + \int\limits_p^{p+\psi} (p + \psi - \tau)h''(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

   Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Außerdem sei $f : U \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. x und $x + y$ seien $\in U$, womit mittels der Konvexität folgt, daß $\{x + ty, 0 \leq t \leq 1\} \subset U$. Betrachte nun:

   $h(t) = f(x + ty)$ mit $t \mapsto x + ty \mapsto h(t)$

   Wir bezeichnen $\varphi(t) = x + ty$ mit φ: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$.

   $h(t) = (f \circ \varphi)(t)$

   Dann berechnen wir $h'(t)$ und $h''(t)$.

   $h'(t) = f'(\varphi(t))\varphi'(t) = \vec{\nabla} f(\varphi(t))\varphi'(t) = \vec{\nabla} f(x + ty) \cdot y$

   Die zweite Ableitung schreiben wir mittels der Hessematrix:

   $$h''(t) = y^T \mathcal{H}_f(x + ty)y = \sum_{j,k=1}^{n} f_{x_j x_k}(x + ty)y_j y_k$$

   Gleichung (2) für $h(t) = f(x + ty)$ mit $x, x + y \in U \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ ergibt dann:

4.) $f(x + y) - f(x) = \vec{\nabla} f(x) \cdot y + \int\limits_0^1 (1 - \tau)y^T \mathcal{H}_f(x + \tau y)y\,\mathrm{d}\tau$

Satz ⑤:

Es sei $f = f(x,p)$ und f_p seien definiert und stetig auf $[a,b] \times I$. Es gelte $f_{pp}(x,p) > 0$ für jedes $x \in [a,b]$ und alle $p \in I$. Dann ist $f = f(x,p)$ auf $[a,b] \times I$ bezüglich p [stark] konvex.

Beweis:

Unser Ziel ist, folgendes zu zeigen:

$$f(x,p+\psi) - f(x,\psi) \geq f_p(x,p)\psi$$

Setze in (3) $h(p) = f(x,p)$ ein:

$$f(x,p+\psi) - f(x,p) = \psi f_p(x,p) + \underbrace{\int\limits_p^{p+\psi} (p+\psi-\tau) f_{pp}(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\overset{!}{>}0 \text{ für } \psi \neq 0}$$

- Fall ①: $\psi > 0$
  Dann ist das Integral auf jedem Fall > 0 und der Satz ist für diesen Fall gezeigt.
- Fall ②: $\psi < 0$
  Wir drehen einfach die Integrationsgrenzen um:

$$\int\limits_p^{p+\psi} (p+\psi-\tau) f_{pp}(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\int\limits_{p+\psi}^{p} (p+\psi-\tau) f_{pp}(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{p+\psi}^{p} (\tau-(p+\psi)) f_{pp}(x,\tau)\,\mathrm{d}\tau > 0$$

Beispiel:

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x,p) = \sqrt{1+p^2}$$

Wird dies zweimal nach p differenziert, so gilt $f_{pp}(x,p) > 0$, womit Konvexität gewährleistet ist. Analog gilt dies auch für:

$$f(x,z,p) = \sqrt{1+z^2+p^2}$$

Satz ⑥:

$f = f(x,z,p)$ sei definiert auf $[a,b] \times U$ $U \subseteq \mathbb{R}^2$ (konvexes Gebiet) und dort zweimal stetig differenzierbar. Die Hessematrix von f bezüglich z,p sei für alle $x \in [a,b]$ und alle $(z,p) \in U$ positiv semidefinit. Dann ist f bezüglich (z,p) konvex.

Beweis:

Eine (m,n)-Matrix ist positiv (semi)definit, wenn $A = A^T$ und $q(x) = x^T A x = \sum\limits_{j,k=1} a_{jk} x_j x_k \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$ (positiv semidefinit) und $> 0 \ \forall \ x \neq 0$ (positiv definit). Wir betrachten:

$$f(x,z+\varphi,p+\psi) - f(x,z,p) \overset{!}{\geq} f_z(x,z,p)\varphi + f_p(x,z,p)\psi$$

Mit der Beziehung (3) ergibt sich dann:

$$f_x(x,z,p)\cdot 0+f_z(x,z,p)\cdot\varphi+f_p(x,z,p)\psi+\int\limits_0^1(1-\tau)(0,\varphi,\psi)\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xz}&f_{xp}\\f_{zx}&f_{zz}&f_{zp}\\f_{px}&f_{pz}&f_{pp}\end{pmatrix}((x,z,p)+\tau(0,\varphi,\psi))\begin{pmatrix}0\\\varphi\\\psi\end{pmatrix}\,\mathrm{d}\tau$$

Man kann dies nun schreiben als:

$$\int\limits_0^1(1-\tau)(0,\varphi,\psi)\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xz}&f_{xp}\\f_{zx}&f_{zz}&f_{zp}\\f_{px}&f_{pz}&f_{pp}\end{pmatrix}((x,z,p)+\tau(0,\varphi,\psi))\begin{pmatrix}0\\\varphi\\\psi\end{pmatrix}\,\mathrm{d}\tau=$$

$$=\int\limits_0^1(1-\tau)\underbrace{(\varphi,\psi)\mathcal{H}_f(x,z+\tau\varphi,p+\tau\psi)\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}}_{\geq 0}\,\mathrm{d}\tau\geq 0$$

Damit ist die Aussage bewiesen.
Wir werden die Definitheit nun folgendermaßen nachprüfen. Betrachten wir hierzu folgende Matrix $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$$

$\mathcal{A}$ ist positiv semidefinit (definit), falls $a\geq 0$, $ac-b^2\geq 0$ ($a>0$, $ac-b^2>0$) gilt.

Beispiel:

Betrachten wir:

$$f(x,z,p)=\sqrt{1+z^2+p^2}$$

Hier folgt dann einfach:

$$f_{zz}>0,\ f_{zz}f_{pp}-f_{zp}^2>0$$

Damit ist die Funktion konvex.

Beispiel:

$f(x,z,p)=\sqrt{z^2+b^2p^2}$ mit $b\neq 0$

Wir hatten hierzu beispielsweise die Funktion $f(x)=\|x\|$ betrachtet und damals festgestellt, daß diese konvex in $\mathbb{R}^n\{0\}$ ist. Berechnen wir also:

$$f_{zz}\geq 0,\ f_{zz}f_{pp}-f_{zp}^2=0$$

Damit ist die Hessematrix positiv semidefinit und f ist nach Satz ⑥ bezüglich (z,p) konvex für $(z,p)\neq(0,0)$. f ist nicht stark konvex, da die Matrix den Eigenwert Null besitzt nach $\det(\mathcal{A})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\lambda_n$. Man kann dies jedoch auch anders machen. Zu untersuchen ist dann:

$$\frac{z\varphi+b^2p\psi}{\sqrt{z^2+b^2p^2}}\leq\sqrt{(z+\varphi)^2+b^2(p+\psi)^2}-\sqrt{z^2+b^2p^2}$$

Gleichheit (und damit starke Konvexität) gilt nur, falls $\varphi\cdot\psi=0$ ist. Wir multiplizieren die Ungleichung mit dem Nenner >0 durch:

$$z\varphi+b^2p\psi+z^2+b^2p^2\leq\sqrt{z^2+b^2p^2}\sqrt{(z+\varphi)^2+b^2(p+\psi)^2}$$

Den rechten Term kann man als Länge eines Vektors interpretieren.

$$z\varphi+b^2p\psi+z^2+b^2p^2\leq\left\|\begin{pmatrix}z\\bp\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}z+\varphi\\b(p+\psi)\end{pmatrix}\right\|$$

Dann formt man die linke Seite um:

$$z(z+\varphi)+b^2p(p+\psi) \leq \left\| \begin{pmatrix} z \\ bp \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} z+\varphi \\ b(p+\psi) \end{pmatrix} \right\|$$

Die linke Seite stellt nun gerade ein Skalarprodukt dar:

$$z(z+\varphi)+b^2p(p+\psi) = \begin{pmatrix} z \\ bp \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z+\varphi \\ b(p+\psi) \end{pmatrix}$$

Damit stellt die obige Ungleichung nichts anderes als die SCHWARZsche Ungleichung bezüglich der beiden Vektoren dar. Gleichheit gilt nur, falls beide Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} z+\varphi \\ p+\psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z \\ p \end{pmatrix}$$

$z(\lambda - 1) = \varphi$ und $p(1-\lambda) = \psi$

Setzen wir beispielsweise $\lambda = 2$, dann erhalten wir $\varphi = z$ und $\psi = p$. Damit ist die Funktion **nur konvex**.

Weitere Regeln für Konvexität:

Starke Konvexität bezieht sich immer auf die Variablen z und p:

1.) stark konvex + konvex = stark konvex

2.) positive Funktion von x · stark konvex = stark konvex

3.) $f(x,z,p) = \alpha(x) + \beta(x)z + \gamma(x)p$ ist konvex (nicht stark konvex).

Beispiel:

Betrachten wir:

$$f(x,z,p) = -2(\sin(x))z + p^2 + x^2\sqrt{1+z^2}$$

In einem früheren Beispiel hatten wir nachgewiesen, daß p^2 stark konvex ist. Für den ersten Term liegt nach Regel (3) Konvexität vor. Da beim dritten Term $\sqrt{1+z^2}$ stark konvex ist, ist auch der $x^2\sqrt{1+z^2}$ stark konvex und damit auch der gesamte Ausdruck.

Kapitel 5

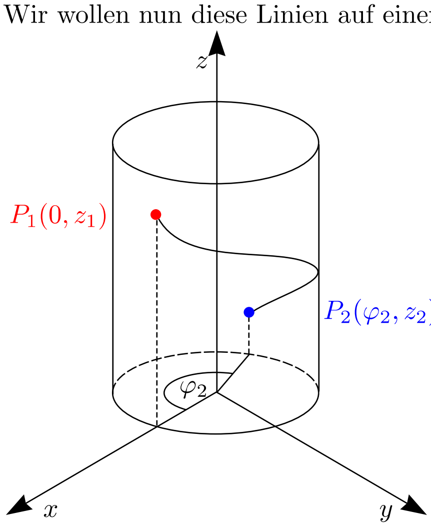
Anwendungen

Wir wollen in diesem Kapitel näher auf folgende Problemstellungen eingehen:

- Geodätische Linien
- Brachystochrone
- Kettenlinie
- Isoperimetrisches Problem
- Minimalflächenproblem

5.1 Geodätische Linien

Wir wollen nun diese Linien auf einem geraden Kreiszylinder betrachten.



$0 < \varphi_2 < \pi$

Wir suchen die Kurve in Parameterdarstellung, wobei wir $r = 1$ setzen:

$$r(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z(\varphi) \end{pmatrix} \text{ für } 0 < \varphi \leq \varphi_2$$

Es gilt $z(0) = z_1$ und $z(\varphi_2) = z_2$. Gesucht ist $z_0 \in \mathbb{D} = \{z \in C^1[0, \varphi_2] | z(0) = z_1,\ z(\varphi_2) = z_2\}$ mit:

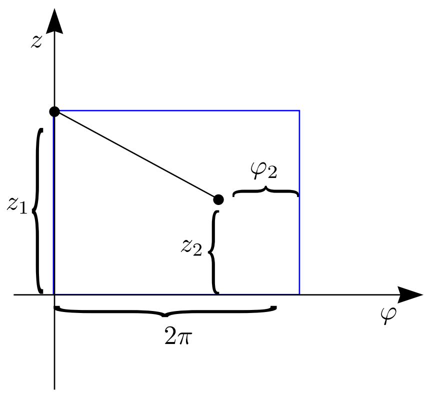
$$F(z_0) \leq F(z) = \int\limits_0^{\varphi_2} \sqrt{1 + z'^2(\varphi)}\, \mathrm{d}\varphi$$

Mit unseren Bezeichnungen können wir schreiben $f(p) = \sqrt{1+p^2}$. Wir wissen, daß strikte Konvexität vorliegt. Damit folgt nach Corollar ②:

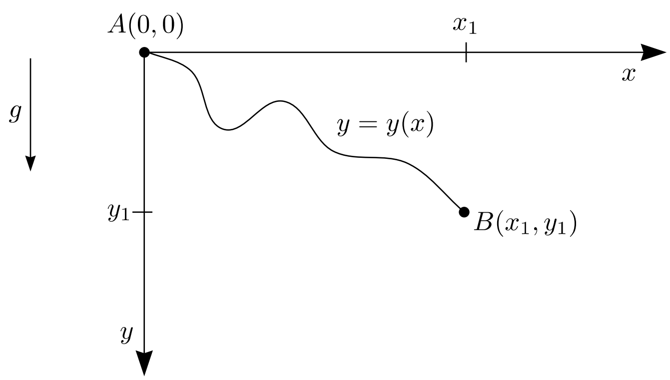
$$\boxed{z(\varphi) = \frac{z_2 - z_1}{\varphi_2} \cdot \varphi + z_1}$$

Damit gilt also:

$$\boxed{r(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \frac{z_2 - z_1}{\varphi_2}\varphi + z_1 \end{pmatrix} \quad \text{für } 0 \le \varphi \le \varphi_2}$$



5.2 Brachystochrone



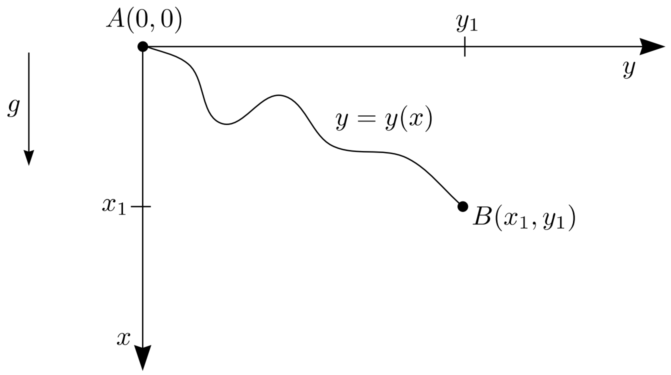
Das zu untersuchende Funktional lautet:

$$T(y) = \int \frac{\mathrm{d}s}{v(y)} = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x$$

Zu untersuchen ist ein Variationsintegral mit dem Integranden:

$$f(x, z, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{z}}$$

Diese Funktion ist jedoch nicht konvex. Deshalb betrachten wir dasselbe Problem, aber wir vertauschen die Achsen.



Dann sieht unser Integral folgendermaßen aus:

$$T(y) = \int\limits_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gx}}\,\mathrm{d}x$$

Dieses Funktional ist also zu minimieren aus $\mathbb{D} = \{y \in C^1[a,b] | y(0) = 0, y(x_1) = y_1\}$. Bei diesem Vorgehen können jedoch gewisse Kurven verloren gehen.

$$f(x,z,p) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{1+p^2}$$

Da dieser Ausdruck stark konvex ist, ist $T(y)$ strikt konvex auf $\mathbb{D}$ und wir können den Satz ① anwenden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y(x), y'(x)) = f_z(x, y(x), y'(x))$$

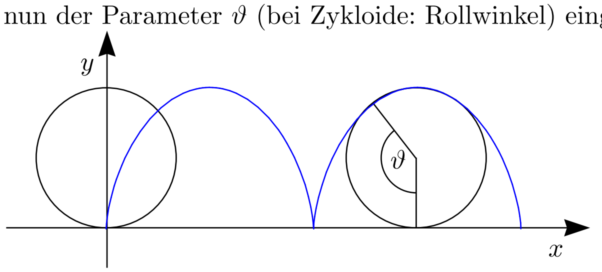
Diese Differentialgleichung ist nun zu lösen.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)}} = \frac{1}{C}, \text{ wobei } C = \text{const.}$$

Durch Auflösen nach $y'(x)$ erhalten wir dann:

$$y'^2(x) = \frac{x}{C^2 - x} \text{ für } x < C^2$$

Wir lesen hier ab, daß $y'(0) = 0$ ist; also liegt im Ursprung eine waagerechte Tangente. Anstelle von x wird nun der Parameter ϑ (bei Zykloide: Rollwinkel) eingeführt.



$$x(\vartheta) = \frac{C^2}{2}(1-\cos\vartheta) = C^2 \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \ x(0) = 0$$

Damit dieses auch wirklich eine Parametertransformation ist, muß $x(\vartheta)$ bijektiv sein. Bei Injektivität darf die Ableitung von $x(\vartheta)$ nicht gleich Null sein:

$$\dot{x}(\varphi) = \frac{C^2}{2}\sin\vartheta > 0 \text{ für } 0 < \vartheta < \pi \qquad (\text{für } 0 < \vartheta < \vartheta_1 < \pi)$$

$x = x(\vartheta)$: $[0, \vartheta_1] \mapsto [0, x_1]$ ist bijektiv, falls $0 < \vartheta_1 < \pi$. Wir schreiben nun $y(x(\vartheta)) = \widetilde{y}(\vartheta)$. Dann resultiert mit der Kettenregel:

$$\dot{\widetilde{y}}(\vartheta) = y'(x(\vartheta))\dot{x}(\vartheta) = y'(x(\vartheta)) \cdot \frac{C^2}{2} \sin \vartheta$$

$$\dot{\widetilde{y}}(\vartheta) = y'^2(x(\vartheta)) \cdot \frac{C^4}{4} \sin^2 \vartheta = \frac{\frac{C^2}{2}(1-\cos\vartheta)}{C^2 - \frac{C^2}{2}(1-\cos\vartheta)} \cdot \frac{C^4}{4} \sin^2 \vartheta = \frac{C^4}{4}(1-\cos\vartheta)^2$$

Wir ziehen die Wurzel:

$$\boxed{\dot{\widetilde{y}}(\vartheta) = \frac{C^2}{2}(1-\cos\vartheta)}$$

Durch Integration folgt:

$$\boxed{\widetilde{y}(\vartheta) = \frac{C^2}{2}(\vartheta - \sin\vartheta)}$$

Damit haben wir eine Kurvendarstellung, welche durch $A(0,0)$ geht.
C^2, ϑ_1 sind so zu bestimmen, daß $(x(\vartheta), \widetilde{y}(\vartheta))$ durch B verläuft.

$$(x_1, y_1) = (x(\vartheta_1), \widetilde{y}(\vartheta_1))$$

Zerlegen wir die Parameterdarstellung der Zykloide:

$$\begin{pmatrix} x(\vartheta) \\ \widetilde{y}(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 \\ C^2\vartheta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -C^2 \cos\vartheta \\ -C^2 \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Wir betrachten folgende Funktion:

$$h(\vartheta) = \frac{\widetilde{y}(\vartheta)}{x(\vartheta)} = \frac{\vartheta - \sin\vartheta}{1-\cos\vartheta} \text{ für } \vartheta \geq 0$$

Berechnen wir den Grenzwert mittels der Taylorreihenentwicklung, so folgt:

$$h(0) = 0, \lim_{\vartheta \mapsto 2\pi} h(\vartheta) = \infty$$

Außerdem kann man nachprüfen, daß $h'(\vartheta) > 0$ ist für $0 < \vartheta < 2\pi$. $h(\vartheta)$ ist damit streng monoton wachsend auf $[0, 2\pi]$ und $h([0, 2\pi)) = [0, \infty)$. Daraus folgt dann, daß es genau ein $\vartheta_1 \in [0, 2\pi)$ mit $h(\vartheta_1) = \frac{y_1}{x_1}$. Es gilt damit:

$$\frac{y_1}{x_1} = h(\vartheta_1) < h(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

Wir erreichen damit nur die reellen Zahlen, welche kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Berechne ϑ_1 aus $h(\vartheta_1) = \frac{y_1}{x_1}$ und $\frac{y_1}{x_1} < \frac{\pi}{2}$.
Setze nun (erste Gleichung nach C^2 auflösen):

$$C^2 = \frac{x_1}{1-\cos\vartheta_1}$$

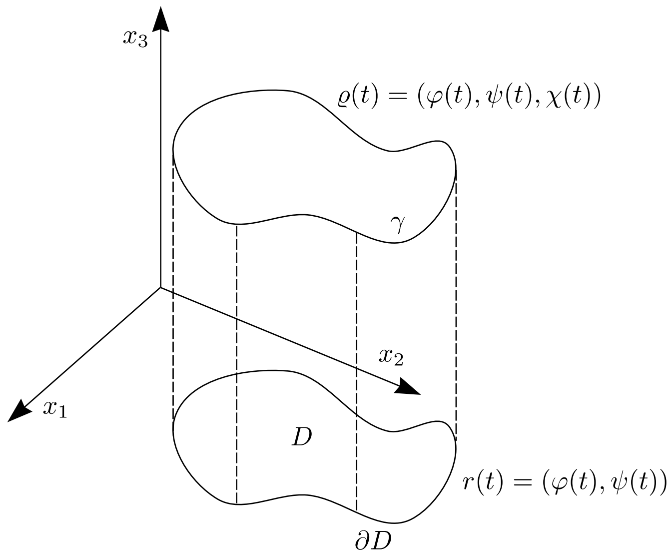
Dann ist die Lösung unseres Problems durch folgende Funktionen gegeben:

$$\boxed{x(\vartheta) = x_1 \cdot \frac{1-\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta_1} \text{ für } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \, (< \pi)}$$

$$\boxed{\widetilde{y}(\vartheta) = x_1 \frac{\vartheta - \sin\vartheta}{1-\cos\vartheta_1}}$$

Von der Anschauung her ist C^2 der Radius des Kreises, welcher durch Abrollen die Zykloide bildet.

5.3 Minimalflächenproblem



Gesucht ist eine Fläche F mit $\partial F = \gamma$ mit minimalem Flächeninhalt. Gesucht ist $y = y(x_1, x_2) \in C^1(\overline{\mathbb{D}})$ mit $y|_{\partial\mathbb{D}} = \gamma$, für die der Flächeninhalt minimal wird:

$$F(y) = \iint_D \sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}\,\mathrm{d}(x_1, x_2)$$

Überprüfe, ob F auf $\mathbb{D}$ [strikt] konvex ist. Ist dies der Fall, können wir die Eulersche Gleichung aufstellen.

$$F(y+v) - F(y) \overset{!}{\geq} \delta F(y; v)\,\forall\, v \in \mathbb{D}_0\,(v|_{\partial D} = 0)$$

Wir berechnen zunächst die Gateaux-Ableitung:

$$\delta F(y; v) = \iint_D [f_z \cdot v + f_p \cdot Dv]\,\mathrm{d}(x_1, x_2)$$

Unsere Funktion hängt von zwei unabhängigen Veränderlichen ab:

$$f(x_1, x_2, z, p_1, p_2) = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2},\; f_z = 0,\; f_p = \begin{pmatrix} f_{p_1} \\ f_{p_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\delta F(y; v) = \iint_D \frac{y_{x_1} v_{x_1} + y_{x_2} v_{x_2}}{\sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}}\,\mathrm{d}(x_1, x_2)$$

Es muß nun gelten:

$$\frac{y_{x_1} v_{x_1} + y_{x_2} v_{x_2}}{\sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}} \leq \sqrt{1 + (y+v)_{x_1}^2 + (y+v)_{x_2}^2} - \sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}$$

Wir multiplizieren mit dem Nenner durch und formen um:

$$1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2 + y_{x_1} v_{x_1} + y_{x_2} v_{x_2} \leq \sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}\sqrt{1 + (y+v)_{x_1}^2 + (y+v)_{x_2}^2} = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ y_{x_1} \\ y_{x_2} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ (y+v)_{x_1} \\ (y+v)_{x_2} \end{pmatrix} \right\|$$

Auf der linken Seite steht gerade das Skalarprodukt dieser Vektoren, womit gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_{x_1} \\ y_{x_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ (y+v)_{x_1} \\ (y+v)_{x_2} \end{pmatrix} \leq \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ y_{x_1} \\ y_{x_2} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ (y+v)_{x_1} \\ (y+v)_{x_2} \end{pmatrix} \right\|$$

Dies ist die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung, womit die Aussage gilt. Gleichheit liegt vor, falls beide Vektoren linear abhängig, sprich Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix}1\\y_{x_1}\\y_{x_2}\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\(y+v)_{x_1}\\(y+v)_{x_2}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\y_{x_1}\\y_{x_2}\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\y_{x_1}+v_{x_1}\\y_{x_2}+v_{x_2}\end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt $\lambda = 1$. Daraus wiederum ergibt sich $v_{x_1} = 0$ und $v_{x_2} = 0$. Damit ist $v(x_1, x_2) = \text{const.} = \overline{\mathbb{D}}$. Wegen $v(x_1, v_2) = 0$ für $(x_1, x_2) \in \partial D$ erhalten wir $v = 0$. F ist damit auf $\mathbb{D}$ strikt konvex.
Nun ist die EULER-LAGRANGE-Gleichung zu lösen. Gesucht ist $y \in \mathbb{D}$ mit $\delta F(y; v) = 0\ \forall\ v \in \mathbb{D}_0$. Wir setzen nun der Übersichtlichkeit halber:

$$U = \frac{y_{x_1}}{\sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}},\ W = \frac{y_{x_2}}{\sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}}$$

Daraus folgt dann mit $\delta F(y; v) = 0$:

$$0 = \iint\limits_D [Uv_{x_1} + Wv_{x_2}]\ \mathrm{d}(x_1, x_2) = \iint\limits_D [((Uv)_{x_1} + (Wv)_{x_2}) - U_{x_1}v - W_{x_2}v]\ \mathrm{d}(x_1, x_2) =$$

$$= \iint\limits_D \left[\vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix}Uv\\Wv\end{pmatrix} - v(U_{x_1} + W_{x_2})\right] \mathrm{d}(x_1, x_2) = \int\limits_{\partial D} \begin{pmatrix}Uv\\Wv\end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} - \iint\limits_D v\,(U_{x_1} + W_{x_2})\ \mathrm{d}(x_1, x_2) = 0\,\forall\, v$$

Der erste Term verschwindet, daß $v|_{\partial D} = 0$ ist. Damit der zweite Term gleich Null ist, muß auf D gelten:

$$U_{x_1} + W_{x_2} = 0$$

$$U_{x_1} = \frac{y_{x_1x_1}}{\sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}} - \frac{y_{x_1}}{\left(1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}} [y_{x_1}y_{x_1x_1} + y_{x_2}y_{x_2x_1}]$$

$$W_{x_2} = \frac{y_{x_2x_2}}{\sqrt{1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2}} - \frac{y_{x_2}}{\left(1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2\right)^{\frac{3}{2}}} [y_{x_1}y_{x_1x_2} + y_{x_2}y_{x_2x_2}]$$

$$U_{x_1} + W_{x_2} = y_{x_1x_1}\left(1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2\right) - y_{x_1}^2 y_{x_1x_1} - y_{x_1}y_{x_2}y_{x_2x_1} + y_{x_2x_2}\left(1 + y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2\right) - y_{x_1}y_{x_2}y_{x_1x_2} - y_{x_2}^2 y_{x_2x_2}$$

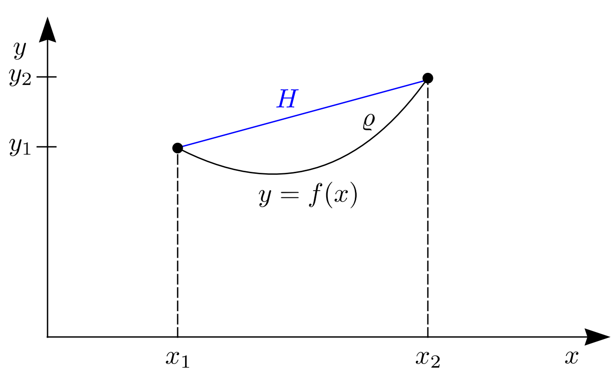
Daraus ergibt sich dann durch Zusammenfassen des Ausdrucks folgende partielle Differentialgleichung:

$$\boxed{y_{x_1x_1}(1 + y_{x_2}^2) - 2y_{x_1}y_{x_2}y_{x_1x_2} + y_{x_2x_2}(1 + y_{x_1}^2) = 0,\ (x_1, x_2) \in D}$$

$$\boxed{\text{Randbedingung: } y(\varphi(t), \psi(t)) = \chi(t) \qquad (y|_{\partial D} = \gamma)}$$

Hierbei handelt es sich um eine **nichtlineare** partielle Differentialgleichung, deren Lösung sehr aufwändig ist. Das gute an der Gleichung ist jedoch, daß nur Ableitungen vorkommen, aber nicht die Funktion y selbst. Es sei nur erwähnt, daß diese Gleichung mittels der **Legendre-Transformation** gelöst werden kann.

5.4 Kettenlinie



ϱ sei die Dichte, welche wir als konstant annehmen. Es ist also das Minimum der potentiellen Energie zu finden:

$$U(y) = \varrho g \int y \, \mathrm{d}s = \varrho g \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2} \, \mathrm{d}x$$

Die Randbedingung für dieses Problem ist, daß die Länge der Kurve konstant ist:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'(x)^2} \, \mathrm{d}x = L \, (> H)$$

Wiederholung:

Betrachten wir zuerst allgemein das Funktional F, welches auf $\mathbb{D}$ minimal werden soll:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x)) \, \mathrm{d}x$$

Mit folgender Nebenbedingung:

$$G(y) = \int_a^b g(x, y(x), y'(x)) \, \mathrm{d}x = L = \text{const.}$$

Betrachte mit $\lambda = \text{const.}$ das Hilfsfunktional:

$$\widetilde{F}(y) = F(y) + \lambda G(y)$$

Wiederholen wir an dieser Stelle den Satz ③:

> Sei y_0 eine Lösung von $\widetilde{F}(y)$, welche auf $\mathbb{D}$ minimal werden soll. Dann eliminiere mittels der Nebenbedingung aus y_0 die Zahl λ. Dies ergibt dann die gesuchte Lösung.

