

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: PFADINTEGRALE, RENORMIERUNGSGRUPPEN UND VEREINHEITLICHTE THEORIEN

Prof. Dr. Johann Kühn

Vorlesung Sommersemester 2004

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 12. Februar 2005

Mitschrieb der Vorlesung PFADINTEGRALE, RENORMIERUNGSGRUPPEN UND VEREINHEITLICHTE THEORIEN
von Herrn Prof. Dr. JOHANN KÜHN im Wintersemester 2004/2005
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Pfadintegrale	5
1.1	Nichtrelativistische Quantenmechanik	5
1.1.1	Überlagerungsprinzip	5
1.1.2	Einschub zu GAUSS-Integralen	6
1.1.3	Anmerkung zum klassischen Grenzfall	9
2	Feldtheorie	11
3	Korrelationsfunktionen und zeitgeordnete Produkte von Operatoren	13
3.1	„Fingerübungen“ zum erzeugenden Funktional bei Anwesenheit von Anharmonizität	15
3.1.1	Eindimensionale Integrale	15
3.1.2	Graphische Darstellung	16
3.2	Feldtheorie: Funktionalableitung und erzeugendes Funktional	16
3.2.1	GREEN-Funktion oder Korrelationsfunktion	16
3.2.2	Exkurs: LANDAU-Funktionale	17
4	Elektromagnetisches Feld im Pfadintegralformalismus	19
4.1	Ausgangspunkt	19
4.2	Spinor-Felder und Pfadintegrale	21
4.2.1	GAUSS-Integral	22
4.2.2	DIRAC-Propagator	23
4.2.3	Symmetrien	23
4.2.4	Erhaltungssätze, NOETHER-Ströme	24
5	Pfadintegrale und nichtabelsche Eichtheorien	27
5.1	Allgemeine Diskussion	27
5.2	FADDEEV-POPOV-LAGRANGE-Dichte	28
5.2.1	Behandlung des Eichfeldes in der axialen Eichung	29
5.3	Geister und Unitarität	30
5.4	BRST-Symmetrie	31
5.4.1	Klassifikation der Eigenzustände von H in drei Teilräumen	32
5.5	S-Matrix	32
6	Renormierungsgruppe	33
6.1	Einführung	33
6.1.1	ϕ^4 -Theorie	34
6.2	WILSON (Effektive Theorien)	36
7	Callan-Symanzik-Gleichung	39
7.1	Modifizierte Renormierungsbedingungen	39
7.2	Berechnung von β und γ	41
7.3	Lösung der CALLAN-SYMANZIK-Gleichung	44
7.4	β -Funktion in den Quantenchromodynamik	46

8	Zusammengesetzte Operatoren	49
8.1	Berechnung von Zerfällen	49
8.1.1	ϕ^4 -Theorie	50
8.2	Renormierung lokaler zusammengesetzter Operatoren	50
9	Quantenchromodynamik	53
9.1	Bildung von Hadronen	53
9.1.1	Wirkungsquerschnitt	54
9.1.2	Einschub: CALLAN-LEHMANN-Spektraldarstellung	55
9.2	Wechselwirkende Felder	55
9.2.1	Dispersionsrelation	57
9.3	Lepton-Nukleon-Streuung/Tief inelastische Streuung	57

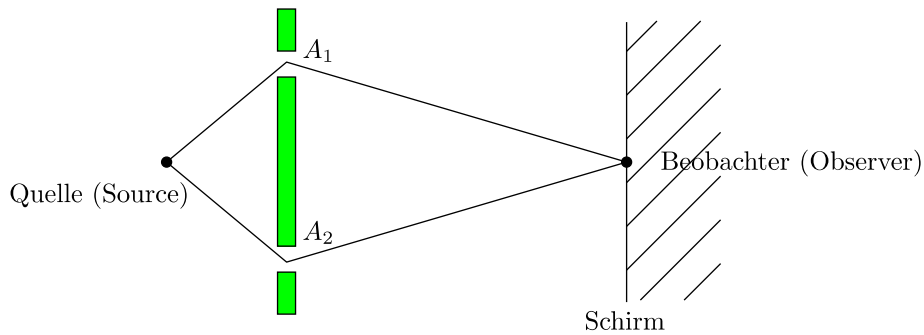
Kapitel 1

Pfadintegrale

1.1 Nichtrelativistische Quantenmechanik

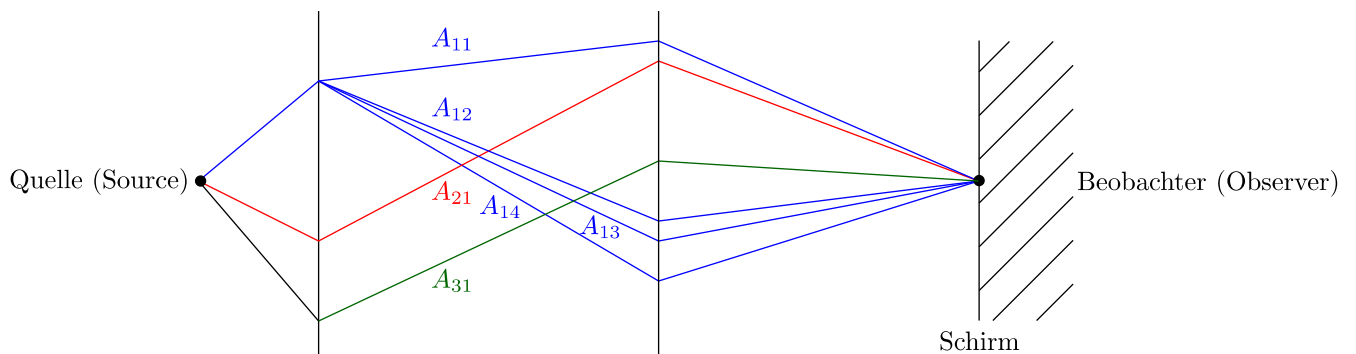
1.1.1 Überlagerungsprinzip

1.) Doppelspalt:



Die gesamte Amplitude \mathcal{A} ergibt sich aus $A_1 + A_2$. Die Intensität erhält man daraus durch das Betragsquadrat $|\mathcal{A}|^2$. Liegen mehrere Löcher vor, so ergibt sich \mathcal{A} als Summe aller A_i .

2.) Zwei Blenden:



$$\mathcal{A} = \sum_{i,j} A_{ij}$$

Die Löcher in den Blenden sollen dicht liegen und die Blenden dicht hintereinander.

$$\mathcal{A}(S \mapsto O) = \sum_{\text{Wege } i} A(S_{\text{Weg } i} \mapsto \mathcal{A})$$

Der Weg wird genähert durch einen Polygon-Zug, wobei die Segment-Länge gegen null geht.

Was ist das Gewicht eines Weges und die Amplitude für einen bestimmten weg? Wir erinnern uns an die Formulierung von DIRAC in der Quantenmechanik:

$$\langle q_F | \exp(-iHT) | q_I \rangle$$

Im folgenden wollen wir ein eindimensionales Problem betrachten. Damit vollzieht sich der Übergang zu den Pfadintegralen:

$$\langle q_F | \exp(-iHT) | q_I \rangle = \langle q_F | \exp(-iH\delta t) \exp(-iH\delta t) \dots \exp(-iH\delta t) | q_I \rangle \text{ mit } \delta t \equiv \frac{T}{N}$$

Mit der Vollständigkeitsrelation $\int dq |q\rangle\langle q| = 1$ der Basis $\{|q\rangle\}$ folgt weiter:

$$\left[\prod_{i=1}^{N-1} \int dq_i \right] \langle q_F | \exp(-iH\delta t) | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | \exp(-iH\delta t) | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | \exp(-iH\delta t) | q_I \rangle$$

Wir wollen uns nun der Auswertung eines Faktors im Impulsraum widmen. Dazu machen wir Gebrauch von:

$$\int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p| = 1, \quad \langle q|p\rangle = \exp(ipq)$$

Dazu wollen wir uns zunächst mit der Betrachtung eines freien Teilchens begnügen. Dieses besitzt einen HAMILTON-Operator der Form $H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$, wobei für den Impulsoperator \hat{p} das Eigenwertproblem $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$ gilt.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle q_{j+1} | \exp\left(-i \cdot \frac{\hat{p}^2}{2m} \delta t\right) | p \rangle \langle p | q_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp\left(-i \cdot \frac{p^2}{2m} \delta t\right) \langle q_{j+1} | p \rangle \langle p | q_j \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp\left(-i \frac{p^2}{2m} \delta t\right) \exp[ip(q_{j+1} - q_j)] = \left(\frac{-i \cdot 2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[\frac{im(q_{j+1} - q_j)^2}{2\delta t}\right] = \\ &= \left(\frac{-i \cdot 2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[i\delta t \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right]^2\right] \end{aligned}$$

1.1.2 Einschub zu Gauß-Integralen

☞ Anwendung ①:

Unter Verwendung von Polarkoordinaten lässt sich das Quadrat eines GAUSS-Integrals geschickt berechnen:

$$G^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \stackrel{x^2+y^2=r^2}{=} 2\pi \cdot \int_0^{\infty} dr r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) = 2\pi$$

Damit erhalten wir durch Ziehen der Wurzel das GAUSS-Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{2\pi}$$

Wir erinnern uns:

$$G^n = (\sqrt{2\pi})^n = \int d\vec{x} \exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2}\right) = \int d\Omega_n \int dr r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$$

Daraus erhält man dann das Integral über $d\Omega_n$.

☞ Anwendung ②:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-\frac{ax^2}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

☞ Anwendung ③:

$$\langle x^{2n} \rangle \equiv \frac{\int dx x^{2n} \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right)}{\int dx \exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right)} = \frac{(-2\frac{d}{da})^n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = \frac{1}{a^n} (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = \frac{1}{a^n} \cdot (2n-1)!!$$

Dies ist gerade die Anzahl der möglichen Paare bei $2n$ Objekten (Zahl der WICK-Integrationen).

☞ Anwendung ④:

$$\int dx \exp\left[-\frac{1}{2}ax^2 + Jx - \frac{1}{2}\frac{J^2}{a} + \frac{1}{2}\frac{J^2}{a}\right] = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{J^2}{a}\right]$$

$$\int dx \exp\left[-\frac{1}{2}ax^2 + iJx\right] = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{J^2}{2a}\right]$$

Wir machen den Übergang $a \mapsto -ia$, wobei $-ia$ einen kleinen positiven Realteil ε haben soll.

$$\int dx \exp\left(\frac{ia}{2} \cdot x^2 + i \cdot Jx\right) = \left(\frac{2\pi i}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{i}{2a} \cdot J^2\right]$$

☞ Anwendung ⑤:

Im nächsten Schritt gehen wir über auf n -dimensionale Integrale.

$$\int d\vec{x} \exp\left[-\frac{1}{2}x^T A x + Jx\right] = \left(\frac{(2\pi)^N}{\det A}\right) \exp\left[\frac{1}{2}J^T A^{-1} J\right]$$

Es gibt dazu entsprechende Fortsetzungen:

$$\int d\vec{x} \exp\left[\frac{i}{2}x^T A x + iI^T x\right]$$

$$\langle x_i x_j \dots x_k x_l \rangle \equiv \frac{\int d\vec{x} x_i x_j \dots x_k x_l \exp\left[-\frac{1}{2}x^T A x\right]}{\int 1} = \sum_{\substack{\text{Permutationen} \\ a, b, \dots \in (i, j, \dots, k, l)}} (A^{-1})_{ab} \dots (A^{-1})_{yz}$$

Kommen wir nun zu unserem Anfangsproblem zurück:

$$\begin{aligned} \langle q_F | \exp(-iHT) | q_I \rangle &= \left(\frac{-i \cdot 2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \left[\prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j\right] \cdot \left(\prod_{j=1}^{N-1} \exp\left[i\delta t \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right]^2\right]\right) = \\ &= \left(\frac{-i \cdot 2\pi m}{\delta t}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \left[\prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j\right] \cdot \left(\exp\left[\sum_{j=1}^{N-1} i\delta t \cdot \frac{m}{2} \cdot \left[\frac{q_{j+1} - q_j}{\delta t}\right]^2\right]\right) \end{aligned}$$

Es liegen damit zwei Grenzübergänge vor:

1.) $\frac{q_{j+1}(t + \delta t) - q_j(t)}{\delta t} \mapsto \dot{q}(t)$ für $\delta t \mapsto 0$

2.) $\delta t \sum_{j=1}^{N-1} \mapsto \int dt$ für $\delta t \mapsto 0$

Wir definieren nun als **Pfadintegral**:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{-i \cdot 2\pi m}{\delta t} \right)^{\frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{N-1} \int dq_j \equiv Dq(t)$$

Mit dieser Definition erhalten wir:

$$\langle q_F | \exp(-iHT) | q_I \rangle = \int Dq(t) \exp \left[i \cdot \int_0^T dt \frac{m}{2} \cdot \dot{q}^2(t) \right]$$

Übungsaufgabe:

Mit dem HAMILTON-Operator $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})$ ergibt sich:

$$\langle q_F | \exp(-iHT) | q_I \rangle = \int Dq(t) \exp \left[i \int_0^T dt \left[\frac{m}{2} \cdot \dot{q}^2(t) - V(q) \right] \right]$$

Der Integrand in der Exponentialfunktion ist nichts anderes als das Wirkungsfunktional:

$$S[q] = \int_0^T dt \left(\frac{m}{2} \cdot \dot{q}^2(t) - V(q) \right)$$

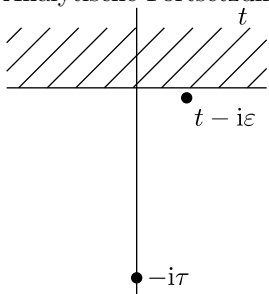
Der Nutzen dieses Formalismus wird uns später klar werden. Bis jetzt haben wir das ganze im Ortsraum formuliert, also mit Eigenzuständen des Ortes $|q\rangle$. Für beliebige Anfangs- und Endzustände gilt:

$$\langle F | \exp(-iHT) | I \rangle = \int dq_F \int dq_I \psi_F^*(q_F) \psi_I(q_I) \int Dq \exp(iS[q])$$

Die mathematisch strenge Definition der komplexen GAUSS-Integrale erhalten wir, wenn wir eine WICK-Rotation durchführen:

$$t \mapsto -i\tau : i dt \mapsto d\tau, \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = - \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2$$

Analytische Fortsetzung in der t -Ebene:



Gelegentlich interessieren wir uns für Grundzustände $|0\rangle$

$$Z \equiv \langle 0 | \exp(-iHT) | 0 \rangle$$

und für Korrelationsfunktionen:

$$\langle 0 | q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) | 0 \rangle \equiv \frac{1}{Z} \cdot \int Dq(t) q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n) \exp(iS[q])$$

1.1.3 Anmerkung zum klassischen Grenzfall

Die Wirkung ist ein Objekt, welches wir schon aus der Mechanik kennen. Das Integral

$$\int Dq(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q]\right)$$

enthält die Beiträge aus der Region, in der $S[q]$ extremal wird, was durch die Bedingung $\frac{\delta S[q]}{\delta q} = 0$ gegeben ist. Diese Forderung entspricht gerade den aus der Mechanik bekannten EULER-LAGRANGE-Gleichungen. Wenn die Wirkung von $O(\hbar)$ ist, dann gibt es Beiträge aus der Nachbarschaft der klassischen Lösung. Für $S \gg \hbar$ ist auf jeden Fall die klassische Lösung dominant, beispielsweise bei der Flugbahn eines Fußballes.

Kapitel 2

Feldtheorie

Angenommen, wir haben n kanonische Koordinaten. Wir wollen nun zur Feldtheorie übergehen durch folgende Definition:

$$\int Dq_1(t) Dq_2(t) \dots Dq_i(t) \dots Dq_n(t) \mathcal{D}\phi(\vec{x}, t)$$

i wird beim Übergang zur Feldtheorie zu einem kontinuierlichen „Index“ \vec{x} und $q_i(t)$ zu $\phi(\vec{x}, t)$. Die LAGRANGE-Funktion setzt sich bekanntlich aus der kinetischen und potentiellen Energie zusammen:

$$L(q_i, t) = \sum_i \left(\frac{\dot{q}_i^2}{2m_i} + V(q_i) \right) \mapsto \int d\vec{x} \mathcal{L}(\vec{x}, t) \text{ mit } S[\phi] = \int_0^T d^4x \mathcal{L}$$

\mathcal{L} bezeichnet man auch als LAGRANGE-Dichte. Die Amplitude für den Übergang von einer Konfiguration $\phi_a(\vec{x})$ zur Zeit $x_0 = 0$ nach $\phi_b(\vec{x})$ zur Zeit $x_0 = T$ ist $\langle \phi_b | \exp(-iHT) | \phi_a \rangle$.

$$\langle \phi_b | \exp(-iHT) | \phi_a \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_0^T d^4x \mathcal{L}[\phi] \right]$$

Es ist dabei über alle Feldkonfigurationen zu integrieren, die zur Zeit $x_0 = 0$ den Wert $\phi_a(\vec{x})$ und $x_0 = T$ den Wert $\phi_b(\vec{x})$ annehmen. Diskretisiert man die Raum-Zeit, so kommt man auf gewöhnliche Integrale zurück.