Andere Nebenbedingung:

Die Fläche sei $\phi(x, y, z) = 0$. Gesucht ist die Kurve auf F. Dann sind folgende Randbedingungen möglich:

- Die Kurve muß eine Ungleichung erfüllen.
- Die Kurve muß zusätzlich eine Differentialgleichung erfüllen (Lagrange-Problem).

Beispiel:

Es sei $\mathbb{D} = \{y \in C^1[0,1] | y(0) = y(1) = 0\}$ gegeben. Auf $\mathbb{D}$ soll dann folgendes Funktional minimiert werden:

$$\int_0^1 y'(x)^2 \, \mathrm{d}x \text{ unter der Nebenbedingung } \int_0^1 y(x) \, \mathrm{d}x = 1$$

Das zweite Funktional, welches eine Fläche unter der Kurve darstellt, ist nun gerade unsere Nebenbedingung $G(y)$. Dann betrachten wir:

$$\widetilde{F}(y) = F(y) + \lambda G(y) = \int_0^2 \left[y'(x)^2 + \lambda y(x)\right] \, \mathrm{d}x \text{ auf } \mathbb{D}$$

$$f(x, z, p) = \lambda z + p^2$$

Da wir die Summe einer konvexen (z) und einer stark konvexen Funktion (p^2) haben ist f stark konvex und $\widetilde{F}$ strikt konvex. Durch Lösung der EULERschen Gleichung erhalten wir also eine eindeutige Lösung des Problems.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y(x), y'(x)) = f_z(x, y(x), y'(x))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2y' = \lambda$$

Daraus folgt die Differentialgleichung:

$$y''(x) = \frac{\lambda}{2}$$

Wir suchen hier nun Lösungen auf $\mathbb{D}$, also mit $y(0) = y(1) = 0$. Durch Integration erhalten wir zwei Integrationskonstanten, welche wir mit den Randbedingungen bestimmen:

$$\boxed{y(x) = \frac{\lambda}{4}\left(x^2 - x\right)}$$

Aus der Nebenbedingung kann nun λ bestimmt werden:

$$\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\lambda}{4}\left(x^2 - x\right)\,\mathrm{d}x = 1$$

Dies ergibt dann $\lambda = -24$ und durch Einsetzen in obige Funktion $y(x)$ folgt schlußendlich:

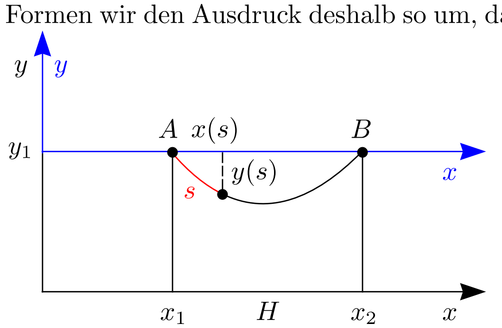
$$\boxed{y(x) = -6\left(x^2 - x\right)}$$

Nun wieder zurück zur Kettenlinie:

Es ist das Minimum auf $\mathbb{D}$ zu bestimmen von:

$$F(y) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\varrho g y(x)\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}\right]\,\mathrm{d}x$$

Dieses Funktional ist jedoch nicht konvex, womit unsere vorherigen Erkenntnisse nur bedingt anwendbar sind. Formen wir den Ausdruck deshalb so um, daß er konvex wird. Wir verändern die unabhängigen Veränderlichen.



Die Länge der Kette sei L. Die unabhängigen Variablen längs der gesuchten Kurve sei die Bogenlänge s. Gesucht sind $x(s)$ und $y(s)$ für $0 \leq s \leq L$. Es ist also folgendes auf $\mathbb{D} = \{y \in C^1[0, L] | y(0) = y(L) = 0\}$ zu minimieren:

$$\frac{1}{\varrho h} U(y) = \int_{s=0}^{L} y(s)\,\mathrm{d}s$$

Unter der Nebenbedingung:

$$\int_0^L x'(s)\,\mathrm{d}s = H$$

Wegen $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ (siehe Definition der Bogenlänge, HMII) ergibt sich für die Nebenbedingung:

$$H = \int_0^L \sqrt{1 - y'^2(s)}\,\mathrm{d}s$$

Bemerkung:

Aus $x'(s)^2 + y'(s)^2)1$ folgt, daß $|y'(s) < 1$ ist für $0 < \varrho < L$. Aus $y'(s) = 1$ folgt $y'(s) = 0$; die Kurve würde also senkrecht zur x-Achse stehen. Wir hätten somit eine Spitze in der Kurve und dies ist physikalisch nicht sinnvoll. Betrachten wir nun:

$$F(y) = \int_0^L \left[y(s) + \lambda\sqrt{1 - y'^2(s)}\right]\,\mathrm{d}s$$

Ist dieser Ausdruck konvex? Dazu betrachten wir:

$$f(s, z, p) = z + \lambda\sqrt{1 - p^2}$$

z ist als lineare Funktion konvex und $\lambda\sqrt{1 - p^2}$ ist für $\lambda < 0$ stark konvex. Damit ist die Summe aus beiden Funktionen stark konvex und F strikt konvex. Wenn wir also jetzt die EULERsche Gleichung lösen, haben wir ein eindeutiges Minimum.

1.) Löse die zugehörige Gleichung (E) auf $\mathbb{D}$ für F.

2.) Eliminiere λ

$y = y(s)$ ist symmetrisch um $s = \frac{L}{2}$. Es gilt daher $y'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$. Dann bilden wir:

$$f_z = 1,\ f_p = \lambda\frac{-p}{\sqrt{1 - p^2}}$$

Die EULERsche Gleichung resultiert dann sofort:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f_p(s, y(x), y'(x)) = f_z(s, y(s), y'(s))}$$

$$-\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{y'(s)}{\sqrt{1 - y'(s)^2}} = 1 \text{ für } 0 \leq s \leq \frac{L}{2} \text{ und } y(0) = 0,\ y'\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$-\lambda\frac{y'(s)}{\sqrt{1 - y'(s)^2}} = s + C$$

Mit der Randbedingung $y'\left(\frac{L}{2}\right)$ folgt die Konstante $C = \frac{L}{2}$. Wir quadrieren uns lösen nach $y'(s)^2$ auf:

$$y'^2(s) = \frac{\left(s - \frac{L}{2}\right)^2}{\lambda^2 + \left(s - \frac{L}{2}\right)^2} \text{ für } 0 \leq s \leq \frac{L}{2}$$

Für $y'(s) < 0$ erhalten wir:

$$y'(s) = \frac{s - \frac{L}{2}}{\sqrt{\lambda^2 + \left(s - \frac{L}{2}\right)^2}}$$

Mit $y(0)=0$ ergibt sich mittels einer Integraltabelle (beispielsweise Bronstein):

$$y(s)=\int\limits_0^s \frac{t-\frac{L}{2}}{\sqrt{\lambda^2+\left(t-\frac{L}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}t=\boxed{\sqrt{\lambda^2+\left(s-\frac{L}{2}\right)^2}-\sqrt{\lambda^2+\frac{L^2}{4}}\text{ für }0\le s\le\frac{L}{2}}$$

Mittels der Nebenbedingung erhalten wir für $0\le s\le\frac{L}{2}$:

$$\frac{H}{2}=\int\limits_0^{\frac{L}{2}}\sqrt{1-y'(s)^2}\,\mathrm{d}s$$

Daraus und mit $y(s)$ ist dann $\lambda<0$ zu eliminieren. Mittels der Eulerschen Differentialgleichung können wir die Wurzel eliminieren:

$$\sqrt{1-y'(x)^2}=-\lambda\frac{y'(s)}{s-\frac{L}{2}}=-\lambda\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\left(s-\frac{L}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{H}{2}=\int\limits_0^{\frac{L}{2}}(-\lambda)\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\lambda^2+\left(s-\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Gibt es nun ein $\lambda<0$, so daß dies gilt? Setzte nun $\mu=-\lambda$ und betrachte das Integral $g(\mu)$:

$$g(\mu)=\mu\int\limits_0^{\frac{L}{2}}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{\mu^2+\left(s-\frac{L}{2}\right)^2}}$$

Mit der Regel von de l'Hospital ergibt sich nach mühsamer (!) Rechnung:

$$g(0)=0,\ \lim_{\mu\mapsto\infty}g(\mu)=\frac{L}{2},\ g'(\mu)>0$$

Da g stetig und mit $g'(\mu)>0$ streng monoton wachsend auf $[0,\infty]$ ist, wird nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert zwischen 0 und $\frac{L}{2}$ genau einmal angenommen. Wegen $H<L$ gibt es genau ein λ_0 mit $\frac{H}{2}=g(-\lambda_0)$. Mit diesem λ_0 erhält man:

$$y(s)=\sqrt{\lambda_0^2+\left(\frac{L}{2}-s\right)^2}-\sqrt{\lambda_0^2+\frac{L^2}{4}}\text{ für }0\le\varrho\le\frac{L}{2}$$

Mit $x'(s)+y'(s)^2=1$ erhält man:

$$x(s)=\int\limits_0^s\sqrt{1-y'(x)^2}\,\mathrm{d}s=\int\limits_0^{\frac{L}{2}}\sqrt{1-y'(s)^2}\,\mathrm{d}s-\int\limits_s^{\frac{L}{2}}\sqrt{1-y'(s)^2}\,\mathrm{d}s=\frac{H}{2}-\int\limits_s^{\frac{L}{2}}\frac{-\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+\left(t-\frac{L}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\frac{H}{2}+\lambda_0\operatorname{arsinh}\left(\frac{s-\frac{L}{2}}{\lambda_0}\right)$$

Wobei wir wissen, daß das λ_0 einer Gleichung genügt, welche wir lösen können. Wir fassen zusammen:

$$\boxed{y(s)=\sqrt{\lambda^2+\left(\frac{L}{2}-s\right)^2}-\sqrt{\lambda_0^2+\frac{L^2}{4}}\text{ und }x(s)=\frac{H}{2}+\lambda_0\operatorname{arsinh}\left(\frac{s-\frac{L}{2}}{\lambda_0}\right)\text{ für }0\le s\le\frac{L}{2}}$$

Aus der Beziehung für x erhalten wir außerdem:

$$\sinh\left(\frac{x-\frac{H}{2}}{\lambda_0}\right)=\frac{s-\frac{L}{2}}{\lambda_0}$$

Daraus erhalten wir schließlich die explizite Darstellung:

$$\boxed{y(x)=-\lambda_0\cosh\left(\frac{x-\frac{H}{2}}{\lambda_0}\right)-\sqrt{\lambda_0^2+\frac{L^2}{4}}}$$

Kapitel 6

Relative und lokale Extremwerte/Stationäre Stellen von Funktionalen/Eckenbedingungen

Gegeben sei ein Funktional F auf $\mathbb{D} \subset Y \mapsto \mathbb{R}$.

Definition:

In $u \in \mathbb{D}$ liegt für F auf $\mathbb{D}$ ein lokales Minimum vor, falls gilt $F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in \mathbb{D}$, welche „in der Nähe von u" liegen.

6.1 Metrischer Raum

Dies ist eine Menge X mit einer Funktion d: $X \times X \mapsto \mathbb{R}$ („distance") mit folgenden Eigenschaften:

1.) $d(x, y) \geq 0\ \forall\ x,\ y \in X$; Gleichheit nur für $x = y$

2.) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$

3.) Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)\ \forall\ x,\ y \in X$

Übung:

Betrachten wir $X = \mathbb{R}$ und $d(x, y) = |x - y|$. Dann kann als Übung überprüft werden, das obige drei Eigenschaften gelten.

6.2 Normierter Raum

Es sei Y ein Vektorraum mit folgenden Eigenschaften:

1.) $\|x\| \geq 0\ \forall\ x \in Y$; Gleichheit nur für $x = 0$

2.) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\ \forall\ x,\ y \in Y$

3.) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|\ \forall\ x \in Y,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Es sei $y = C[a, b]$. Dann unterscheidet man:

a.) Integralnorm:

$$\|y\|_I = \int\limits_a^b |y(x)| \,\mathrm{d}x$$

b.) Maximumsnorm:

$$\|y\|_0 = \max |y(x)| \text{ für } x \in [a,b]$$

$(y, \|\cdot\|)$ sei normiert. Y ist dann auch ein metrischer Raum, beispielsweise mit der Metrik $d(x,y) := \|y-x\|$. Sei $a \in Y$ und $\delta > 0$ gegeben. Dann definieren wir folgende Umgebung U mit dem Maß δ:

$$U_\delta(a) = \{w \in Y | \|w-a\| < \delta\}$$

Diese nennt man **δ-Umgebung von a**. $\mathbb{D} \subset Y$ heißt **offen**, falls es zu jedem $a \in \mathbb{D}$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $U_\delta(a) \subset \mathbb{D}$ ist.

Beispiel:

Betrachten wir den $\mathbb{R}^n$. Die Elemente dieses Raumes sind n-Tupel von reellen Zahlen:

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \text{ mit } a_j \in \mathbb{R}$$

Dann kennen wir verschiedene Normen:

i.) Euklidische Norm:

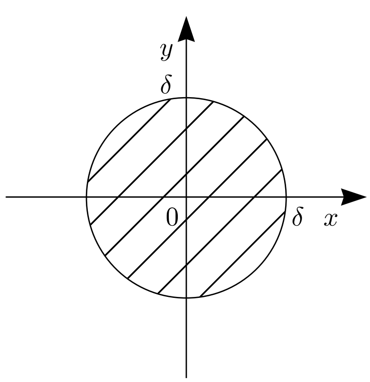
$$\|a\| = \left[\sum_{j=1}^n a_j^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \left[\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right]^{\frac{1}{p}},\ p > 1$$

ii.) Maximumsnorm:

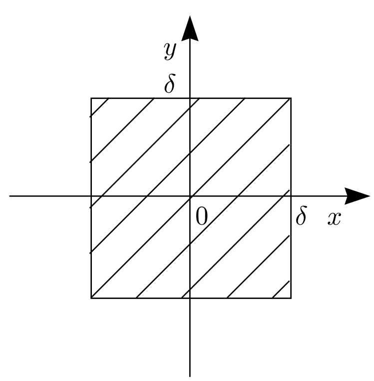
$$\|a\| = \max\{|a_j|, j = 1, \ldots, n\}$$

iii.) $\|a\| = \sum_{j=1}^n |a_j|$

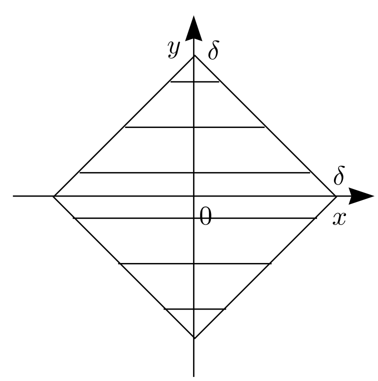
Veranschaulichung von $U_\delta(a)$ für $n = 2$ für i.), ii.) und iii.) ($a = 0$)



$U_\delta(0) = \{w \in \mathbb{R}, \|w\| < \delta\}$, $w = (x,y)$
3D: Kugel



$\|w\| < \delta :\ \max(|x|,|y|) < \delta$
3D: Würfel mit Seiten parallel zu Koordinatenebenen



$|x| + |y| < \delta$
3D: gedrehter Würfel

Beispiel:

Betrachten wir $Y = [a,b]$, u: $[a,b] \mapsto \mathbb{R}$

i.) Integralnorm:

$$\|u\| = \left[\int\limits_a^b |u(x)|^p \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 1$$

Besonders wichtig in der theoretischen Physik ist die $L_{\overline{2}}$-Norm, also für $p = 2$. Man spricht von quadratintegrablen Funktionen. Wir beweisen zur Übung für den Fall $p = 2$ die Dreiecksungleichung: Die Behauptung ist also, daß gilt:

$$\left[\int\limits_a^b |u(x)+v(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int\limits_a^b |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int\limits_a^b |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

Als erstes quadrieren wir die Ungleichung. Da alles ≥ 0 ist, macht dies keine Probleme:

$$\int\limits_a^b u(x)^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b v^2(x) \,\mathrm{d}x + 2\int\limits_a^b |u(x)v(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b u(x)^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b v^2(x) \,\mathrm{d}x + 2\left[\int\limits_a^b u(x)^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_a^b v(x)^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

Jetzt fallen einige Terme heraus:

$$\int\limits_a^b |u(x)v(x)| \,\mathrm{d}x \leq \left[\int\limits_a^b u(x)^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int\limits_a^b v(x)^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\int\limits_a^b \frac{|u(x)|}{\left[\int\limits_a^b u(x)^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{|v(x)|}{\left[\int\limits_a^b v(x)^2 \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}} \,\mathrm{d}x \leq 1$$

Man hat also:

$$\int\limits_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1$$

Damit erhalten wir folgendes Problem:

$$\text{Gilt } \int\limits_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \leq 1, \text{ wenn bekannt ist, daß } \int\limits_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g(x)^2 \,\mathrm{d}x = 1?$$

Nun gilt allgemein nach den Binomischen Formel: $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x) \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\left[\int\limits_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)^2 \,\mathrm{d}x\right] = 1$$

ii.) Maximumsnorm:

$$\|u\| = \max\{|u(x)|, a \leq x \leq b\}$$

Wir wollen nun auf dem Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen $Y = \hat{C}^1[a,b]$ folgende Normen definieren:

1.) Starke Norm:

$$\|u\|_0 = \max\{|u(x)|, a \leq x \leq b\}$$

$$U^0_\delta(w) = \left\{ u \in \hat{C}^1[a,b] | \|u - w\|_0 < \delta \right\}$$

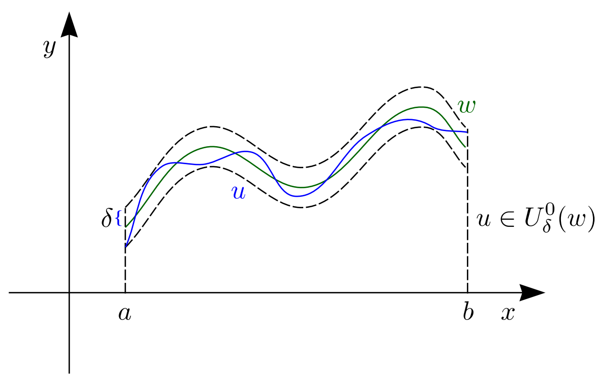
Man spricht hier auch von der **starken** δ-Umgebung.

2.) Schwache Norm:

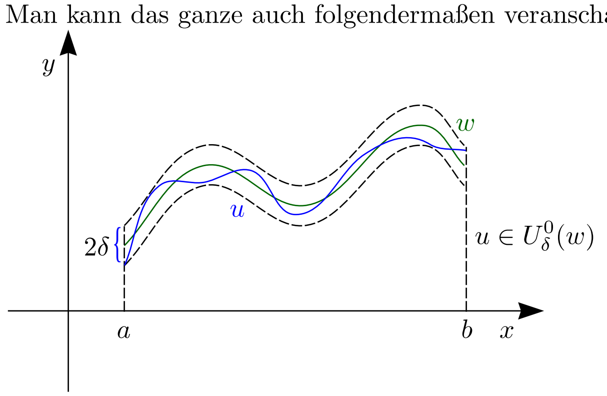
$$\|u\|_1 = \|u\|_0 + \|u'\|_0$$

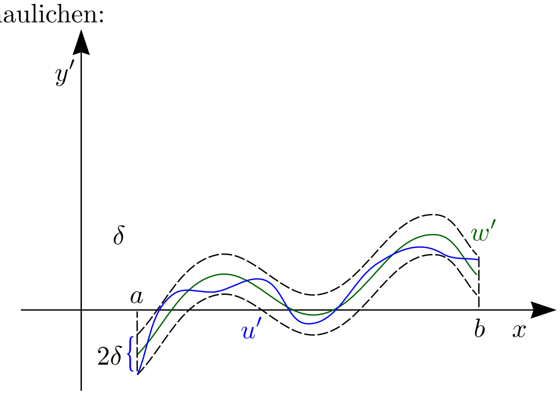
$$U^0_\delta(w) = \left\{ u \in \hat{C}^1[a,b] | \|u - w\|_1 < \delta \right\}$$

Diese wird als **schwache** δ-Umgebung bezeichnet.



Man kann das ganze auch folgendermaßen veranschaulichen:





- Aussage ①: $U^1_\delta(w) \subset U^0_\delta(w)$

  $u \in U^1_\delta(w): \; \|u - w_0\| + \|u' - w'\|_0 < \delta$

  Daraus ergibt sich dann $\|u - w_0\| < \delta$, also $u \in U^0_\delta(w)$.

- Aussage ②:

  $(u_n) \subset Y$, $u \in Y$

  Man hat eine Konvergenz bezüglich der starken und der schwachen Norm:

  $u_n \mapsto u$ für $n \mapsto \infty$ in $Y \Leftrightarrow \|u_n - u\|_0 \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$

$\|u_n - u\|_1 \mapsto 0$

Es sei $F\colon \mathbb{D} \subset Y \mapsto \mathbb{R}$. F heißt in $y_0 \in Y$ stetig in x_0, falls gilt:

$$\lim_{n\mapsto\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\mapsto\infty} x_n\right) = f(x_0)$$

Für jedes Folge $x_n \mapsto x_0$ gilt $f(x_n) \mapsto f(x_0)$. F heißt stetig bezüglich der starken Norm [schwachen Norm], falls aus $u_n \mapsto u_0$ bezüglich $\|\cdot\|_0$ [$\|\cdot\|_1$] folgt, daß $F(u_n) \mapsto F(u_0)$ für $n \mapsto \infty$.

Aussage ③:

Ist F in u_0 bezüglich $\|\cdot\|_0$ stetig, so ist F in u_0 auch bezüglich $\|\cdot\|_1$ stetig.

Aussage ④:

Die Umkehrung bei Aussage ③ gilt nicht. Aus Aussage ② ist bekannt:

Beweis von Aussage ②:

1.) Aus $\|u_1 - u_0\|_0 \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$ folgt, daß $F(u_n) \mapsto F(u_0)$ für $n \mapsto \infty$. Wir wollen zeigen:
2.) Aus $\|u_n - u_0\|_0 + \|u_n' - u_0'\|_0 \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$ folgt $F(u_n) \mapsto F(u_0)$ für $n \mapsto \infty$.

Mit $\|u_n - u_0\|_0 \mapsto 0$ folgt aus 1.) die Behauptung.

Beweis von Aussage ③:

Wir machen ein Gegenbeispiel. Wir wählen ein Funktional, welches nur Ableitungen enthält:

$$F(y) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

1.) F ist auf $\hat{C}^1[a,b]$ stetig bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.
Zu zeigen ist, daß aus $y_n \mapsto y_0$ in $\|\cdot\|_1$-Norm folgt: $F(y_n) \mapsto F(y_0)$.

$$\|y_n - y_0\| + \|y_n' - y_0'\| \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty$$

$$\|y_n' - y_0'\|_0 = \max_{[a,b]} |y_n'(x) - y_0'(x)| \mapsto 0 \text{ für } n \mapsto \infty$$

Wenn dies in diesem Sinne konvergiert, dann liegt gleichmäßige Konvergenz vor und wir können Grenzwert und Integration vertauschen:

$$\lim_{n\mapsto\infty} F(y_n) = \lim_{n\mapsto\infty} \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y_n'(x)}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \lim_{n\mapsto\infty} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = F(y_0)$$

F ist also stetig bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm.

2.) F ist jedoch nicht stetig bezüglich der $\|\cdot\|_0$-Norm.
Setze dazu $y_n(x) = \frac{1}{n}\sin(n^2\pi x) \mapsto y_0(x) =$ gleichmäßig auf dem Intervall $[0,1]$, das heißt $\|y_n - 0\|_0 \mapsto 0$ für $n \mapsto \infty$. Wäre F bezüglich der $\|\cdot\|_0$-Norm stetig, so müßte gelten $F(y_n) \mapsto F(y_0 = 0) = 1$. Hier gilt aber:

$$F(y_n) = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + n^2\pi^2\cos^2\left(n^2\pi x\right)}\,\mathrm{d}x \mapsto \infty \text{ für } n \mapsto \infty$$

Damit ist das Funktional nicht stetig bezüglich der $\|\cdot\|_0$-Norm.

Definition:

Es sei $F\colon \mathbb{D} \subset Y \mapsto \mathbb{R}$, wobei $\hat{C}^1[a,b]$. Gibt es ein $u \in \mathbb{D}$ und ein $\delta > 0$ mit $\left\{\begin{array}{l} F(u) \leq F(v)\,\forall\, v \in \mathbb{D} \cap U_\delta^0(u) \\ \\ F(u) \leq F(v)\,\forall\, v \in \mathbb{D} \cap U_\delta^1(u) \end{array}\right\}$, so heißt u $\left\{\begin{array}{l} \text{starke} \\ \\ \text{schwache} \end{array}\right\}$ Minimalfunktion von F.

$F(u)$ ist $\left\{\begin{array}{l} \text{starkes} \\ \\ \text{schwaches} \end{array}\right\}$ relatives (lokales) Minimum für F auf $\mathbb{D}$.

Aussage ⑤:

Jedes starke lokale Minimum ist auch schwaches lokales Minimum, aber nicht umgekehrt.

Beweis von Aussage ⑤:

Die Voraussetzung ist $F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in \mathbb{D} \cap U_\delta^0(u)$. Wir behaupten, daß $F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in \mathbb{D} \cap U_\delta^1(u)$. Mit Aussage ① gilt dies, da $U_\delta^1(u) \subset U_\delta^0(u)$.

Die Voraussetzung ist $F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in \mathbb{D} \cap U_\delta^1(u)$. Dann behaupten wir, daß $F(u) \leq F(v)\ \forall\ v \in \mathbb{D} \cap U_\delta^0(u)$ im allgemeinen nicht gilt!

Beispiel:

$$F(y) = \int\limits_0^1 (y'(x)^2 + y'(x)^3)\,\mathrm{d}x,\ \mathbb{D} = \left\{y \in \hat{C}^1[0,1] | y(0) = y(1) = 0\right\}$$

y' ist das, was die starke von der schwachen Norm unterscheidet.

a.) $y(x) = 0$ ist lokales schwaches Minimum von F auf $\mathbb{D}$.

Betrachten wir die Definition. Es sei $v \in U_1^1(0)$, das heißt, $\|v - 0\|_1 = \|v\|_0 + \|v'\|_0 < 1$. Hieraus folgt $\|v'\|_0 < 1$ und damit $|v'(x)| < \max\limits_{[0,1]} |v'(x)| < 1\ \forall\ x \in [0,1]$. Daraus ergibt sich dann $-1 < v'(x) < 1$ und somit $v'(x) + 1 > 0\ \forall\ x \in [0,1]$. Betrachten wir den Integranden:

$$v'(x)^2 + v'(x)^3 = \underbrace{v'(x)^2}_{\geq 0}\underbrace{[v'(x) + 1]}_{>0} \geq 0$$

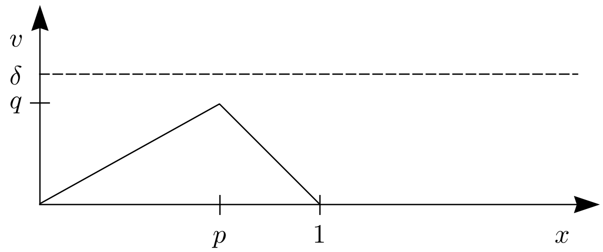
Daraus resultiert:

$$F(v) \geq F(0) = 0\,\forall\, v \in U_1^1(0)$$

b.) $y(x) = 0$ ist **nicht** lokales starkes Minimum von F auf $\mathbb{D}$.

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es $v \in U_\delta^0(0)$ mit $F(v) < F(0) = 0$. Betrachten wir für $0 < p < 1$ und $q > 0$:

$$v(x) = \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{q}{p}x & \text{für} & 0 \leq x‘p \\ \\ \dfrac{q}{p-1}(x-1) & \text{für} & p \leq x \leq 1 \end{array}\right. \qquad v \in U_\delta^0(0)$$



$$F(v) = \int_0^1 \left[v'(x)^2 + v'(x)^3\right] \,\mathrm{d}x = \frac{q^2}{p}\left(1+\frac{q}{p}\right) + \frac{p^2}{1-p}\left(1-\frac{q}{1-p}\right)$$

$$\lim_{p\mapsto 1} F(v) = -\infty$$

Es gibt damit ein p_0 mit $p_0 \leq p < 1$ und $F(v) < 0$ für diese p.

Satz:

Jede notwendige Bedingung für ein schwaches lokales Minimum ist eine notwendige Bedingung für starkes lokales Minimum.

Im folgenden werden wir uns einige Hilfssätze notieren.

Hilfssatz ①:

Für $y \in \hat{C}^1[a,b]$ gilt: $y(x) = y(a) + \int\limits_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t$, $a \leq x \leq b$

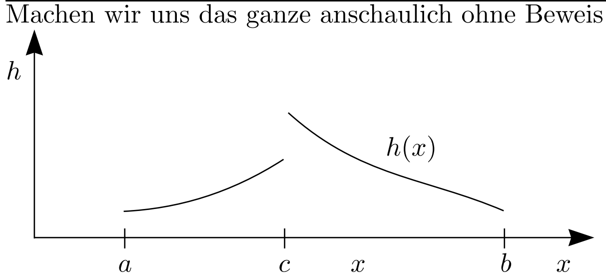
Seien $c_1, \ldots, c_N \in [a,b]$ die Unstetigkeiten von y' (die Ecken von y). Setze $c_0 = a$ und $c_{N+1} = b$. Sei $x \in [a,b]$ beliebig fest. Damit liegt x im Intervall $[c_k, c_{k+1}]$.

$$\int_a^x y'(t)\,\mathrm{d}t = y(x) - y(a) = y(X) - y(c_k) + \sum_{j=0}^{N-1}\left[y(c_{j+1}) - y(c_j)\right] = \int_{c_k}^x y'(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{k-1}\int_{c_j}^{c_{j+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t$$

Hilfssatz ②:

Es sei $h \in \hat{C}[a,b]$ und $y(x) = \int\limits_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$, dann gilt $y \in \hat{C}^1[a,b]$ und $y'(x) = h(x)$ für die x, in denen h stetig ist.

Machen wir uns das ganze anschaulich ohne Beweis klar.



Liegt der x-Wert rechts von c, so folgt:

$$y(x) = \int_a^c h(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

Es ist $y'(x) = h(x)$ für x ein Stetigkeitspunkt. Was ist $y'(c)$?

$$y(x) = \int\limits_a^x h(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow y'(x) = h(x),\, y'(c) = \lim_{x \mapsto c} h(x)$$

Hilfssatz ③:

a.) Aus $\int\limits_a^b y'(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$ folgt $y' = 0$ auf $[a, b]$.

b.) Aus $y'(x) = 0$ mit $x \pm c_k$ folgt, $y(x) = \text{const.}$ auf $[a, b]$.

Beweis für a.)

Es gilt $y'(x)^2 \geq 0$ und $\hat{y}'^2 \in \hat{C}[a, b]$. Daraus ergibt sich, daß folgendes Integral existiert:

$$\int\limits_a^b y'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

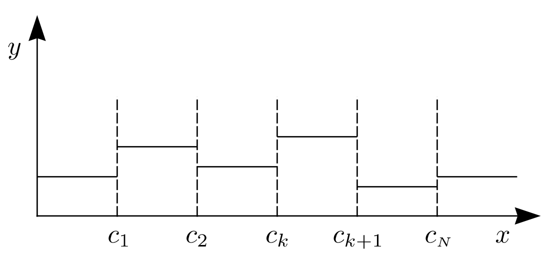
$$0 = \int\limits_a^b y'(x)^2\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^N \int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} y'(x)^2\,\mathrm{d}x \qquad (c_0 = a,\, c_{N+1} = b)$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} y'(x)^2\,\mathrm{d}x = 0 \text{ für } k = 0, \ldots, N$$

Und hieraus ergibt sich wiederum $y'(x) = 0$ für $c_k < x < c_{k+1}$.

Beweis für b.)



Es gilt ja nun $y'(x) = 0$ für $x_k < x < c_{k+1}$. Da $y(x)$ stetig ist, folgt, daß $y(x) = \text{const.}$ für $a \leq x \leq b$. Hier ist auch eine Argumentation mit dem Hilfssatz möglich.

Hilfssatz ④:

Es sei $g \in \hat{C}[a, b]$: Es gelte $\int\limits_a^b g(x)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $\eta \in \hat{C}^1[a, b]$ mit $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Dann gibt es eine Konstante C, so daß $g(x) = C$ in allen Stetigkeitsstellen von g ist.

Nun wieder zurück zu unserem Funktional:

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x,\ y \in \left(\hat{C}^1[a,b]\right)^n$$

$f = f(x,z,p)$ hat den Definitionsbereich $[a,b] \times \mathbb{R}^2$ $(\times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. f sei des weiteren $\in C^1$. Man erhält damit durch partielle Differentiation stetige Funktionen.

6.3 1.Euler-Gleichung/Gleichung von du Bois-Reymond

Satz ①:

Hierbei handelt es sich um eine notwendige Bedingung für ein schwaches relatives Minimum.

Für $y \in \hat{C}^1[a,b]$ sei $F(y_0)$ ein schwaches relatives Minimum. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = \int\limits_a^x f_z(t, y_0(t), y_0'(t))\,\mathrm{d}t + c$$

erfüllt ist für jedes $x \in [a,b]$, für das y_0' stetig ist.

Bemerkung:

Ist $y_0 \in \left(\hat{C}^1[a,b]\right)^n$, so bedeutet:

$$f_p = \begin{pmatrix} f_{p_1} \\ f_{p_2} \\ \vdots \\ f_{p_n} \end{pmatrix},\ f_z = \begin{pmatrix} f_{z_1} \\ f_{z_2} \\ \vdots \\ f_{z_n} \end{pmatrix}$$

Beweis:

Es ist die Frage, ob folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{\substack{x \mapsto c \\ x < c}} \int\limits_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

Dies schätzen wir ab:

$$\left|\int\limits_a^x h(t) - \int\limits_a^c h(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int\limits_c^x h(t)\,\mathrm{d}x\right| \leq \max_{[x,c]} |h(t)||c-x| = \text{const.} \cdot |c-x|$$

Wenn man nun den Grenzwert $x \mapsto c$ bildet, so ergibt sich 0, da $\max |h(t)| = \text{const.}$ ist.

Beweis:

Betrachte $y(x) = y_0(x) + \varepsilon v(x)$, wobei $v \neq 0$ eine beliebige Funktion aus $\hat{C}^1[a,b]$ ist mit $v(a) = v(b) = 0$ und dem reellen Parameter ε. Wähle für $\delta > 0$ ε gemäß $|\varepsilon| < \frac{\delta}{\|v\|_1}$. Dann gilt $\|y - y_0\|_1 = \|\varepsilon v\|_1 = |\varepsilon|\|v\|_1 < \delta$. Das heißt, die y liegen in $U_\delta^1(y_0)$. Nach Voraussetzung y_0 gibt es ein $\delta > 0$ mit $F(y_0) \leq F(y)\ \forall\ y \in U_\delta^1(y_0)$. Nimm dieses δ, welches nach Voraussetzung gegeben ist, und die $y = y_0 + \varepsilon v$ mit $|\varepsilon| < \frac{\delta}{\|v_1\|}$. Für diese y gilt also $F(y_0) \leq F(y) = F(y_0 + \varepsilon v) = \varphi(\varepsilon)$. Daraus folgt dann, daß $\varphi'(0)$ gleich Null sein muß:

$$\varphi'(0) = 0 = \delta F(y_0; v) = \int\limits_a^b \left[f_z(x, y_0(x), y_0'(x))v(x) + f_p(x, y_0(x), y_0'(x))v'(x)\right]\mathrm{d}x$$

Wir wälzen eine Ableitung auf $v(x)$:

$$\delta F(y_0; v) = \int\limits_a^b \left[-\int\limits_a^x f_z(x, y_0(x), y_0'(x)) + f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) \right] v'(x) \, \mathrm{d}x$$

Dies gilt für alle $v \in \hat{C}^1[a,b]$ mit $v(a) = v(b) = 0$. Nach Hilfssatz ④ folgt dann, daß der Klammerausdruck eine Konstante ist:

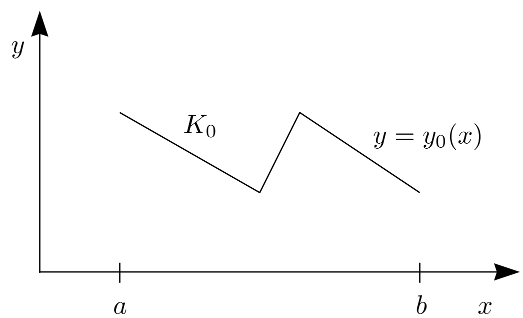
$$\boxed{f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = \int\limits_a^x f_z(t, y_0(t), y_0'(t)) \, \mathrm{d}t + C}$$

Bemerkungen:

Ist $\chi(x) = \int\limits_a^x f_z(t, y_0(t), y_0'(t)) \, \mathrm{d}t$ stückweise stetig, so wird $[a,b]$ in Intervalle eingeteilt:

$$\int\limits_a^b (\chi v)' \, \mathrm{d}x = \int\limits_a^{c_1} + \int\limits_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int\limits_{c_N}^b$$

a.) Folgerung ①:



Wird die lokale schwache minimierende Kurve K_0 durch $y = y_0(x)$ beschrieben, so gilt zwischen zwei Ecken von K_0 die 1.EULERgleichung in Differentialform:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = f_z(x, y_0(x), y_0'(x))}$$

Diese Gleichung trat bisher im Zusammenhang mit konvexen Problem auf.

b.) Folgerung ②:

$$\int\limits_a^x f_z(t, y_0(t), y_0'(t)) \, \mathrm{d}t$$

Es gilt $f_z \in \hat{C}$, womit das Integral insgesamt stetig ist auf $[a,b]$. Damit ist $f_p(x, y_0(x), y_0'(x))$ stetig in Eckpunkten von K_0. Diese können charakterisiert werden durch $(c, y_0(c))$ mit $p_- y_0'(c-) \neq y_0'(c+) = p_+$. Dies bedeutet:

$$\boxed{f_p(c, y_0(c), p_-) = f_p(c, y_0(c), p_+)}$$

Man bezeichnet auch $f_p(x, y_0(x), y_0'(x))$ als $U(x, y(x), y'(x))$.

6.4 1.Weierstrass-Erdmannsche-Eckenbedingung

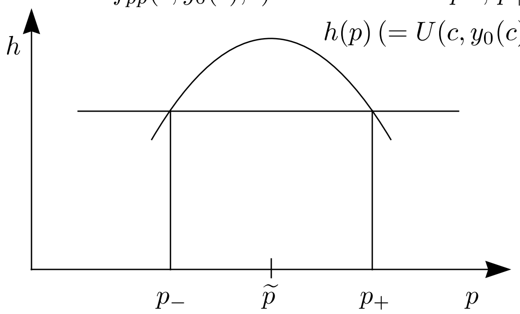
Satz ②:

Als Voraussetzung gelte Satz ①.

Es sei $c \in (a,b)$, wobei $(c, y_0(c))$ eine Ecke von $K_0 : y = y_0(x)$ mit $p_- = y_0'(c-)$, $p_+ = y_0'(c+)$. Dann gilt $U(c, y_0(c), p_-) = U(c, y_0(c), p_+)$ (Weierstrass-Erdmann 1), wobei $U(x, y(x), y'(x)) := f_p(x, y(x), y'(x))$.

Bemerkungen:

Existiert $f_{pp}(c, y_0(c), t)$ für t zwischen p_-, p_+ und ist für diese t stetig, so gibt es ein $\widetilde{p}$ zwischen p_- und p_+.



(Falls f_{pp} stets $\neq 0$ ist, so kann die Lösungskurve keine Ecken haben.)

Beispiel:

Betrachten wir folgendes Funktional:

$$F(y) = \int_a^b g(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x$$

Wir berechnen die Minimalzeit, die das Licht vom Punkt $y(a)$ nach $y(b)$ benötigt. $g(x, y(x))$ sei der Brechungsindex des Materials.

$$f(x, z, p) = g(x, z)\sqrt{1 + p^2}$$

$$f_p = g(x, z)\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Notieren wir die Eckenbedingung:

$$g(c, y_0(c))\frac{p_-}{\sqrt{1 + p_-^2}} = g(c, y_0(c))\frac{p_+}{\sqrt{1 + p_+^2}}$$

$$p_-^2(1 + p_+^2) = p_+^2(1 + p_-^2)$$

Durch Umformen erhalten wir hieraus die Bedingung $p_-^2 = p_+^2$ und damit $p_+ = \pm p_-$. Im Falle $p_+ = p_-$ liegen keinerlei Ecken vor. Durch Einsetzen von $p_+ = -p_-$ in obige Gleichung erkennen wir, daß diese Bedingung nicht in Frage kommt.

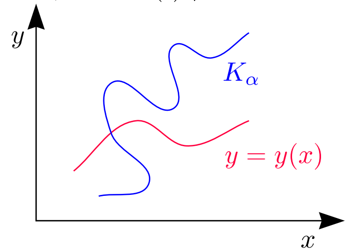
Satz ③:

Voraussetzungen hierfür ist wieder Satz ①.

Es gilt $f(x, y_0(x), y_0'(x)) - y_0'(x) f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = \int_a^x f_x(t, y_0(t), y_0'(t))\, \mathrm{d}t + C$ mit $C = \text{const.}$ für alle $x \in [a,b]$, in denen $y_0'(x)$ stetig ist.

Beweis:

Es sei $K_0 = y = y_0(x)$ die minimierende Kurve. K_0 werde parametrisiert mit $x = t$ und $y = y_0(t)$ und $a \leq x \leq b$. K_0 wird variiert wie folgt: Wir bilden $x = t + \alpha\lambda(t)$ mit $y = y_0(t)$, $a \leq t \leq b$ und kleinem $|\alpha|$ ($\lambda \in \hat{C}^1[a,b]$, $\lambda(a) = \lambda(b) = 0$). Die K_α liegen für $|\alpha| \leq \alpha_0$ (klein) in einer schwachen δ-Umgebung von K_0. (K_α lassen sich in der Form $y = y_\alpha(x)$ darstellen.) Wir müssen also x nach t auflösen können und dies ist der Fall, wenn $\dot{x}(t) \neq 0$ ist.



$\dot{x}(t) = 1 + \alpha\dot{\lambda}(t) > 0$ für $|\alpha| \leq \alpha_0$ genügend klein

Wir bilden damit $(F(K_\alpha) =)\varphi(\alpha) = \int\limits_a^b f\left(t + \alpha\lambda(t), y_0(t), \frac{\dot{y}_0(t)}{1+\alpha\dot{\lambda}(t)}\right)(1 + \alpha\dot{\lambda}(t))\,\mathrm{d}t$ und differenzieren nach α:

$$\begin{aligned}
\varphi'(\alpha) &= \int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} f\left(t + \alpha\lambda(t), y_0(t), \frac{\dot{y}_0(t)}{1+\alpha\dot{\lambda}(t)}\right)(1+\alpha\dot{\lambda})\,\mathrm{d}t + \int\limits_a^b f\left(t + \alpha\lambda(t), y_0(t), \frac{\dot{y}_0(t)}{1+\alpha\dot{\lambda}(t)}\right)\dot{\lambda}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int\limits_a^b \left[f_x\left(t+\alpha\lambda(t), y_0(t), \frac{\dot{y}_0(t)}{1+\alpha\dot{\lambda}}\right)\cdot\lambda + f_p\left(t+\alpha\lambda(t), y_0(t), \frac{\dot{y}_0(t)}{1+\alpha\dot{\lambda}(t)}\right)\cdot\left(-\frac{\dot{\lambda}\dot{y}_0(t)}{(1+\alpha\dot{\lambda}(t))^2}\right)\right](1+\alpha\dot{\lambda})\,\mathrm{d}t + \\
&\quad + \int\limits_a^b f\left(t+\alpha\lambda(t), y_0(t), \frac{\dot{y}_0(t)}{1+\alpha\dot{\lambda}(t)}\right)\dot{\lambda}\,\mathrm{d}t =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \int\limits_a^b \left[\dot{\lambda}(t) f(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) + f_x(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\lambda(t) + f_p(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\left(-\dot{\lambda}(t)\dot{y}_0(t)\right)\right]\mathrm{d}t = \\
&= \int\limits_a^b \left[\dot{\lambda}(t)\left(f(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) - \dot{y}_0(t) f_p(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\right) + \lambda(t) f_x(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Wir bringen „künstlich“ eine Ableitung auf $\lambda(t)$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) &= \int\limits_a^b \left[\dot{\lambda}(t)\left(f(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) - \dot{y}_0(t) f_p(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\right) - \dot{\lambda}(t)\int\limits_a^x f_x(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\right]\mathrm{d}t = \\
&= \int\limits_a^b \left[\dot{\lambda}(t)\left(f(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) - \dot{y}_0(t) f_p(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) - \int\limits_a^x f_x(t, y_0(t), \dot{y}_0(t))\right)\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Damit dieses Integral gleich Null wird, muß der Ausdruck innerhalb der Klammer nach einem der Fundamentalsätze der Variationsrechnung konstant sein:

$$f(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) - \dot{y}_0(t) f_p(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) - \int\limits_a^x f_x(t, y_0(t), \dot{y}_0(t)) = C$$

Damit erhalten wir folgenden Satz:

Satz ③:

Es gilt $f(x, y_0(x), y_0'(x)) - y_0'(x) f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = \int\limits_a^x f_x(t, y_0(t), y_0'(t))\,\mathrm{d}t + \widetilde{C} =: V(x, y_0(x), y_0'(x))$ (E2)

für alle x, in denen $y_0'(x)$ stetig ist.

K_0 sei die durch $y = y_0(x)$ für $a \leq x \leq b$ beschriebene Kurve. Unstetigkeiten von $y_0'(x)$ sind Ecken von K_0. Es sei $(c, y_0(c))$ ein eine Ecke, das heißt, $y_0'(c-) \neq y_0'(c+)$ $(p_- \neq p_+)$.

Folgerung ①:

Zwischen zwei Ecken von K_0 gilt Gleichung (E2) in differenzierter Form, also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V(x, y_0(x), y_0'(x)) = f_x(x, y_0(x), y_0'(x))$$

Diese Differentialgleichung ist von der Form von E1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y_0(x), y_0'(x)) = f_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

6.5 2.Weierstrass-Erdmannsche Eckenbedingung

Satz ④:

An einer Ecke gilt $V(c, y_0(c), p_+) = V(c, y_0(c), p_-)$.

Wir erinnern uns an die 1.Eckenbedingung:

$$f_p(c, y_0(c), p_+) = f_p(c, y_0(c), p_-)$$

Daraus ergab sich dann für ein $\widetilde{p}$ zwischen p_+ und p_-, daß $f_{pp}(c, y_0(c), \widetilde{p}) = 0$ ist. Wir können nun folgende Integration ausführen:

$$\frac{1}{p_+ + p_-} \int\limits_{p_-}^{p_+} f_{pp}(c, y_0(c), t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Folgerung aus WE2:

Wir können aufschreiben:

$$0 = V(c, y_0(c), p_+) - V(c, y_0(c), p_-) = f(c, y_0(c), p_+) - p_+ f_p(c, y_0(c), p_+) - f(c, y_0(c), p_-) + p_- f_p(c, y_0(c), p_-)$$

Mit $f_p(c, y_0(c), p_+) = f_p(c, y_0(c), p_-)$ erhalten wir dann:

$$0 = f(c, y_0(c), p_+) - f(c, y_0(c), p_-) - (p_+ - p_-) f_p(c, y_0(c), p_-)$$

6.5.1 Die Weierstrass-Exzeßfunktion

Definition:

Es handelt sich um eine Funktion von vier Veränderlichen:

$$\mathcal{E}(x, z, p, q) = f(x, z, q) - f(x, z, p) - (q - p) f_p(x, z, p)$$

Damit kann also der Ausdruck $f(c, y_0(c), p_+) - f(c, y_0(c), p_-) - (p_+ - p_-) f_p(c, y_0(c), p_-)$ geschrieben werden als:

$$\boxed{f(c, y_0(c), p_+) - f(c, y_0(c), p_-) - (p_+ - p_-) f_p(c, y_0(c), p_-) = \mathcal{E}(c, y_0(c), p_-, p_+) = 0}$$

An einer Ecke, in welcher die minimierende Kurve mit den Steigungen p_- und p_+ einläuft, gilt diese Beziehung. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$0 = f_p(c, y_0(c), q)(p_+ - p_-) - (p_+ - p_-)f_p(c, y_0(c), p_-)$

q liegt hier zwischen p_+ und p_-.

$0 = (p_+ - p_-)\left(f_p(c, y_0(c), q) - f_p(c, y_0(c), p_-)\right)$

An einer Ecke gilt $p_+ \neq p_-$. Mit der ersten Weierstrass-Erdmannschen Eckenbedingung gilt:

$f_p(c, y_0(c), q) = f_p(c, y_0(c), p_-) = f_p(c, y_0(c), p_+)$

Falls $p_- < p_+$, gilt $p_- < q < p_+$. Hieraus folgt $f_{pp}(c, y_0(c), q_1) = 0$ mit $p_- < q_1 < q$. Für $q < q_2 < p_+$ gilt $f_{pp}(c, y_0(c), q_2) = 0$.

Beispiel 1:

Betrachten wir folgendes Funktional:

$$F(y) = \int_a^b y^2(x)\left(1 - y'(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x$$

Hier gilt also $f(x, z, p) = z^2(1-p)^2$. Weiterhin gilt $f_p = -2z^2(1-p)$, $f_{pp} = +2z^2$, also $f_{pp}(x, y(x), y'(x)) = -2y^2(x)$. Wenn überhaupt Ecken bei Lösungen auftreten, dann müssen diese auf der x-Achse liegen.

$V(x, z, p) = f - p \cdot f_p = (1 - p^2)z^2$

Unser Integrant hängt nicht explizit von x ab. Damit folgt nach der Gleichung (E2):

$y^2(x)\left(1 - y'^2(x)\right) = \text{const.} = \widetilde{C}$

1.) $\tilde{C} = 0$:

   $\boxed{y(x) = 0 \text{ oder } y(x) = \pm x + C_1}$

2.) $\tilde{C} \neq 0$:

   Wir setzen $u = y^2$ und damit $u'(x) = 2yy'$. Mit $y^2y'^2 = \frac{1}{4}u'^2$ ergibt sich dann eine angenehmere Differentialgleichung:

   $u - \dfrac{1}{4}u'^2 = \widetilde{C}$

   Wir lösen nun nach u' auf und erhalten:

   $u'^2 = 4(u - \tilde{C})$

   Wir haben nun wieder zwei Fälle:

   a.) $u(x) = \tilde{C}$:

   $\boxed{y(x) = C_2}$

   b.) $u(x) > \tilde{C}$:

   $u'(x) = \pm 2\sqrt{u - \widetilde{C}}$

   Dann folgt hieraus durch Trennung der Veränderlichen un anschließende Integration:

   $\sqrt{u - \tilde{C}} = \pm x + C_3$

   $y^2(x) - \tilde{C} = (x + C_4)^2$

   $\boxed{y^2(x) = (x + C_4)^2 + \widetilde{C}}$

Definition:

Eine C^1-Lösung der EULERschen Gleichung heißt **Extremale** (**stationäre Funktion**) des Funktionals F. Jede Kurve, welche aus Extremalen zusammengesetzt ist und die Eckenbedingung erfüllt, heißt **gebrochene Extremale**.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen: Stationäre Funktionen sind:

1.) $y(x) = C_1 \;\forall\; x$
2.) $y^2(x) = (x + C_2)^2 + C_3$ mit C_1, C_2, $C_3 = \text{const.}$
3.) $y(x) = \pm x + C_4$

Wir suchen stationäre Funktionen auf $\mathbb{D}_1 = \{y \in C^1[-1,+1] | y(-1) = 0, y(1) = 1\}$. Aus den Randbedingungen erhalten wir aus dem beiden ersten Lösungen folgende Gleichungen:

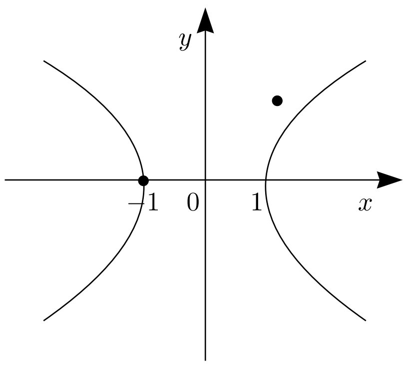
$$(C_2 - 1)^2 + C_3 = 0$$

$$(C_2 + 1)^2 + C_3 = 1$$

Daraus folgt $C_2 = \frac{1}{4}$ und $C_3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^2$.

$$y(x)^2 = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

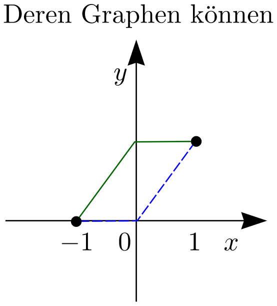
Es handelt sich um eine Hyperbel.



Es gilt $x \geq \frac{1}{2}$ und $x \leq -1$ In $\mathbb{D}_1$ gibt es damit kein stationäre Funktionen. Wir suchen deshalb gebrochene Extremale auf $\mathbb{D}_2$:

$$\mathbb{D}_2 = \{y \in \hat{C}^1[-1,+1] | y(-1) = 0, y(1) = 1\}$$

Deren Graphen können von folgende Form sein:



Eckenbedingungen:

$$-2y_0^2(c)\,(1-p_+) = -2y_0^2(c)\,(1-p_-) \qquad \text{(WE1)}$$

$$y_0^2(c)\,(1-p_+)^2 = y_0^2(c)\left(1-p_-^2\right) \qquad \text{(WE2)}$$

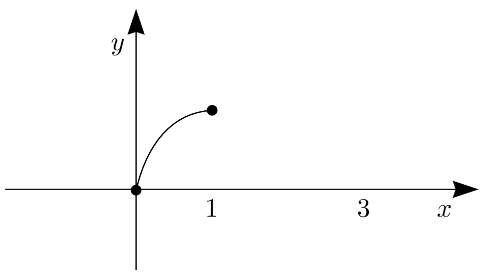
Eine Ecke bedeutet $p_+ \neq p_-$. Aus der ersten Gleichung folgt dann, daß dies nur dann gelten kann, wenn $y_0^2(c) = 0$ ist. Damit ist dann automatisch auch die zweite Bedingung erfüllt. Die gestrichelte Funktion ist gebrochenes Extremal. Betrachten wir nun noch $\mathbb{D}_3$:

$$\mathbb{D}_3 = \{y \in \hat{C}^1[0,1] | y(0) = 0, y(1) = 2\}$$

Wir erhalten mittels der Randbedingungen:

$$y^2(x) = (x + C_2)^2 + C_3 \text{ mit } C_2 = \frac{3}{2} \text{ und } C_3 = -\frac{9}{4}$$

$$y^2(x) = x(x+3)$$



Damit stelle dies eine Lösung ohne Ecken dar. Die Punkte (0,0) und (1,2) liegen auf demselben Hyperbelast.

Wiederholen wir nochmals die EULER-Gleichungen:

- EULER-Gleichung 1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y(x), y'(x)) = f_z(x, y(x), y'(x))$$

- EULER-Gleichung 2:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x, y(x), y'(x)) - y'(x) f_p(x, y(x), y'(x)) f_x(x, y(x), y'(x))$$

Falls $y \in \mathbb{C}^2$, dann folgt (E2) aus (E1). y sei C^1-Lösung von E1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x), y'(x)) = f_x(x, y(x), y'(x)) + f_z(x, xy(x), y'(x))y'(x) + f_p(x, y(x), y'(x))y''(x)$$

Mittels (E1) folgt:

$$f_z(x, y(x), y'(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y(x), y')$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x, y(x), y'(x)) - y'(x) f_p(x, y(x), y'(x))) = f_x(x, y(x), y'(x))$$

Dies ist die EULERsche Gleichung 2. Diese ist nützlich, wenn beispielsweise f nicht explizit von x abhängt:

$$f(x, y(x), y'(x)) - y'(x) f_p(x, y(x), y'(x)) = C$$

Man bezeichnet dies dann als ein erstes Integral von (E1).

Beispiel:

Wir hatten betrachtet:

$$F(y) = \int_a^b y(x)^2 (1 - y'(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

Stationäre Funktionen sind:

1.) $y(x) = C_1$ mit $C_1 = \text{const}$

2.) $y^2(x) = (x + C_2)^2 + C_3$ mit C_2, $C_3 = \text{const}$.

3.) $y(x) = \pm x + C_4$

$\mathbb{D}_1 = \{y \in C^2[-1; +1] | y(-1) = 0, y(1) = 1\}$

In $\mathbb{D}_1$ gibt es keine C^1 (C^2)-Extremalen.
Aus den Eckenbedingungen hatten wir erhalten, daß eine Ecke für eine Extremale zwingend auf der x-Achse liegt.

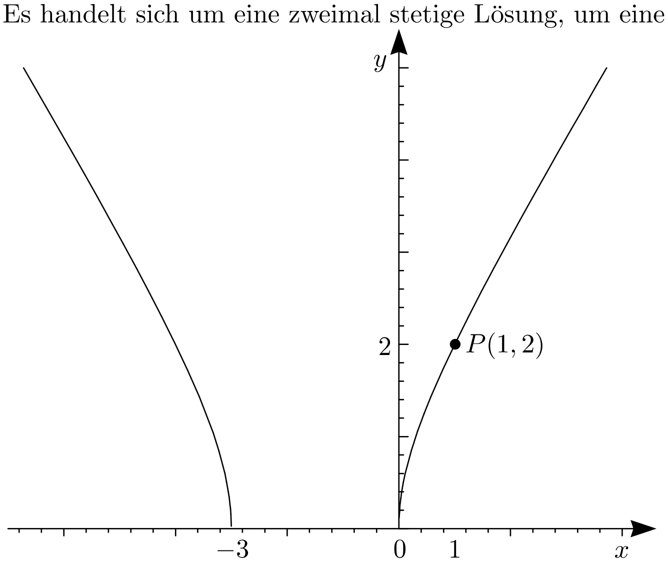
$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\mathbb{D}_2 = y \in \hat{C}[-1, 1] | y(-1) = 0, y(1) = 1$

Wir suchen nun Lösungen auf $\mathbb{D}_3$:

$\mathbb{D}_3 = \{y \in \hat{C}^1[0, 1] | y(0) = 0, y(1) = 2\}$

Durch Einsetzen der Randbedingungen in die allgemeine Hyperbelgleichung erhalten wir $y(x) = \sqrt{x(x+3)}$. Es handelt sich um eine zweimal stetige Lösung, um eine glatte Extremale.



$\mathbb{D}_4 = \{y \in \hat{C}^1[0, 1] | y(0) = 0, y(1) = 1\}$

Hier erhält man gerade $y(x) = 0$, also auch hier eine Lösung ohne Ecken.