Kapitel 3

Korrelationsfunktionen und zeitgeordnete Produkte von Operatoren

Das einfachste Objekt, auf das wir hinsteuern wollen, ist der Vakuum-Erwartungswert für ein zeitgeordnetes Produkt zweier Feldoperatoren, also $\langle \Omega | T(\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)) | \Omega \rangle$, wobei der Index H für HEISENBERG-Bild steht. Objekte dieser Art liefern uns gerade die gewollten Streuamplituden. Wir betrachten:

$$I \equiv \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}(\phi) \right] \text{ mit Randbedingungen } \phi(\vec{x}, -T) = \phi_a(\vec{x}), \phi(\vec{x}, +T) = \phi_b(\vec{x}) \quad (\star\star)$$

Wir zerlegen nun das Integralmaß auf eine geschickte Art und Weise:

$$\int \mathcal{D}\phi(\vec{x}) = \int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \int_{\substack{\phi(x_1^0, \vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) \\ \phi(x_2^0, \vec{x}) = \phi_2(\vec{x})}} \mathcal{D}\phi(\vec{x})$$

Wir integrieren zuerst über alle Konfigurationen, für welche das Feld bei x_1^0 den Wert $\phi_1(\vec{x})$ und bei x_2^0 den Wert $\phi_2(\vec{x})$ annimmt und dann über alle Funktionen $\phi_1(\vec{x})$ und $\phi_2(\vec{x})$. Im Integral I ist $\phi(x_1^0, \vec{x})$ und $\phi(x_2^0, \vec{x})$ zunächst fest und kann vor die innere Integration gezogen werden.

$$I = \int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \phi_1(\vec{x})\phi_2(\vec{x}) \int_{\substack{\phi(x_1^0, \vec{x}) = \phi_1 \\ \phi(x_2^0, \vec{x}) = \phi_2}} \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}(\phi) \right]$$

Hat man beispielsweise ein hochdimensionales Integral, so kann man Integrationen über bestimmte Variablen außen vor lassen und erst zum Schluss durchführen. Das Integral

$$\int_{\substack{\phi(x_1^0, \vec{x}) = \phi_1 \\ \phi(x_2^0, \vec{x}) = \phi_2}} \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}(\phi) \right]$$

entspricht dabei drei Integralen, falls $x_1^0 < x_2^0$ für die Intervalle $\langle -T, x_1^0 \rangle$, $\langle x_1^0, x_2^0 \rangle$ und $\langle x_2^0, T \rangle$ oder – falls $x_2^0 < x_1^0$ – hat man die Intervalle $\langle -T, x_2^0 \rangle$, $\langle x_2^0, x_1^0 \rangle$ und $\langle x_1^0, T \rangle$. Betrachten wir nun den ersten Fall, also $x_1^0 < x_2^0$:

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \phi_1(\vec{x})\phi_2(\vec{x}) \cdot \langle \phi_0 | \exp(-iH(T-x_2^0)) | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | \exp(-iH(x_2^0-x_1^0)) | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \exp(-iH(x_1^0+T)) | \phi_a \rangle$$

KAPITEL 3. KORRELATIONSFUNKTIONEN UND ZEITGEORDNETE PRODUKTE VON OPERATOREN

Wir wollen nun die Faktoren $\phi_1(\vec{x})$ und $\phi_2(\vec{x})$ als SCHRÖDINGER-Operatoren in die Matrixelemente transportieren. Es gilt $\phi_1(\vec{x})|\phi_1\rangle = \phi_S(\vec{x})|\phi_1\rangle$.

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) \int \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) \langle \phi_0 | \exp(-iH(T-x_2^0)) \phi_S(\vec{x}) | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | \exp(-iH(x_2^0-x_1^0)) \phi_S(\vec{x}) | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | \exp(-iH(x_1^0+T)) | \phi_a \rangle$$

Wir machen außerdem von der Vollständigkeit

$$\int \mathcal{D}\phi_1(\vec{x}) |\phi_1\rangle \langle \phi_2| = \mathbf{1}, \quad \int \mathcal{D}\phi_2(\vec{x}) |\phi_2\rangle \langle \phi_2| = \mathbf{1}$$

Gebrauch und gehen außerdem ins HEISENBERG-Bild:

$$\begin{aligned} I &= \langle \phi_b | \exp(-iH(T-x_2)) \phi_S(\vec{x}_2) \exp(-iH(x_2^0-x_1^0)) \phi_S(\vec{x}_1) \exp(-iH(x_1^0+T)) | \phi_a \rangle = \\ &= \langle \phi_b | \exp(-iHT) \phi_H(x_2) \phi_H(x_1) \exp(-iHT) | \phi_a \rangle \end{aligned}$$

Falls $x_1^0 > x_2^0$, erhält man einen analogen Ausdruck:

$$I = \langle \phi_b | \exp(-iHT) \phi_H(x_1) \phi_H(x_2) \exp(-iHT) | \phi_a \rangle$$

Allgemein können wir das Produkt als zeitgeordnetes Produkt $T(\phi(x_1)\phi(x_2))$ schreiben.

$$I = \langle \phi_b | \exp(-iHT) T\{\phi_H(x_2)\phi_H(x_1)\} \exp(-iHT) | \phi_a \rangle$$

Nun sind wir am Verhalten für große Zeiten, also für $T \mapsto \infty$ interessiert. Dazu wenden wir $\exp(-iHT)$ auf den Anfangszustand $|\phi_a\rangle$ an und erhalten, wobei E_n die Eigenenergien des Systems seien:

$$\exp(-iHT)|\phi_a\rangle = \sum_n \exp(-iE_n T) |n\rangle \langle n|\phi_a\rangle$$

Wir setzen geschickt $T \mapsto \infty(1-i\varepsilon)$ und erhalten:

$$\exp(-iHT)|\phi_a\rangle \xrightarrow{T \mapsto \infty(1-i\varepsilon)} \exp(-iE_0 \cdot \infty(1-i\varepsilon)) |\Omega\rangle \langle \Omega|\phi_a\rangle$$

Es gewinnt also der energetisch niedrigste Zustand. Ebenso projiziert $\langle \phi_b | \exp(-iHT)$ auf $\exp(-iE_0 \cdot \infty(1-i\varepsilon)) \langle \phi_b | \Omega\rangle \langle \Omega|$. Damit ergibt sich:

$$\langle \Omega | T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \mapsto \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)\phi(x_2) \exp\left[i \cdot \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}\right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left[i \cdot \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}\right]}$$

Wir erinnern uns an eine ähnliche Formel, nämlich die GELLMANN-LOW-Formel im Wechselwirkungsbild:

$$\langle \Omega | T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} | \Omega \rangle = \lim_{T \mapsto \infty(1-i\varepsilon)} \frac{\left\langle 0 \left| T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\} \exp\left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)\right] \right| 0 \right\rangle}{\left\langle 0 \left| \exp\left[-i \int_{-T}^T dt H_I(t)\right] \right| 0 \right\rangle}$$

3.1 „Fingerübungen“ zum erzeugenden Funktional bei Anwesenheit von Anharmonizität

3.1.1 Eindimensionale Integrale

Wir definieren eine Größe $Z(J)$:

$$Z(J) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left(-\frac{m^2}{2} \cdot q^2 - \frac{\lambda}{4!} \cdot q^4 + J \cdot q\right)$$

Für $\lambda = 0$ liegt ein GAUSS-Integral vor, das wir schon behandelt haben. Für $\lambda \neq 0$ machen wir eine Störungsreihe in λ :

$$Z(J) = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left(-\frac{m^2}{2} \cdot q^2 + J \cdot q\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \cdot q^4 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\lambda}{4!} \cdot q^4\right]^2 + \dots\right)$$

☞ 1.Term:

$$Z^{(1)}(J) = \left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)$$

☞ Höhere Terme (q^4 -Term):

Man leitet viermal nach J ab:

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int dq \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \cdot \left(\frac{d}{dJ}\right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right]^2 + \dots\right) \exp\left(-\frac{m^2}{2} \cdot q^2 + J \cdot q\right) = \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \cdot \left(\frac{d}{dJ}\right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right]^2 + \dots\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dq \exp\left(-\frac{m^2}{2} \cdot q^2 + J \cdot q\right) = \\ &= \boxed{\exp\left(-\frac{\lambda}{4!} \cdot \left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right) \left(\frac{2\pi}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)} \end{aligned}$$

$$\langle q^n \rangle = \frac{\left(\frac{d}{dJ}\right)^n Z(J) \Big|_{J=0}}{Z(J) \Big|_{J=0}}$$

Beispiel:

Die Terme $O(\lambda)$ und $O(J^4)$ erfordern den J^8 -Term J^8 -Term in $\exp\left(\frac{J^2}{2m^2}\right)$, also $\frac{1}{4!} \left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^4$. Wir wenden nun $-\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4$ aus der Entwicklung von $\exp\left(-\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right)$ an:

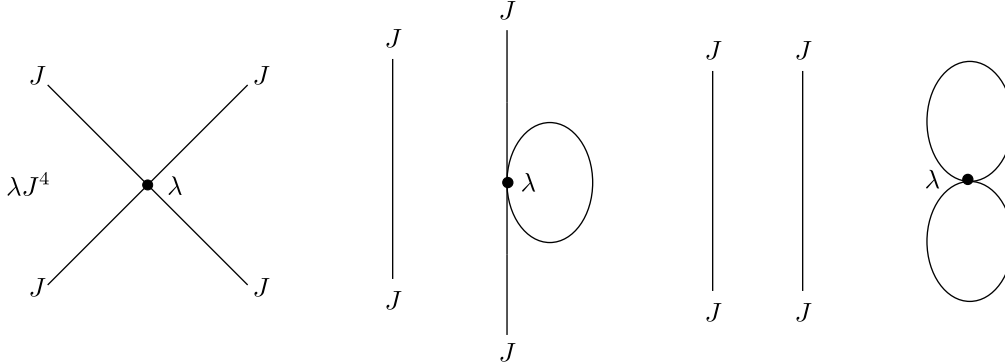
$$-\frac{\lambda}{4!} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2m^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{d}{dJ}\right)^4 J^8 = \boxed{-\lambda \cdot \frac{8!}{(4!)^3} \cdot \frac{J^4}{(2m^2)^4}}$$

Den Term $O(\lambda^2)$ und $O(J^6)$ folgt aus:

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{\lambda}{4!} \left(\frac{d}{dJ}\right)^4\right]^2 \frac{1}{7!} \left(\frac{J^2}{2m^2}\right)^7 =$$

3.1.2 Graphische Darstellung

- 1.) Externe Beine \sim Potenz in J
- 2.) Vertizes \sim Potenz in λ



Es existieren jeweils vier Linien: $(\frac{1}{2m^2})^4$

3.2 Feldtheorie: Funktionalableitung und erzeugendes Funktional

Wir definieren

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x-y) \text{ und } \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \phi(x)$$

aufgrund der folgenden Analogie:

$$\frac{d}{dJ_i} J_j = \delta_{ij} \text{ und } \frac{d}{dJ_j} \sum_k J_k \phi_k = \phi_j$$

Wir können somit auch eine Kettenregel definieren wie folgt:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[i \int d^4y J(y)\phi(y) \right] = i\phi(x) \cdot \exp \left[i \int d^4y J(y)\phi(y) \right]$$

Ableitungen von J im Funktional werden durch partielle Integration umgeformt, wie beispielsweise:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y (\partial_\mu J(y)) V^\mu(y) = -\partial_\mu V^\mu(x)$$

Dazu definieren wir nun das erzeugende Funktional:

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right)$$

Wir haben also ein physikalisches System mit einer äußeren Quelle. Dieser Zugang wurde übrigens von SCHWINGER propagiert.

3.2.1 Green-Funktion oder Korrelationsfunktion

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\}|0\rangle = \frac{1}{Z_0} \cdot \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0} \text{ mit } Z_0 = Z[J=0]$$

Analoges gilt für $\langle 0|T(\phi\phi\phi)|0\rangle$. $Z[J]$ kann für ein freies Feld berechnet werden und damit auch Ausdrücke nach Entwicklung in λ . In der freien Theorie taucht auf:

$$\int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \cdot (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2) + J\phi \right] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon) \phi + J\phi \right]$$

3.2. FELDTHEORIE: FUNKTIONALABLEITUNG UND ERZEUGENDES FUNKTIONAL

Wir machen folgende Substitution:

$$\phi'(x) \equiv \phi(x) - i \int d^4y D_F(x-y) J(y)$$

D_F entspricht dem Inversen zu $\partial^2 + m^2 - i\varepsilon$, in dem Sinne, dass $(\partial^2 + m^2 - i\varepsilon)D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$. Dies ist die Definition der GREEN-Funktion D_F des FEYNMAN-Propagators.

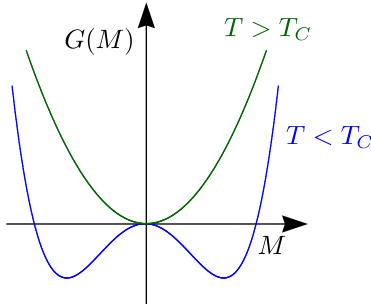
$$\int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi' (-\partial^2 - m^2 + i\varepsilon) \phi' \right] - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) (-iD_F(x-y)J(y))$$

Dies kann als Übung zu Hause nachgerechnet werden! Im Funktional-Integral entspricht die Substitution einer Verschiebung um eine Konstante:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi' \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_0(\phi') \right] \cdot \exp \left[-\frac{i}{2} \cdot \int d^4x d^4y J(x) \cdot [-iD_F(x-y)J(y)] \right] \quad \text{und} \quad \frac{Z[J]}{Z_0} = \exp \left[-\frac{1}{2} \int dx dy J D_F \right]$$

Dies gilt für das freie Feld.

3.2.2 Exkurs: Landau-Funktionale



$$M = \begin{cases} 0 & \text{für } T > T_C \\ \pm \left[\frac{b}{2c} \cdot (T_C - T) \right]^{\frac{1}{2}} & \text{für } T < T_C \end{cases} \quad \text{für } H = 0$$

Die lokale Beschreibung ist möglich durch

$$M = \int d^3x S(\vec{x})$$

mit dem Ansatz:

$$G[S] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} S)^2 + b \cdot (T - T_C) \cdot S^2 + C \cdot S^4 - H \cdot S \right] \quad \text{mit } H = H(\vec{x})$$

Wir suchen das Minimum des Funktionals der freien Energie über die Funktionalableitung:

$$0 = \frac{\delta G[S]}{\delta S} = -\vec{\nabla}^2 S + 2b \cdot (T - T_C) \cdot S + 4C \cdot S^3 - H$$

Für $T \approx T_C$ ist S klein und damit lässt sich der S^3 -Term vernachlässigen. Eventuell kann man Störungstheorie durchführen.

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + 2b \cdot (T - T_C) \right) S(\vec{x}) = H(\vec{x})$$

Man fragt sich beispielsweise, wie sich ein Magnetfeld $H(\vec{x})$ auf die Spins an einer Stelle auswirkt. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung erfolgt über die GREEN-Funktion $D(\vec{x})$:

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + 2b \cdot (T - T_C) \right) D(\vec{x}) = H_0 \cdot \delta(\vec{x})$$

Die GREEN-Funktion lautet dann:

$$D(\vec{x}) = H_0 \cdot \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \cdot \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \cdot \frac{1}{k^2 + 2b \cdot (T - T_C)} = \boxed{\frac{H_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \cdot \exp\left(-\frac{r}{\xi}\right)} \text{ mit } \xi = [2b \cdot (T - T_C)]^{-\frac{1}{2}}$$

ξ bezeichnet man als Korrelationslänge. Für $T \approx T_C$ hat man immer größere Bereiche, in denen die Spins ausgerichtet sind. ξ divergiert für $T \mapsto T_C$. Einerseits beschreibt $D(\vec{x})$ die Spin-Dichte bei Anwesenheit von $H = H_0\delta(\vec{x})$, andererseits ist D proportional zur Korrelationsfunktion $\langle S(\vec{x})S(0) \rangle$ und beschreibt damit die Korrelation zwischen der Spin-Dichte an zwei Punkten. Das Verhalten $\xi \sim (T - T_C)^{-\frac{1}{2}}$ hängt nicht ab vom Material, sondern nur von der Annahme über TAYLOR-Entwicklung. Berücksichtigt man außerdem Quantenkorrekturen, so erhält man:

$$\langle S(x)S(0) \rangle = A \cdot \frac{1}{r^{1+\eta}} \cdot f\left(\frac{r}{\xi}\right)$$

f ist für viele Systeme gleich; man sagt, dass diese Systeme in der gleichen „Unitaritätsklasse“ liegen. Es gilt dann $M \propto (T - T_C)^\beta$, wobei β der kritische Exponent darstellt, der im allgemeinen $\neq \frac{1}{2}$ ist.

Kapitel 4

Elektromagnetisches Feld im Pfadintegralformalismus

(Kanonischer Formalismus: GUPTA-BLEULER, aber nichtabelsche Theorie?)

4.1 Ausgangspunkt

Wir beginnen mit der Wirkung S als Funktional des Vektorpotentials und betrachten wieder das Funktionalintegral $\int \mathcal{D}A \exp(iS[A])$ (*). $S[A]$ ist die Wirkung des freien Feldes:

$$\begin{aligned} S[A] &= \int dx \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] = \int dx \left(-\frac{1}{4} \right) \cdot (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \cdot (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int dx A_\mu(x) \cdot (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) = \frac{1}{2} \cdot \int dk \tilde{A}_\mu(k) \cdot (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k) \end{aligned}$$

Man muss über alle Feldkonfigurationen A integrieren:

$$\int \mathcal{D}A = \int \mathcal{D}A^0 \int \mathcal{D}A^1 \int \mathcal{D}A^2 \int \mathcal{D}A^3$$

Die Wirkung $S[A]$ ist gleich null für eine ganze Klasse von Funktionen, nämlich $\tilde{A}_\mu \sim k_\mu \Lambda(k)$. Dann ist das GAUSS-Integral divergent. Die Gleichung

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \tilde{D}^{\nu\varrho} = i \delta_\mu^\varrho$$

hat keine Lösung. Das Problem ist, dass wir über Konfigurationen vom Typ $A_\mu(x) = \partial_\mu \Lambda(x)$, die eichäquivalent zu $A_\mu(x) = 0$ sind, integrieren. An dieser Stelle kommen wir zum FADDEEV-POPOV-Trick. Betrachten wir allgemein eine Funktion $G(A)$, für welche wir zur Eichfixierung fordern, dass $G[A] = 0$ ist. Beispielsweise entspricht $G[A] = \partial_\mu A^\mu = 0$ der LORENTZ-Eichung. Wenn wir $\delta(G[A])$ im Funktional-Integral einschieben, so integrieren wir nicht mehr über eichinvariante Konfigurationen. Wir verwenden:

$$1 = \int \mathcal{D}\Lambda(x) \delta(G(A^\Lambda)) \cdot \det \left(\frac{\delta G(A^\Lambda)}{\delta \Lambda} \right) \text{ mit } A^\Lambda = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$$

Dies stellt gewissermaßen eine Verallgemeinerung dar von:

$$1 = \left(\prod_{i=1}^n \int dl_i \right) \cdot \delta^{(n)}(\vec{g}(\vec{l})) \cdot \det \left(\frac{\partial g_i}{\partial l_j} \right)$$

\vec{g} und \vec{l} sind hierbei n -dimensionale Vektoren.

$$G(A^\Lambda) = \partial^\mu A_\mu^\Lambda = \partial^\mu A_\mu + \partial^2 A; \det\left(\frac{\partial G(A^\Lambda)}{\partial \Lambda}\right) = \det(\partial^2)$$

Die Determinante ist damit unabhängig von Λ und A . Dann handelt es sich dabei nur um einen Normierungsfaktor, den wir vor das Integral ziehen können.

$$\int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) = \det\left(\frac{\delta G(A^\Lambda)}{\delta \Lambda}\right) \cdot \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) \cdot \delta(G(A^\Lambda))$$

Wir machen eine Variablen-Transformation des inneren Integrals, also $A \mapsto A^\Lambda$, $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\Lambda$. Die Wirkung ändert sich dabei nicht, weil sie ja eichinvariant ist: $S[A] = S[A^\Lambda]$. Jetzt hängt der innerste Integrand nur ab von A^Λ ; damit wollen wir A^Λ wieder in A umbenennen. Lange Rede, kurzer Sinn; die Λ -Abhängigkeit fällt heraus:

$$\int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) = \det\left(\frac{\delta G(A^\Lambda)}{\delta \Lambda}\right) \cdot \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) \cdot \delta(G(A))$$

Die innerste Integration geht nur über eichinäquivalente Feldkonfigurationen. Im nächsten Schritt wählen wir $G(\Lambda) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$, als Verallgemeinerung für die LORENTZ-Bedingung mit $\omega(x) = 0$.

$$\int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) = \det(\partial^2) \cdot \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) \cdot \delta(\partial A - \omega)$$

Dies gilt für alle $\omega(x)$, also auch für Linearkombination mit verschiedenen ω . Wähle als Gewicht $\exp\left(-i \int dx \frac{\omega^2}{2\xi}\right)$, wobei ξ konstant sein soll und integriere über alle ω :

$$\begin{aligned} I &= N(\xi) \cdot \int \mathcal{D}\omega \exp\left[-i \int dx \frac{\omega^2}{2\xi}\right] \det(\partial^2) \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp(iS[A]) \cdot \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega) = \\ &= N(\xi) \cdot \det(\partial^2) \cdot \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp\left[i\left(S[A] - \int dx \frac{(\partial A)^2}{2\xi}\right)\right] \end{aligned}$$

Korrelationsfunktionen sind nun gegeben durch:

$$\langle \Omega | TO(A) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A O(A) \cdot \exp(iS[A])}{\int \mathcal{D}A 1 \cdot \exp(iS[A])}$$

O sei eichinvariant, womit sich weiter ergibt:

$$\frac{\int \mathcal{D}A O(A) \cdot \exp\left[i \cdot \int dx \left(\mathcal{L} - \frac{(\partial A)^2}{2\xi}\right)\right]}{\int \mathcal{D}A 1 \cdot \exp\left[i \cdot \int dx \left(\mathcal{L} - \frac{(\partial A)^2}{2\xi}\right)\right]}$$

Den freien Propagator erhält man aus (nachrechnen!):

$$\left(-k^2 g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k_\mu k_\nu\right) \tilde{D}_F^{\nu e}(k) = i\delta_\mu^e \Rightarrow \tilde{D}_F^{\nu e} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \cdot \left(g^{\nu e} - (1 - \xi) \cdot \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)$$

☞ $\xi = 0$: LANDAU-Eichung

☞ $\xi = 1$: FEYNMAN-Eichung

Bei Eichtransformationen lassen sich transversale Zustände nicht wegtransformieren. Man kann zwar longitudinale Photonen erzeugen; diese koppeln jedoch nicht an die Wechselwirkung.

4.2 Spinor-Felder und Pfadintegrale

Wir führen als Ansatz klassische Felder antivertauschende Zahlen bzw. Funktionen des Ortes ein. Wir lassen uns hier ad hoc vom kanonischen Formalismus inspirieren. Insbesondere kommen wir nun zu den GRASSMANN-Zahlen θ und η , die folgende Eigenschaften besitzen:

- 1.) $\theta \cdot \eta + \eta \cdot \theta = 0$, insbesondere $\theta^2 = 0$
- 2.) $(\theta\eta)$ vertauscht mit anderen GRASSMANN-Zahlen: $(\theta\eta)\xi \stackrel{?}{=} \pm\xi(\theta\eta)$
- 3.) Durch Addition zweier GRASSMANN-Zahlen und Multiplikation einer GRASSMANN-Zahl mit einer komplexen Zahl erhält man wieder eine GRASSMANN-Zahl.
- 4.) Integrale in Analogie zu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ mit x als GRASSMANN-Variable

Welche Funktionen sind überhaupt relevant? Dazu wird $f(\theta)$ entwickelt und liefert offensichtlich nur zwei Terme. Es gilt nämlich $f(\theta) = A + B \cdot \theta$, da alle höheren Ordnungen bezüglich θ aufgrund der Eigenschaft $\theta^2 = 0$ verschwinden.

a.) $\int f(\theta) d\theta = \int (A + B \cdot \theta) d\theta$ ist linear in A und B .

b.) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a) dx$ für beliebige a

$$\int f(\theta) d\theta = \int (A + B \cdot \theta) d\theta \stackrel{\theta=\theta+\eta}{=} \int d\theta [(A + B \cdot \eta) + B \cdot \theta] \Rightarrow \int d\theta (A + B \cdot \eta) = 0$$

Die Forderung ist, dass ein Integral unabhängig von θ verschwinden muss:

$$\int d\theta 1 = 0, \quad \int d\theta \theta = \text{gewöhnliche Zahl} \equiv 1$$

Ferner gilt:

$$\int d\theta \int d\eta \eta \theta = \left(\int d\theta \right) \left(\int d\eta \right) = 1$$

- 5.) Komplexe GRASSMANN-Zahlen: $(\theta\eta)^* = \eta^* \theta^*$

Wir definieren die unabhängigen Variablen θ und θ^*

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{2}}, \quad \theta^* = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}}$$

und weiter:

$$\int d\theta^* \int d\theta \theta \theta^* = 1$$

- 6.) GAUSS-Integral:

$$\int d\theta^* d\theta \exp(-\theta^* b \theta) = \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* b \theta) = \int d\theta^* d\theta (1 + \theta \theta^* b) = b$$

7.) Mehrdimensionale Integrale:

Wir betrachten das Verhalten von

$$\prod_{i=1}^n \theta'_i = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} (\theta'_{i_1} \cdot \theta'_{i_2} \cdot \dots \cdot \theta'_{i_n})$$

unter unitären Transformationen $\theta'_i = U_{ij} \theta_j$.

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \theta'_i &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_n j_n} \cdot \theta_{j_1} \theta_{j_2} \dots \theta_{j_n} = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \dots U_{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \left(\prod_{j=1}^n \theta_j \right) = \\ &= (\det U) \prod_{i=1}^n \theta_i \end{aligned}$$

Das Produkt der Ausgangsvariablen kann man als Produkt der Endvariablen mit dem Vorfaktor einer Determinante schreiben. Als Übung kann man dies für $n = 2$ nachrechnen.

$$\left[\prod_{i=1}^n \left(\int d\theta_i^* d\theta_i \right) \right] f(\theta_i^* \theta_i)$$

Wir brauchen genau je einen Faktor $\theta_i^* \theta_i$ für jedes i . Eine unitäre Transformation $\theta \mapsto U\theta$ und $\theta^* = U^* \theta^*$ liefert im Integranden einen Faktor $\det(U) \cdot \det(U^*) = 1$.

4.2.1 Gauß-Integral

$$\left[\prod_{i=1}^n \int d\theta_i^* d\theta_i \right] \exp(-\theta_i^* B_{ij} \theta_j)$$

Wir schieben in der Exponentialfunktion $UU^{-1} = 1$ ein, womit sich mit

$$U^{-1}BU = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_n \end{pmatrix}, \quad U_{ji}^{-1} \theta_i = \theta'_j$$

$$\begin{aligned} &\left[\prod_{i=1}^n \int d\theta_i^* d\theta_i \right] \exp\left(-\sum_{i=1}^n \theta_i^* \theta'_i b_i\right) = \left[\prod_{i=1}^n \int d\theta_i^* d\theta'_i \right] \left(1 - \sum_{i=1}^n (\theta_i^* \theta_i b_i) + \dots\right) = \\ &= \left[\prod_{i=1}^n \int d\theta_i^* d\theta'_i \right] [b_1 \theta_1^* \theta_1 b_1 \theta_2^* \theta_2 \dots b_n \theta_n^* \theta_n] = (-1)^n \cdot (b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) = (-1)^n \cdot \det(B) \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Für gewöhnliche Zahlen gilt $\frac{(2\pi)^n}{\det(A)}$. Ferner ist:

$$\left[\prod_{i=1}^n \int d\theta_i^* d\theta_i \right] \theta_k \theta_l \exp(-\theta_i^* B_{ij} \theta_j) = (\det B) (B^{-1})_{kl}$$

Für Erwartungswerte erhalten wir also

$$\frac{\int \dots \theta_k \theta_l \dots}{\dots 1 \dots} = (B^{-1})_{kl}$$

wie für gewöhnliche Zahlen.

4.2.2 Dirac-Propagator

Wir machen den Ansatz $\psi(x) = \sum_i \psi_i \phi_i(x)$, wobei ψ_i GRASSMANN-Zahlen und $\phi_i(x)$ Basisfunktionen seien.

Dann ist der Propagator für ein freies Feld gegeben durch:

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) \exp\left(i \int dx \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi\right)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi 1 \cdot \exp\left(i \int dx (\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi)\right)}$$

Im Nenner haben wir den Ausdruck $\det(i\not{\partial} - m)$ und im Zähler $\det(i\not{\partial} - m) \cdot \text{Inverses}[-i(i\not{\partial} - m)]$. Damit folgt für den Propagator:

$$\langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)|0\rangle = \text{Inverses}[-i(i\not{\partial} - m)] = \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i \cdot \exp[-ik(x_1 - x_2)]}{\not{k} - m + i\varepsilon}\right)_{\alpha\beta}$$

Kommen wir zum erzeugenden Funktional für das DIRAC-Feld. Die Frage, die wir uns nun stellen müssen, ist über die Beschaffenheit der externen Quelle. Der Quelle-Term in der äußeren Wirkung soll ein Skalar sein. Für ein freies Feld gilt:

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \left[i \int dx (\bar{\psi}(x)(i\not{\partial} - m)\psi(x) - \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)) \right]$$

η und $\bar{\eta}$ seien GRASSMANN-Felder. Nach Integration erhalten wir:

$$\frac{Z[\bar{\eta}, \eta]}{Z[\bar{\eta}, \eta]_{\bar{\eta}=\eta=0}} = \exp\left(- \left[\int dx dy \bar{\eta}(x) S_F(x - \eta) \eta(y) \right]\right)$$

Korrelationsfunktionen erhält man aus der Funktionalableitung bezüglich η und $\bar{\eta}$. In der Quantenelektrodynamik ersetzt man die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante Ableitung $D = \partial + ieA$:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 = \mathcal{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi$$

Die FEYNMAN-Regeln sind offensichtlich. Achtung: Die GRASSMANN-Variablen liefern ein anderes Vorzeichen.

4.2.3 Symmetrien

An dieser Stelle wollen wir mittels des Formalismus Symmetrien diskutieren. Betrachten wir zunächst die Bewegungsgleichungen und Dreipunktfunktionen für eines freies Feld:

$$\langle \Omega|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3))|\Omega\rangle = Z_{J=0}^{-1} \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \text{ mit } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (\star)$$

In der klassischen Theorie liefert die Variation der Wirkung die Bewegungsgleichungen:

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\phi} = \frac{\delta\left(\int dx^n \mathcal{L}[\phi]\right)}{\delta\phi} \Rightarrow (\partial^2 + m^2)\phi = 0$$

Aus Gleichung (\star) ergibt sich unter der Transformation $\phi \mapsto \phi' = \phi + \varepsilon$:

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3)$$

Wir entwickeln nach ε :

$$\int dx \mathcal{L}[\phi'] = \int dx \mathcal{L}[\phi] + \int dx \varepsilon(x)(-\partial^2 - m^2)\phi(x)$$

Unter Entwicklung der Exponentialfunktion folgt:

$$\begin{aligned} \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi']\right) &= \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) + \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \cdot \int dx \varepsilon(-\partial^2 - m^2)\phi \\ 0 &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \cdot i \cdot \left[i \cdot \left(\int dx \varepsilon(x)(-\partial^2 - m^2)\phi(x) \right) \cdot \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\varepsilon(x_2)\phi(x_3) + \phi(x_1)\phi(x_2)\varepsilon(x_3) \right] \end{aligned}$$

Wir führen die Funktionalableitung nach ε durch, betrachten also $\frac{\delta}{\delta\varepsilon(x)}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \cdot [(\partial^2 + m^2)\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + \\ &\quad + i\delta(x - x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) + i\delta(x - x_2)\phi(x_1)\phi(x_3) + i\delta(x - x_3)\phi(x_1)\phi(x_2)] \end{aligned}$$

Wir bringen das Pfadintegral auf die linke Seite und erhalten:

$$\begin{aligned} (\partial^2 + m^2)\langle\Omega|T(\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3))|\Omega\rangle &= -i\delta(x - x_1)\langle\Omega|T(\phi(x_2)\phi(x_3))|\Omega\rangle - \\ &\quad + i\delta(x - x_2)\langle\Omega|T(\phi(x_1)\phi(x_3))|\Omega\rangle - i\delta(x - x_3)\langle\Omega|T(\phi(x_1)\phi(x_2))|\Omega\rangle \end{aligned}$$

Das allgemeine Resultat ist folgendes:

$$\left\langle\Omega\left|\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int dy \mathcal{L}[\phi]\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\right|\Omega\right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle\Omega|\varphi(x_1)\dots i\delta(x - x_i)\dots\varphi(x_n)|\Omega\rangle$$

$\langle \ \rangle$ steht für einen Korrelator; Ableitungen bei Bewegungsgleichungen stehen außerhalb des T-Produkts. Man spricht auch oft von der SCHWINGER-DYSON-Gleichung.