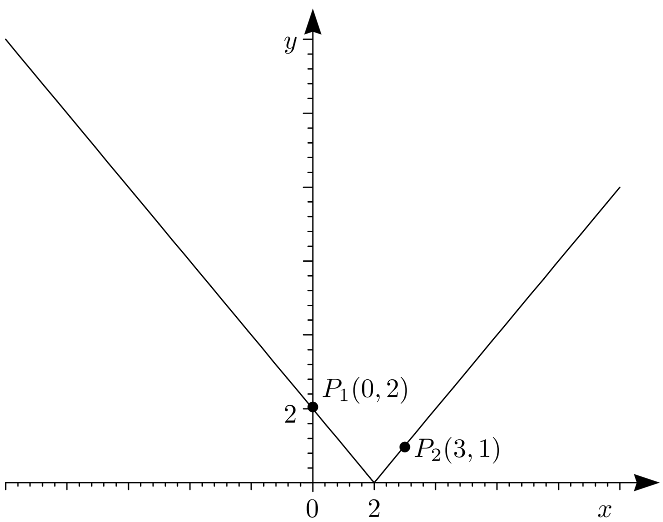
$\mathbb{D}_5 = \{y \in \hat{C}^1[0, 3] | y(0) = 2, y(3) = 1\}$

C_2 und C_3 werden mittels $y(0) = 2$ und $y(3) = 1$ bestimmt. Man erhält hier ein einfaches Gleichungssystem, welches wir hier nicht explizit lösen wollen. Man erhält dann daraus $C_2 = -2$ und $C_3 = 0$. Durch Einsetzen in die Hyperbelgleichung erhalten wir:

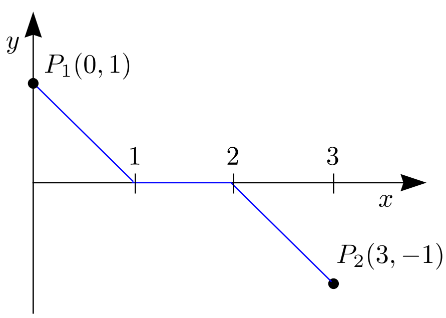
$y^2(x) = (x-2)^2$

Durch Ziehen der Wurzel folgt, wobei für uns die positive Lösung wichtig ist:

$\boxed{y(x) = |x-2|}$



$\mathbb{D}_6 = \{y \in \hat{C}^1[0,3] | y(0) = 1, y(3) = -1\}$



Beispiel:

Wir schauen uns folgendes Funktional an:

$$F(y) = \int_a^b (y'^2 - y^2)\,\mathrm{d}x$$

Wir erhalten dann $f(x,z,p) = p^2 - z^2$. Wir suchen nun Lösung der EULERschen Gleichung. Dazu benötigen wir außerdem $f_p = 2p$, $f_z = -2z$ und $f_x = 0$.

$V(x,z,p) = f - pf_p = p^2 - z^2 - p^2p = -p^2 - z^2$

Wir notieren uns die Eckenbedingungen (Stetigkeit von f_p). Wir erhalten hieraus $p_+ = p_x$. Aus der Stetigkeit von V erhalten wir mit WE2: Diese beiden Gleichungen sind natürlich nur erfüllt für $p_+ = p_-$. Es gibt damit keine Extremalen mit Ecken; wir werden alle durch Lösen der EULERschen Gleichung nur stetig differenzierbare Funktionale finden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y'(x)) = -2y(x)$$

Für die zweite EULERsche Gleichung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-y'^2 - y^2) = 0$$

Wir erhalten aus der ersten Gleichung $y'(x)(+y(x) = 0$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine Linearkombination aus Sinus und Kosinusfunktionen:

$$y(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$$

Aus der zweiten EULERschen Gleichung erhalten wir $y'^2 + y^2 = \text{const.}$.

Beispiel:

Betrachten wir folgendes nicht so einfaches Beispiel

$$F(y) = \int\limits_a^b (y'^2 + y'^3)\,\mathrm{d}x$$

Daß die Funktion nur von der Ableitung y' abhängt, können wir sofort, sagen, da es sich bei den Extremalen um Geraden handelt. Wir rechnen dies nach:

$$f(x,z,p) = p^2 + p^3,\ f_p = 2p + 3p^2$$

$$V(x,z,p) = f - pf_p = p^2 + p^3 - 2p^2 - 3p^3 = -p^2 - 2p^3$$

Betrachten wir die erste EULERsche Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y' + 3y'^2) = 0$$

Daraus ergibt sich $2y' + 3y'^2 = C_1$ und damit durch Auflösen nach y' $y' = C_2$, also:

$$\boxed{y = C_2x + C_3}$$

Nun interessieren uns außerdem gebrochene Extremale. Die zu untersuchenden Eckenbedingungen sind hier nun nicht so einfach. Aus der ersten WEIERSTRASS-ERDMANNschen Eckenbedingung folgt:

$$2p_- + 3p_-^2 = 2p_+ + 3p_+^2$$

Außerdem gilt nach der zweiten WEIERSTRASS-ERDMANNschen Eckenbedingung:

$$p_+^2 + 2p_+^3 = p_-^2 + 2p_-^3$$

Dieses Gleichungssystem zu lösen, ist jetzt nicht so einfach. Auf jeden Fall ist $p_+ = p_-$ eine Lösung. Daraus folgen jedoch unsere zuvor berechneten C_1-Funktionen. Wir suchen jedoch Lösungen mit $p_+ \neq p_-$.

$$p_-(2 + 3p_-) = p_+(2 + 3p_+)$$

$$p_-^2(1 + 2p_-) = p_+^2(1 + 2p_+)$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir nun $p_+ = -\frac{2}{3}$ und $p_+ = -\frac{1}{2}$. Da beide Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein müssen, ist $p_- = 0$ nicht möglich und außerdem auch $p_+ = 0$. Ab jetzt können wir von $p_+ \neq 0$ und $p_- \neq 0$ ($p_+ \neq p_-$) ausgehen. Damit können wir beide Gleichungen durcheinander dividieren:

$$p_-\frac{1}{2p_-}2 + 3p_- = p_+\frac{1 + 2p_+}{2 + 3p_+} \Leftrightarrow (p_+ - p_-)\left[6p_-p_+ + 4(p_+ + p_-) + 2\right] = 0$$

Aus der ersten WEIERSTRASS-ERDMANNschen-Bedingung folgt $p_+ + p_- = -\frac{1}{2}3$. Durch Einsetzen in obige Gleichung folgt also wieder $p_+ = p_-$. Für Extremalen sind Ecken damit nicht möglich.

Beispiel:

$$F(y) = \int\limits_a^b (y'^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}x$$

Da das Funktional wieder nur von y' abhängt, können wir wieder sagen, daß es sich bei den Extremalen um Geraden handelt: $y = cx + d$.

$\mathbb{D} = \{y \in \hat{C}^1[0,b] | y(0) = 0, y(b) = \beta\}$

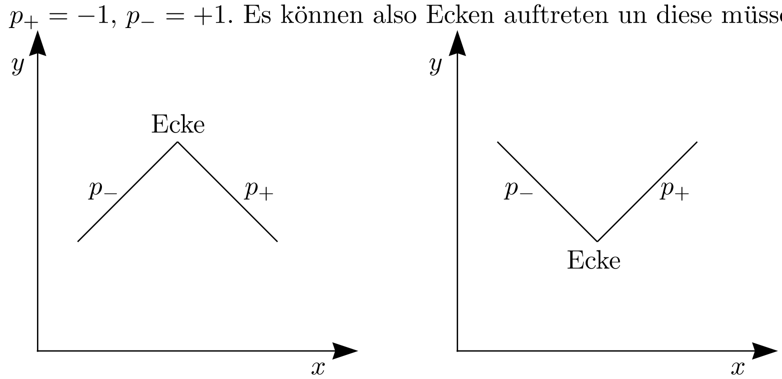
Hier gilt $f = (p^2 - 1)^2$ und $f_p = 2 \cdot 2p(p^2 - 1)$. Damit erhalten wir $V = f - pf_p = (p^2 - 1)(-3p^2 - 1)$. Aus der ersten Eckenbedingung folgt:

$p_-(p_p^2 - 1) = p_+(p_+^2 - 1)$

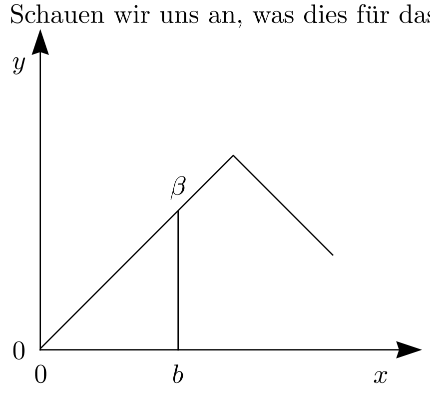
Und aus der zweiten Eckenbedingung außerdem:

$(p_-^2 - 1)(3p_-^2 + 1) = (p_+^2 - 1)(3p_+^2 + 1)$

Wir suchen nun wieder Lösungen mit (p_+, p_-) mit $p_+ \neq p_-$. Das Ergebnis ist also $p_+ = 1$, $p_- = -1$ oder $p_+ = -1$, $p_- = +1$. Es können also Ecken auftreten un diese müssen von folgender Form sein:



Schauen wir uns an, was dies für das konkrete Problem hier bedeutet:



- Fall ①: $\beta < b$:

  Man erhält unendlich viele Lösungen. Jede gebrochene Funktion macht F zu Null, liefert also wirklich einen minimalen Wert.

- Fall ②: $\beta = b$

  Hier gibt es genau eine Lösung, nämlich $y(x) = x$.

- Fall ③: $\beta > b$

  Hier gibt es genau die Lösung $y = \frac{\beta}{b}x$.

Es gibt komplizierte Kriterien, einem Funktional anzusehen, daß es minimal wird. In den ersten Kapiteln hatten wir das Konvexitätskriterium verwendet; dieses ist jedoch sehr grob. Deshalb rechen wir nun direkt nach, daß für $\beta > b$ die Funktion $y = \frac{\beta}{b}x$ für das Integral wirklich eine starke lokale minimierende Funktion darstellt. Betrachten wir hierzu einfach benachbarte Kurven durch Einsetzen und Vergleichen:

$$y(x) = \frac{\beta}{b}x + \eta(x)\,\forall\,\eta \in \hat{C}^1[0,b] \text{ mit } \eta(0) = 0 = \eta(b) = 0$$

Wir haben also benachbarte Funktionen konstruiert.

$$F\left(\frac{\beta}{b} + \eta(x)\right) - F\left(\frac{\beta}{b}x\right) = \int_0^b \left[\left(\left(\frac{\beta}{b} + \eta'(x)\right)^2 - 1\right)^2 - \left(\left(\frac{\beta}{b}\right)^{-} 1\right)^2\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\left(2\frac{\beta}{b}\eta'(x) + \eta'(x)^2\right)^2 + 2\left(\frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\left(2\frac{\beta}{b}\eta' + \eta\right)\right] \mathrm{d}x 2\left(\frac{\beta^2}{b}^2 - 1\right) 2\frac{\beta}{b}\int_0^b \eta' \,\mathrm{d}x = 0$$

Es handelt sich um „stark“, da die Abschätzung unabhängig davon ist, ob η' groß ausfällt. Wenn man eine Bedingung bekäme, daß die Abschätzung nur gilt, wenn das η' in einer kleinen Schranke verläuft, dann hätte man eine schwache Abschätzung.

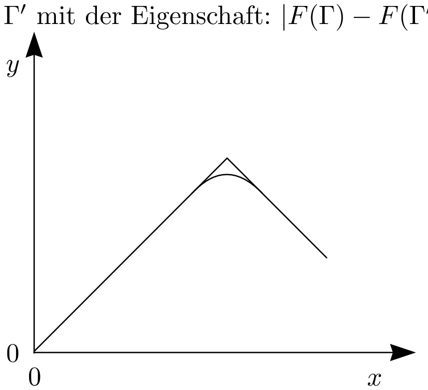
6.6 Abrundung von Ecken/Rounding Argument

Satz:

Ist Γ' eine C^1-Kurve, welche F minimiert, so ist Γ' auch Lösung des Problems F auf $\hat{C}^1$ zu minimieren.

Vorbereitung:

Es sei $\Gamma \in \hat{C}^2 1$, also eine Kurve, welche Ecken haben kann, und $\varepsilon > 0$ beliebig fest. Dann gibt es eine Kurve Γ' mit der Eigenschaft: $|F(\Gamma) - F(\Gamma')| < \varepsilon$.



Um eine solche Kurve zu finden, macht man einen Ansatz $y = a + bx + cx^2 + x^3$.
Ist $I \subset J$ und $f : J \mapsto \mathbb{R}$, so gilt $\min\limits_J f(x) \leq \min\limits_I f(x)$. Ist $F : \hat{C}^1[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ mit $C^1[a,b] \subset \hat{C}^1[a,b]$ und

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x, \text{ so ist } \min_{C^1[a,b]} F(y) = \min_{\hat{C}^1[a,b]} F(y).$$

Beweis:

1.) Es sei $\varepsilon > 0$ und $\Gamma \in \hat{C}^1$ gegeben. Dann gibt es $\Gamma' \in C^1$ mit $|\Gamma) - F(\Gamma')| < \varepsilon$. Man findet dies in der Literatur unter Abrundung von Ecken (Rounding Argument).

2.) Satz:

Ist $\Gamma' \in C^1$ eine Minimalkurve für F auf C^1, so ist Γ' auch Minimalkurve für F auf $\hat{C}^1$.

Aus $F(\Gamma') \leq F(\Gamma)\ \forall\ \Gamma \in C^1$, folgt $F(\gamma') \leq F(\Gamma)\ \forall\ \Gamma \in \hat{C}^1$.

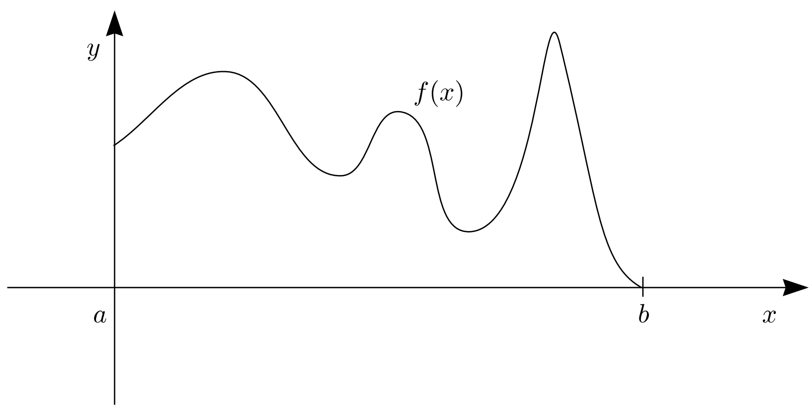
Annahme:

Es gibt $\Gamma \in \hat{C}^1$ mit $F(\Gamma) < F(\Gamma')$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}\left(F(\Gamma') - F(\Gamma)\right)$ (> 0) Mit 1.) wählen wir $\Gamma'' \in C^1$ und $|F(\Gamma) - F(\Gamma'')| < \varepsilon$. Durch Auflösen dieser Betragsungleichung gilt $-\varepsilon < F(\Gamma) - F(\Gamma'') < \varepsilon$. Daraus ergibt sich:

$$F(\Gamma'') < F(\Gamma) + \varepsilon = \frac{1}{2}\left(F(\Gamma') + F(\Gamma)\right) < \frac{1}{2}\left(F(\Gamma') + F(\Gamma')\right) = F(\Gamma')$$

Hierbei handelt es sich um einen Widerspruch.

6.7 Minimaloberfläche eines Rotationskörpers



Es liege folgendes Funktional vor:

$$F(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$$

Hier gilt $\in \mathbb{R}^1$, also $N = 1$, $y \in \mathbb{R}^2$, also $n = 2$ und schließlich $y'(x) = \mathbb{R}^2$ mit $nN = 2$.

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Es liegt also $f = f(x, z, p) = f(x, z_1, z_2, p_1, p_2)$ vor. Damit können wir die erste EULERsche Gleichung (E1) aufschreiben:

$$\boxed{f_p(x, y(x), y'(x)) = \int\limits_a^x f_z(t, y(t), y'(t))\,\mathrm{d}t + C}$$

$$\begin{pmatrix} f_{p_1} \\ f_{p_2} \end{pmatrix} = \int\limits_a^x \begin{pmatrix} f_{z_1} \\ f_{z_2} \end{pmatrix}\,\mathrm{d}t + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}^2$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_p(x, y(x), y'(x)) = f_z(x, y(x), y'(x))$$

Außerdem schreiben wir die zweite EULERsche Gleichung (E2) auf. Dazu benötigen wir die Funktion $V(x, y(x), y'(x))$:

$V(x, y(x), y'(x)) = f(x, y(x), y'(x)) - y'(x) \cdot f_p(x, y(x), y'(x))$

Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt ein Skalarprodukt. Für dieses U gilt dann:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} U(x, y(x), y'(x)) = f_x(x, y(x), y'(x))}$$

Darüber hinaus brauchen wir die **Eckenbedingungen** (Stetigkeit von f_p und von V) an.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir außerdem $b_1 \geq 1$ an, was ja auch durch Drehung des Rotationskörpers erreicht werden kann. die gesuchte Kurve γ wird in Parameterform dargestellt:

$x = x_1(t),\ y = x_2(t)$ mit $0 \leq t \leq 1$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ mit $r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r(1) = \begin{pmatrix} b \\ b_1 \end{pmatrix}$

Allgemein gilt für die Fläche eines Rotationskörpers:

$$F = 2\pi \int\limits_0^b f(x)\,\mathrm{d}s = 2\pi \int\limits_0^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Durch Umrechnung von der expliziten Darstellung in die Parameterdarstellung erhalten wir:

$$F(r) = F(x_1, x_2) = 2\pi \int\limits_0^1 x_2 \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}\,\mathrm{d}t$$

Dieses Funktional ist also auf $\mathbb{D} = \left\{ r \in \left(\hat{C}^1[0,1]\right)^2 | r(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r(1) = \begin{pmatrix} b \\ b_1 \end{pmatrix} \right\}$ zu minimieren. Damit können wir jetzt die EULERschen Gleichungen für dieses Problem formulieren. Es gilt:

$f = f(t, z_1, z_2, p_1, p_2) = z_2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$

a.) Erste EULERsche Gleichung:

$$f_p = \begin{pmatrix} f_{p_1} \\ f_{p_2} \end{pmatrix} = \frac{z_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},\ f_p(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)) = f_p(t, r(t), r'(t)) = \frac{x_2}{\|r'(t)\|} r'(t)$$

$$f_z = \begin{pmatrix} f_{z_1} \\ f_{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \end{pmatrix},\ f_z(t, r(t), r'(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \|r'(t)\| \end{pmatrix}$$

Damit lautet E1:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{x_2(t)}{\|r'(t)\|} r'(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \|r'(t)\| \end{pmatrix}}$$

b.) Zweite EULERsche Gleichung:

$$V(t, z, p) = z_2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0$$

Damit ist die zweite EULERsche Gleichung immer erfüllt; es gilt nämlich die wahre Aussage 0=0.

Beschäftigen wir uns also ausschließlich mit E1, wobei wir diese komponentenweise aufschreiben wollen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[\frac{x_2(t)x_1'(t)}{\|r'(t)\|}\right]}_{f_{p_1}} = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left[\frac{x_2(t)x_2'(t)}{\|r'(t)\|}\right]}_{f_{p_2}} = \|r'(t)\|$$

Notieren für uns die Eckenbedingungen. Liegt bei t_c eine Ecke, so sind $\xi(t)$ und $\eta(t)$ bei t_c stetig.

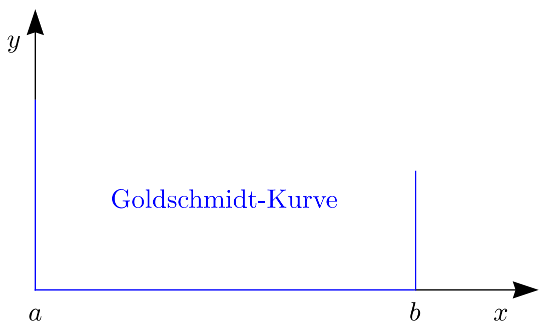
$$\xi(t) = \frac{x_2(t)x_1'(t)}{\|r'(t)\|},\ \eta(t) = \frac{x_2(t)x_2'(t)}{\|r'(t)\|}$$

Auf glatten Stücken einer Extremalen gilt:

$$\frac{x_2(t)x_1'(t)}{\|r'(t)\|} = C_0 = \text{const. mit } 0 \leq t \leq 1$$

- 1.Fall: x_2 oder x_1' sind Null für ein $t \in [0,1]$.

  Daraus ergibt sich dann $C_0 = 0$ und damit verschwinden x_2 oder x_1' auf glatten Stücken von Extremalen. Wir haben also folgende Kurven, welche man auch als GOLDSCHMIDT-Kurven bezeichnet:



- 2.Fall: $C_0 \neq 0$

  Für alle $t \in [0,1]$ sind $x_2(t) \neq 0$ und $x_1'(t) \neq 0$. $\frac{1}{x_2(t)}\xi(t)$ und $\frac{1}{x_2(t)}\eta(t)$ sind stetig. Damit ist $\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ stetig auf $[0,1]$. Die gesuchte Kurve hat keine Ecken. Infolgedessen gehen wir aus von $r = r(t) \in \left(C^1[0,1]\right)^2$. Es gilt für $C_0 \neq 0$:

$$\frac{x_2(t)^2 x_1'(t)^2}{\|r'(t)\|^2} = C_0^2 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{x_2(t)x_2'(t)}{\|r'(t)\|}\right] = \|r'(t)\|$$

  Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit $\frac{x_2(t)x_2'(t)}{\|r'(t)\|}$ und wir erhalten:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_2^2(t)x_2'^2(t)}{\|r'(t)\|^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2^2(t)$$

  Somit kann die Zeitableitung weggelassen werden:

$$\frac{x_2^2 x_2'^2(t)}{\|r'(t)\|^2} = x_2^2(t) + C_1$$

  Durch Addition der ersten ursprünglichen Gleichung mit dieser ergibt sich schließlich:

$$x_2^2(t) = x_2^2(t) + C_0^2 + C_1$$

  Es muß damit $C_0^2 = -C_1$ gelten. Wir können diese Gleichungen außerdem durcheinander dividieren:

$$\frac{x_2'^2}{x_1'^2} = \frac{x_2^2}{C_0^2} - 1,\ \text{da } -1 = \frac{C_1}{C_0^2}$$

Mit $y = \varphi(x)$ und $x_2(t) = \varphi(x_1(t))$ erhalten wir $\varphi' = \frac{x_2'}{x_1'}$. x_1' ist stetig und $\neq 0$. Weiterhin gilt:

$$x_1(0) = 0 \text{ und } x_1(t) = \int\limits_0^1 x_1'(t)\,\mathrm{d}t = b > 0$$

Um von $(0,0)$ nach (b, b_1) zu gelangen, muß die Steigung auf jeden Fall positiv sein, wenn wir keinen Vorzeichenwechsel haben; es gilt also $x_1'(t) > 0$ für $t \in [0,1]$. $x = x_1(t)$ besitzt damit eine C^1-Inverse $t = x_1^{-1}(x)$.

$$y = x_2(t) = x_2(x_1^{-1}(x)) =: \varphi(x) \in C^1[a,b]$$

Es resultiert also, daß die Lösungskurve in expliziter Form der Klasse $C^1[a,b]$ mit $\varphi(0) = 1$, $\varphi(b) = b_1$ gesucht werden kann. Die Differentialgleichung $\left(\frac{x_2'}{x_1'}\right)^2 = \frac{x_2^2(t)}{C_0^2} - 1$ wird zu $\varphi'(x)^2 = \frac{1}{C_0^2}\varphi^2(x) - 1$ (mit $\varphi^2(x) \geq C_0^2$ und $\varphi(x) \geq 0$). Setze $\varphi(x) = C_0 \cosh(v(x))$:

$$v'^2 C_0^2 \sinh^2(v(x)) = \cosh^2(v(x)) - 1 = \sinh^2(v(x))$$

$$v'(x)^2 = \frac{1}{C_0^2} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{C_0}x + \mu$$

Daraus folgt schlußendlich:

$$\boxed{y = \varphi(x) = C_0 \cosh\left(\frac{x}{C_0} + \mu\right)}$$

Es muß nun $\varphi(0) = 1$ und $\varphi(b) = b_1$ gelten. Damit erhalten wir:

$$1 = \varphi(0) = C_0 \cosh(\mu),\ C_0 = \frac{1}{\cosh(\mu)}$$

$$y = \varphi(x) = \frac{\cosh(x\cosh(\mu) + \mu)}{\cosh \mu}$$

$$y(b) = b_1 = \frac{\cosh(b\cosh(\mu) + \mu)}{\cosh(\mu)} \qquad (\star)$$

Gesucht ist also μ bei gegebenem b und $b_1 (\geq 1)$. Es sei $(\star)$ erfüllt. Es gilt $\cosh(t) > |t|\ \forall\ t$. Dies kann man folgendermaßen zeigen:

$$\cosh(t) = \frac{1}{2}(\exp(t) + \exp(-t))$$

$$\sinh(t) = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots = \frac{1}{2}(\exp(t) - \exp(-t)) > t \text{ für } t > 0$$

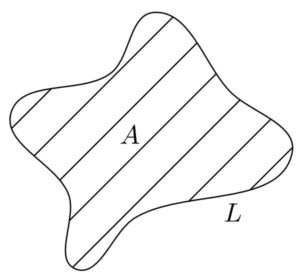
Daraus ergibt sich $\cosh(t) > \sinh(t) \geq t$ für $t \geq 0$ und somit $\cosh(t) > t$ für $t \geq 0$. Es sei nun $t < 0$: Dann gilt $\cosh(-t) > -t$. Da $\cosh(t)$ eine gerade Funktion ist, gilt außerdem $\cosh(-t) = \cosh(t)$ und wir erhalten damit durch Zusammenfassen der beiden Ungleichungen für $t \geq 0$ und $t < 0$, daß $\cosh(t) > |t|$ ist. Mit $(\star)$ und der eben gezeigten Ungleichung gilt:

$$b_1 > \frac{|b\cosh(\mu) + \mu|}{\cosh(\mu)} \geq \frac{|b\cosh(\mu)| - |\mu|}{\cosh(\mu)} = b - \frac{|\mu|}{\cosh(\mu)} > b - 1$$

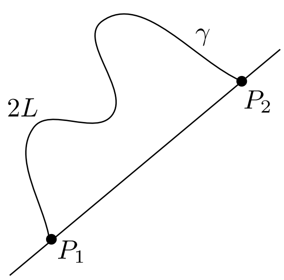
Notwendig für die Erfüllung von Gleichung $(\star)$ ist also die Bedingung $b_1 \geq b - 1$. Gilt jedoch $b_1 \leq b - 1$, so gibt es keine stetig differenzierbaren Lösungen (Goldschmidt-Kurven).

Genauere Diskussionen dieses Problems findet man in [1], [4] und [11].

6.8 Zum isoperimetrischen Problem



Das klassische isoperimetrische Problem ist, wie groß der maximale Flächeninhalt ist, welcher von einer Kurve gegebener Länge L berandet wird. Wir wollen an dieser Stelle jedoch nicht dieses Problem, sondern eine Variante dessen betrachten, nämlich das sogenannte **Sehnen-Bogen-Problem**.



Hierbei ist die Kurve γ der Länge $2L$ gesucht, welche die Punkte P_1, P_2 einer Ebene so verbindet, daß die von dieser Kurve und der Geraden P_1P_2 umschlossene Fläche maximal wird.