4.2.4 Erhaltungssätze, Noether-Ströme

Es ist erstaunlich, wieviel man auch skalaren Feldern ohne Wechselwirkung machen kann. Betrachten wir nämlich folgendes Beispiel:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$$

\mathcal{L} ist invariant unter lokalen Phasentransformationen, also $\phi \mapsto \phi' = \exp(i\alpha(x))\phi$. Das Integrationsmaß ist auch invariant; es gilt $\int \mathcal{D}\phi = \int \mathcal{D}\phi'$. (Das Maß ist invariant unter der lokalen Phasentransformation und \mathcal{L} unter der globalen Phasentransformation.) Wir betrachten nun infinitesimale Transformationen $\phi \mapsto \phi' = \phi + i\alpha(x)\phi$ mit infinitesimalem $\alpha(x)$:

$$\int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \phi(x_1)\phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi']\right) \phi'(x_1)(\phi')^*(x_2) \Big|_{\phi'=\phi+i\alpha(x)\phi}$$

Wir ziehen die beiden Gleichungen voneinander ab und entwickeln in α :

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi^* \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx \mathcal{L}[\phi]\right) \cdot \left[i \int dx [(\partial_\mu\alpha(x))i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)] \right] + \\ &\quad + i\alpha(x_1)\phi(x_1)\phi^*(x_2) + \phi(x_1)[-i\alpha(x_2)\phi^*(x_2)] \end{aligned}$$

Der erste Term rührt von der Entwicklung von \mathcal{L} her (nachrechnen!). Bilden wir nun die Funktionalableitung nach $\alpha(x)$:

$$\partial_\mu\langle\Omega|j^\mu(x)\phi(x_1)\phi(x_2)|\Omega\rangle = (-i)\langle\Omega|i\phi(x_1)\delta(x - x_1)\phi^*(x_2) + \phi(x_1)(-i)\delta(x - x_2)\phi^*(x_2)|\Omega\rangle$$

Für eine klassische Theorie wäre der Strom erhalten; hier bekommt man jedoch zusätzlich noch Kontaktterme. Letzten Endes läuft das unter TAKAHASHI-Identitäten für Ströme.

$$j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$$

Aus der Quantenelektrodynamik kennen wir die WARD-Identität.

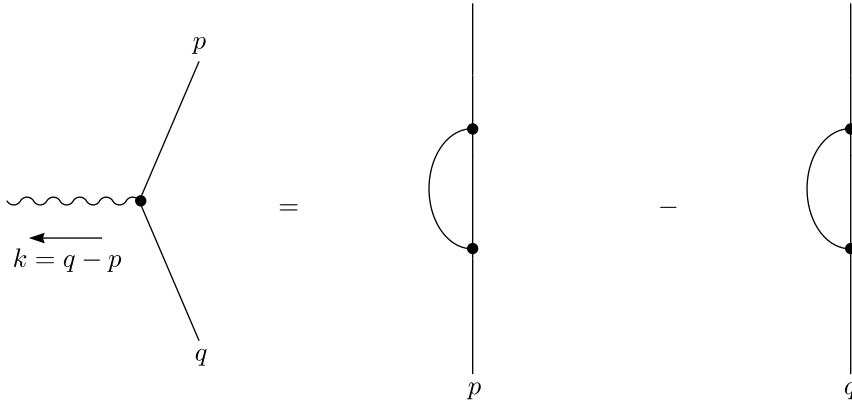
$$i\partial_\mu \langle \Omega | T (j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)) | \Omega \rangle = -ie\delta(x-x_1) \cdot \langle 0 | T \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle + ie\delta(x-x_2) \langle 0 | T \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle$$

Wir gehen über in den Impulsraum:

$$\underbrace{\int dx \exp(-ikx)}_{\text{auslaufend}}, \underbrace{\int dx_1 \exp(iqx_1)}_{\text{einlaufend}}, \underbrace{\int dx_2 \exp(-ipx_2)}_{\text{auslaufend}}$$

$$-ik_\mu \mathcal{M}^\mu(k, p, q) = -ie\mathcal{M}(p, q - k) + ie\mathcal{M}_0(p + k, q)$$

Mit \mathcal{M} bezeichnen wir das Matrixelement. Betrachten wir die zugehörigen FEYNMAN-Diagramme:



In der niedrigsten Ordnung ergibt sich:

$$k_\mu \left(\frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{q} - m} \right) = \frac{1}{\not{p} - m} (\not{q} - \not{p}) \frac{1}{\not{q} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} (\not{q} - \not{p} - m + m) \frac{1}{\not{q} - m} = \frac{1}{\not{p} - m} - \frac{1}{\not{q} - m}$$

Dies ist ein einfaches Beispiel für die WARD-Identität. Die Kontaktterme tragen nicht zur S-Matrix bei:

$$G \quad G(p_1^2 - m^2) \cdot (p_2^2 - m^2) \cdot (p_3^2 - m^2) \cdot (p_4^2 - m^2) \Big|_{\substack{p_1^2 = m^2 \\ p_2^2 = m^2 \\ p_3^2 = m^2 \\ p_4^2 = m^2}}$$

Kapitel 5

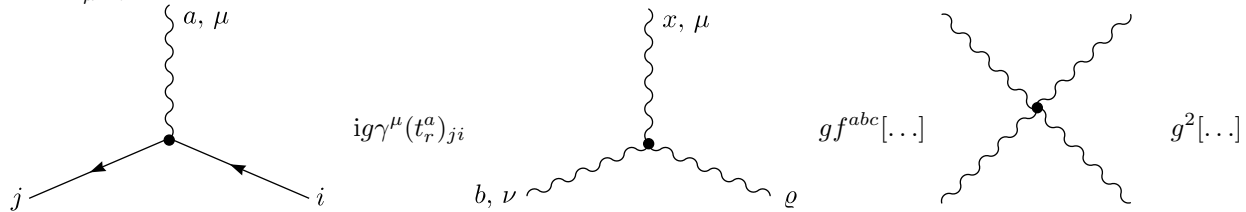
Pfadintegrale und nichtabelsche Eichtheorien

5.1 Allgemeine Diskussion

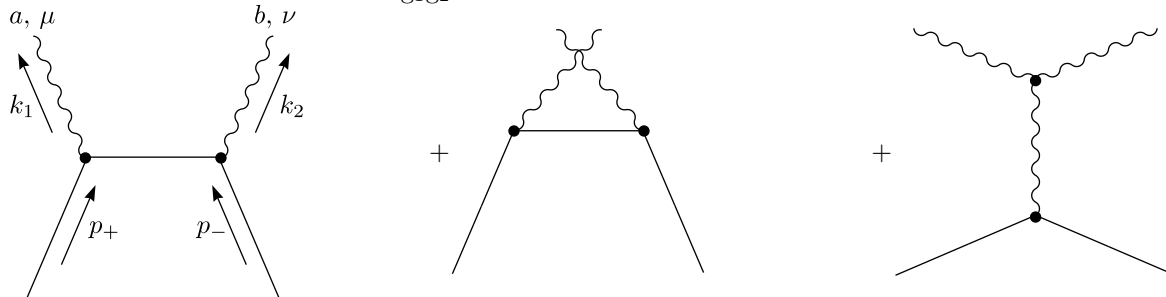
Wir betrachten folgende LAGRANGE-Dichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \text{ mit } F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\nu^c$$

f^{abc} sind die sogenannten Strukturkonstanten und D_μ ist gegeben durch $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t_\mu^a$. t_μ^a sind hierbei Darstellungsmatrizen der LIE-Algebra, wenn ψ sich unter der Darstellung transformiert; für diese Matrizen gilt $[t_\mu^a, t_r^b] = if^{abc}t_r^c$. Kommen wir zu den FEYNMAN-Regeln:



Wir betrachten den Prozess $\bar{f}f \mapsto g_1 g_2$:



In der **abelschen Theorie**, ohne Diagramm ③ und für $\not{p}_+ = m, \not{p}_- = -m$ gilt $\mathcal{M}_\mu k_1^\mu = 0$, ist **also** unabhängig von der Wahl von ε_2 . In der **nicht-abelschen Theorie** gilt $\mathcal{M}_{\mu\nu} k_1^\mu \varepsilon_2^\nu$, wenn wir fordern, dass ε_2 transversal ist. Im allgemeinen ist $\mathcal{M}_{\mu\nu} k_1^\mu \varepsilon_2^\nu \neq 0$. Für ein masseloses Eichboson mit Impuls k_μ haben wir zwei physikalische und zwei unphysikalische Polarisationszustände. Wir wählen $k^\mu = (k, 0, 0, k)$; dann ist:

$$\varepsilon_1^T(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2^T(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies sind physikalische Polarisationszustände. Unphysikalische Zustände sind gegeben durch:

$$\varepsilon^{+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{k^\mu}{\sqrt{2}k_0}, \quad \varepsilon^{-\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}k_0} \begin{pmatrix} k_0 \\ -\vec{k} \end{pmatrix}$$

Dabei handelt es sich um lichtartige Vektoren. Die transversalen Polarisationsvektoren stehen senkrecht auf den longitudinalen, also ist $\varepsilon_i^T \varepsilon^\pm = 0$; außerdem gilt offensichtlich $\varepsilon_1^T \varepsilon_j^T = -\delta_{ij}$, $\varepsilon^{\pm 2} = 0$ und $\varepsilon^+ \varepsilon^- = 1$. Weiterhin ist:

$$-g_{\mu\nu} = -\varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^+ - \varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^- + \sum_i \varepsilon_{i\mu}^T \varepsilon_{i\nu}^T$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um einen Zustandsraum mit indefiniter Metrik. In der Quantenelektrodynamik gilt $\mathcal{M}_\mu k^\mu = 0$ für k auf und weg von der Massenschale,

$$\sum_i \varepsilon_{i\mu}^T \varepsilon_{i\nu}^T \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2}$$

da $-g^{\mu\nu}$ obige Form hat und bei $\varepsilon^+ \varepsilon^-$ mindestens ein k_μ oder k_ν auftaucht.

5.2 Faddeev-Popov-Lagrange-Dichte

Ausgangspunkt ist:

$$\int \mathcal{D}A \exp \left[i \int dx - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 \right]$$

Das Argument der Exponentialfunktion ist invariant gegenüber Eichtransformationen. Integration über eichäquivalente Konfigurationen führt zu Divergenzen. Damit müssen wir eine die Eichfixierung $G(A) = 0$ einführen und die Integration bezüglich eichäquivalenter Richtungen faktorisieren. Die Eichtransformation für die Felder lautet:

$$(A_\mu^\Lambda)^a t^a = \exp(i\Lambda^a t^a) \left[A_\mu^a t^a + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] \exp(-i\Lambda^c t^c)$$

Wir betrachten eine infinitesimale Eichtransformation:

$$(A_\mu^\Lambda)^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu A^a + f^{abc} A_\mu^b \Lambda^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \Lambda^a$$

$G(A^\Lambda)$ ist die Eichbedingung. Wir führen eine Eichfixierung in Form einer δ -Funktion ein. Dazu schieben wir das Einselement ein:

$$1 = \int \mathcal{D}\Lambda(x) \delta(G[A^\Lambda]) \det \left(\frac{\delta G[A^\Lambda]}{\delta \Lambda} \right)$$

$$\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp [iS[A]] \cdot \delta(G[A]) \cdot \det \left(\frac{\delta G[A^\Lambda]}{\delta \Lambda} \right)$$

Die Determinante hängt nicht aber von Λ , jedoch von A . Nun wählen wir $G[A]$ in Form einer LORENTZ-Eichbedingung mit einer zusätzlichen beliebigen Funktion $\omega(x)$, also $G[A] = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega(x)$ mit dem GAUSSSchen Gewicht für $\omega(x)$. Die Integration wird dann analog zum Photon-Propagator über $\omega(x)$ durchgeführt:

$$\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp [iS[A]] \cdot \delta(G[A]) \cdot \det \left(\frac{\delta G[A^\Lambda]}{\delta \Lambda} \right) =$$

$$= N(\xi) \in \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \exp \left[iS[A] - i \int dx \frac{(\partial A)^2}{2\xi} \right] \cdot \det \left(\frac{\delta G[A^\Lambda]}{\delta \Lambda} \right)$$

$$\frac{\delta G[A^{a\Lambda}]}{\delta \Lambda^b} = \partial^\mu \frac{1}{g} D_\mu^{ab}$$

Die Determinante $\det(\partial^\mu \frac{1}{g} D_\mu^{ab})$ kann nicht vor das Integral gezogen werden. Der Trick besteht nun darin, diese Determinante als Funktionalintegral zu schreiben:

$$\det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu^{ab} \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[i \int dx \bar{c} (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c \right]$$

Für die neue LAGRANGE-Dichte ergibt sich nun:

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{2\xi} \left[-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2} (\partial^\mu A_\mu^a)^2 \right] + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b \text{ mit } D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu + \frac{1}{g} f^{abc} A_\mu^c$$

Damit ergibt sich der Propagator durch $\frac{i\delta^{ab}}{P^2}$. Es ergibt sich folgende Wechselwirkung:
Für das Eichfeld gilt analog zum Photon:

$$\delta^{ab} \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

5.2.1 Behandlung des Eichfeldes in der axialen Eichung

Die Eichbedingung lautet $n^\mu A_\mu^a = 0$ mit $n^2 = -1$, wobei n also ein beliebiger raumartiger Vierervektor sei. Also lautet unsere Eichbedingung $0 = G[A] = n^\mu A_\mu$.

$$G[A^\Lambda] = n^\mu A_\mu^{a\Lambda} = n^\mu \left(A_\mu^a + \partial_\mu A^a + \frac{1}{g} f^{abc} A_\mu^b A^c \right) = n^\mu (A_\mu^a + \partial_\mu A^a) \text{ da } n\Lambda = 0$$

$$\frac{\delta G[A^{a\Lambda}]}{\delta \Lambda^a} = \delta^{ad} n^\mu \partial_\mu$$

Dies ist unabhängig von Λ und damit kann $\det \left(\frac{\delta G}{\delta \Lambda} \right)$ vor das Integral gezogen werden. Die zum Photon analoge Rechnung liefert:

$$\mathcal{L}_{ax} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (n^\mu A_\mu^a)^2$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung im Impulsraum:

$$-g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu - \frac{1}{\xi} n_\mu n_\nu$$

Der dazu inverse Operator liefert den Propagator in axialer Eichung:

$$-\frac{i\delta^{ab}}{k^2} \left[g^{\mu\nu} + \frac{(n^2 + \xi \cdot k^2) k^\mu k^\nu}{(k \cdot n)^2} - \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k \cdot n} \right]$$

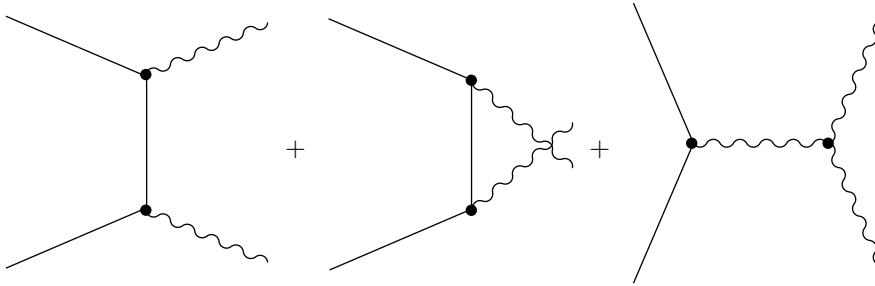
Dies sollte als Übung nachgerechnet werden! Für $n = (0, 0, 0, 1)^\top$, $\xi = 0$ und $k^2 = 0$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } k = k(1, 0, 0, 1)^\top$$

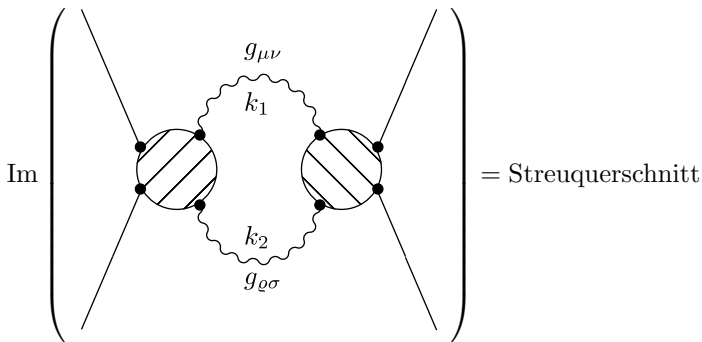
Dieser Propagator hat gerade die Eigenschaft, dass für reelle Zwischenzustände nur die transversalen Polarisationen auftauchen.

5.3 Geister und Unitarität

Wir betrachten $f\bar{f} \mapsto g_1 g_2$. Die zugehörigen FEYNMAN-Diagramme lauten:



Wir betrachten zwei Gluon-Zwischenzustände:



Aus dem Eichbosonenpropagator erhalten wir, indem wir die Eichbosonen auf die Massenschale legen:

$$-ig_{\mu\nu}(-2\pi i)\delta(k_1^2)\theta(k_2^0)$$

Die Schleife (Loop) führt zu einem vierdimensionalen Phasenintegral. Infolge der zwei δ -Funktionen bleibt eine Integration über Ω übrig. $g_{\mu\nu}$ wird dann aufgespalten in

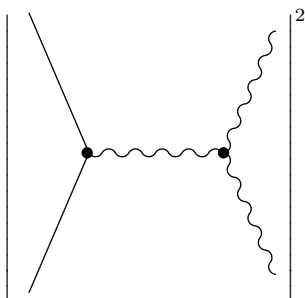
$$\sum_i \varepsilon_{i\mu}^T \varepsilon_{j\nu}^T \text{ und } \varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\mu^- \text{ und } \varepsilon_\mu^- \varepsilon_\nu^+$$

Ebenso erfolgt dies für $g_{\rho\sigma}$. Die Beiträge durch $\varepsilon_{i\mu}^T(k_1)\varepsilon_{j\nu}^T(k_1)$ sind erwünscht mit $\varepsilon_{i\rho}^T(k_2)\varepsilon_{j\sigma}^T(k_2)$. Es gilt:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^+(k_1) \varepsilon_\nu^+(k_2) = 0$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^-(k_1) \varepsilon_\nu^-(k_2) = 0$$

Weiterhin gilt $\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^\pm(k_1) \varepsilon_\nu^\pm(k_2) = 0$, aber $\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^+(k_1) \varepsilon_\nu^-(k_2) \neq 0$. $(\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^-)(\mathcal{M}^{\mu\nu} \varepsilon_\mu^+ \varepsilon_\nu^-)^* \neq 0$ hat den gleichen Wert wie:



5.4 BRST-Symmetrie

Die grundsätzliche Idee besteht darin, dass man zeigt, dass die FEDEEV-POPOV-LAGRANGEDichte zusätzliche Symmetrien und damit Erhaltungsgrößen haben. Der Zustandsraum wird dann in drei Zustandsräume zerlegt. Wir gehen von \mathcal{L}_{FP} über zu \mathcal{L}_{BRST} . Wir müssen noch ein weiteres Feld, nämlich das formale Hilfsfeld B^a einführen:

$$\mathcal{L}_{BRST} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{2\xi}(B^a)^2 + B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c$$

Wir berechnen die Variation nach der Ableitung von B^a :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{BRST}}{\delta(\partial_\mu B^a)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta B^a} = \partial^\mu A_\mu^a - \frac{1}{\xi} B^a$$

Setzt man dieses B^a oben wieder ein, so erhält man die FEDEEV-POPOV-LAGRANGEDichte. Die Behauptung ist nun, dass \mathcal{L}_{BRST} eine globale Symmetrie besitzt, die nach dem NOETHER-Theorem zu erhaltenen Strömen führt. Die erhaltene Ladung kann dann dazu dienen, den Zustandsraum zu klassifizieren. Wegen $[Q, H] = 0$ ist diese Klassifikation invariant unter zeitlicher Entwicklung. Der Zustandsraum mit transversalen Gluonen ohne Geister ist invariant. Kommen wir nun zur BRST-Transformation: Es sei $D_\mu = \partial_\mu - igA^a t^a$, $D_\mu^{ac} = \partial_\mu \delta^{ac} + gf^{abc}A_\mu^b$ und ε eine infinitesimale GRASSMANN-Zahl. Die Änderung des Eichfeldes A^a sei gegeben durch: $\delta A_\mu^a = \varepsilon D_\mu^{ab}c^b$. Die Variation des Fermions ist $\delta\psi = ig\varepsilon c^a t^a \psi$ und die Variation des FEDEEV-POPOV-Feldes $\delta c^a = -\frac{1}{2}g\varepsilon f^{abc}c^b c^c$. Die drei Transformationen beschreiben eine Eichtransformation mit $\Lambda^a = g\varepsilon c^a$. Außerdem sei $\delta\bar{c}^a = \varepsilon B^a$ und $\delta B^a = 0$.

- ☞ Der erste und zweite Term in \mathcal{L}_{BRST} sind offensichtlich invariant, da es sich nach obiger Feststellung um Eichtransformationen handelt.
- ☞ Der dritte Term ist natürlich auch invariant, da er nur B^a enthält und $\delta B^a = 0$ sei.
- ☞ Es bleiben also nur der vierte und fünfte Term zu betrachten.

Die Transformation von A im vierten Term kompensiert die Transformation von \bar{c} im fünften Term, nämlich $B^a \partial^\mu \varepsilon D_\mu^{ac} c^c$ aus dem vierten Term mit $\varepsilon B^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c$ aus dem fünften Term. Bleiben weiterhin der zweite und dritte Faktor des fünften Terms:

$$\delta(D_\mu^{ac} c^c) = 0$$

Dass dies gilt, sollte zu Hause nachgerechnet werden. Somit ist gezeigt, dass \mathcal{L}_{BRST} invariant unter dieser Transformation ist. Ferner ergibt sich zweifache Anwendung der Transformation null; die Ladung ist „nilpotent“. Wie definieren wir die Ladung Q ? Dies tun wir durch $\delta\phi = \varepsilon Q\phi$; dann ist beispielsweise die Wirkung von Q auf A_μ^a gegeben durch $D_\mu^{ac} c^c$ und die Wirkung von Q auf ψ durch $igc^a t^a \psi$. Hiermit ist $Q^2\phi = 0$, was wir am Beispiel von A_μ^a zeigen wollen:

$$Q^2(\varepsilon A_\mu^a) = \varepsilon Q(QA_\mu^a) = \varepsilon Q D_\mu^{ac} c^c = 0$$

Dies gilt aufgrund von $\delta(D_\mu^{ac} c^c) = 0$. Betrachten wir außerdem:

$$Q^2 c^a = \frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{bde} c^c c^d c^e = 0$$

Dies gilt aufgrund der JACOBI-Identität der Strukturkonstanten f^{abc} .

$[Q, H] = 0 \text{ und } Q^2 = 0$

5.4.1 Klassifikation der Eigenzustände von H in drei Teilräumen

- ☞ Raum \mathcal{H}_1 : Falls $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$ ist, fordern wir, dass $Q|\psi_1\rangle \neq 0$.
- ☞ Raum \mathcal{H}_2 : Mit $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$ sollen Zustände aus dem Raum \mathcal{H}_2 durch Transformation von Zuständen aus \mathcal{H}_1 hervorgehen: $|\psi_2\rangle = Q|\psi_1\rangle$.
- ☞ Raum \mathcal{H}_0 : Mit $\psi_0 \in \mathcal{H}_0$ gelte $Q|\psi_0\rangle = 0$ und $\psi_0 \notin \mathcal{H}_2$.

Für alle ψ_2 gilt mit $Q^2 = 0$:

$$\langle \psi_{2a} | \psi_{2b} \rangle = \langle \psi_{1a} | QQ | \psi_{1b} \rangle = 0$$

Die Frage, ob Q hermitesch ist, lassen wir an dieser Stelle außen vor. Darüber hinaus gilt:

$$\langle \psi_{2a} | \psi_{0b} \rangle = \langle \psi_{1a} | Q | \psi_{0b} \rangle = 0, \text{ da } Q|\psi_0\rangle = 0$$

Wie kann man dies interpretieren? Wir haben gesagt, dass $QA_\mu^a = \partial_\mu c^a + O(g)$ ist. Wenn wir in den Impulsraum gehen, so lautet dies $QA_\mu^a(k) = ik_\mu c^a(k)$. Damit handelt es sich bei A_μ^a um ein Eichfeld mit Polarisation ε_μ^+ in Richtung k_μ . (Die Ladung besitzt ja keinen Tensorcharakter!) Aus dem Eichboson mit Polarisation $\varepsilon_\mu^+ \sim k_\mu$ wird ein Geist. Außerdem ist $Qc^a = 0 + O(g)$; der Geist wird also vernichtet durch eine weitere Transformation. Für die Transformation des Antigeistes gilt:

$$Q\bar{c}^a = B^a \text{ mit } B^a = \xi \partial^\mu A_\mu^a = \xi ik^\mu A_\mu^a(k)$$

$Q\bar{c}^a$ liefert also ein Eichboson mit der Polarisation ε^- , da $\varepsilon_\mu^- k^\mu \neq 0$.

Klassifikation der Einteilchenzustände:

ε^+ und Antigeist liegen in \mathcal{H}_1 , ε^- und Geist in \mathcal{H}_2 . Die transversalen ε liegen in \mathcal{H}_0 .

5.5 S-Matrix

Streuzustände mit Geistern oder unphysikalischen Polarisationen liegen in \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 . \mathcal{H}_0 enthält nur transversale Polarisationen. Der allgemeine Beweis der Unitarität im physikalischen Zustandsraum ist: $|A; \text{transversal}\rangle = |A_{tr}\rangle$ enthalte keine (Anti-)Geister, sondern nur transversale Eichbosonen. Wir wollen zeigen, dass:

$$\sum_{C_{tr}} \langle A_{tr} | S^\dagger | C_{tr} \rangle \langle C_{tr} | S | B_{tr} \rangle = \langle A_{tr} | \mathbf{1} | B_{tr} \rangle \text{ wobei } A_{tr} B_{tr} C_{tr} \in \mathcal{H}_0$$

Diese Bedingung bedeutet, dass die S-Matrix unitär ist: $S^\dagger S = S S^\dagger = \mathbf{1}$. Es gilt $[Q, S] = 0$ wegen $[Q, H] = 0$. Also ist $QS|A_{tr}\rangle = SQ|A_{tr}\rangle = 0$ und $S|A_{tr}\rangle \notin \mathcal{H}_1$. Damit muss $S|A_{tr}\rangle$ eine Linearkombination von ψ_0 und ψ_2 sein. Für ψ_2 ist jedoch das Skalarprodukt mit $\psi_0 \in \mathcal{H}_0$ gleich null.

$$\langle A_{tr} | B_{tr} \rangle = \langle A_{tr} | S^\dagger S | B_{tr} \rangle$$

Es tragen für $\langle A_{tr} | S^\dagger$ und $S | B_{tr} \rangle$ nur Anteile aus \mathcal{H}_0 bei.

$$\langle A_{tr} | B_{tr} \rangle = \langle A_{tr} | S^\dagger S | B_{tr} \rangle = \sum_{C_{tr} \in \mathcal{H}_0} \langle A_{tr} | S^\dagger | C_{tr} \rangle \langle C_{tr} | S | B_{tr} \rangle$$

Also ist die auf \mathcal{H}_0 eingeschränkte S-Matrix unitär.

Kapitel 6

Renormierungsgruppe

6.1 Einführung

Das ganze baut zunächst auf den behandelnden Themen der Vorlesung „Theoretische Teilchenphysik I“ auf. In der Quantenelektrodynamik haben wir folgende FEYNMAN-Regeln:

☞ Photon-Propagator:



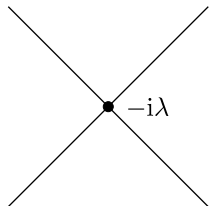
$$-i(g_{\mu\nu}g^2 - g_{\mu}q_{\nu})\delta_3$$

☞ Elektron-Propagator:

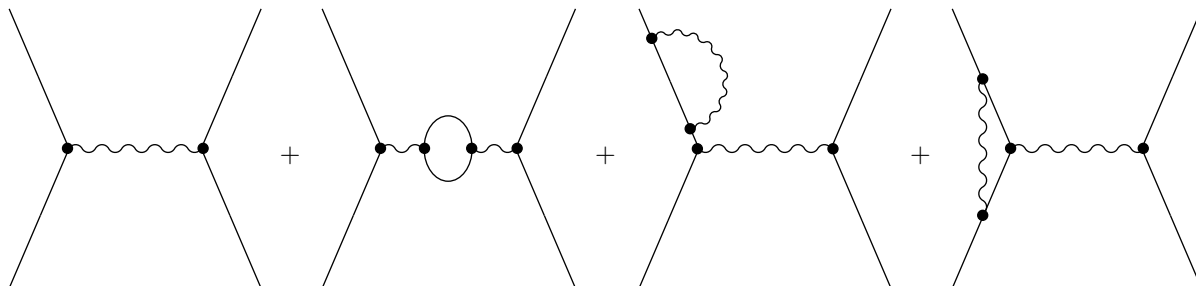


$$\frac{i}{\not{p} - m}$$

☞ Vertex:



$$-ie\gamma_{\mu}$$



Hieraus ergeben sich Divergenzen, womit man zusätzliche Counter-Terme in der LAGRANGE-Dichte einführen muss:

☞ Counter-Term des Photon-Propagators:

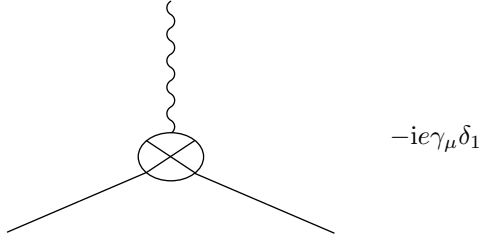


$$-i(g_{\mu\nu}g^2 - g_{\mu}q_{\nu})\delta_3$$

☞ Counter-Term des Fermion-Propagators



☞ Counter-Term des Vertex



Aufgrund der WARD-Identität gibt es den Zusammenhang $\delta_1 = \delta_2$.

Feynman mit $\vec{Q} + O(\alpha)$

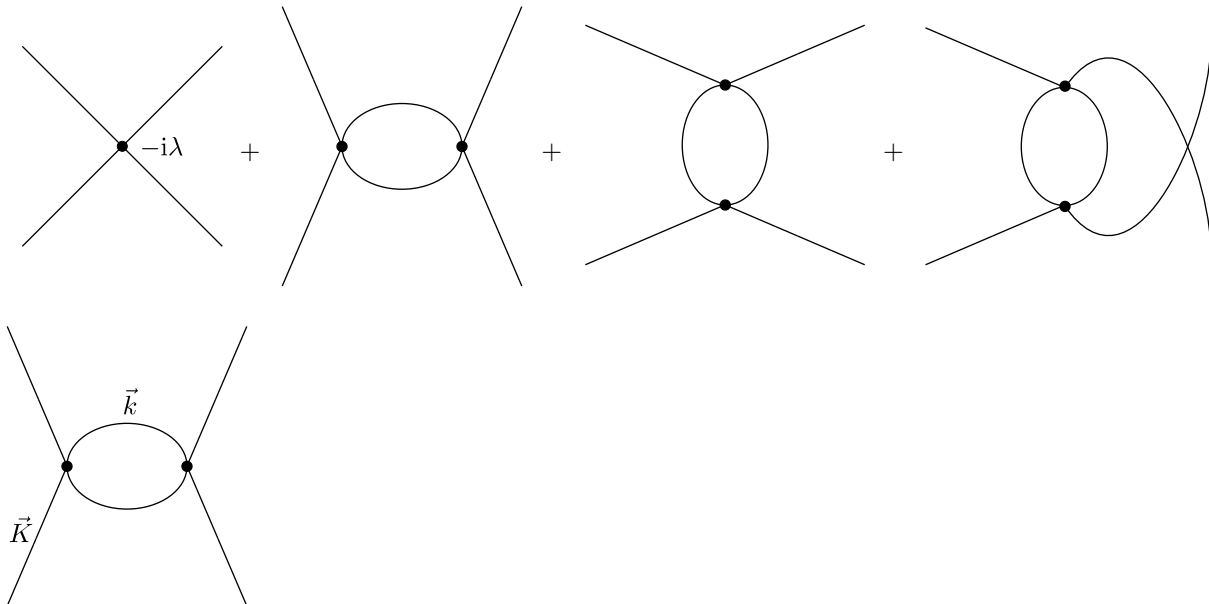
Für große Q^2 gilt:

$$e^2 + e^4 \cdot c \cdot \ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right) = \frac{e^2}{1 - e^2 \cdot c \cdot \ln\left(\frac{Q^2}{m^2}\right)} = \text{laufende Kopplung}$$

Für die Rechnung wird ein Abschneideparameter Λ eingeführt, wobei die δ_i proportional zu $\ln(\Lambda)$ sind.