Damit soll also folgendes Funktional auf $\mathbb{D} = \{y \in \hat{C}^1[0,2a]$ (Es können also Ecken auftreten.) maximal werden:

$$F(y) = \int\limits_0^{2a} y \,\mathrm{d}x \text{ mit } y(0) = 0 \text{ und } y(2a) = 0$$

Unter der Nebenbedingung konstanter Bogenlänge $2L$:

$$G(y) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = 2L \text{ mit } G(x) \geq 0$$

Gesucht sind stationäre Funktionen des Funktionals $\widetilde{F}(y)$ auf $\hat{C}^1[0,2a]$ mit $y(0) = y(2a) = 0$ und $y(x) \geq 0$:

$$\widetilde{F}(y) = \int\limits_0^{2a} \left(y(x) - \lambda\sqrt{1+y'^2}\right) \mathrm{d}x$$

$\lambda =$ const. ist der LAGRANGEsche Multiplikator. Gehen wir so vor wie immer:

$$f(x,z,p) = z - \lambda\sqrt{1+p^2}$$

$$f_p(x,y(x),y'(x)) = -\lambda\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}},\ f_z = 1$$

a.) EULERgleichung E1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\lambda\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}\right) = 1$$

b.) EULERgleichung E1:

Mit $V(x,z,p) = f - pf_p$ wollen wir außerdem E2 angeben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V = 0 \Leftrightarrow y(x) - \lambda\sqrt{1+y'(x)^2} + y'(x)\lambda\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} = C$$

Daraus ergibt sich durch Zusammenfassen:

$$y(x) - \lambda \frac{1}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} = \text{const.}$$

Setzen wir nun $y' = \tan(\psi)$, womit gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = \cos\psi \text{ für } \psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Damit können wir E2 folgendermaßen umschreiben:

$$y(x) - C = \lambda \cos\psi$$

$$\mathrm{d}x = \cot(\psi)\,\mathrm{d}y = \cot(\psi)(-\lambda)\sin(\psi)\,\mathrm{d}\psi = -\cos(\psi)\,\mathrm{d}\psi$$

Damit erhalten wir x und y in Abhängigkeit von ψ:

$$y(\psi) - C_1 = \lambda\cos(\psi)$$

$$x(\psi) - C_2 = -\lambda\sin(\psi)$$

$$\boxed{(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 + \lambda^2}$$

Es liegt damit ein Kreis mit Radius $|\lambda|$ vor. Durch Auswerten der Randbedingungen $y(0) = y(2a) = 0$ resultiert nun:

$$C_2^2 + C_1^2 = \lambda^2$$

$$(2a - C_2)^2 + C_1^2 = \lambda^2$$

$$4a^2 - 4aC_2 = 0 \Rightarrow C_2 = a \Rightarrow \lambda^2 = C_1^2 + a^2$$

Außerdem gilt ja die Nebenbedingung, nämlich daß die Länge der Kurve konstant sein muß:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 2L$$

$$y'(x)^2 = \frac{(x-a)^2}{\lambda^2 - (x-a)^2}$$

Durch Einsetzen in die Nebenbedingung und anschließendes Integrieren ergibt sich:

$$\boxed{2L = 2\lambda \arcsin\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

Es stellt sich außerdem die Frage, ob es Funktionen mit Ecken gibt. Dazu untersuchen wir die Eckenbedingungen:

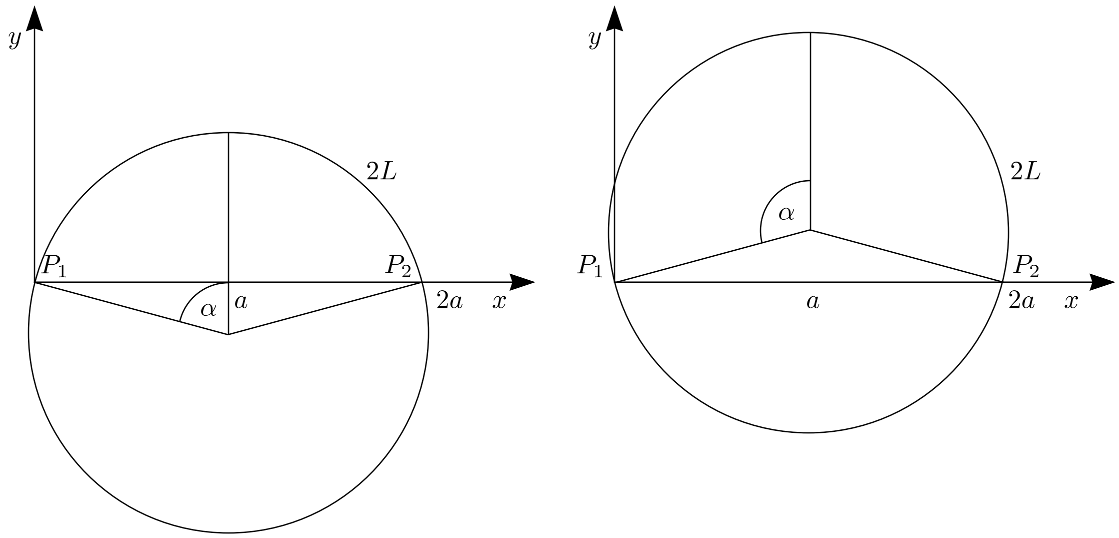
$$-\lambda \frac{p_-}{\sqrt{1+p_-^2}} = -\lambda \frac{p_+}{\sqrt{1+p_+^2}}$$

$$y(c) - \lambda \frac{1}{\sqrt{1+p_-^2}} = y(c) - \lambda \frac{1}{\sqrt{1+p_+^2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+p_+^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-p_-^2}} = \alpha$$

Damit folgt aus der ersten Gleichung $-\lambda\alpha p_- = -\lambda\alpha p_+$ und damit $p_- = p_+$; es treten folglich keinerlei Ecken auf. Fassen wir unsere Ergebnisse nochmal zusammen:

$$(x-a)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,\ \lambda^2 = C_1^2 + a^2$$

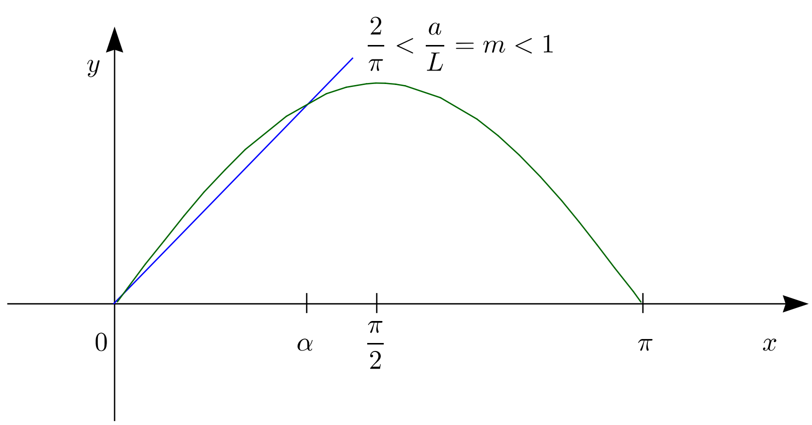
$L = \lambda \arcsin\left(\frac{a}{\lambda}\right) = \lambda\alpha$, $\sin\alpha = \frac{a}{\lambda}$



Der zweite Fall wird bei dieser Untersuchung nicht erfaßt, daß es sich sonst um keine Kurve der Form $y = \varphi(x)$ handelt. Mit solchen Fällen, werden wir uns im nächsten Kapitel näher beschäftigen.
Es gilt nun $L = \lambda\alpha$. Aus $\alpha = \frac{L}{\lambda}$ und $\sin\alpha = \frac{a}{\lambda}$ ergibt sich dann $\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{a}{L}$. Die Behauptung ist nun, das diese Gleichung für ein $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ erfüllt wird. Hierbei handelt es sich um eine transzendente Gleichung, welche wir dazu geometrisch untersuchen wollen:

$y = mx = \frac{a}{L}x$

$y = \sin(x)$



$\frac{2}{\pi} < \frac{a}{L} < 1$ und $L\frac{2}{\pi} < a < L$

$$\boxed{\alpha a = L < \frac{\pi}{2}a}$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir gerade einen Halbkreis. Dies ist der letzte mögliche Fall der Form $y = \varphi(x)$. Man kann nun außerdem diese extremale Fläche A in Abhängigkeit von α (wie vorher bestimmt) angeben, was hier jedoch nicht hergeleitet werden soll:

$$\boxed{A_{max} = a^2\left(\frac{\alpha}{\sin^2\alpha} - \cot\alpha\right)}$$

Kapitel 7

Das parametrische Problem (Variationsaufgaben in Parameterdarstellung)

Wir betrachten im folgenden den Fall $N = 1$, $n = 2$. Gesucht sind zwei Funktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$, die

$$F(y_1, y_2) = \int_{t_0=a}^{t_1=b} f(t, y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t))\,\mathrm{d}t$$

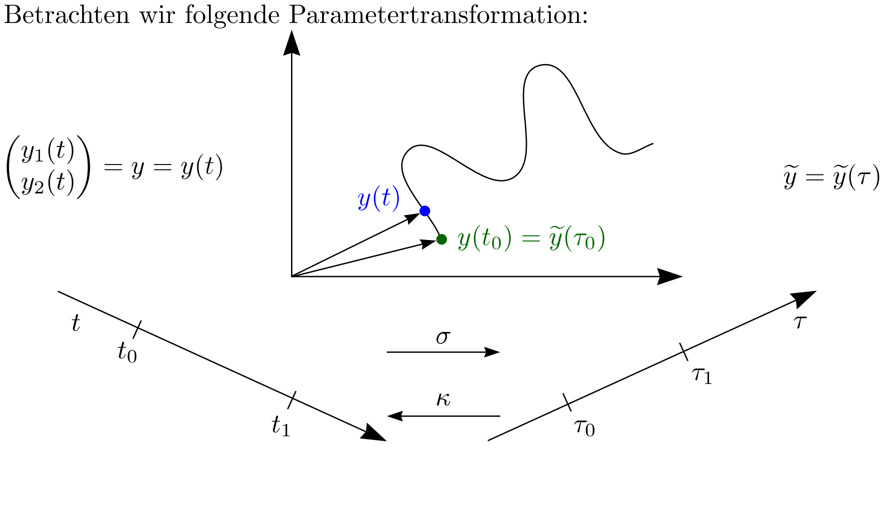
auf einer geeigneten Menge $\mathbb{D}$ minimiert. Wir betrachten folgendes Funktional, welches minimal werden soll:

$$F(y_1, y_2) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t), \dot{y}(t))\,\mathrm{d}t$$

Sei $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ eine Lösung. $y(t)$ beschreibt eine Kurve K. Es sei $\widetilde{y}(\tau) = \begin{pmatrix} \widetilde{y}_1(\tau) \\ \widetilde{y}_2(\tau) \end{pmatrix}$, $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$ auch eine Darstellung der Kurve K. Das Problem oben ist nur sinnvoll gestellt, falls der obige Integralausdruck unabhängig von der speziellen Parameterdarstellung ist, das heißt falls gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\tau, \widetilde{y}_1(\tau), \widetilde{y}_2(\tau), \widetilde{y}_1'(\tau), \widetilde{y}_2'(\tau))\,\mathrm{d}\tau \qquad (I)$$

Betrachten wir folgende Parametertransformation:



$y(t) = \widetilde{y}(\sigma(t)) \qquad \widetilde{y}(\tau) = y(\kappa(\tau))$

$\dot{y}(t) = \widetilde{y}'(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) \qquad \widetilde{y}'(\tau) = \dot{y}(\kappa(\tau))\kappa'(\tau)$

$\mathrm{d}\tau = \dot{\sigma}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}t = \kappa'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

Wir haben damit folgende **zulässige Parametertransformation**:

$$\boxed{\tau = \sigma(t),\ t = \kappa(\tau)(= \sigma^{-1}(\tau)) \text{ und } \dot{\sigma}(t) > 0,\ \kappa'(\tau) > 0}$$

Satz ①:

(I) gilt für jede zulässige Parametertransformation. Es gelten:

- f hat die Form $f = f(z_1, z_2, p_1, p_2)$ (hängt nicht explizit von t ab).
- Für jedes $\lambda > 0$ gilt $f(z_1, z_2, \lambda p_1, \lambda p_2) = \lambda f(z_1, z_2, p_1, p_2)$ („f ist bezüglich der p-Variablen positiv homogen vom 1.Grad.“)

Beweis „⇒“:

Es gelte (I).

$$\int_{t_0}^{s} f(t, y(t), \dot{y}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_0}^{\varrho} f(\tau, \widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau))\,\mathrm{d}\tau \; (\forall\, s \in [t_0, t_1])$$

Wir führen die Substitution $t = \kappa(\tau)$ durch:

$$\int_{\tau_0}^{\varrho} f(\kappa(\tau), y(\kappa(\tau)), \dot{y}(\kappa(\tau))\kappa'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_0}^{\varrho} f(\tau, \widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$\int_{\tau_0}^{\varrho} f\left(\kappa(\tau), \widetilde{y}(\tau), \frac{\widetilde{y}'(\tau)}{\kappa'(\tau)}\right)\kappa'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\tau_0}^{\varrho} f(\tau, \widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Dies gilt für jedes zulässige κ und jedes $\varrho \in [\tau_0, \tau_1]$:

$$f\left(\kappa(\varrho), \widetilde{y}(\varrho), \frac{\widetilde{y}'(\varrho)}{\kappa'(\varrho)}\right)\kappa'(\varrho) = f(\varrho, \widetilde{y}(\varrho), \widetilde{y}'(\varrho))$$

Wähle nun $x(\tau) = \frac{1}{\lambda}(\tau + c)$ (mit $\lambda > 0$ beliebig und $c \in \mathbb{R}$ beliebig):

$$\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{1}{\lambda}(\varrho + c), \widetilde{y}(\varrho), \lambda\widetilde{y}'(\varrho)\right) = f(\varrho, \widetilde{y}(\varrho), \widetilde{y}'(\varrho))$$

Wir setzen $\lambda = 1$ und differenzieren nach t:

$$f_t(\varrho + c, \widetilde{y}(\varrho), \widetilde{y}'(\varrho)) = 0$$

Mit $c = 0$ erhalten wir $f_t(\varrho, \widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau)) = 0$ ($\forall\ s \in [t_0, t_1]$). Wir haben Aussage 1.) bewiesen.

$$\int_{t_0}^{s} f(t, y(t), \dot{y}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_0}^{\varrho} f(\tau, \widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau))\,\mathrm{d}\tau \; (\forall\, s \in [t_0, t_1])$$

Ab jetzt sei $f = f(z_1, z_2, p_1, p_2)$. Dann ergibt sich $\frac{1}{\lambda} f(\widetilde{y}(\varrho), \lambda\widetilde{y}'(\varrho)) = f(\varrho, \widetilde{f}(\varrho), \widetilde{y}'(\varrho))$. Es gilt also auch Aussage 2.) Teil i.)

Beweis „$\Leftarrow$“:

Zu zeigen ist dann (I):

$$\int_{t_0}^{t_1} f(y(t), \dot{y}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

Aus 1.) ergibt sich dann:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\widetilde{y}(\tau), \widetilde{y}'(\tau))\,\mathrm{d}\tau \overset{\tau=\sigma(t)}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(\widetilde{y}(\sigma(t)), \widetilde{y}'(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} f\left(y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{\sigma}(t)}\right)\dot{\sigma}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ab jetzt lautet das Variationsintegral

$$F(y) = \int_{t_0}^{t_1} f(y(t), \dot{y}(t))\,\mathrm{d}t.$$

f genüge der Homogenitätsbedingung 2.). Dann ist das Problem, ein Minimum von $F(y)$ zu finden, unabhängig von speziellen Parameterdarstellungen (geometrische Variationsprobleme).

Beispiele:

1.) Bogenlängenfunktional:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{y}(t)\|\,\mathrm{d}t$$

Es gilt hier nun $f(z,p) = \|p\|$ und $f(z, \lambda p) = \lambda\|p\|$ für $\lambda > 0$.

2.) Flächeninhaltsfunktional in der Ebene:

$$F(y) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (y_1(t)\dot{y}_2(t) - y_2(t)\dot{y}_1(t))\ \mathrm{d}t \left(= \int_{t_0}^{t_1} y_1(t)\dot{y}_2(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

$f(z_1, z_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(z_1p_2 - z_2p_1)$ hat die Eigenschaft 2.).

3.) $\widetilde{F}(y) = \int_a^b \widetilde{f}(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x$ (1.Teil der Vorlesung $y = y(x)$)

Aus $x = y_1(t)$ und $y = y_2(t)$ für $t_0 \le t \le t_1$ ergibt sich mit $y_1(t_0) = a_1$, $y_1(t_1) = b$:

$y(y_1(t) = y_2(t)$, $y'(y_1(t))\dot{y}_1(t) = \dot{y}_2(t)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \widetilde{f}\left(y_1(t), y(y_1(t)), \frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)}\right)\dot{y}_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} f(t, y_1(t), y_2(t), \dot{y}_1(t), \dot{y}_2(t))$$

4.) Schauen wir uns ein Beispiel dafür an, daß einem nichtparametrischen Problem wie in 3.) zugeordnetem parametrischen Problem im allgemeinen andere (mehr) Lösungen hat. Dazu gehen wir von einem nichtparametrischen Problem aus:

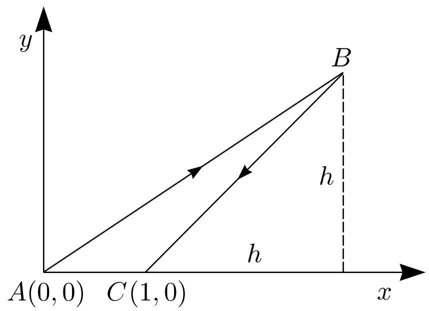
$$\widetilde{F}(y) = \int_0^1 \frac{y'^2(x)}{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

Dieses soll auf $\mathbb{D} = \{y \in \hat{C}^1[0,1], y(0) = y(1) = 0\}$ minimiert werden. Aus $\widetilde{F}(y) \geq 0$ ergibt sich, daß $y(x) = 0 \in \mathbb{D}$ das Minimum liefert. Das zugeordnete parametrische Problem ist:

$$F(y_1, y_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\left(\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)}\right)^2}{1 + \left(\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)}\right)^2} \dot{y}_1(t)\,\mathrm{d}t$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $t_1 = 1$ und $t_0 = 0$:

$$F(y_1, y_2) = \int\limits_{0}^{1} \frac{\left(\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)}\right)^2}{1 + \left(\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)}\right)^2} \dot{y}_1(t)\,\mathrm{d}t$$



Als Übung kann man für $0 < h < 1$ zeigen:

$$F = -\frac{h}{z(h^2 + (1 + h^2))} < 0$$

Die einfachsten Parameterdarstellungen dieser Geraden sind:

$$\text{AB}: \; y_1(t) = t,\, y_2(t) = \frac{h}{1+h} t \text{ für } 0 \leq t \leq 1 + h$$

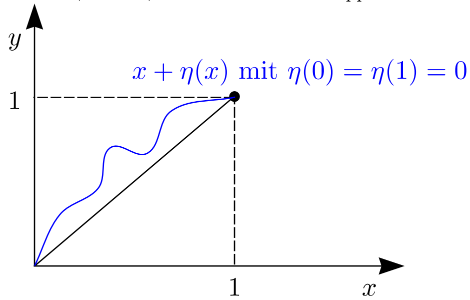
$$\text{BC}: \; y_1(t) = t, y_2(t) = t - 1 \text{ für } t: \; 1 + h^2 \mapsto 1$$

Beispiel:

Das nichtparametrische Problem sei:

$$\widetilde{F}(y) = \int\limits_0^1 y'^2(x)\,\mathrm{d}x,\, \mathbb{D} = \{y \in \hat{C}^1[0,1], y(0) = 0, y(1) = 1\}$$

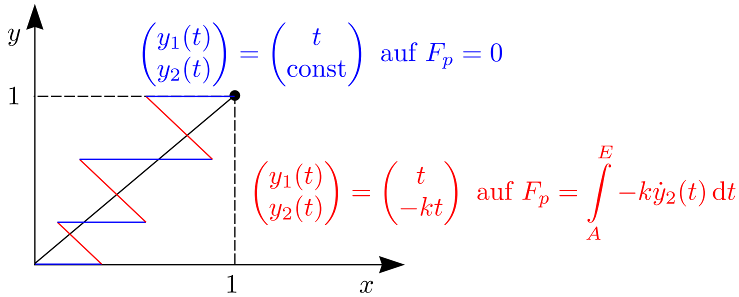
Mit $f(x, z, p) = p^2$ folgt aus $f_{pp} = 2 > 0$ Konvexität. Damit ist die Lösung der EULERgleichung das Minimum.



Die Lösung ist $y(x) =$. Daraus folgt $\widetilde{F}(y(x) = x) = 1$. Schauen wir uns außerdem das parametrische Problem an:

$$F_p(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 \frac{\dot{y}_2^2(t)}{\dot{y}_1(t)}\,\mathrm{d}t$$

Dieses kann beliebig negativ gemacht werden durch Verbindungskurven von $(0,0)$ und $(1,0)$.



Steigung $-k$ mit $(k > 0)$

Für ein diagonales Stück gilt:

$$F_p = \int_A^E -k\dot{y}_2(t)\,\mathrm{d}t = -k\,(y_2(E) - y_2(A))$$

Insgesamt ergibt sich dann durch Addition aller solcher Teilstücke:

$F_p(\text{Zickzackkurve}) = -k\,(y_2(1) - y_2(0)) = -k$

Definition: Positive Homogenität vom Grade k $(k \in \mathbb{R})$

$g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ heißt **positiv homogen vom Grade k**, falls gilt $g(\lambda x) = \lambda^k g(x)\ \forall\ x, \forall\ \lambda > 0$.

Beispiel:

1.) Es sei $y \in \mathbb{R}^N$ fest.
Für $g(x) = x \cdot y$ gilt $g(\lambda x) = (\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = \lambda g(x)$. Damit gilt $k = 1$.

2.) $\mathcal{A}$ sei eine konstante $N \times N$-Matrix.

$$g(x) = x^\intercal \mathcal{A} x \left(= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k \right)$$

$g(\lambda x) = (\lambda x)^\intercal \mathcal{A}(\lambda x) = \lambda^2 g(x)$

Damit gilt für eine quadratische Form $k = 2$.

$$(\vec{\nabla} g)(x) = \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{x}{}^\intercal \mathcal{A} x) + \vec{\nabla}(x^\intercal \mathcal{A} \overset{\downarrow}{x}) = \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{x}{}^\intercal \mathcal{A} x) + \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{x}{}^\intercal \mathcal{A}^\intercal x) = (\vec{\nabla} \overset{\downarrow}{x}{}^\intercal)\mathcal{A} x + (\vec{\nabla} \overset{\downarrow}{x}{}^\intercal)\mathcal{A}^\intercal x =$$
$$= \mathcal{E}\mathcal{A} x + \mathcal{E}\mathcal{A}^\intercal x = (\mathcal{A} + \mathcal{A}^\intercal)\, x$$

$\mathcal{A}$ kann als symmetrische Matrix angenommen werden.

$$g(x) = x^\intercal \left[\frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^\intercal) + \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\intercal) \right] x = x^\intercal \widetilde{\mathcal{A}} x + x^\intercal \widetilde{\widetilde{\mathcal{A}}} x = \vec{\nabla}(x^\intercal \widetilde{\mathcal{A}} x) = 2\widetilde{\mathcal{A}} x$$

Der letzte Schritt folgt aus $x^\intercal(\mathcal{A} - \mathcal{A}^\intercal)x \overset{!}{=} 0$.

Satz ② (Eulersche Homogenitätsrelation)

Es sei $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt:

g ist positiv homogen vom Grade $k \Leftrightarrow x \cdot \vec{\nabla} g(x) = k g(x) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j D_j g(x) = k g(x) \right)$

Beweis „⇒“:

Es sei $x \in \mathbb{R}^N$ fest. Betrachte für $\lambda > 0$ die Funktion $h(\lambda) = g(\lambda x)$ für $\lambda > 0$. Wir gehen von einer positiv homogenen Funktion aus: $g(\lambda x) = \lambda^k g(x)$. Durch Differentiation erhalten wir $h'(\lambda) = \lambda \cdot \vec{\nabla} g(\lambda x) = k\lambda^{k-1} g(x)$. Für $\lambda = 1$ folgt dann die Behauptung.

Beweis „⇐“:

Gegeben ist $x \cdot \vec{\nabla} g(x) = kg(x)$ für $x \in \mathbb{R}^N$. Wir schreiben die Voraussetzung für λx hin:

$$(\lambda x) \cdot \vec{\nabla} g(\lambda x) = kg(\lambda x)$$

Wir betrachten $\widetilde{h}(\lambda) = g(\lambda x) - \lambda^k g(x)$. Wir leiten eine Differentialgleichung her, von der wir wissen, daß sie nur die triviale Lösung hat:

$$\widetilde{h}'(\lambda) = x \cdot \vec{\nabla} g(\lambda x) - k\lambda^{k-1} g(x) = \frac{1}{\lambda} \lambda x \cdot \vec{\nabla} g(\lambda x) - k\lambda^{k-1} g(x) = \frac{k}{\lambda} g(\lambda x) - \frac{k}{\lambda} \lambda^k g(x) = \frac{k}{\lambda} \widetilde{h}(\lambda)$$

$\widetilde{h}$ genügt also der Differentialgleichung $\widetilde{h}'(\lambda) = \frac{k}{\lambda} \widetilde{h}(\lambda)$. Deren Lösung ist $\widetilde{h}(\lambda) = C\lambda^k$. Aus $\widetilde{h}(1) = 0$ ergibt sich $\widetilde{h}(\lambda) = 0 \ \forall \ \lambda$.

Folgerungen:

Wir betrachten $F(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(y(t), \dot{y}(t)) \, \mathrm{d}t$ mit $f(z,p)$, wobei $f(z, \lambda p) = \lambda f(z,p)$ gilt, $f(z,p)$ also positiv homogen vom Grad 1 ist. Aus Satz ② folgt dann:

$$\boxed{f(z,p) = p \cdot f_p(z,p)}$$

Wir wiederholen an dieser Stelle einige Begriffe:

1.) Weierstrass-Exzeß-Funktion:

$$\mathcal{E}(x,z,p,q) = f(x,z,q) - f(x,z,p) - f_p(x,z,p)(q-p)$$

Hier gilt, wobei $z \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^N$ und $q \in \mathbb{R}^N$ ist:

$$\mathcal{E}(z,p,q) = f(z,q) - f(z,p) - (q-p) \cdot f_p(z,p) = q \cdot f_p(z,q) - q \cdot f_p(z,p) = \boxed{q \cdot (f_p(z,q) - f_p(z,p))}$$

2.) Betrachten wir $f(z, \lambda p) = \lambda f(z,p)$

Differenzieren wir dies nach p:

$$\lambda \cdot f_p(z, \lambda p) = \lambda f_p(z,p)$$

Wir können $\lambda > 0$ herauskürzen, woraus sich $f_p(z, \lambda p) = f_p(z,p)$ ergibt oder auch $f_p(z, \lambda p) = \lambda^0 f_p(z,p)$. f_p ist bezüglich der p-Variablen homogen vom Grade 0. Durch Anwenden von Satz ② ergibt sich $0 = p \cdot f_{p_j p}(z,p)$ für $j = 1, 2, \ldots, N$.

$$0 = f_{p_1 p_1} p_1 + f_{p_1 p_2} p_2$$

$$0 = f_{p_2 p_1} p_1 + f_{p_2 p_2} p_2$$

$$f_{pp} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f_{pp} ist die Hessematrix bezüglich der p-Variablen.

Satz ④: Regularitätssatz

Es sei $y = y(t)$ eine schwache $\hat{C}^1$-Extremale von F mit $\|y(t)\| = 1$ für $t_0 \leq t \leq t_1$. Des weiteren sei $\mathcal{E}(y(t), \dot{y}(t), q) > 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ und alle $q \neq \lambda \dot{y}(t)$ $(\lambda > 0)$. Dann gilt $y \in (C^1[t_0, t_1])^N$.

Beweis:

Wir betrachten:

$$\mathcal{E}(z, v, w) = w \cdot (f_p(z, w) - f_p(z, v))$$

Wähle $\tau \in (t_0, t_1)$ beliebig. In diesem Punkte berechnen wir $p := \dot{y}(\tau - 0)$ und $q := \dot{y}(\tau + 0)$. (Das Ziel ist, zu zeigen, daß $p = q$ gilt.) Bekannt ist $f_p(y(\tau), p) = f_p(y(\tau), q)$. Damit gilt:

$$\mathcal{E}(y(\tau), p, q) = q \cdot (f_p(y(\tau), q) - f_p(y(\tau), p)) = 0 \text{ (nach oben)}$$

Hieraus ergibt sich $p = \lambda q$ mit $\lambda > 0$ und außerdem $\|p\| = \lambda \|q\|$. Mit $\|p\| = \|q\| = 1$ ergibt sich $\lambda = 1$ und $p = q$, was zu zeigen war.

Beispiel:

Betrachten wir $f(z, p) = \omega(z)\|p\|$ mit $\omega(z) > 0$ und $\omega \in C^1$. Für $\omega(z) = 1$ liegt das Bogenlängenfunktional vor:

$$F(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|\dot{y}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$$

Für $y \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich ein Funktional, welches wir früher schon bei der Behandlung von Rotationsflächen besprochen haben:

$$F(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} y_2(\tau)\|\dot{y}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$$

Allgemein ergibt sich für $f(z, p) = \omega(z)\|p\|$, daß $\frac{p}{\|p\|} = p$ (mit $\|p\| = 1$) ist.

$$\mathcal{E}(y(t), p, q) = \omega(y) q \cdot (q - p) = \omega(y)(q \cdot q - q \cdot p) = \underbrace{\omega(y)}_{>0} \underbrace{(1 - \cos\varphi)}_{\geq 0}$$

Gleichheit gilt nur für $q = \lambda p$ mit $\lambda > 0$ (gleichgerichtet!). Aus $q \neq \lambda p$ mit $\lambda > 0$ folgt $\mathcal{E}(y(t), p, q) > 0$. Aus Satz ④ folgt dann, daß $y \in C^1$ ist. Dann erhalten wir (Satz ③) mit $\|\dot{y}(t)\| = 1$:

$$\omega(y(t))\dot{y}(t) = C + \int\limits_{t_0}^{t} \omega_z(y(\tau))\|\dot{y}(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$$

Sowohl das Integral als auch $\omega(y(t))$ sind $\in C^1$. Damit ist $\dot{y}(t) \in C^1$ und $y \in C^2$.