6.1.1 ϕ^4 -Theorie

Wir haben folgende FEYNMAN-Diagramme:



$$\mathcal{M} = \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(K - k)^2 + m^2}$$

Das Integral ist logarithmisch divergent, wie man durch Power-Counting feststellt. Die Annahme ist, dass die Theorie nur gültig ist bis Λ . Mit $\Lambda^2 \gg |K^2|$ und m^2 und $s, t, u \gg m^2$ gilt:

$$\mathcal{M} = -i\lambda + i\lambda^2 \cdot C \cdot \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{s}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{t}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{u}\right) \right]$$

Wir machen eine Nebenrechnung für C . Mit $K = (iK_0, \vec{K})^\top$ und $k = (ik_0, \vec{k})$ erhalten wir, wobei $k_E = -k^2$ sei:

$$i \int_0^\Lambda \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} \cdot \frac{1}{(K - k)_E^2 + m^2} \text{ mit Cut-Off } \Lambda^2 \gg K_E^2$$

Abhängigkeit von Λ für $\Lambda^2 \gg K_E^2$:

$$i \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + m^2)^2} = i \cdot \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \cdot \ln(\Lambda) + c = \frac{i}{16\pi^2} \cdot \ln(\Lambda^2) \Rightarrow C = \frac{1}{16\pi^2}$$

λ ist zunächst keine Messgröße. Außerdem hätten wir auch statt Λ $\Lambda_2 = 2\Lambda$ oder $\Lambda_{10} = 10\Lambda$ wählen können. Wir legen also s, t, u fest zu s_0, t_0, u_0 und messen $\mathcal{M}(s_0, t_0, u_0) \equiv -i\lambda_p$ („physikalisch“).

$$-i\lambda_p \equiv -i\lambda + iC\lambda^2 \cdot \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{s_0}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{t_0}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) \right] + O(\lambda^3)$$

Wählt man λ_p, s_0, t_0 und u_0 fest, so ist λ eine Funktion von Λ , also $\lambda = \lambda(\Lambda)$.

$$-i\lambda = -i\lambda_p - iC\lambda^2 \cdot \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{s_0}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{t_0}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) \right] + O(\lambda^3)$$

Wir setzen λ in das Matrixelement \mathcal{M} ein:

$$\mathcal{M} = -i\lambda_p + i\lambda^2 \cdot C \cdot \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{s}\right) - \log\left(\frac{\Lambda^2}{s_0}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{t}\right) - \log\left(\frac{\Lambda^2}{t_0}\right) + \log\left(\frac{\Lambda^2}{u}\right) - \log\left(\frac{\Lambda^2}{u_0}\right) \right]$$

In unserer Rechnung dürfen wir nun $\lambda^2 \simeq \lambda_p^2$ setzen:

$$\mathcal{M} = -i\lambda_p + i\lambda_p^2 \cdot C \cdot \left[\log\left(\frac{s_0}{s}\right) + \log\left(\frac{t_0}{t}\right) + \log\left(\frac{u_0}{u}\right) \right]$$

Damit haben wir alle unphysikalischen Objekte rausgeworfen. Wir betrachten den Fall $\Lambda^2 \gg s, t, u \gg s_0, t_0, u_0$, dann werden nämlich die Korrekturterme, also $\log\left(\frac{s_0}{s}\right)$ ziemlich groß. Wie behandelt man dann diesen Fall? Es verhält sich $s : t : u$ genau wie $s_0 : t_0 : u_0$, womit sich ergibt:

$$\mathcal{M} = -i\lambda_p \cdot \left[1 - \lambda_p \cdot C \cdot 3 \log\left(\frac{s_0}{s}\right) \right]$$

Falls t, u zwar $O(s) \gg s_0$, aber nicht genau $t_0 \cdot \frac{s}{s_0}, u_0 \cdot \frac{s}{s_0}$ sind, so ergeben sich kleine Korrekturen der Form:

$$i\lambda_p^2 \cdot C \cdot \left[\log\left(\frac{t_0}{s_0} \cdot \frac{s}{t}\right) + \log\left(\frac{u_0}{s_0} \cdot \frac{s}{u}\right) \right]$$

Damit können die großen Korrekturen in einer „laufenden“ Kopplung absorbiert werden.

$$\lambda_p(s) = \lambda_p(s_0) \cdot \left[1 - \lambda_p \cdot 3C \cdot \log\left(\frac{s_0}{s}\right) \right]$$

C war nur durch den divergenten Anteil festgelegt. Wenn μ^2 eine Skala der Ordnung s, t, u ist, dann gilt

$$\mathcal{M} = -i\lambda_p(\mu^2) + iC \cdot \lambda_p^2(\mu^2) \cdot \left[\log\left(\frac{\mu^2}{s}\right) + \log\left(\frac{\mu^2}{t}\right) + \log\left(\frac{\mu^2}{u}\right) \right]$$

und

$$\lambda_p(\mu'^2) = \lambda_p(\mu^2) + 3C \cdot \lambda_p(\mu^2) \cdot \log\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}\right)$$

Was ist der Unterschied zwischen $\mu \mapsto \mu'$ und $\mu \mapsto \mu_1 \mapsto \mu'$? Wenn nur alle Terme der Form $(\lambda_p \log(\mu^2))$ kontrahieren wollen, dann macht das einen Unterschied. Das korrekte Resultat ergibt sich durch, die Renormierungsgruppengleichung (wie sich die Kopplung durch μ ändert):

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \lambda_p(\mu^2) = 3C \cdot \lambda_p^2(\mu^2)$$

6.2 Wilson (Effektive Theorien)

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int dx [\mathcal{L} + J\phi]\right)$$

Die Felder seien im Impulsraum gegeben, also $\phi = \phi(k)$ und man stellt das Integral als Reihe dar:

$$\left(\prod_k \int d\phi_k\right) \exp\left(i \int dx [\mathcal{L} + \phi]\right)$$

Wir wollen die Theorie abändern durch:

$$Z = \int [D\phi]_\Lambda \exp\left(- \int d^d x \left(\frac{1}{2}(D_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4\right)\right) \text{ mit } [D\phi]_\Lambda = \left(\prod_{|k| < \Lambda} d\phi(k)\right)$$

Im Festkörper gibt es keine Moden mit $k > \Lambda = d_{Atom}^{-1}$. Wir wollen das Integral im Impulsraum zerlegen. Dazu sei $b \ll 1$ und $b\Lambda \leq |k| < \Lambda$, wobei es sich um die Region großer Impulse handelt.

$$\hat{\phi}(k) = \begin{cases} \phi(k) & \text{für } b\Lambda \leq k < \Lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \tilde{\phi}(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } b\Lambda \leq k < \Lambda \\ \phi(k) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist also $\phi = \tilde{\phi} + \hat{\phi}$. Man kann ϕ als zerlegen in harte und weiche Moden.

$$\int \mathcal{D}\phi(x) \equiv \int \mathcal{D}\phi(k)$$

Wir betrachten nun:

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(- \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\phi} + \partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2(\tilde{\phi} + \hat{\phi})^2 + \frac{\lambda}{4!}(\tilde{\phi} + \hat{\phi})^4\right]\right) =$$

Die restlichen Terme fallen weg, wie man durch FOURIER-Transformation in den Impulsraum zeigen kann:

$$\int dx \hat{\phi}(x) \tilde{\phi}(x)^* = \int dx \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \exp(-ikx + ipx) \hat{\phi}(k) \tilde{\phi}^*(p) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \hat{\phi}(k) \tilde{\phi}(k)^* = 0$$

Wir betrachten $\lambda\phi^4$ -Terme und $m^2\phi^2$ als Störung und integrieren über $\hat{\phi}$. λ sei klein und außerdem $m^2 \ll k^2$.

$$\mathcal{L}_0[\hat{\phi}] = \int_{b\Lambda < k < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \hat{\phi}^*(k) \hat{\phi}(k) k^2$$

$$\langle \hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p) \rangle \equiv \underbrace{\hat{\phi}(k) \hat{\phi}(p)} = \frac{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(- \int \mathcal{L}_0\right)}{\int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(- \int \mathcal{L}_0\right)} = \frac{1}{k^2} \cdot (2\pi)^d \cdot \delta^{(d)}(k+p) \cdot \theta_\Lambda(k)$$

$\theta_\Lambda(k)$ ist definiert als:

$$\theta_\Lambda(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } b\Lambda \leq k < \Lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir untersuchen als folgendes Integral:

$$\int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(- \int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2}m^2 \hat{\phi}^2 + \lambda \cdot \left(\frac{1}{6} \hat{\phi}^3 \hat{\phi} + \frac{1}{4} \hat{\phi}^2 \hat{\phi}^2 + \frac{1}{6} \hat{\phi} \hat{\phi}^3 + \frac{1}{4!} \hat{\phi}^4\right)\right]\right)$$

Die letzten fünf Terme sind unsere Störung. Wir betrachten als Beispiel $\tilde{\phi}^2 \hat{\phi}^2$.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\lambda}{4} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp\left(-\int d^d x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \hat{\phi})^2\right]\right) \int dx \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} \exp(i[k_1 + k_2 + k_3 + k_4]x) \times \\
 & \quad \times \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \hat{\phi}(k_3) \hat{\phi}(k_4) = \\
 & = -\frac{\lambda}{4} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \int \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \cdot \delta\left(\sum_i k_i\right) \cdot \frac{1}{k_3^2} \cdot (2\pi)^d \cdot \delta(k_3 + k_4) \cdot \theta_\Lambda(k_3) \cdot \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) = \\
 & = -\frac{\lambda}{4} \cdot \left(\int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(-k_2)\right) \cdot \int \frac{dk_3}{(2\pi)^d} \cdot \frac{\theta_\Lambda(k_3)}{k_3^2} = \\
 & = -\frac{\mu}{2} \cdot \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(-k_2) \text{ mit } \mu = \frac{\lambda}{2} \int_{k\Lambda < k < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 dk k^{d-1-2} = \int_0^1 dk k^{d-3} = \frac{k^{d-2}}{d-2}$$

$$\mu^2 = \frac{\lambda}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \frac{1 - b^{d-2}}{d-2} \cdot \Lambda^{d-2}$$

Achtung: Für $d = 4$ hängt der Massenterm μ^2 quadratisch vom Abschneideparameter Λ ab. Der Term

$$-\frac{\mu^2}{2} \cdot \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k)$$

wird mit äußerem Anteil kombiniert. Die FEYNMAN-Regeln lauten:

- ☞ Propagator $\hat{\phi}\hat{\phi}$: nur innere Linien
- ☞ Propagator $\tilde{\phi}\tilde{\phi}$: innere und äußere Linien

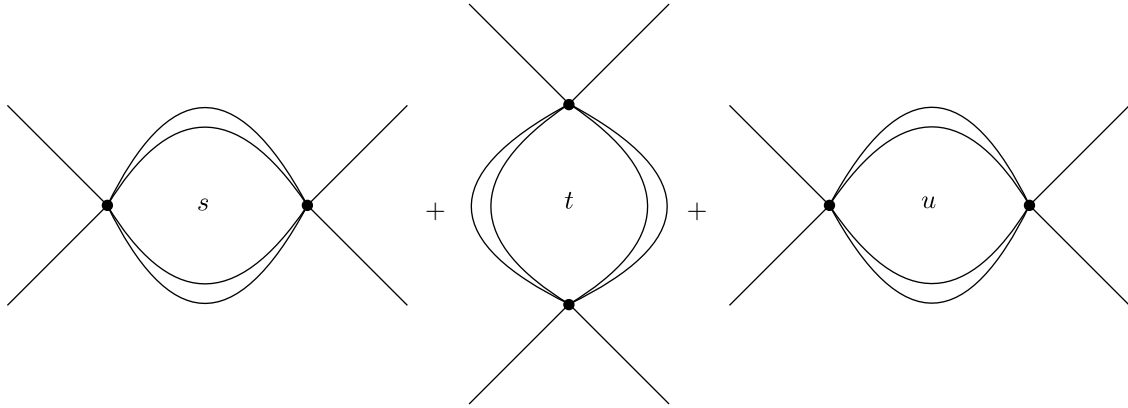
1.) Ordnung λ :

$$\tilde{\phi}^2 \tilde{\phi}^2 : \quad \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \Rightarrow \frac{\mu^2}{2} \tilde{\phi}^2$$

$\tilde{\phi}^3 \hat{\phi}$ und $\hat{\phi} \tilde{\phi}^3$ ergeben null.

2.) Ordnung λ^2 :

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right)^2 \text{ und}$$



Das erste Diagramm entspricht dem dritten Term der Entwicklung von $\exp\left(-\int \frac{\mu^2}{2} \tilde{\phi}^2\right)$. Die drei Diagramme tragen zu $\tilde{\phi}^4$ bei. Außerdem liefert das erste dieser drei:

$$-\frac{\xi}{4!} \int d^d x \tilde{\phi}^4 \text{ mit } \xi = -4! \cdot \frac{2}{2!} \cdot \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \cdot \int_{b\Lambda < k < \Lambda} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{k^2}\right)^2$$

Äußere Impulse seien $\ll \Lambda$.

$$\xi = \frac{-3\lambda^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \cdot \frac{(1-b^{d-4})}{d-4} \cdot \Lambda^{d-4} \xrightarrow{d \rightarrow 4} \frac{-3\lambda^2}{16\pi^2} \cdot \log\left(\frac{1}{b}\right)$$

ξ erhält Beiträge von allen Impulsbereichen, gleichmäßig auf der logarithmischen Skala.

Beispielsweise folgt aus

$$\lambda \int \phi^4(x) dx \cdot \lambda \int \phi^4(y) dy$$

$$\lambda^2 \int \tilde{\phi}^3 \hat{\phi} dx \int \tilde{\phi}^3 \hat{\phi} dy$$

Diese Terme sind also nur relevant für hohe Impulse. Man erhält sorgfältiger $\tilde{\phi}^6 \frac{1}{\Lambda^2}$ und $(\partial\phi)^2 \phi^2 \frac{1}{\Lambda^2}$ usw.

$$Z = \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(-\int dx \mathcal{L}_{eff}[\tilde{\phi}]\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda^4} \cdot \text{nicht renormierbare Operatoren}\right)$$

\mathcal{L}_{eff} habe die Form von \mathcal{L} mit λ_{eff} und m_{eff} . $\tilde{\phi}$ ist nur die Bezeichnung einer Integrationsvariablen. Wir bezeichnen nun $\tilde{\phi}$ als ϕ und vergleichen

$$Z = \int [\mathcal{D}\phi]_{b\Lambda} \exp\left(-\int d^d x \mathcal{L}_{eff}\right) \text{ mit } Z = \int [\mathcal{D}\phi]_\Lambda \exp\left(-\int d^d x \mathcal{L}_0\right)$$

Wir skalieren im ersten Z -Ausdruck $k' = \frac{k}{b}$ und $x' = x \cdot b$:

$$\int d^d x \mathcal{L}_{eff} = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \Delta Z) \cdot (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \Delta m^2) \phi^2 + \frac{1}{4!} (\lambda + \Delta \lambda) \phi^4 + (C + \Delta C) (\partial_\mu \phi)^4 + (D + \Delta D) \phi^6 + \dots \right]$$

Kapitel 7

Callan-Symanzik-Gleichung

Wir werden im folgenden Gebrauch machen von der Wellenfunktionsrenormierung und von Kopplungskonstanten. Wir wollen den Zusammenhang zwischen den nackten und renormierten Parametern und Feldern betrachten. Die Feldrenormierung ergibt sich dadurch, dass wir den Propagator im Impulsraum betrachten:

$$\int dx \exp(ipx) \langle T \psi_0(x) \psi_0(0) \rangle = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + \text{Reguläre Terme}$$

Das Residuum des nicht renormierten Feldes ist Z , so dass $\psi_0 = Z^{\frac{1}{2}} \psi_r$ ist. Das Residuum des renormierten Feldes ist also gleich eins.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \cdot \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \cdot \phi_0^4 = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \cdot Z \cdot \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \cdot Z^2 \cdot \phi_r^4$$

Im nächsten Schritt schreiben wir den Ausdruck so um, dass er die Form des Ausgangsterm hat:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} m^2 \cdot \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \cdot \phi_r^4 + \delta_z \cdot (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \cdot \phi_r^4$$

Die Korrekturen δ_z , δ_m und δ_λ sind dann die Counter-Terme. Man kann also Störungstheorie in den nackten Feldern ϕ_0 oder den renormierten Feldern ϕ_r durchführen; die entsprechen FEYNMAN-Diagramme sind natürlich dieselben. λ_0 und m_0 seien gegeben und beschreiben den Cut-Off Λ der Theorie.