7.1 Eulergleichungen bei Problemen in Parameterdarstellung

Eine Eigenschaft der EULERgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_p(y(t), \dot{y}(t)) = f_z(y(t), \dot{y}(t)) \qquad \text{(E)}$$

Für $N = 2$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_j}(y(t), \dot{y}(t)) = f_{z_j}(y(t), \dot{y}(t)) \text{ mit } j = 1, 2$$

Die Voraussetzung ist, daß $y \in C^2$ sein muß. Die Homogenitätsrelation war

$$f(z, \lambda p) = \lambda f(z, p) \Leftrightarrow f(v, w) = w \cdot f_p(v, w) \qquad \text{(H)}$$

Wir gehen aus von einer Lösung $y = y(t) \in C^2$ von (E). Aus Gleichung (H) ergibt sich:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[f(y(t), \dot{y}(t)) - \dot{y}(t) \cdot f_p(y(t), \dot{y}(t)) \right]$$

Führen wir die Differentiation aus:

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{y}(t) \cdot f_z(y(t), \dot{y}(t)) + \ddot{y}(t) \cdot f_p(y(t), \dot{y}(t)) - \ddot{y}(t) \cdot f_p(y(t), \dot{y}(t)) - \dot{y}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_p(y(t), \dot{y}(t)) = \\ &= \dot{y}(t) \cdot \left(f_z(y(t), \dot{y}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_p(y(t), \dot{y}(t)) \right) \end{aligned}$$

Schreiben wir dies komponentenweise auf:

$$0 = \dot{y}_1(t) \left(f_{z_1}(y(t), \dot{y}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_1}(y(t), \dot{y}(t)) \right) + \dot{y}_2(t) \left(f_{z_2}(y(t), \dot{y}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_2}(y(t), \dot{y}(t)) \right)$$

Da $\dot{y}(t) \neq 0$ ist, gilt entweder $\dot{y}_1(t) \neq 0$ oder $\dot{y}_2(t) \neq 0$, woraus folgt:

$$\left(f_{z_1}(y(t), \dot{y}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_1}(y(t), \dot{y}(t)) \right) = \alpha \left(f_{z_2}(y(t), \dot{y}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_2}(y(t), \dot{y}(t)) \right)$$

Wenn man eine der beiden EULERschen Gleichungen gelöst hat, so bringt die zweite EULERsche Gleichung keine zusätzlichen Informationen; die beiden EULERschen Gleichungen sind voneinander abhängig. Man sucht sich infolgedessen zur Lösung immer die einfachere Gleichung!

Beispiel:

1.) $F(y) = \int\limits_a^b y^2(x) y'^2(x) \, \mathrm{d}x$

Wir wollen dieses in ein Problem in Parameterdarstellung umformen:

$$F_p(y_1, y_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} y_2^2(t) \left(\frac{\dot{y}_2^2(t)}{\dot{y}_1^2(t)} \right) \dot{y}_1(t) \, \mathrm{d}t$$

$$f(z, p) = f(z_1, z_2, p_1, p_2) = z_2^2 \frac{p_2^2}{p_1}$$

Dann gilt für die EULERsche Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_1} = f_{z_1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-y_2^2 \frac{\dot{y}_2^2}{\dot{y}_1^2} \right) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{p_2} = f_{z_2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(2y_2^2 \frac{\dot{y}_2}{y_1} \right) = 2y_2 \frac{\dot{y}_2^2}{\dot{y}_1}$$

Wir zuvor schon erwähnt, reicht es nun, eine der beiden Gleichungen zu lösen. Zur Übung wollen wir aber beide lösen:

a.) Erste Gleichung:

$$y_2(t)\frac{\dot{y}_2(t)}{\dot{y}_1(t)} = C = \text{const.}$$

$$y_2(t)\dot{y}_2(t) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_2^2(t)\right) = C_1\dot{y}_1(t)$$

Durch Integration erhalten wir:

$$y_2^2(t) = 2C_1 y_1(t) + C_2$$

Mit $y = y_2(t)$ und $x = y_1(t)$ ergibt sich $y^2(x) = 2C_1 x + C_2$. Hierbei handelt es sich um eine Parabelschar.

b.) Zweite Gleichung:

$$2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2^2\right)\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} + 2y_2^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2^2\right)\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_2^2\right)\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} + 2y_2^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right) = 0$$

$$y_2\dot{y}_2\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1} + y_2^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right) = 0$$

Mit $y_2 \neq 0$ ergibt sich:

$$\dot{y}_2\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right) + y_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y_2\frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}\right) = 0$$

Hieraus folgt $y_2(t)\dot{y}_2(t) = C_1\dot{y}_1(t)$ und damit dasselbe wir vorher.

Beispiel:

Wir betrachten das Funktional:

$$F(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|\dot{x}(t)\|\,\mathrm{d}t \text{ mit } x(t) \in \mathbb{R}^2$$

Hiermit können geodätische Linien in der Ebene berechnet werden. Es gilt $f(z,p) = \|p\|$. Dann gilt die Eulersche Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = 0 \text{ mit } x(t) = \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\dot{\psi}(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} = 0$$

Es folgt hiermit durch Integration:

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} = C_1,\ \frac{\dot{\psi}(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} = C_2$$

Wir erhalten durch Division der beiden Gleichungen:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}} = C_3 \text{ oder } \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} = C_4$$

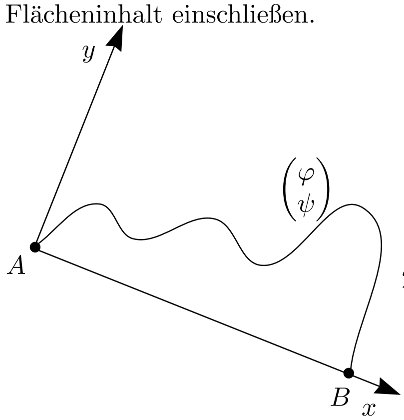
Mit $\dot{\varphi} = C_3\dot{\psi}$ erhalten wir $\varphi(t) = C_3\psi(t) + C_5$ $(x = C_3 y + C_5)$, also eine Gerade.

Beispiel:

Es soll folgendes Funktional minimiert werden:

$$F(\varphi,\psi) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}\left(\varphi\dot{\psi} - \psi\dot{\varphi}\right) - \lambda\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}\right] \mathrm{d}t \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Wir betrachten alle Kurven in der Ebene durch die Punkte A und B mit der Länge $2L$, welche den maximalen Flächeninhalt einschließen.



Es handelt sich um eine Variante des isoperimetrischen Problems.

$$f(z_1, z_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(z_1 p_2 - z_2 p_1) - \lambda\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

Um die EULERsche Gleichung aufstellen zu können, benötigen wir:

$$f_{p_1} = -\frac{1}{2}z_2 - \lambda\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}},\; f_{z_1} = \frac{1}{2}p_2$$

f_{p_2} und f_{z_2} folgt analog. Damit gilt für die erste EULERsche Gleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{2}\psi - \lambda\frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}}\right) = \frac{1}{2}\dot{\psi} \qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\varphi - \lambda\frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}}\right) = -\frac{1}{2}\dot{\varphi} \qquad (2)$$

Gleichung (1) ist äquivalent zu:

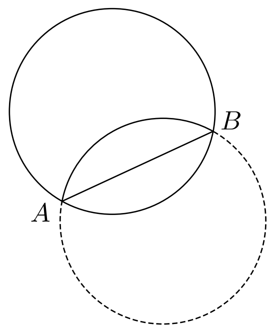
$$\dot{\psi}(t)\left[\frac{\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}}{(\dot{p}^2 + \dot{\psi}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\lambda}\right] = 0$$

Gleichung (2) sieht analog aus:

$$\dot{\varphi}(t)\left[\frac{\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}}{(\dot{p}^2 + \dot{\psi}^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\lambda}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{\varphi}\ddot{\psi} - \dot{\psi}\ddot{\varphi}}{\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\lambda}$$

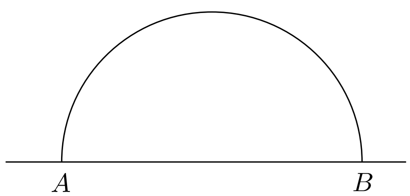
Der Betrag dieser Größe ist die sogenannte Krümmung der Kurve. Die Krümmung ist also konstant, was nur für einen Kreis mit Radius $|\lambda|$ der Fall ist.

1.) Fall $|\lambda| > |AB|$:



Man erhält zwei Kreise.

2.) Fall $|\lambda| = |AB|$:



Man erhält einen Halbkreis.

3.) Fall $|\lambda| < |AB|$

Es gibt keine Lösung.

Man kann auch so vorgehen: Aus Gleichung (1) ergibt sich unter anderem:

$$\psi + \lambda \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} = C_1$$

Und aus Gleichung (2):

$$\varphi - \lambda \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}} = C_2$$

Man kann die erste Gleichung mit $\dot{\psi}$ und die zweite mit $\dot{\varphi}$ multiplizieren und dann beide Gleichungen addieren. Dann fällt der Term mit der Wurzel heraus und die entstandene Gleichung ist einfach zu lösen. Eine andere Möglichkeit ist folgende:

$$\psi - C_2 = -\lambda \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}}$$

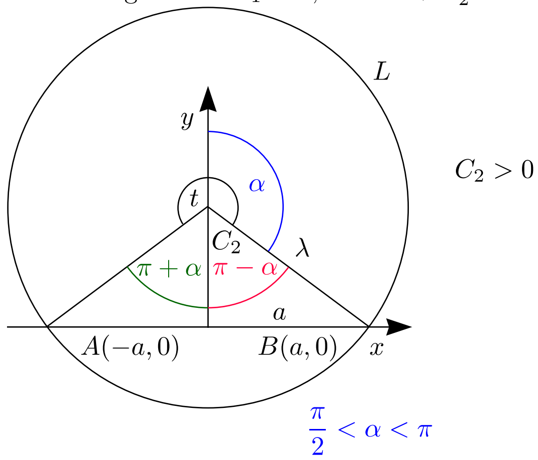
$$\varphi - C_1 = \lambda \frac{\dot{\psi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2}}$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man nun sofort die Kreisgleichung:

$$(\varphi - C_1)^2 + (\psi - C_2)^2 = \lambda^2 \Leftrightarrow \boxed{(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2 \text{ mit } x = x(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}}$$

$$(a - C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2$$
$$(a + C_1)^2 + C_2^2 = \lambda^2$$

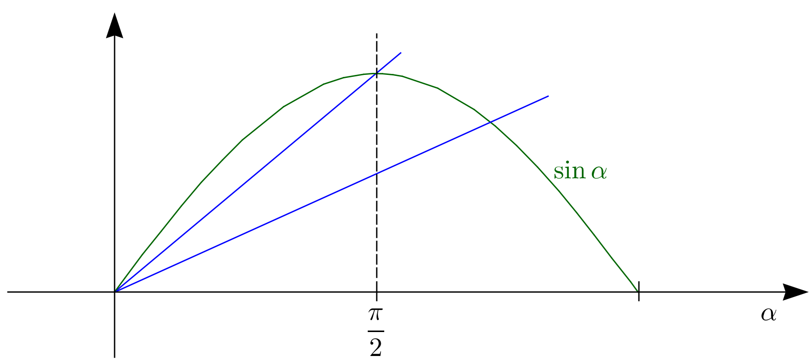
Hieraus ergibt sich $C_1 = 0$, also $a^2 + C_2^2 = \lambda^2$.



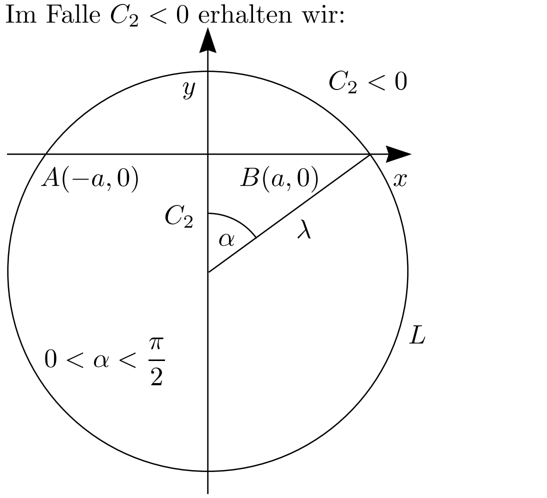
$$\frac{L}{\alpha} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{L}{\alpha} = \lambda$$

Mit $L = \lambda\alpha$ und $a = \lambda \sin\alpha$ ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{a}{L} \text{ mit } L > a}$$



Im Falle $C_2 < 0$ erhalten wir:



Es gilt $C_2 = -\lambda \cos\alpha$. Dann folgt:

$x = \varphi(t) = \lambda \sin(t)$

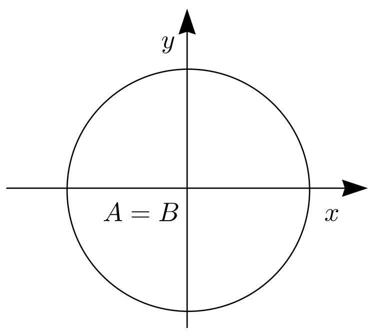
$y = \psi(t) = -\lambda(\cos(t) + \cos(\alpha))$ für $\pi - \alpha < t < \pi + \alpha$

Dann läßt sich auch der maximale Flächeninhalt bestimmen:

$$I = \int\limits_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \varphi(t)\dot{\psi}(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{L^2}{\alpha^2}\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right]}$$

1.) $a = \frac{\pi}{2}$: Halbkreis mit Radius a

2.) $a = \pi$: Vollkreis mit Radius a

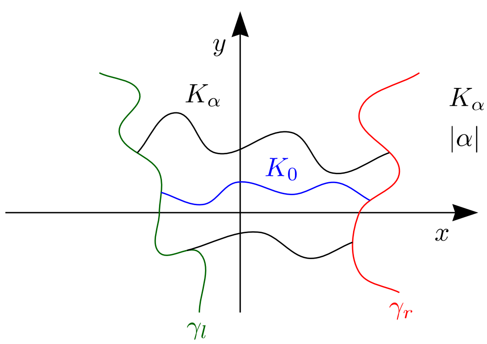


Kapitel 8

Variable Endpunkte („Moving Boundary"), Transversalitätsbedingung

Wir wollen folgendes Funktional minimieren:

$$F(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t$$



K_α: $x = x(t, \alpha)$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$
$|\alpha| \leq \alpha_0$

γ_l und γ_r seien ebene Kurven. Außerdem sei $f = f(z, p) = f(z_1, z_2, p_1, p_2) \in C^1$ genüge der Homogenitätsbedingung. K_0: $x = x_0(t)$ sei die minimierende Kurve des Problems:

$$F(x) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t \text{ auf } \mathbb{D} = \{x \in C^1[t_1, t_2] | \dot{x}(t) \neq 0 \text{ und } x(t_1) = \gamma_l,\, x(t_2) = \gamma_r\}$$

Es sei $x \in C^1\left([t_1, t_2] \times [-\alpha_0, \alpha_0]\right)$ und außerdem gelte $\dot{x}(t, \alpha) = x_t(t, \alpha)$, $\dot{x}(t, \alpha) \neq 0 \;\forall\; \alpha,\, t \in (t_1, t_2)$. K_0: $x(t, 0) = x_0(t)$. Des weiteren sei $x(t_1, \alpha) \in \gamma_l$ und $x(t_2, \alpha) \in \gamma_r$. Die Parameterdarstellung für γ_l sei $x_l(\alpha) := x(t_1, \alpha)$ und für γ_r sei diese $x_r(\alpha) := x(t_2, \alpha)$.

Satz ③ (Eulergleichung in Integralform)

$f_p((x_0(t), \dot{x}_0(t)) = \lambda + \int\limits_{t_1}^{t_2} f_z(x_0(t), \dot{x}_0(t))\,\mathrm{d}t$ mit $t \in [t_1, t_2]$ und $\lambda \in \mathbb{R}^2 = \text{const}$.

Es sei $f_p(x_0(t), \dot{x}_0(t)) =: \sigma(t)$ und damit gilt $\dot{\sigma}(t) = f_z(x_0(t), \dot{x}_0(t))$.

$$\Omega(\alpha) := F(K_\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha))\,\mathrm{d}t \text{ für } |\alpha| \leq \alpha_0$$

Wir berechnen $\Omega'(0) = 0$.

$$\Omega'(\alpha) = \int\limits_{t_1}^{t_2} [f_z(x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha))x_\alpha(t,\alpha) + f_p(x(t,\alpha), \dot{x}(t,\alpha)) \cdot \dot{x}_\alpha(t,\alpha)]\,\mathrm{d}t$$

$$0 = \Omega'(0) = \int\limits_{t_1}^{t_2} [f_z(x_0(t), \dot{x}_0(t)) \cdot x_\alpha(t,0) + f_p(x_0(t), \dot{x}_0(t)) \cdot \dot{x}_\alpha(t,0)]\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sigma(t) \cdot x_\alpha(t)]\,\mathrm{d}t = \sigma(t_2)x_\alpha(t_2,0) - \sigma(t_1)x_\alpha(t_1,0)$$

Wählen wir speziell $\{K_\alpha,\ |\alpha| \leq \alpha_0\}$ mit $x(t_1,\alpha) = x_0(t_1)$. Hieraus folgt $x_\alpha(t_1,0) = 0$. Damit erhalten wir die Bedingung $\|\sigma(t_2) \cdot x_\alpha(t_2,0)\| = 0$. Wählen wir andernfalls speziell $\{K_\alpha,\ |\alpha| \leq \alpha_0\}$ mit $x(t_2,\alpha) = x_0(t_2)$, womit $x_\alpha(t_2,0) = 0$ folgt und damit $\|\sigma(t_1) \cdot x_\alpha(t_1,0)\| = 0$.

Ergebnis:

γ_l möge die Parameterdarstellung $x = x_l(\tau)$ mit $\tau \in J$ haben und γ_r die Darstellung $x = x_r(\xi)$ mit $\xi \in I$. K_0: $x = x_0(t)$ mit $t_1 \leq t \leq t_2$ sei Lösungskurve des Problems. Es sei $x_0(t_1) = x_l(\widetilde{\tau})$ und $x_0(t_2) = x_r(\hat{\xi})$. $x = x_0(t)$ muß die folgenden Bedingungen erfüllen:

1.) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_p(x_0(t), \dot{x}_0(t)) = f_z(x_0(t), \dot{x}_0(t))$ für $t_1 < t < t_2$

2.) Transversalitätsbedingungen

   i.) Linker Rand: $f_p(x_0(t_1), \dot{x}_0(t_1)) \cdot x_l'(\widetilde{\tau}) = 0$

   ii.) Rechter Rand: $f_p(x_0(t_2), \dot{x}_0(t_2) \cdot x_r'(\hat{\xi}) = 0$

Beispiel:

Wir berechnen Abstand eines Punktes zu einer Ebene.

$$x(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right]$$

Wir wollen dabei das Abstandsfunktional minimieren:

$$F(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \int \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}\,\mathrm{d}t = \int \|x\|\,\mathrm{d}t$$

Aus den Transversalitätsbedingungen folgt:

$$\frac{\dot{x}(1)}{\|\dot{x}(1)\|} \cdot x_l'(\lambda) = 0 \Rightarrow \dot{x}(1) \cdot x_l'(\lambda) = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3\\-4\\4\end{pmatrix}=6+9\lambda-9\mu-8+16\lambda-16+16\lambda-16\mu\overset{!}{=}0$$

$$\boxed{41\lambda-25\mu=18}$$

Weiterhin müssen wir folgende Bedingung berücksichtigen:

$$\frac{\dot{x}(1)}{\|\dot{x}(1)\|}\cdot x_l'(\mu)=0\Rightarrow\dot{x}(1)\cdot x_l'(\mu)=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\-4\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=-6-9\lambda+9\mu+16-16\lambda+16\mu\overset{!}{=}0$$

$$\boxed{-25\lambda+25\mu=-10}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir $\lambda=\frac{1}{2}$ und $\mu=\frac{1}{10}$. Dann erhalten wir als Abstand:

$$a=\left\|\begin{pmatrix}-3\frac{1}{5}\\0\\-2\frac{2}{5}\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{\left(-3\frac{1}{5}\right)^2+\left(-2\frac{2}{5}\right)^2}=\boxed{4}$$

Beispiel:

Wir berechnen den Abstand zweier Geraden.

$$x(t)=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}+t\left[\begin{pmatrix}-4\\9\\-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\lambda\\-\mu-2\lambda\\-\mu+\lambda\end{pmatrix}\right]$$

Es muß auch hier gelten:

$$\frac{\dot{x}(1)}{\|\dot{x}(1)\|}\cdot x_l'(\lambda)=0\Rightarrow\dot{x}(1)\cdot x_l'(\lambda)=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-4\\9\\-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\lambda\\-\mu-2\lambda\\-\mu+\lambda\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix}=-24-36\lambda+18-2\mu-4\lambda+7+\mu-\lambda\overset{!}{=}0$$

$$\boxed{-39\lambda-\mu=-1}$$

$$\frac{\dot{x}(1)}{\|\dot{x}(1)\|}\cdot x_l'(\mu)=0\Rightarrow\dot{x}(1)\cdot x_l'(\mu)=0$$

$$\left[\begin{pmatrix}-4\\9\\-7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\lambda\\-\mu-2\lambda\\-\mu+\lambda\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=-9+\mu+2\lambda+7+\mu-\lambda\overset{!}{=}0$$

$$\boxed{\lambda+2\mu=2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $\lambda=0$ und $\mu=1$. Wir erhalten als Abstand der beiden Geraden:

$$a=\left\|\begin{pmatrix}-4\\8\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-4)^2+8^2+8^2}=\boxed{12}$$

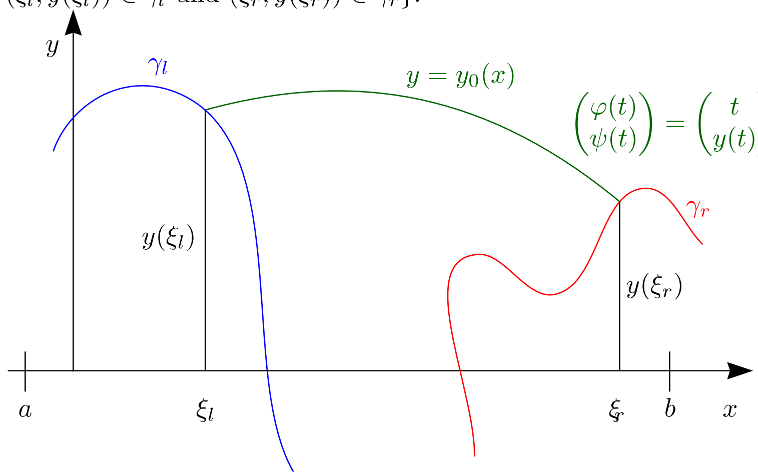
Kommen wir nun nach diesen Beispielen zu unserem am Anfang gestellten Problem zurück:

$$F(x) = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t), \dot\varphi(t), \dot\psi(t))\,\mathrm{d}t$$

Jetzt betrachten wir ein Funktional $\widetilde{F}(y)$, welches nicht in Parameterdarstellung gegeben ist:

$$\widetilde{F}(y) = \int_{\xi_l}^{\xi_r} \widetilde{f}(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{f}\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\right)\dot\varphi\,\mathrm{d}t$$

$\widetilde{F}(y)$ soll nun minimal werden auf $\mathbb{D} = \{y \in C^1[a,b]|$. Es gibt Zahlen ξ_l, ξ_r mit $a < \xi_l < \xi_r < b$ und $(\xi_l, y(\xi_l)) \in \gamma_l$ und $(\xi_r, y(\xi_r)) \in \gamma_r\}$.



Die Lösung sei K_0: $y = y_0(x)$ für $\xi_l < x < \xi_r$. Deren Parameterdarstellung sei:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} \text{ für } t_1 \le t \le t_2$$

$$\begin{pmatrix}\varphi(t_1)\\ \psi(t_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_l\\ y_0(\xi_l)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi(t_2)\\ \psi(t_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_r\\ y_0(\xi_r)\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{F}(y) \mapsto F(\varphi, \psi) = \int_{t_1}^{t_2} \widetilde{f}\left(\varphi(t), \psi(t), \frac{\dot\psi(t)}{\dot\varphi(t)}\right)\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi, \psi, \dot\varphi, \dot\psi)\,\mathrm{d}t$$

$$f(z_1, z_2, p_1, p_2) = \widetilde{f}\left(z_1, z_2, \frac{p_2}{p_1}\right)p_1$$

Außerdem benötigen wir:

$$f_{p_1} = \widetilde{f} + p_1\widetilde{f}_p \cdot \left(-\frac{p_2}{p_1^2}\right) = \widetilde{f} - \frac{p_2}{p_1}f_p,\ f_{p_2} = \widetilde{f}_p$$

Wir erhalten damit die Bedingung T':

$$\boxed{\begin{pmatrix}\widetilde{f}(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) - y_0'(\xi_l)\widetilde{f}_p(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l))\\ \widetilde{f}_p(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l))\end{pmatrix} \cdot x_l'(\widetilde{\tau}) = 0}$$

Außerdem verwenden wir die üblichen Abkürzungen:

$$V(x, y(x), y'(x)) = \widetilde{f}(x, y(x), y'(x)) - y'(x)\widetilde{f}_p(x, y(x), y'(x))$$

$U(x, y(x), y'(x)) = \widetilde{f}_p(x, y(x), y'(x))$

Wir können nun die Transversalitätsbedingungen für das Problem

$$F(\varphi, \psi) = \int_{\xi_l}^{\xi_r} f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x \text{ mit } (\xi_l, y(\xi_l)) \in \gamma_l(x = x(\tau)),\ (\xi_r, y(\xi_r)) \in \gamma_r(x = x(\xi))$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} V(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) \\ U(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) \end{pmatrix} \cdot x_l'(\widetilde{\tau}) = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} V(\xi_r, y_0(\xi_r), y_0'(\xi_r)) \\ U(\xi_r, y_0(\xi_r), y_0'(\xi_r)) \end{pmatrix} \cdot x_r'(\hat{\xi}) = 0}$$

Wie sehen diese Formeln aus, falls γ_l, γ_r in impliziter Form gegeben sind? Es sei γ_l: $T_l(x, y) = 0$ und γ_r: $T_r(x, y) = 0$ und außerdem gelte $x_l(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi(\tau) \\ \psi(\tau) \end{pmatrix}$. Aus $T_l(\varphi(\tau), \psi(\tau) = 0$ erhalten wir durch Differentiation nach τ: $\vec{\nabla} T_l \cdot x_l'(\tau) = 0 = (D_1 T_l)\varphi'(\tau) + (D_2 T_l)\psi'(\tau)$. Hieraus ergibt sich $\varphi'(\tau) = \lambda D_2 T_l$ und $\psi'(\tau) = -\lambda D_1 T_l$. Hieraus folgt T'':

$$\boxed{\begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} (\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) \cdot \begin{pmatrix} D_2 T_l \\ -D_1 T_l \end{pmatrix} (\xi_l, y_0(\xi_l)) = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} (\xi_r, y_0(\xi_r), y_0'(\xi_r)) \cdot \begin{pmatrix} D_2 T_r \\ -D_1 T_r \end{pmatrix} (\xi_r, y_0(\xi_r)) = 0}$$

Wie sehen diese Formeln aus, falls γ_l, γ_r in expliziter Form gegeben sind? Es sei also γ_l: $y = y_l(x)$ und γ_r: $y = y_r(x)$.

$T_l(x, y) = y - y_l(x) = 0$ und $T_r(x, y) = y - y_r(x) = 0$

Mit $D_2 T_l = 1$ und $D_1 T_l = -y_l'(x)$ erhalten wir T''':

$$\boxed{\begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} (\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_l'(\xi_l) \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \begin{pmatrix} V \\ U \end{pmatrix} (\xi_r, y_0(\xi_r), y_0'(\xi_r)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_r'(\xi_r) \end{pmatrix} = 0}$$

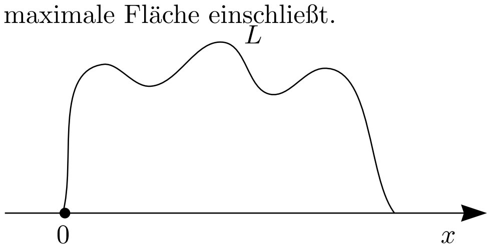
Umschreiben von T''' ergibt:

$p(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) - y_0'(\xi_l) f_p(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) + f_p(\xi_l, y_0(\xi_l), y_0'(\xi_l)) = 0$

$$\boxed{f + f_p(y_l(\xi_l) - y_0(\xi_l)) = 0}$$

Beispiel (Variante des isoperimetrischen Problems):

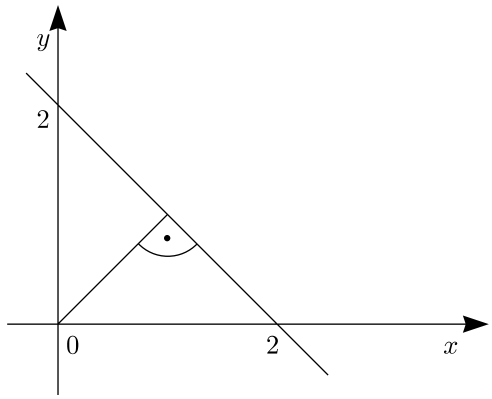
Gegeben sei L und gesucht ist die ebene Kurve durch $(0, 0)$ der Länge L, die zusammen die der x-Achse eine maximale Fläche einschließt.



Es ist γ_l: $(0, 0)$ und g_r ist die x-Achse. Rechnet man dies nach, so erhält man wie früher den Halbkreis als Lösung.

Beispiel:

Gesucht ist die kürzeste Verbindung von $(0, 0)$ zur Geraden $y = -x + 2$.