7.1 Modifizierte Renormierungsbedingungen

Die stellen diese Bedingungen im euklidischen Raum; alle äußeren Impulse sind damit raumartig. Wir wollen den Fall betrachten, dass diese Impulse raumartig groß werden.

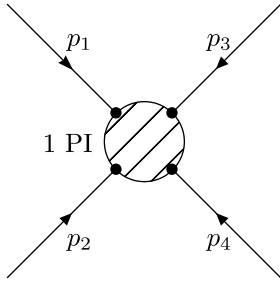
Wir betrachten die nicht-zerlegbaren Diagramme:

$$\text{---} \circ \text{---} = 0 \text{ bei } p^2 = -M^2$$

1 PI

$$\frac{d}{dp^\mu} \left(\text{---} \circ \text{---} \right) = 0 \text{ bei } p^2 = -M^2$$

1 PI



$$= -i\lambda \text{ bei } (p_1 + p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2 = (p_1 + p_4)^2 = -M^2$$

M bezeichnet man auch als Renormierungsskala. Die ersten beiden Bedingungen heißen nichts anderes, als dass für das zeitgeordnete Produkt der renormierten Felder

$$\langle T\phi_r(p)\phi_r(-p) \rangle = \frac{i}{p^2}$$

bei $p^2 = -M^2$ gilt. Für die nackten Felder gilt dann:

$$\langle T\psi_0(p)\phi_0(-p) \rangle = \frac{iZ}{p^2}$$

bei $p^2 = -M^2$. Außerdem ist $\delta_z = Z - 1$ und $\delta_\lambda = \lambda_0 \cdot Z^2 - \lambda$. In den Renormierungsbedingungen (Gleichungen ①, ② und ③) ist M beliebig. Man kann sich nun fragen, wie der Zusammenhang zwischen den GREEN-Funktionen ist, wenn M variiert wird, wobei unsere LAGRANGEfunktion nicht vom Renormierungspunkt abhängt. Es seien $M \ll \Lambda$ und M'

Λ zwei unterschiedliche Renormierungsskalen, welche unsere Theorie beschreiben sollen. Wir betrachten die GREEN-Funktion der nackten Felder: $\langle T\psi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \rangle$ hängt nicht von M und M' ab. M taucht erst auf, wenn wir λ_0 zugunsten von $\lambda_{phys}(M)$ eliminieren. Die renormierten GREEN-Funktionen sind gegeben durch:

$$\langle T\phi_r(x_1) \dots \phi_r(x_n) \rangle = Z^{-\frac{n}{2}} \cdot \langle T\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) \rangle \quad (*)$$

Die linke Seite ist bei M^2 definiert mit $\lambda(M^2)$; das heißt, dass insbesondere die amputierte GREEN-Funktion (Vertexfunktion) $\Gamma_r^{(4)} \Big|_{\text{sym.}(-M^2)} = -i\lambda(M^2)$ ist. Wir definieren nun $G_r^{(n)}(x_1, \dots, x_n, M, \lambda)$ wie folgt:

$$G_r^{(n)}(x_1, \dots, x_n, M, \lambda) = \langle T\phi_r(x_1) \dots \phi_r(x_n) \rangle_{\text{zusammengenommen}}$$

$G_r^{(n)}$ sei normiert nach den obigen drei Gleichungen, dass also die Vierpunktfunktion ohne äußere Linien den Wert λ annimmt. Wir machen eine Verschiebung der Art $M \mapsto M + \delta M$, $\lambda \mapsto \lambda + \delta \lambda$ und $\phi_r \mapsto (1 + \delta \eta)\phi_r$ so, dass die nackten GREEN-Funktionen ungeändert bleiben. Es gilt einerseits, dass die renormierte GREEN-Funktion $G_r^{(n)}$ übergeht in $(1 + n \cdot \delta \eta)G_r^{(n)}$; dies folgt aus Gleichung (*). Wir erhalten insgesamt den Zusammenhang:

$$\boxed{dG_r^{(n)} = n \cdot \delta \eta G_r^{(n)} = \frac{\partial G_r^{(n)}}{\partial M} \cdot \delta M + \frac{\partial G_r^{(n)}}{\partial \lambda} \cdot \delta \lambda} \quad (**)$$

Dies folgt aus:

$$\frac{d}{dM} (Z^{\frac{n}{2}} G_r(x_1, \dots, x_n, M, \lambda(M))) = 0$$

An dieser Stelle kommen wir zu zwei sehr wichtigen Funktionen. Wir definieren:

$$\beta \equiv \frac{M}{\delta M} \cdot \delta \lambda, \quad \gamma \equiv -\frac{M}{\delta M} \cdot \delta \eta$$

$$M \cdot \frac{\partial G_r^{(n)}}{\partial M} + M \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial M} \frac{\partial G_r^{(n)}}{\partial \lambda} - n \cdot M \cdot \frac{\partial \eta}{\partial M} G_r^{(n)} = 0 \Leftrightarrow M \frac{\partial G_r^{(n)}}{\partial M} + \beta \cdot \frac{\partial G_r^{(n)}}{\partial \lambda} + \gamma \cdot G_r^{(n)} = 0$$

β und γ hängen nicht vom Cut-Off ab, da sie das Verhalten der renormierten GREEN-Funktion beschreiben. Auch hängt γ nicht von M ab, das es dimensionslos ist. β und γ sind also nur Funktionen von λ , dem Kopplungsparameter.

$$\left[M \cdot \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \cdot \gamma(\lambda) \right] G_r^{(n)}(x_1, \dots, x_n, M, \lambda) = 0$$

Dies ist die CALLAN-SYMANZIK-Gleichung ohne Massenterm. Sie gilt genauso im Impulsraum:

$$\left[M \cdot \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} + n \cdot \gamma(\lambda) \right] G_r^{(n)}(p_1, \dots, p_n, M, \lambda) = 0$$

In der Quantenelektrodynamik (mit Elektronenmasse $\mapsto 0$) sieht diese ähnlich aus:

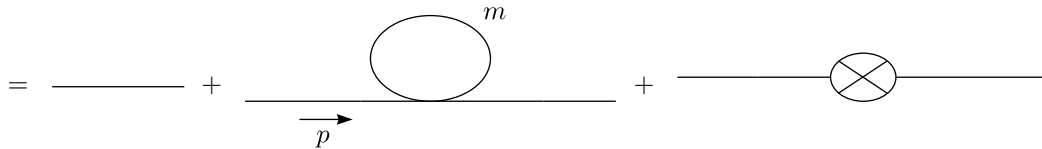
$$\left[M \cdot \frac{\partial}{\partial M} + \beta(e) \frac{\partial}{\partial e} + n \cdot \gamma_z(e) + m \cdot \gamma_3(A) \right] G_r^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n, M, e) = 0$$

m ist keine Masse, sondern eine Zahl $\in \mathbb{Z}$. Hier tauchen also die Elektron- und Photonfelder auf.

7.2 Berechnung von β und γ

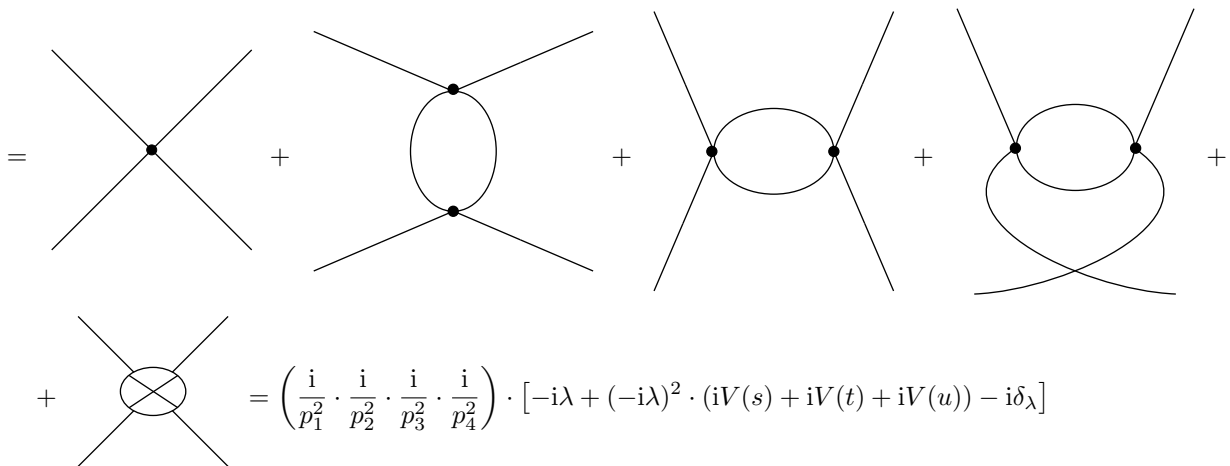
Wir verwenden Störungstheorie in fester Ordnung für geeignet gewählte GREEN-Funktionen. Wir betrachten dazu als Beispiel eine ϕ^4 -Theorie ohne Masse in Ein-Schleifen-Näherung. Was können wir aus den einfachsten GREEN-Funktionen herausholen:

$$G_r^{(2)}(p) = \text{BORN} + \text{Ein-Schleifen-Näherung} + \text{Counter-Term} =$$



Für masselose Theorie ist der zweite Term der Ein-Schleifen-Näherung gleich null. Rechnet man mit $m \neq 0$, so wird die Korrektur durch den Massen-Counter-Term korrigiert; es gibt keine Abhängigkeit vom äußeren Impuls. Das Residuum bleibt damit gleich eins: $Z = 1 + O(\lambda^2)$.

$$G_r^{(4)} = \text{BORN} - \text{Ein-Schleifen-Korrekturen} + \text{Counter-Term} =$$



Wir hatten früher schon berechnet:

$$V(s) = C \cdot \log\left(\frac{s}{\Lambda^2}\right) + \text{const. mit } C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16\pi^2}$$

Die hier auftretende Divergenz legt den Counter-Term fest. Falls dieser Counter Term nämlich die Divergenz eliminieren soll, muss

$$\lambda_\lambda = 3 \cdot C \lambda^2 \cdot \log\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)$$

gelten. Der Faktor drei kommt durch die drei Beiträge von $V(s)$, $V(t)$ und $V(u)$. Bei $s = M^2$ sollen die Korrekturen verschwinden, womit im Counter-Term der Faktor $\frac{1}{M^2}$ vorkommt. Die M -Abhängigkeit steckt also im divergenten Anteil des Counter-Terms. Kommen wir nun wieder auf die CALLAN-SYMANZIK-Gleichung zurück:

$$\left[M \cdot \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} + 4\gamma(\lambda) \right] G_r^{(4)}(p_i, M, \lambda) = 0$$

Wir analysieren die drei Terme:

☞ Term ①:

$$\frac{\partial}{\partial \ln(M)} G^{(4)} = -i \cdot 3C \cdot (-2) \cdot \lambda^2 = \frac{3i \cdot \lambda^2}{(4\pi)^2} \cdot \left(\frac{i}{p^2}\right)^4$$

☞ Term ②:

$$\beta(\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (-i\lambda + O(\lambda^2)) = -i\beta(\lambda) \cdot \left(\frac{i}{p^2}\right)^4$$

☞ Term ③:

$$Z = 1 + O(\lambda^2) \Rightarrow M \cdot \frac{\partial}{\partial M} Z = O(\lambda^2) \Rightarrow \gamma \cdot G^{(4)} = O(\lambda^3)$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{3i \cdot \lambda^2}{(4\pi)^2} + \beta(\lambda) \cdot (-i) = O(\lambda^3) \Rightarrow \boxed{\beta(\lambda) = \frac{3\lambda^2}{(4\pi)^2}}$$

Wir sind außerdem am führenden Beitrag zu γ interessiert; diesen bestimmen wir aus den renormierten Zweipunktfunktion $G_r^{(2)}$:

$$G_r^{(2)} = \text{BORN} + \text{Schleifen-Diagramm} + \text{---} \bigcirc \text{---} =$$

$$= \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \cdot \left(A \log\left(\frac{\Lambda^2}{-p^2}\right) + \text{const.} \right) + \frac{i}{p^2} (ip^2 \delta_z) \frac{i}{p^2}$$

δ_z erhalten wir aus der Forderung:

$$G_r^{(2)} \Big|_{p^2 = -M^2} = \frac{i}{p^2} \Rightarrow \delta_z = A \log\left(\frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \text{const.}$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2} + \frac{i}{p^2} \cdot A \cdot \log\left(\frac{M^2}{-p^2}\right)$$

Wir erhalten also die drei Terme der CALLAN-SYMANZIK-Gleichung (ohne Berücksichtigung des Vorfaktors $\frac{i}{p^2}$):

☞ Term ①:

$$\frac{\partial}{\partial \ln(M)} G_r^{(2)} = O(A) = 2A$$

☞ Term ②:

$$\beta(\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(A \log \left(\frac{M^2}{-p^2} \right) \right) \right) = O(\lambda A)$$

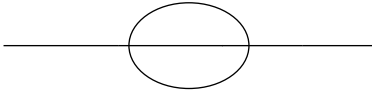
Dies gilt, da $\beta(\lambda) = O(\lambda^2)$ und $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ Ordnung von λ^{-1} ist.

☞ Term ③:

$$2\gamma(\lambda)(1 + O(A))$$

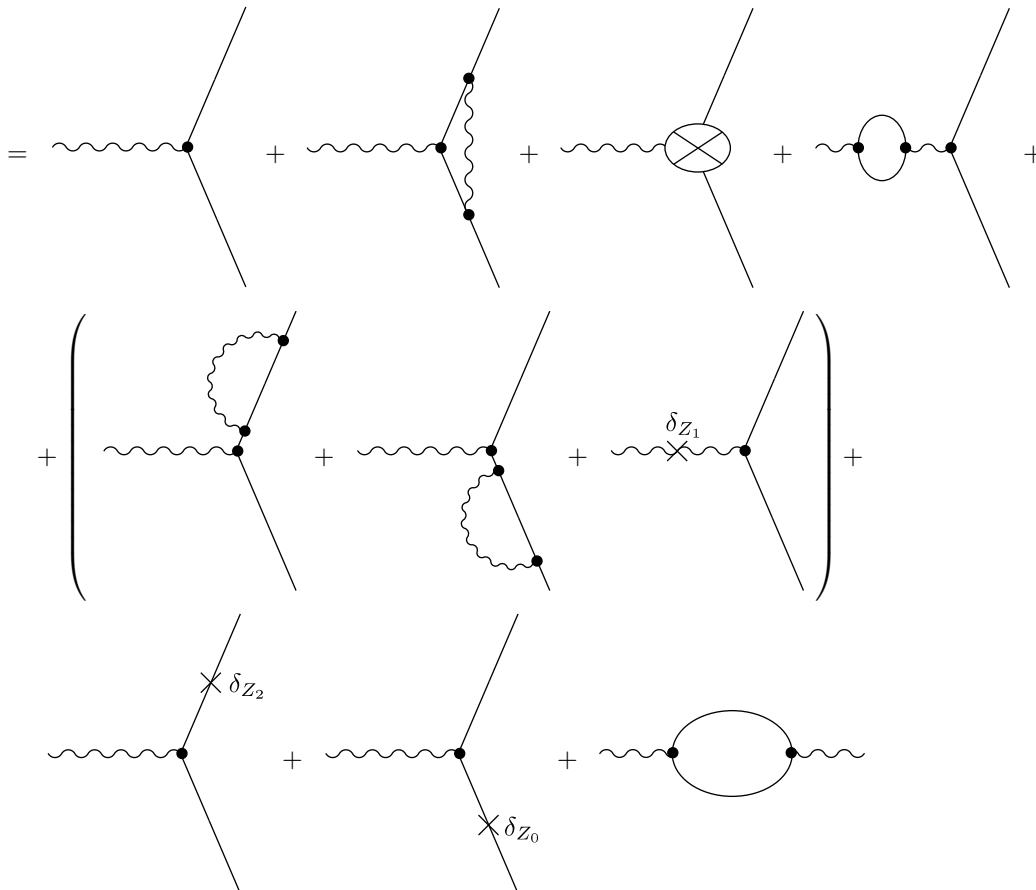
$$2A + 2\gamma(\lambda) = 0 \Rightarrow \gamma = -A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ln(M)} \delta_z$$

In der ϕ^4 -Theorie ist $A = O(\lambda^2)$.