Es sei y_l: $(0,0)$ und γ_r: $(\xi, -\xi+2)$ und damit ist das Funktional $F(y)$ zu minimieren:

$$F(y) = \int_0^{\xi_r} \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Man kann das Problem auch in Parameterdarstellung betrachten:

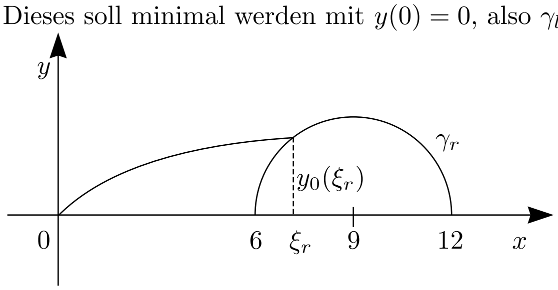
$$F(\varphi,\psi) = \int_0^1 \sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2}\,\mathrm{d}t$$

Beispiel:

Es sei folgendes Funktional gegeben:

$$F(y) = \int_0^{\xi_r} \frac{1}{y(x)}\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Dieses soll minimal werden mit $y(0)=0$, also γ_l: $(0,0)$ und $(\xi_r, y(\xi_r)) \in \gamma_r$: $(x-9)^2+y^2=9$ für $y \geq 0$.



Die Eulergleichung erhält man aus:

$$f(x,z,p) = \frac{1}{z}\sqrt{1+p^2},\ f_p(x,y,y') = \frac{1}{y(x)}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}},\ f_z = -\frac{1}{y(x)^2}\sqrt{1+y'(x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y(x)}\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}\right) = -\frac{1}{y^2(x)}\sqrt{1+y'^2(x)} \Leftrightarrow yy''+y'^2+1=0$$

Die Gleichung $yy''+y'^2+1=0=f(y,y',y'')$ löst man mit der Substitution $y'=p(y)$ oder mit folgenden Trick: Man kann die Differentialgleichung umschreiben:

$$(yy')' = \frac{1}{2}(y^2)''$$

Hieraus erhält man $(y^2)''=-2$ und $(y^2)'=-2x+C_1$. Schließlich folgt:

$$\boxed{y^2(x) = -x^2+C_1x+C_2}$$

Aus $y(0) = 0$ erhält man $C_2 = 0$ und hieraus resultiert $y^2(x) = -x^2 + C_1 x$.
Mit $y^2 + (x - C_1)^2 = C_2^2$ folgt aus $y(0) = 0$ $C_1^2 = C_2^2$.

$$y^2 + (x - C_1)^2 = C_1^2,\ y^2 = 2xC_1 - x^2$$

$$2yy' = 2C_1 - 2x \Leftrightarrow y' = \frac{C_1 - x}{y}$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{(C_1 - x)^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{y^2 + (C_1 - x)^2}{y^2}} = \frac{|C_1|}{|y(x)|}$$

Wir wenden nun die Transversalitätsbedingungen (T'') auf γ_r an:

$$T_r(x, y) = (x - 9)^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$V(\xi_r, y(\xi_r), y'(\xi_r)) D_2 T_r(\xi_r, y(\xi_r)) - U(\xi_r, y(\xi_r), y'(\xi_r)) D_1 T_r(\xi_r, y(\xi_r)) \stackrel{!}{=} 0$$

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} V(\xi_r, y(\xi_r), y'(\xi_r)) &= f(\xi_r, y(\xi_r), y'(\xi_r)) - y' f_p(\xi_r, y(\xi_r), y'(\xi_r)) = \\ &= \frac{1}{y}(\xi_r)\sqrt{1 + y'^2(\xi_r)} - y'(\xi_r)\frac{1}{y(\xi_r)}\frac{y'(\xi_r)}{\sqrt{1 + y'^2(\xi_r)}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\left(\frac{1}{y}(\xi_r)\sqrt{1 + y'^2(\xi_r)} - y'(\xi_r)\frac{1}{y(\xi_r)}\frac{y'(\xi_r)}{\sqrt{1 + y'^2(\xi_r)}}\right) 2y(\xi_r) - \frac{y'(\xi_r)}{y(\xi_r)\sqrt{1 + y'^2(\xi_r)}} 2(\xi_r - 9) = 0$$

$$C_1 \xi_r - 9\xi_r + 9C_1 = 0 \qquad (1)$$

Da $(\xi_r, y(\xi_r)) \in \gamma_r$ sein muß, gilt außerdem:

$$(\xi_r - 9)^2 + y^2(\xi_r) - 9 = 0 \qquad (2)$$

Dieses Gleichungssystem können wir lösen und erhalten $C_1 = 4$, $\xi_r = \frac{36}{5}$, $y(\xi_r) = \frac{12}{5}$. Das Ergebnis ist dann:

$$\boxed{y^2 + (x - 4)^2 = 16}$$

Kapitel 9

Hamilton-Prinzip, Kanonische Form der Eulergleichungen, Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung

Es sei $y = y(t) \in \mathbb{R}^3$ die Bahnkurve eines Massenpunktes m, der sich unter der äußeren Kraft $F(t)$ während der Zeit $t_1 - t_0$ bewegt. Die Newtonschen Gleichungen lauten:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{y}(t)) = F(t) \text{ für } t_0 \le t \le t_1} \qquad (1)$$

Gesucht ist $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, u, v)$ mit $(t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^7$ so, daß die Lösungen von (1) stationäre Funktionen für das Funktional

$$W(y) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, y(t), \dot{y}(t))\,\mathrm{d}t$$

sind. Die EULERgleichungen zu W sind:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_v(t, y(t), \dot{y}(t)) = \mathcal{L}_u(t, y(t), \dot{y}(t)) \text{ für } t_0 \le t \le t_1$$

Wir setzen $\mathcal{L}_v(t, u, v) = mv$ und erhalten $L(t, u, v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2 - U(t, u)$. Damit gilt für die rechte Seite $\mathcal{L}_u = -U_z u(t, u) = F(t)$. Fassen wir das zusammen, was wir bisher erhalten haben: Gilt $U_u(t, u) = -F(t)$, so stimmen die EULERgleichungen von

$$W(y) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}m\|\dot{y}(t)\|^2 - U(t, u)\right)\,\mathrm{d}t$$

mit (1) überein ($\delta W(y, \sigma) = 0 \;\forall\; \sigma \in \mathbb{D}_0$). m_j für $j = 1, 2, \ldots, n$ seien nun n Massenpunkte, deren Lage durch $y_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{R}^3$ beschrieben wird. Hierzu gehört die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \|\dot{v}_j(t)\|^2$$

und die potentielle Energie U, herrührend von auf das System wirkenden äußeren Kräften.

9.1 Hamilton-Prinzip

Falls das System bestimmte Positionen zu den Zeiten t_0 und t_1 annimmt, dann bewegt es sich zwischen diesen Positionen während der Zeitspanne $t_1 - t_0$ längs solcher zulässiger Bahnkurven (Trajektorien) $y = y(t)$, für die das Integral

$$W(y) = \int_{t_0}^{t_1} (T(t, \dot{y}(t)) - U(t, y(t)))\, \mathrm{d}t$$

stationär wird. $y = y(t)$ heißt **zulässig**, falls gewisse $k < 3n$ Nebenbedingungen, welche zu dem betrachteten System gehören, erfüllt sind. Zur Zeit t hat das System $N = 3n - k$ Freiheitsgrade; das heißt, seine Lage zur Zeit t wird eindeutig durch N skalare Größen $q_1(t), \ldots, q_N(t)$ beschrieben. Wir bezeichnen $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_N(t)) \in \mathbb{R}^N$ als Zustandsvektor, wobei N zeitunabhängig sein soll.

Voraussetzung:

y und q sollen eindeutig auseinander berechenbar sein. Wir haben also eine eindeutige Zuordnung $y(t) = g(q(t))$ $g\colon \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^{3n}$ und $y \in C^1$. Für jeden einzelnen Massenpunkt gilt $y_j(t) = g_j(q(t))$ mit $j = 1, \ldots, n$ und $g_j\colon \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^3$. Mittels der Kettenregel gilt:

$$\underbrace{\dot{y}_j(t)}_{(3,1)} = \underbrace{g_j'(q(t))}_{(3,N)} \cdot \underbrace{\dot{q}(t)}_{(N,1)}$$

$$\|\dot{y}_j(t)\|^2 = y_j(t)^\intercal \dot{y}_j(t) = \underbrace{\dot{q}(t)^\intercal}_{(1,N)} \underbrace{q_j'^\intercal(q(t))}_{(N,3)} \underbrace{g_j'(q(t))}_{(3,N)} \underbrace{\dot{q}(t)}_{(N,1)} = \dot{q}^\intercal(t)\gamma_j\dot{q}(t) = \sum_{l,k}^{N} \dot{q}_l(t)\gamma_j^{lk}\dot{q}_k(t)$$

γ_j ist nun eine symmetrische (N,N)-Matrix mit $(\gamma_j)_{l,k=1,\ldots,N}^{lk}$.

$$\|\dot{y}_j(t)\|^2 = \sum_{l,k=1}^{N} \gamma_j^{lk}(q,t)\dot{q}_l(t)\dot{q}_k(t)$$

Damit erhalten wir einen Ausdruck für die kinetische Energie:

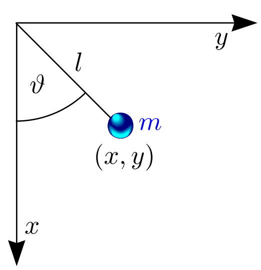
$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \|\dot{y}_j(t)\|^2 = \boxed{\frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\gamma_j^{lk}(q)\right]\dot{q}_l(t)\dot{q}_k(t)} = \widetilde{T}(q(t), \dot{q}(t))$$

Führen wir die Summation über j aus, so bleibt ein Ausdruck abhängig von l und k übrig, den wir als $A(a) = a_{lk}(q(t))_{lk}$ bezeichnen wollen, wobei es sich hier um eine symmetrische (N,N)-Matrix handelt.

$$\boxed{\widetilde{T}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\dot{q}(t)^\intercal A(q)\dot{q}(t)}$$

Hierbei gilt $\widetilde{T}(q(t), \lambda\dot{q}(t)) = \lambda^2\widetilde{T}(q(t), \dot{q}(t))$ für $\lambda > 0$. Nach Satz ② (Z 22) gilt $2\widetilde{T}(u,v) = v^\intercal \widetilde{T}_v(u,v)$.

9.1.1 Ebenes starres Pendel



Hier ist $n = 1$ und $N = 1$. Damit gilt $x(t) = l\cos\vartheta(t)$ und $y(t) = l\sin\vartheta(t)$, womit wir $\widetilde{T}(\vartheta,\dot{\vartheta}) = l^2\dot{\vartheta}^2\frac{m}{2}$ erhalten.

9.1.2 Kugelpendel

Ein Pendel bewege sich auf einer Kugel mit dem Radius l, womit Kugelkoordinaten günstig sind. Hier gilt $n = 1$ und $N = 2$; als unabhängige Koordinaten wählen wir die beiden Winkel ϑ und φ.

$x = l\sin\vartheta(t)\cos\varphi(t),\ y = l\sin\vartheta(t)\sin\varphi(t),\ z = l\cos\vartheta(t)$

Es gilt nun:

$$\widetilde{T}(\vartheta,\varphi,\dot{\vartheta},\dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \boxed{\frac{m}{2}l^2\left(\dot{\vartheta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right)}$$

Überprüfen wir die obige Beziehung:

$$2\widetilde{T}(u,v) = ml^2(v_1^2+v_2^2\sin^2 u_1)$$

$$\widetilde{T}_v(u,v) = \frac{m}{2}l^2\begin{pmatrix}2v_1\\2v_2\sin^2 u_1\end{pmatrix}$$

Hiermit gilt

$$(v_1,v_2)\cdot\widetilde{T}_v(u,v) = \boxed{ml^2\left(v_1^2+v_2^2\sin^2 u_1\right)}$$

was so sein muß.

Zusammenfassung:

$$T(\dot{y}(t)) \mapsto T^\star(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\dot{q}(t)^\intercal A(q(t))\dot{q}(t)$$

$$U(t,y(t)) \mapsto U^\star(t,q(t)) := U(t,g(q(t)))$$

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^\star(t,q(t),\dot{q}(t)) = T^\star(q(t),\dot{q}(t)) - U^\star(t,q(t))$$

Ab jetzt setzen wir $\mathcal{L}^\star \mapsto \mathcal{L}$, $T^\star \mapsto T$ und $U^\star \mapsto U$.

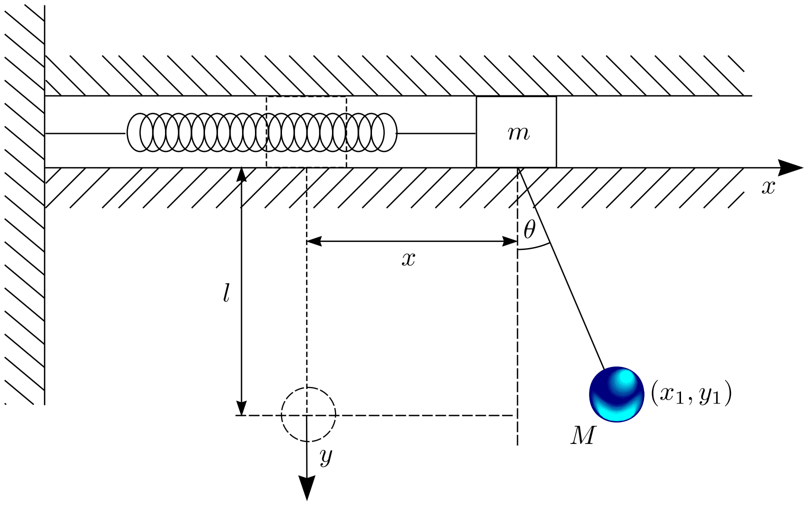
$$W(q) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\mathcal{L}(t,q(t),\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t$$

Dieses Funktional sei stationär ($\delta W(q;\psi) = 0$, $\psi(t_0) = \psi(t_1) = 0$). Die entsprechenden Eulergleichungen (Lagrangegleichungen) lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_v(t,q(t),\dot{q}(t)) = \mathcal{L}_u(t,q(t),\dot{q}(t)) \text{ mit } \mathcal{L}_v = \begin{pmatrix}\mathcal{L}_{v_1}\\\mathcal{L}_{v_2}\\\vdots\\\mathcal{L}_{v_N}\end{pmatrix}$$

Hierbei handelt es sich um N skalare Gleichungen.

9.1.3 Feder-Masse-Pendel



Wir wollen eine Transformation $(x, 0, x_1, y_1) \mapsto (q_1, q_2) = (x, \theta)$ durchführen. Für den Massenpunkt M gilt nun:

$x_1 = x + l\sin\theta$, $y_1 = l\cos\theta$

Auf m wirkt die Federkraft $k(x)$ mit $k(0) = 0$.

$$U(t, x, \theta) = \int_0^x k(\xi)\,\mathrm{d}\xi + Mgl(1 - \cos\theta)$$

$$T = \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\right) = \frac{1}{2}\,(m+M)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Ml\cos(\theta)\dot{x}\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}, \dot{\theta})\begin{pmatrix} m+M & Ml\cos\theta \\ Ml\cos\theta & Ml^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\dot{q}(t)^{\mathsf{T}}\mathcal{A}(q(t))\dot{q}(t)$$

Da für diese Matrix $m + M > 0$ und $(m+M)Ml^2 - M^2l^2\cos^2\theta = mMl^2 + M^2l^2\sin^2\theta > 0$ gilt, ist die Matrix regulär und damit invertierbar. Wir schreiben also die Lagrangefunktion hin:

$$\mathcal{L}(t, x(t), \theta(t), \dot{x}(t), \dot{\theta}(t)) \equiv \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Ml\cos\theta\dot{x}\dot{\theta} - \int_0^x k(\xi)\,\mathrm{d}\xi - Mgl(1 - \cos\theta)$$

Daraus berechnen wir:

$\mathcal{L}_{v_1}(t, q(t), \dot{q}(t)) = (m+M)\dot{x} + Ml\cos\theta\dot{\theta}$, $\mathcal{L}_{v_2}(t, q(t), \dot{q}(t)) = Ml^2\dot{\theta} + Ml\cos\theta\dot{x}$

$\mathcal{L}_{u_1}(t, q(t), \dot{q}(t)) = -k(x)$, $\mathcal{L}_{u_2} = -Ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} - Mgl\sin\theta$

Nun können wir für die beiden Eulergleichungen ermitteln:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((m+M)\dot{x} + Ml\cos\theta\dot{\theta}\Big) = -k(x)} \qquad (1)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(Ml^2\dot{\theta} + Ml\cos\theta\dot{x}\Big) = -Ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} - Mgl\sin\theta} \qquad (2)$$

Führen wir die Differentiation auf der linken Seite von Gleichung (2) aus, so folgt:

$$Ml^2\ddot{\theta} + Ml\cos\theta\ddot{x} - Ml\dot{\theta}\sin\theta\dot{x} = -Ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} - Mgl\sin\theta$$

$Ml^2\ddot{\theta} + Ml\cos\theta\ddot{x} = -Mgl\sin\theta \qquad (3)$

Multiplizieren wir nun Gleichung (1) mit $\frac{1}{ml}$ und subtrahieren diese von Gleichung (3), so folgt mit den Abkürzungen $\frac{m+M}{Ml} = \mu$ und $\frac{k(x)}{Ml} = \kappa(x)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mu\dot{x}(t) + \dot{\theta}(t)\cos\theta(t)\Big) = -\kappa(x(t))}$$

$$\boxed{l\ddot{\theta}(t) + (\cos\theta(t))\ddot{x}(t) = -g\sin(\theta(t))}$$

Gesucht sind $x = x(t)$ und $\theta = \theta(t)$. Hierbei handelt es sich um ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem 2.Ordnung. Ein System dieser Art ist schwer zu lösen. Deshalb führen wir für kleine Zeiten t eine Linearisierung durch, also $\cos(\theta) \mapsto 1$, $\kappa(x(t)) \mapsto \kappa x(t)$ (mit $\kappa = \text{const.}$) und $\sin\theta \mapsto \theta$.

$\mu\ddot{x}(t) + \ddot{\theta} = -\kappa x(t) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\kappa x(t) - \mu\ddot{x}$

$\ddot{x}(t) + l\ddot{\theta} = -g\theta(t)$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$\ddot{x}(t)\,(1-\mu l) = -g\theta(t) + l\kappa x(t)$

Hieraus folgt durch zweimaliges Differenzieren:

$x^{(4)}(1-\mu l) = -g\ddot{\theta} + l\kappa\ddot{x}(t)$

Durch Einsetzen der nach θ aufgelösten ersten Gleichung gilt nun:

$$\boxed{\alpha x^{(4)} + \beta\dddot{x} + \gamma\ddot{x} + \delta\dot{x} + \varepsilon x = 0}$$

Mit dem Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$ erhält man ein Polynom 4.Grades, welches als Übung gelöst werden kann.

Bemerkung (Übung):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + Ml(\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 - \int_0^x k(\xi)\,\mathrm{d}\xi - Mgl(1-\cos\theta)$$

Linearisiere $\mathcal{L}$. Dann sind die Lagrangegleichungen wieder die linearen Gleichungen für x, θ von oben. Achtung! Bei der zweiten Gleichung ist $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4)$ zu setzen!

9.2 Energiebetrachtungen

Betrachten wir nochmals das Wirkungsfunktional:

$$W(q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))\,\mathrm{d}t$$

Dazu schauen wir uns die 2.eulergleichung (in Integralform) an:

$$\mathcal{L}(t,q(t),\dot{q}(t)) - \dot{q}(t)\cdot\mathcal{L}_v(t,q(t),\dot{q}(t)) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}_t(\tau, q(\tau), \dot{q}(\tau))\,\mathrm{d}\tau + C$$

Den Ausdruck auf der linken Seite kann man nun als eine Energie $-E(t,q(t),\dot{q}(t))$ interpretieren:

$$E(t,q(t),\dot{q}(t)) = \dot{q}(t)\cdot\mathcal{L}_v(t,q(t),\dot{q}(t)) - \mathcal{L}(t,q(t),\dot{q}(t)) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}_t(\tau, q(\tau), \dot{q}\tau) + C$$

Mit $\mathcal{L}(t,q(t),\dot{q}(t)) = T(q(t),\dot{q}(t)) - U(t,q(t))$ und $T(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\dot{q}(t)^\intercal\mathcal{A}(q(t))\dot{q}(t)$ gilt $E = T + U$ (Gesamtenergie).

Beweis:

$E = \dot{q} \cdot \mathcal{L}_v - (T - U) = \dot{q} \cdot L_v - T + U \stackrel{!}{=} T + U \Leftrightarrow \boxed{\dot{q} \cdot \mathcal{L}_v = 2T}$

Hierbei handelt es sich um unsere Homogenitätsrelation. Für $\lambda > 0$ gilt:

$T(q(t), \lambda \dot{q}(t)) = \lambda^2 T(q(t), \dot{q}(t))$

Das heißt, T ist in den v-Variablen positiv homogen vom Grad 2. Mit Satz ② auf Z 22 folgt $\dot{q}(t) \cdot T_v(q(t), \dot{q}(t)) = 2T$.

$\mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) = T(q(t), \dot{q}(t)) - U(t, q(t))$

Bemerkung:

Hängt $\mathcal{L}$ nicht explizit von t ab, so ist die Energie konstant $\forall\, t$; oder mit anderen Worten hängt die Energie nur von den Anfangsbedingungen ab.

$E(t, q(t), \dot{q}(t)) = E(t_0, q(t_0), \dot{q}(t_0)) = \text{const.}\, \forall\, t$

Eine solche Größe bezeichnet man als ein **Bewegungsintegral** (=eine Funktion in $q(t)$, $\dot{q}(t)$, welche zeitlich konstant ist). Man nennt eine solche Funktion auch **erstes Integral**. Beim Feder-Masse-Pendel hängt beispielsweise $\mathcal{L}$ nicht explizit von der Zeit ab:

$E(t, x(t), \theta(t), \dot{\theta}(t)) = E(t_0, x(t_0), \theta(t_0), \dot{x}(t_0), \dot{\theta}(t_0))$

Beispiel:

Betrachten wir ein Feder-Masse-Pendel, für das $x(t_0) = 0$, $\theta(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ und $\dot{\theta}(t_0) = 0$ gilt, folgt $E = \frac{1}{2}(m + M)v_0^2$; damit ist die Energie zeitlich konstant.

9.3 Kanonische Form der Lagrangegleichungen

Ziel:

Ersetze durch $2N$ Gleichungen 1.Ordnung für $q = q(t) \in \mathbb{R}^N$ und $p = p(t) \in \mathbb{R}^N$ (**verallgemeinerte Impulse**). Die Idee ist dabei folgende:

$\ddot{x}(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))$ mit $x(t) \in \mathbb{R}^N$

Betrachten wir dazu das Wirkungsfunktional:

$$W(q) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))\, \mathrm{d}t \text{ mit } q(t) := u \in \mathbb{R}^N \text{ und } \dot{q}(t) := v \in \mathbb{R}^N$$

Die zugehörigen Lagrangegleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathcal{L}_v(t, q(t), \dot{q}(t)) = \mathcal{L}_u(t, q(t), \dot{q}(t)) \qquad (1)$$

Es handelt sich um N Differentialgleichungen 2.Ordnung. Diese können in $2N$ Differentialgleichungen 1.Ordnung umgeschrieben werden. Wir definieren dazu die verallgemeinerten Impulse:

$$p(t) := \mathcal{L}_v(t, q(t), \dot{q}(t)) \qquad (2)$$

Diese Gleichung sei im folgenden auflösbar nach $\dot{q}(t)$. Damit können wir schreiben:

$$\dot{q}(t) = \phi(t, q(t), p(t)) \qquad (3)$$

Aus Gleichung (1), (2) und (3) ergibt sich dann:

$$\boxed{\dot{p}(t) = \mathcal{L}_u(t, q(t), \phi(t, q(t), p(t))) = \psi(t, q(t), p(t))}$$

Dies sind $2N$ Gleichungen 1.Ordnung für p und q. Hierbei gelten folgende Aussagen:

1.) Ist q Lösung von Gleichung (1), so genügen p und q den Gleichungen (3) und (4).

2.) Genügen p und q den Gleichungen (3) und (4), so genügt q der Gleichung (1).

Beweis:

Wir setzen Gleichung (3) in (4) ein:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_v(t, q, \dot{q}) = \dot{p}(t) = \mathcal{L}_u(t, q(t), \dot{q}(t))$$

Was heißt, daß $p(t) = \mathcal{L}_v(t, q(t), \dot{q}(t))$ nach $\dot{q}$ auflösbar ist? Im Falle $N = 3$ gilt:

$$p_1 = \mathcal{L}_{v_1}(t, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

$$p_2 = \mathcal{L}_{v_2}(t, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

$$p_3 = \mathcal{L}_{v_3}(t, q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

Damit diese Gleichungen nach $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ auflösbar sind, muß $\det \mathcal{L}_{v_j v_k} \neq 0$ gelten für j, $k = 1, 2, 3$.

Beispiel:

Falls $T(u, v) = \frac{1}{2} v^\intercal \mathcal{A}(u) v$ und $\mathcal{L}(t, u, v) = v^\intercal \mathcal{A}(u) v - U(t, u)$ ist, gilt $\mathcal{L}_v = \mathcal{A}v$. Das Gleichungssystem lautet dann $p(t) = \mathcal{A}(q(t))\dot{q}(t)$. Auflösbarkeit nach $\dot{q}(t)$ bedeutet gerade Invertierbarkeit von $\mathcal{A}(u)$ (beispielsweise wenn $T(u, v) = v$ positiv definit ist).

9.3.1 Hamiltonfunktion

Betrachten wir folgenden Energieausdruck:

$$E(t, q(t), \dot{q}(t)) = \dot{q}(t) \cdot \mathcal{L}_v(t, q(t), \dot{q}(t)) - \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t))$$

Es gilt daher für die HAMILTONfunktion $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(t, q(t), p(t)) = E(t, q(t), \phi(t, q(t), p(t))) = \phi(t, q(t), p(t)) \cdot p(t) - \mathcal{L}(t, q(t), \phi(t, q(t), p(t)))$$

Wir bezeichnen im folgenden $q(t)$ mit u und $p(t)$ mit w und differenzieren formal nach w:

$$\mathcal{H}_w(t, q(t), p(t)) = \phi_w(t, q(t), p(t)) \cdot p(t) + \phi(t, q(t), p(t)) - \underbrace{\mathcal{L}_v(t, q(t), \phi(t, q(t), p(t)))}_{p(t)} \cdot \phi_w(t, q(t), p(t))$$

Damit folgt für die erste HAMILTON-Gleichung:

$$\boxed{\mathcal{H}_w(t, q(t), p(t)) = \dot{q}(t) \left(= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\right)}$$

Nun zur Herleitung der zweiten HAMILTON-Gleichung. Dazu differenzieren wir formal nach u:

$$\mathcal{H}_u(t, q(t), p(t)) = \phi_u(t, q(t), p(t)) \cdot p(t) - \mathcal{L}_u(t, q(t), \phi(t, q(t), p(t))) - \underbrace{\mathcal{L}_v(t, q(t), \phi(t, q(t), p(t)))}_{p(t)} \cdot \phi_u(t, q(t), p(t))$$

$$\boxed{\dot{p}(t) = -\mathcal{H}_u(t, q(t), p(t)) \left(= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}\right)}$$

Außerdem gilt:

$$\boxed{\mathcal{H}_t(t, q(t), p(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}(t, q(t), p(t))}$$

Bemerkung:

Es gilt $\phi(t, q(t), p(t)) \in \mathbb{R}^N$; es handelt sich also um einen N-dimensionalen Vektor. Was heißt $\phi_w(t, q(t), p(t)) \cdot p(t)$? Dazu führen wir die Berechnung explizit durch:

$$\phi_w(t, q(t), p(t)) \cdot p(t) = \sum_{j=1}^{N} (\phi_j)_w \cdot p_j(t)$$

$\phi_w(t, q(t), p(t)) \cdot p(t)$ ist ein Vektor. (Es handelt sich gewissermaßen sogar um ein Tensorprodukt.)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{H}(t, q(t), p(t)) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t, q(t), p(t)) + \mathcal{H}_u \cdot \dot{q}(t) + \mathcal{H}_w \cdot \dot{p}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}(t, q(t), p(t)) \text{ mit } \dot{q}(t) = \mathcal{H}_w \text{ und } \dot{p}(t) = -\mathcal{H}_u$$

Beispiel: Feder-Masse-Pendel

Wir betrachten die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m + M)\dot{x}^2 + Ml(\cos\theta)\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 - \int_0^x k(\xi)\,\mathrm{d}\xi - Mgl(1 - \cos\theta) \text{ mit } (q_1, q_2) = (x, \theta)$$

$$p(t) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m + M & Ml\cos\theta \\ Ml\cos\theta & Ml^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}(x,\theta)} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \mathcal{B}(x, \theta) \cdot \dot{q}$$

Hieraus ergibt sich dann durch Auflösen nach $\dot{q}(t)$:

$$\dot{q}(t) = \mathcal{B}^{-1}p(t) = \frac{1}{\det\mathcal{B}} \begin{pmatrix} Ml^2 & -Ml\cos\theta \\ -Ml\cos\theta & m + M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(t, q(t), p(t)) = T(q, \dot{q})|_{\dot{q}=\mathcal{B}^{-1}p} + U(t, q)$$

Hierbei gilt:

$$p \cdot \dot{q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} = 2T$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, q(t), p(t)) &= \frac{1}{2}p^\intercal\mathcal{B}^{-1}p + U(t, q) = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\det\mathcal{B}}\left(Ml^2p_1^2 - 2Ml\cos\theta p_1p_2 + (m + M)p_2^2\right) + \int_0^x k(\xi)\,\mathrm{d}\xi + Mgl(1 - \cos\theta) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_w = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \dot{q}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \mathcal{B}^{-1}p$$

$$-\mathcal{H}_u) - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \dot{p}(t) = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_x \\ -\mathcal{H}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(x) \\ \text{Komplizierter Ausdruck} \end{pmatrix}$$

9.3.2 Legendre-Transformation

Mit $p(t) = \mathcal{L}_v = (t, q(t), \dot{q}(t))$ ergibt sich:

$$\dot{q}(t) = \phi(t, q(t), p(t)) \text{ und } \dot{p}(t) = \psi(t, q(t), p(t)) \text{ mit } \det\mathcal{L}_{v_jv_k} \neq 0$$

Man spricht hier auch von der Normalform der Gleichungen.

9.4 Kanonische Transformationen/Hamilton-Jacobi-Gleichung

Gesucht ist ein Variationsintegral derart, daß die zugehörige EULERgleichungen gerade die zugehörigen HAMILTONgleichungen sind. Damit soll folgendes Funktional stationär werden:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,q(t),p(t),\dot{q}(t),\dot{p}(t))\,\mathrm{d}t$$

Wir schreiben die EULERschen Gleichungen für $f(t,q(t),p(t),\dot{q}(t),\dot{p}(t)) = \dot{q}(t)\cdot p(t) - \mathcal{H}(t,q(t),p(t)) = v\cdot w - \mathcal{H}(t,u,w)$ hin:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} f_v \\ f_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_w \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_u \\ v-\mathcal{H}_w \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich dan weiter durch Einsetzen der ursprünglichen Variablen die HAMILTONschen Gleichungen:

$$\boxed{\dot{p}(t) = -\mathcal{H}_w \text{ und } 0 = \dot{q} - \mathcal{H}_w}$$

Wir betrachten nun:

$$f(t,q(t),p(t),\dot{q}(t),\dot{p}(t)) = -q(t)\cdot\dot{p}(t) - \mathcal{H}(t,q(t),p(t))$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} f_v \\ f_\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_w \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} 0 \\ -q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{p}-\mathcal{H}_u \\ -\mathcal{H}_w \end{pmatrix}$$

Auch hieraus ergibt sich also $\dot{p} = -\mathcal{H}_u$ und $\dot{q} = \mathcal{H}_w$.

Satz:

Die Extremalen von $W_1(q,p) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [\dot{q}(t)\cdot p(t) - \mathcal{H}(t,q(t),p(t))]\,\mathrm{d}t$ sind die Lösungen der HAMILTONschen Gleichungen für das Problem, daß $W(q) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t,q(t),\dot{q}(t))\,\mathrm{d}t$ stationär werden soll. Dasselbe leistet das Problem $W_2(q,p) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [-q(t)\cdot\dot{p}(t) - \mathcal{H}(t,q(t),p(t))]\,\mathrm{d}t$.

Wir bilden also die Differenz der beiden Funktionale:

$$W_1(q,p) - W_2(q,p) = \int\limits_{t_0}^{t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} [\dot{q}(t)\cdot p(t) + q(t)\cdot\dot{p}(t)]\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q(t)\cdot p(t))\right]\,\mathrm{d}t$$

Die zugehörigen EULERgleichungen lauten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = \dot{p}(t) \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t) = \dot{q}(t) \Leftrightarrow \dot{p} = \dot{p} \text{ und } \dot{q} = \dot{q} \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ und } 0 = 0$$

Damit liefern die EULERschen Gleichungen keine Bedingungen.

Satz:

Für $F(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t,y(t))\,\mathrm{d}t = \int\limits_{t_0}^{t_1} [f_t(t,y(t)) + f_z(t,y(t))\cdot\dot{y}(t)]\,\mathrm{d}t$ (stationär) gilt:

- Die EULERgleichungen ergeben keine Bedingung für y; sie sind Identitäten, welche stets erfüllt sind.
- $\delta F(y,\eta) = 0$, $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ ist für jedes y und jedes η erfüllt.

Beweis:

$$\delta F(y,\eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(y,+\varepsilon\eta)\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \underbrace{\left[f(t_1,y(t_1)+\varepsilon\eta(t_1)) - f(t_0,y(t_0)+\varepsilon\eta(t_0))\right]_{\varepsilon=0}}_{\text{unabhängig von } \varepsilon} = 0$$

Der letzte Ausdruck ist unabhängig von ε, womit die Ableitung gleich 0 ist.

Corollar:

Die Probleme $F(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,y(t),\dot{y}(t))\,\mathrm{d}t$ (stationär) und $\widetilde{F}(y) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(f(t,y(t),\dot{y}(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t,y(t))\right)\,\mathrm{d}t$ (stationär) haben dieselben EULERgleichungen.

Es sei $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t,u,w)$ mit $u \in \mathbb{R}^N$ und $w \in \mathbb{R}^N$ seien gegeben. Für $q = q(t)$, $p = p(t)$ gelten:

$\dot{q}(t) = \mathcal{H}_w(t,q(t),p(t))$ und $\dot{p}(t) = -\mathcal{H}_u(t,q(t),p(t))$

Gesucht ist eine Transformation (u,w) $[\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N] \leftrightarrow (U,W)$ $[\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N]$ und eine Funktion $\mathcal{H} = \mathcal{H}^\star(t,U,W)$ derart, daß für die mittels der Transformation aus $(q(t),p(t))$ hervorgehenden Funktionen $(Q(t),P(t))$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\dot{Q}(t) = \mathcal{H}^\star_W(t,Q(t),P(t))$$

$$\dot{P}(t) = -\mathcal{H}^\star_U(t,Q(t),P(t))$$

Bemerkung:

Es sei $p = \lambda(t,Q,P)$ und $q = \mu(t,Q,P)$:

$$\mathcal{H}(t,q,p)|_{\substack{q=\lambda(t,Q,P)\\ p=\mu(t,Q,p)}} = \widetilde{\mathcal{H}}(t,Q,P) \neq \mathcal{H}^\star$$

Herleitung:

Vor vorher betrachten wir folgendes Funktional, welches stationär werden soll:

$$W_1(q,p) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[p\cdot\dot{q} - \mathcal{H}(t,q,p)\right]\,\mathrm{d}t$$

Die zugehörigen EULERschen Gleichungen lauten $\dot{q}(t) = \mathcal{H}_w$, $\dot{p}(t) = -\mathcal{H}_u$ (für $2N$ Funktionen).

$$\widetilde{W}_1(Q,P) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[P\cdot\dot{Q} - \mathcal{H}^\star(t,Q,P)\right]\,\mathrm{d}t$$

Hier lauten die EULERgleichungen $\dot{Q}(t) = \mathcal{H}^\star_W$ und $\dot{P}(t) = -\mathcal{H}^\star_U$ (für $2N$ Funktionen). Wir wollen nun ein Problem für $4N$ Funktionen herleiten, indem wir beide Funktionale voneinander subtrahieren:

$$W(q,p,Q,P) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[(p\cdot\dot{q} - \mathcal{H}) - (P\cdot\dot{Q} - \mathcal{H}^\star)\right] = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,q,p,Q,P,\dot{q},\dot{p},\dot{Q},\dot{P})\,\mathrm{d}t$$

Für dieses Problem gelten dann alle EULERgleichungen der beiden einzelnen Probleme, also erhalten wir $4N$ Funktionen. Nun können wir noch einen zusätzlichen Term in Form einer totalen Zeitableitung addieren:

$$W(q,p,Q,P) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[(p\cdot\dot{q} - \mathcal{H}) - (P\cdot\dot{Q} - \mathcal{H}^\star) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t,q,p,Q,P)\right]\,\mathrm{d}t$$

Dies gilt für eine beliebige Funktion $F = F(t, q, p, Q, P)$ von $4N + 1$ Variablen. Nach den Vorbemerkungen hat das Variationsproblem mit dem Integranden

$$(p(t) \cdot \dot{q}(t) - \mathcal{H}(t, q(t), p(t))) - \Big(P(t) \cdot \dot{Q}(t) - \mathcal{H}^\star(t, Q, P)\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t, q, p, Q, P) \qquad (\star)$$

dieselben $4N$ Eulergleichungen. Angenommen, wir haben die gesuchte Transformation $p = \lambda(t, Q, P)$, $q = \mu(t, Q, P)$. Hiermit können $2N$ Variablen in F eliminiert werden, so daß F von $2N + 1$ Variablen abhängt. F muß von einem Satz alter und einem Satz neuer Variablen abhängen. Dafür gibt es die vier Möglichkeiten $F = F(t, q, Q)$, $F = F(t, q, P)$, $F = F(t, p, P)$ und schließlich $F = F(t, p, Q)$. F heißt Erzeugende Funktion der Transformation. Wir bestimmen F im Fall $F = F(t, q, P)$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t, q(t), P(t)) = F_t + F_q \cdot \dot{q} + F_P \cdot \dot{P}$$

Hiermit folgt aus $(\star)$:

$$\dot{q} \cdot (p - F_q) + \dot{P} \cdot (Q - F_P) + (\mathcal{H}^\star - \mathcal{H} - F_t) = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllbar, falls $F_q(t, q, P) = p$, $F_P(t, q, P) = Q$ und $\mathcal{H}^\star = \mathcal{H} + F_t$ gilt. Aus der zweiten Bedingung kann man $q = \mu(t, Q, P)$ bestimmen und damit folgt aus der ersten Bedingung $p = \lambda(t, Q, P)$. Betrachten wir schlußendlich noch die dritte Bedingung, so erhalten wir:

$$\mathcal{H}^\star(t, Q, P) = [\mathcal{H}(t, q, p) + F_t(t, q, P)]_{\substack{q=\mu(t,Q,P)\\ p=\lambda(t,Q,P)}}$$

Wir führen dasselbe nochmals mit einer Erzeugenden anderer Bauart durch:

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t} (p(t) \cdot \dot{q}(t) - \mathcal{H}(t, q(t), p(t)))\, \mathrm{d}t \right] = 0$$

Dies bedeutet $\dot{q} = \mathcal{H}_p$ und $\dot{p} = -\mathcal{H}_q$.

$$\varphi^\star = P(t) \cdot \dot{Q}(t) - \mathcal{H}^\star(t, Q(t), P(t))$$

Das Ziel ist nun $\delta\varphi = \delta\varphi^\star = 0$. Dazu machen wir den Ansatz $\delta(\varphi - \varphi^\star) = 0$ und dies gilt, falls:

$$\varphi - \varphi^\star = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t, q(t), p(t), Q(t), P(t)) \text{ mit beliebigem } F$$

Wir eliminieren in F zunächst $2N$ Variablen mittels der **kanonischen Transformation**, so daß F von t und einem Satz alter und einem Satz neuer Koordinaten abhängt: $F = F(t, q, P)$, $F(t, p, P)$ und $F(t, q, Q)$. Wir verwenden den Fall $F = F(t, p, P)$:

$$p(t) \cdot \dot{q}(t) - \mathcal{H}(t, q(t), p(t)) - P \cdot \dot{Q} + \mathcal{H}^\star(t, Q, P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t, p(t), P(t)) = F_t + F_p \cdot \dot{p}(t) + F_P \cdot \dot{P}(t)$$

$$p(t) \cdot \dot{q}(t) - F_p \cdot \dot{p}(t) - P \cdot \dot{Q} - F_P \cdot \dot{P}(t) = F_t + \mathcal{H} - \mathcal{H}^\star$$

Dies ist äquivalent zu:

$$-\dot{p}(t) \cdot q(t) - F_p \cdot \dot{p}(t) + \dot{P} \cdot Q - F_P \cdot \dot{P}(t) = F_t + \mathcal{H} - \mathcal{H}^\star$$

$$\dot{p}(t) \cdot (-q(t) - F_p) + \dot{P} \cdot (Q - F_P) = F_t + \mathcal{H} - \mathcal{H}^\star$$

Dies ist erfüllt für $Q(t) := F_P(t, p(t), P(t))$ und hieraus folgt $p(t) = \lambda(t, Q, P)$. Außerdem setzen wir $q(t) = -F_p(t, p(t), P(t))|_{p(t)=\lambda(t,Q,P)} = \mu(t, Q, P)$.

$$\mathcal{H}^\star(t, Q, P) = (F_t(t, p, P) + \mathcal{H}(t, q, p))|_{\substack{q=\mu(t,Q,P)\\ p=\lambda(t,Q,P)}}$$

Beispiel:

Es sei $F(t,q,P) = q \cdot Pt$ (mit $N = 1$). Aus $Q = F_P$ erhalten wir $Q = qt$ und damit $q = \frac{Q}{t}(= \mu(t,Q,P)$. Aus $p = F_q$ folgt $p = Pt(= \lambda(t,Q,P))$ und $P = \frac{p}{t}$.

$$\mathcal{H}^\star(t,Q,P)\,(= \mathcal{H}(t,q,p) + F_t =)\,\mathcal{H}\left(t, \frac{Q}{t}, P \cdot t\right) + \frac{Q}{t}P$$

$$\mathcal{H}(t,q,p)\,(= \mathcal{H}^\star(t,Q,P) - F_t =)\,\mathcal{H}^\star\left(t, qt, \frac{p}{t}\right) - \frac{q \cdot p}{t}$$

Probe:

Als Voraussetzung verwenden wir $\dot{q} = \mathcal{H}_p(t,q,p)$ und $\dot{p} = -\mathcal{H}_q(t,q,p)$ und behaupten, daß $\dot{Q} = \mathcal{H}^\star_P(t,Q,P)$ und $\dot{P} = -\mathcal{H}^\star_Q(t,Q,P)$.

$$\mathcal{H}^\star_P = \frac{Q}{t} + \mathcal{H}_p \cdot t = \frac{Q}{t} + \dot{q} \cdot t = \frac{Q}{t} + t\left(\frac{\dot{Q}}{t} - \frac{Q}{t^2}\right) = \dot{Q}$$

$$\mathcal{H}^\star_Q = \frac{P}{t} + \mathcal{H}_q \cdot \frac{1}{t} = \frac{P}{t} - \dot{p}\frac{1}{t} = \frac{P}{t} - \frac{1}{t}\left(\dot{P}t + P\right) = -\dot{P}$$

Kommen wir zurück zu $F = F(t,q,P)$.

$$\mathcal{H}^\star(t,Q,P) = \left[\mathcal{H}(t,q,p) + F_t(t,q,P)\right]\Big|_{\substack{q=\mu(t,Q,P)\\ p=\lambda(t,Q,P)}}$$

Eine Erzeugendenfunktion $F = F(t,q,P)$, für die $\mathcal{H}^\star(t,Q,P) = 0\ \forall\ t$, Q und P gilt, heißt **Wirkungsfunktion** $A(t,q,P)$. Aus $\mathcal{H}^\star = 0$ ergibt sich $\dot{Q}(t) = \dot{P}(t) = 0$, also $Q(t) = \beta\ (\in \mathbb{R}^N)$ und $P(t) = \alpha\ (\in \mathbb{R}^N)$, wobei α, β konstant sind. Hieraus folgt $A = A(t,q,\alpha)$.

$$\boxed{\mathcal{H}\left(t, q, \frac{\partial A(t,q,\alpha)}{\partial q}\right) + A_t(t,q,\alpha) = 0}$$

Dies ist die sogenannte **Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung**. Hierbei handelt es sich um eine partielle (im allgemeinen nichtlineare) Differentialgleichung 1.Ordnung für A. $A = A(t,q,\alpha)$ sei die Lösung, die von N Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ abhängt. Aus $F(t,q,P)$ erhalten wir $Q = F_P = A_P = A_\alpha = \beta$. $A_\alpha(t,q,\alpha) = \beta$ ist eine implizite Darstellung für $q = q(t)$ und ist abhängig von $2N$ Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ und $\beta_1, \ldots, \beta_N$.

9.4.1 Satz von Jacobi/Jacobis Methode zur Lösung

Betrachten wir das System der Hamiltonschen Gleichungen:

$\dot{x} = \mathcal{H}_y(t,x,y)$, $\dot{y} = -\mathcal{H}_x(t,x,y)$

Gesucht sind $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ und $y = y(t) \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die zugehörige Hamilton-Jacobi-Gleichung für eine Funktion $S = S(t,x)$:

$$\boxed{S_t + H(t,x,S_x) = 0}$$

Wir begnügen uns mit der Voraussetzung $\mathcal{H} \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. $S = S(t,x,a)$ sei Lösung der Hamilton-Jacobi-Gleichung, die noch von n Parametern a abhängt. Das heißt für jedes $a \in B \subset \mathbb{R}^n$ gelte $S_t(t,x,a) + \mathcal{H}(t,x,S_x(t,x,a)) = 0$ (1). Des weiteren sei $\det(S_{x_j} a_k) \neq 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Solch eine Lösung bezeichnet man auch als **vollständiges Integral**. Dann gewinnt man aus den Gleichungen

$S_a(t,x,a) = b \qquad (2)$

$S_x(t,x,a) = y \qquad (3)$

mit beliebigen Parametern $b = (b_1, \ldots, b_n)$ eine $2n$-parametrige Lösungsschar des Hamiltonschen Systems: $x = X(t,a,b$ und $y = Y(t,a,b)$.

Beispiel:

Folgendes Funktional mit $y = y(x)$ soll stationär werden:

$$F(y) = \int\limits_a^b \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{H}(x,y,p) = -\sqrt{x^2+y^2-p^2}$$

Gesucht ist $S(x,y,a) \in \mathbb{R}$ mit $S_x + \mathcal{H}(x,y,S_y) = 0$. Hier gilt also $S_x + \left(-\sqrt{x^2+y^2-S_y^2}\right) = 0$.

$$S_x^2 + S_y^2 = x^2 + y^2$$

Man bezeichnet eine solche Differentialgleichung auch als Eikonalgleichung. Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichung machen wir den Separationsansatz $S(x,y) = f(x) + g(y)$.

$$f'^2(x) - x^2 = y^2 - g'^2(y) = a = \text{const}$$

Wir erhalten die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen $f'^2(x) = x^2 + a$ und $g'(y)^2 = y^2 - a$ und damit:

$$\boxed{S(x,y,a) = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right) + \frac{y}{2}\sqrt{y^2-a} - \frac{a}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2-a}\right) \text{ mit } S_a = b}$$

Durch Auflösen nach y erhalten wir die gesuchten Extremalen:

$$\boxed{x^2 - y^2 - \widetilde{\beta}(a,b)xy = \widetilde{\alpha}(a,b)}$$

Es handelt sich um eine implizite Lösungsdarstellung.

Beweis:

1.) Wir nutzen aus, daß $S_t(t,x,a) + \mathcal{H}(t,x,S_x(t,x,a)) = 0$ (1) eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wir differenzieren (1) nach a:

$$S_{ta} + \sum_{k=1}^n \mathcal{H}_{y_k} S_{x_k a} \qquad (1)_a$$

Anschließend differenzieren wir nach x:

$$S_{tx} + \mathcal{H}_x + \sum_{k=1}^n \mathcal{H}_{y_k} S_{x_k x} \qquad (1)_x$$

2.) Wir setzen dies in die Gleichung $S_a(t, X(t,x,a), a) = b$ ein. Dazu differenzieren wir nach t:

$$S_{at} + \sum_{k=1}^n S_{ax_k}\dot{X}_k = 0 \qquad (2)$$

Wir subtrahieren Gleichung (2) von $(1)_a$:

$$\sum_{k=1}^n S_{ax_k}\left(\mathcal{H}_{y_k} - \dot{X}_k\right) = 0$$

Dies muß für alle k Summanden gelten, wobei vorausgesetzt wird, daß die Determinante $\neq 0$ ist.

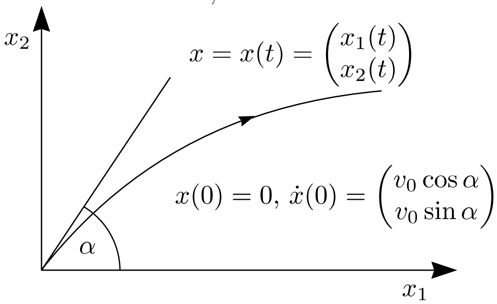
$$S_{ax}\left(\mathcal{H}_y - \dot{X}\right) = 0$$

3.) Wir differenzieren $y = S_x(t, X(t,a,b), a) = Y(t,a,b)$ nach t und setzen $(1)_x$ ein:

$$\dot{Y} = S_{xt} + \sum_{k=1}^n S_{xx_k}\dot{X}_k = S_{xt} + \sum_{k=1}^n S_{xx_k}\mathcal{H}_{y_k} = -\mathcal{H}_x$$

9.4.2 Der schiefe Wurf

Wir setzen voraus, daß alles in der Ebene stattfindet.



$\mathcal{L}(t, x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \dfrac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - mgx_2$

Die EULERgleichungen lauten:

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} m\dot{x}_1 \\ m\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

Hieraus ergibt sich $\ddot{x}_1 = 0$ und $\ddot{x}_2 = -g$. Mit $p_1 = m\dot{x}_1$, $\dot{x}_1 = \frac{p_1}{m}$ und $p_2 = m\dot{x}_2$, $\dot{x}_2 = \frac{p_2}{m}$ erhalten wir:

$\mathcal{H}(t, x_1, x_2, p_1, p_2) = \dfrac{p_1^2}{2m} + \dfrac{p_2^2}{2m} + mgx_2$

Die HAMILTON-JACOBI-Gleichung lautet für $S = S(t, x, a)$:

$S_t + \mathcal{H}(t, x, S) = S_t + mgx_2 + \dfrac{1}{2m}\left(S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2\right) = 0$

Wir machen eine Variablentrennung $S = u(x_1) + v(x_2) + w(t)$ als Ansatz:

$w'(t) + mgx_2 + \dfrac{1}{2m} v'^2(x_2) + \dfrac{1}{2m} u'^2(x_1) = 0$

Wir bringen das, was nicht von t abhängig ist, auf die rechte Seite:

$w'(t) = -mgx_2 - \dfrac{1}{2m} v'(x_2)^2 - \dfrac{1}{2m} u'^2(x_1) = -a_1$ mit $a_1 = \text{const.} > 0$

Wir erhalten also:

$w(t) = -a_1 t$

$\dfrac{1}{2m} u'^2(x_1) - a_1 = -mgx_2 - \dfrac{1}{2m} v'(x_2)^2 = -a_2$ mit $a_2 > 0$

Als Lösung folgt:

$$\boxed{u(x_1) = \sqrt{2m(a_1 - a_2)}\, x_1}$$

$$\boxed{v(x_2) = -\frac{1}{3m^2 g}\left(2ma_2 - 2m^2 g x_2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

S ergibt sich aus $u + v + w$. Der Satz sagt aus: „Bilde $S_{a_1} = b_1$ und $S_{a_2} = b_2$ und berechne hieraus $x = x(t)$.“

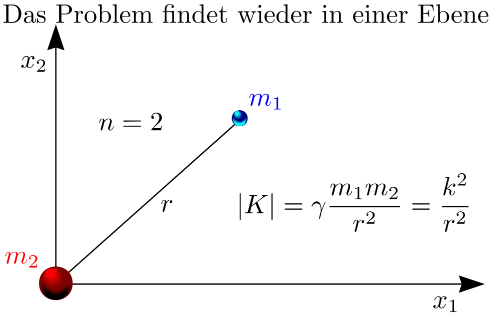
$b_1 = -t + \dfrac{m}{\sqrt{2m(a_1 - a_2)}} x_1$, $b_2 = -\dfrac{m}{\sqrt{2m(a_1 - a_2)}} x_1 - \dfrac{1}{mg}\sqrt{2ma_2 - 2m^2 g x_2}$

Aus $x_1(0) = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $b_1 = 0$ und aus der zweiten Gleichung $b_2 = -\frac{\sqrt{2ma_2}}{mg}$.

$$\boxed{x_1(t) = \frac{\sqrt{2m(a_1 - a_2)}}{m} t = v_0 \cos\alpha t \text{ und } x_2(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2}$$

9.4.3 Das Zweikörperproblem

Das Problem findet wieder in einer Ebene statt:



Die Masse m_2 soll in Ruhe sein. Gesucht ist die Bahnkurve von m_1:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

Mit $U = -\frac{k^2}{r}$ und $T = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$ ergibt sich:

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, p_1, p_2) = -\frac{k^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2\right)$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet für $S = S(t, x_1, x_2)$:

$$S_t + \mathcal{H}(x_1, x_2, S_{x_1}, S_{x_2}) = 0$$

$$S_t + \frac{1}{2m}\left(S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2\right) = \frac{k^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\frac{1}{m} S_t + \frac{1}{2m^2}\left(S_{x_1}^2 + S_{x_2}^2\right) = \frac{k^2 \frac{1}{m}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Wir bezeichnen $\widetilde{S} = \frac{S}{m}$ und nennen $\widetilde{S}$ wieder S mit $\frac{k^2}{m} = \kappa^2$:

$$S_t + \frac{1}{2}\left(S_{x_1^2} + S_{x_2}^2\right) = \frac{\kappa^2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Wir führen Polarkoordinaten ein durch $x_1 = r\cos\vartheta$ und $x_2 = r\sin\vartheta$:

$$S(t, r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = \varphi(t, r, \vartheta)$$

$$S(t, x_1, x_2) = \varphi\left(t, \sqrt{x_2^2 + x_2^2}, \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)$$

$$S_{x_1} = \varphi_r r_{x_1} + \varphi_\vartheta \vartheta_{x_1}$$

$$S_{x_2} = \varphi_r r_{x_2} + \varphi_\vartheta \vartheta_{x_2}$$

Mit $\varphi_r = S_{x_1}\cos\vartheta + S_{x_2}\sin\vartheta$ und $\varphi_\vartheta = S_{x_1}(-r\sin\vartheta) + S_{x_2}(r\cos\vartheta)$ folgt:

$$\varphi_t + \frac{1}{2}\left(\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\vartheta^2\right) = \frac{\kappa^2}{r}$$

Oder man rechnet direkt:

$$r_{x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_1}{r},\ r_{x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{x_2}{r}$$

$$\vartheta_{x_1} = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}}\left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) = -\frac{x_2}{r^2},\ \vartheta_{x_2} = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}}\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_1}{r^2}$$

$$S_{x_1}^2 = \varphi_r^2 r_{x_1}^2 + 2\varphi_r r_{x_1}\varphi_\vartheta \vartheta_{x_1} + \varphi_\vartheta^2 \vartheta_{x_1}^2 = \varphi_r^2 \frac{x_1^2}{r^2} + 2\varphi_r\varphi_\vartheta \left(-\frac{x_1 x_2}{r^3}\right) + \varphi_\vartheta^2 \frac{x_2^2}{r^4}$$

$$S_{x_2}^2 = \varphi_r^2 r_{x_2}^2 + 2\varphi_r \varphi_\vartheta r_{x_2} \vartheta_{x_2} + \varphi_\vartheta^2 \vartheta_{x_2}^2 = \varphi_r^2 \frac{x_2^2}{r^2} + 2\varphi_r\varphi_\vartheta \left(\frac{x_1 x_2}{r^3}\right) + \varphi_\vartheta^2 \frac{x_1^2}{r^4}$$

Gesucht ist $\varphi = \varphi(t, r, \vartheta, a_1, a_2)$. Hier kann man nun den Separationsansatz $\varphi = \varphi_1(t) + \varphi_2(\vartheta) + \varphi_3(r)$ machen:

$$\varphi_1'(t) + \frac{1}{2}\varphi_3'^2(r) + \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\varphi_2'^2(\vartheta) = \frac{\kappa^2}{r}$$

$$\varphi_1'(t) = \frac{\kappa^2}{r} - \frac{1}{2}\varphi_3'(r)^2 - \frac{1}{r^2}\varphi_2'^2(\vartheta) = a_1$$

Hieraus ergibt sich $\varphi_1(t) = a_1 t$ und weiter:

$$2r^2 \left(a_1 - \frac{\kappa^2}{r} + \frac{1}{2}\varphi_3'^2(r)\right) = -\varphi_2'^2(\vartheta) - a_2^2$$

Hieraus folgt $\varphi_2(\vartheta) = a_2\vartheta$. Mit $r_0 = r(t_0)$ für $t \geq t_0$ folgt:

$$\varphi_3(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{-\frac{a_2^2}{\varrho^2} + \frac{2\kappa^2}{\varrho} - 2a_1}\,\mathrm{d}\varrho$$

$$\varphi(t, r, \vartheta, a_1, a_2) = a_1 t + a_2 \vartheta + \int\limits_{r_0}^{r} \sqrt{-\frac{a_2^2}{\varrho^2} + \frac{2\kappa^2}{\varrho} - 2a_1}\,\mathrm{d}\varrho$$

Nach unserem Satz von Jacobi setzen wir $\varphi_{a_1} = b_1$, $\varphi_{a_2} = b_2$ und bestimmen hieraus $r = r(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$:

$$\varphi_{a_1} = t_0 = t + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{-\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{-\frac{a_2^2}{\varrho^2} + \frac{2\kappa^2}{\varrho} - 2a_1}} \Rightarrow \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\sqrt{-\frac{a_2^2}{\varrho^2} + \frac{2\kappa^2}{\varrho} - 2a_1}} = t - t_0$$

Hierbei handelt es sich um eine Darstellung für $r = r(t)$: das Weg-Zeit-Gesetz. Wir setzen:

$$\varphi_{a_2} = \vartheta_0 = \vartheta + a_2 \int\limits_{r_0}^{r} \frac{-\mathrm{d}\varrho}{\varrho\sqrt{-2a_1\varrho^2 - 2\kappa^2\varrho - a_2^2}}$$

Dies ist eine implizite Darstellung von $r = r(\vartheta)$, also der Bahnkurve. Mittels Bronstein folgt hieraus jetzt:

$$\boxed{r = r(\vartheta) = \frac{\frac{a_2^2}{2\kappa^2}}{1 - \frac{\sqrt{4\kappa^2 - 8a_1 a_2^2}}{2\kappa^2}\sin(\vartheta - \vartheta_0)} = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\vartheta - \vartheta_0)}}$$