Die β -Funktion für beliebige dimensionslose Kopplungen g , welche einen n -Punkt-Vertex beschreibt, ergibt sich aus:

$$G_r^{(n)} = \text{BORN} + 1\text{-Teilchen irreduzible Schleifen} + \text{Vertex-Gegenterme} + \text{Korrekturen an äußerem Linien} + \text{Wellenfunktionsrenormierung} =$$



Die Impulse der äußeren Linien sei $p_i^2 = -M^2$:

$$\begin{aligned} G_r^{(n)} &= \prod_i \left(\frac{i}{p_i^2} \right) \cdot \left[-ig - iB \log \left(\frac{\Lambda^2}{-p^2} \right) - i\delta_g + (-ig) \sum_i \left(A_i \log \left(\frac{\Lambda^2}{-p_i^2} \right) - \delta_{Z_i} \right) + \text{endliche Terme} \right] = \\ &= \prod_i \left(\frac{i}{p_i^2} \right) \cdot \left[-ig - iB \log \left(\frac{M^2}{-p^2} \right) + (-ig) \sum_i A_i \log \left(\frac{M^2}{-p_i^2} \right) \right] + \text{const.} \end{aligned}$$

Nun berechnen wir wieder die einzelnen Terme der CALLAN-SYMANZIK-Gleichung:

$$M \frac{\partial}{\partial M} G_r^{(n)} = \prod_i \left(\frac{i}{p_i^2} \right) \cdot \left[-i2B + (-ig) \cdot 2 \sum_i A_i \right]$$

$$\beta \frac{\partial}{\partial g} G^{(r)} = \beta \cdot (-i) \prod_i \left(\frac{i}{p_i^2} \right)$$

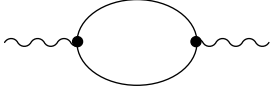
Wir erinnern uns an γ , das wir zuvor berechnet haben:

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ln(M)} \delta_{Z_i}$$

Somit können wir β berechnen:

$$\left[-i2B + (-ig) \cdot 2 \sum_i A_i \right] + \beta(g) \cdot (-i) + ig \sum_i A_i = 0 \Rightarrow \boxed{\beta(g) = -2B - g \sum_i A_i}$$

In der Quantenelektrodynamik gilt wegen $Z_1 = Z_2 - 2B - 2\gamma_e = 0$. Daraus folgt $\beta(e) = -\gamma_A$ und $\gamma_A = -\frac{e^3}{12\pi^2}$. In der Quantenelektrodynamik sind Z_1 und Z_2 eichabhängig. Der einzige Beitrag, der übrig bleibt, ist also:



In der Quantenchromodynamik ist $\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2}$. Die anomale Dimension in der höheren Ordnung mit $\phi_r = Z(M)^{-\frac{1}{2}} \phi_0$

$$\delta\eta = \frac{Z(M + \delta M)^{-\frac{1}{2}} - Z(M)^{-\frac{1}{2}}}{Z(M)^{-\frac{1}{2}}}$$

Dies gilt in allen Ordnungen und $\gamma = -\frac{M}{\delta M} \delta\eta$.

$$\gamma(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{M}{Z} \cdot \frac{\partial Z}{\partial M} = \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \ln(M^2)} \text{ in allen Ordnungen}$$

7.3 Lösung der Callan-Symanzik-Gleichung

Wir betrachten die Zweipunktfunktion $G_r^{(2)}(p, \lambda, M)$:

$$G_r^{(2)}(p, \lambda, M) = \frac{i}{p^2} \cdot g \left(-\frac{p^2}{M^2}, \lambda \right)$$

Es gilt die Anfangsbedingung $g(1, \lambda) = 1$. Aus der CALLAN-SYMANZIK-Gleichung

$$\left(M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2\gamma(\lambda) \right) G_r^{(2)}(p, M, \lambda) = 0$$

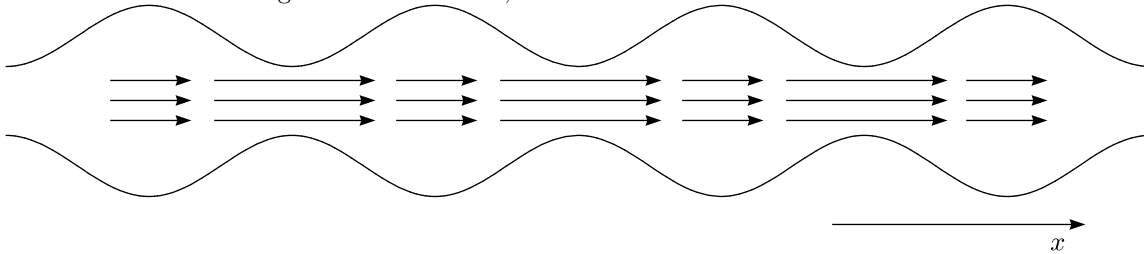
Wir können statt dessen auch die Gleichung

$$\left(p \frac{\partial}{\partial p} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + 2 - 2\gamma(\lambda) \right) G_r^{(2)}(p, M, \lambda) = 0$$

betrachten mit der Anfangsbedingung $G_r^{(2)} \Big|_{p^2=-M^2} = -1$. Wir betrachten:

$$\frac{\partial}{\partial t} D(t, x) = \left(-D(x) \frac{\partial}{\partial x} + \varrho(x) \right) D(t, x)$$

Dies entspricht der CALLAN-SYMANZIK-Gleichung für $\ln(M) = t$ und $x = \lambda$. Wir betrachten eine Röhre mit einer strömenden Flüssigkeit mit Bakterien, die sich vermehren:



$D(t, x)$ beschreibt dann die Dichte der Bakterien am Ort x in Abhängigkeit von der Zeit t und $\varrho(x)$ deren Wachstum. Wir interessieren uns für die Dichte zur Zeit t am Ort x und berechnen zunächst den Ort, den die Bakterien zur Zeit $t = 0$ haben. Dies ist gegeben durch $\bar{x}(t)$, welches die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = -v(\bar{x})$$

mit der Anfangsbedingung $\bar{x}(0) = x$.

Beispiele:

- i.) Es sei $v(\bar{x}) = v = \text{const}$. Dann ist $\bar{x}(t, x) = x - v \cdot t$. D bei $t = 0$ war $D_i(x)$ zur Zeit t ; zur Zeit t haben wir $D_i(\bar{x})$.
- ii.) $v(\bar{x}) = c\bar{x}$

$$\bar{x}(t, x) = x \cdot \exp(-ct)$$

Falls $\varrho = 0$ ist, gilt $D(t, x) = D_i(\bar{x}(t, x))$. Wir rechnen dies nach:

i.) Fall ①:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(x) \frac{\partial}{\partial x} \right) D_i(x - vt) = D'(x - vt) \cdot (-v + v) = 0$$

ii.) Fall ②:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + cx \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) D_i(\bar{x}(t, x)) = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}} D_i \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{x}(t, x) + cx \frac{\partial}{\partial x} \bar{x}(t, x) \right) = 0$$

Dies gilt natürlich allgemein, weil die totale Ableitung $\frac{d}{dt} \bar{x}(t, x(t)) = 0$ ist. Wir erhalten nämlich, egal von welchem Zeitpunkt t wir ausgehen, immer dasselbe \bar{x} . Falls $\varrho \neq 0$ gilt:

$$D(t, x) = D_i(\bar{x}(t, x)) \cdot \exp \left(\int_0^t \varrho(\bar{x}(t', x)) dt' \right)$$

$\bar{x}(0, x) = x$ ist die Lage zur Zeit t und $\bar{x}(t, x)$ die Lage zur Zeit $t = 0$. Wir machen die folgende Variablensubstitution:

$$dt' = -\frac{1}{v(\bar{x})} d\bar{x}$$

Aus $t' = 0$ ergibt sich $\bar{x}(0, x) = x$ und aus $t' = t$ folgt $\bar{x}(t, x)$.

$$D(t, x) = D_i(\bar{x}(t, x)) \cdot \exp \left(\int_{\bar{x}(t, x)}^x \frac{\varrho(\bar{x})}{v(\bar{x})} d\bar{x} \right)$$

Mit der Rückübersetzung der Variablen

$$t \triangleq \frac{p}{M}, \lambda \triangleq x, -\beta \triangleq v, 2\gamma(\lambda) - 2 \triangleq \varrho, G^{(2)} \triangleq D$$

und der Anfangsbedingung

$$D_i(x) \triangleq \hat{G}(\lambda) \equiv G^{(2)}(p, \lambda) \Big|_{p^2 = -M^2}$$

erhalten wir schlussendlich folgende Lösung für die CALLAN-SYMANZIK-Gleichung:

$$G^{(2)}(p, \lambda) = \hat{G}(\bar{\lambda}(p, \lambda)) \cdot \exp \left(- \int_{p'=M}^{p'=p} \frac{2}{\beta} \cdot [1 - \gamma(\bar{\lambda}) - \bar{\lambda}(p', \lambda)] d \log \left(\frac{p'}{M} \right) \right)$$

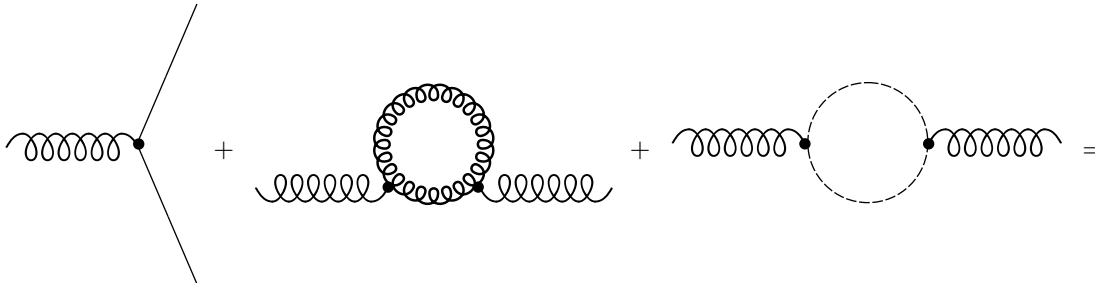
$$\frac{d}{d \log \left(\frac{p}{M} \right)} \bar{\lambda}(p, \lambda) = \beta(\bar{\lambda}) \text{ mit } \bar{\lambda}(M, \lambda) = \lambda$$

7.4 β -Funktion in den Quantenchromodynamik

Wir betrachten die β -Funktion:

$$\beta(g) = gM \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right)$$

Die Abhängigkeit von der Masse rührt von den Countertermen her. δ_1 ist der Vertex-Counterterm, δ_2 die Quark-Wellenfunktionsrenormierung und δ_3 die Gluon-Wellenfunktionsrenormierung. Man erhält diese Beiträge aus:



$$= i(q^2 g_{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \delta^{ab} \left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2} \right) \cdot \left(-\frac{5}{3} \right) C_2(G) \Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) \cdot \frac{1}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}}$$

In der R_ξ -Eichung geht der Faktor $-\frac{5}{3}$ über in $-\left(\frac{13}{6} - \frac{\xi}{2}\right)$. Der Propagator in der R_ξ -Eichung sieht folgendermaßen aus:

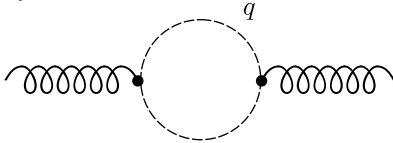
$$-\frac{i}{q^2} \left(-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right)$$

7.4. β -FUNKTION IN DEN QUANTENCHROMODYNAMIK

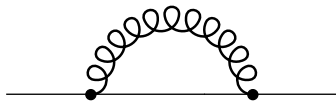
In der FEYNMAN-Eichung ist $\xi = 1$.

$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \left[\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C_2(r) \right]$$

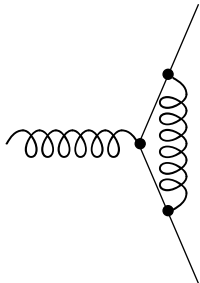
n_f ist die Anzahl der Quarks. Der letzte Term kommt durch



zustande. Die Berechnung der Quark-Wellenfunktionsrenormierung δ_2 entspricht der Rechnung aus der Quantenelektrodynamik:

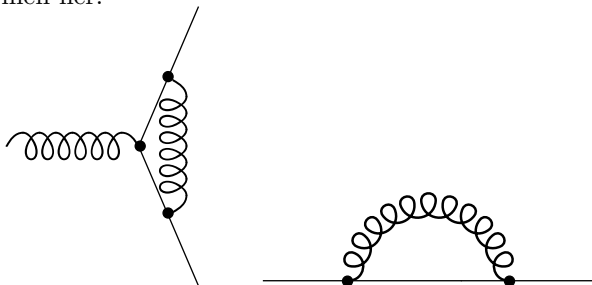


$$\delta_2 = \frac{-g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} C_2(r)$$

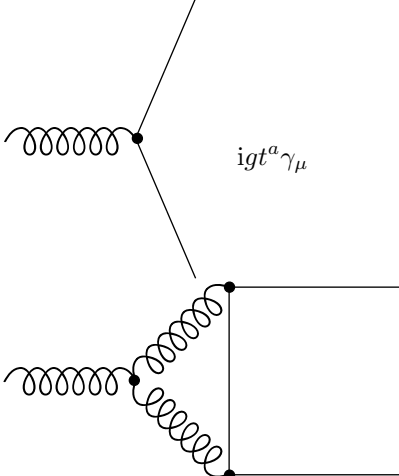


$$\frac{ig^3}{(4\pi)^2} \cdot \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] t^a \gamma_\mu \cdot \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}}$$

In der Quantenelektrodynamik stellt die WARD-Identität einen Zusammenhang zwischen folgenden Diagrammen her:



In der Quantenchromodynamik gibt es jedoch keine analoge Beziehung.



$$\frac{ig^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma_\mu \cdot \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}}$$

Der Counterterm liefert $igt^a \gamma^\mu \delta_1$.

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} [C_2(r) + C_2(G)]$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 &= \frac{g^2}{(4\pi)^2} \cdot \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(M^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \cdot \left([C_2(R) + C_2(G)] - C_2(r) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C_2(r) \right) \right) = \\ &= \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \ln(M^2) \right) \left(\frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}n_f C_2(r) \right) \end{aligned}$$

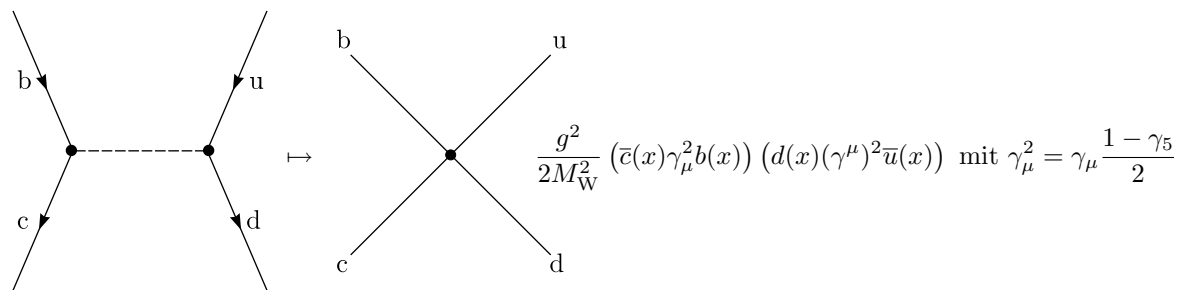
Es folgt schließlich die β -Funktion:

$$\beta(g) = g \frac{\partial}{\partial \ln(M)} = -g \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot 2 \cdot \left(\frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}n_f C_2(r) \right) = -g \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C_2(r) \right)$$

Kapitel 8

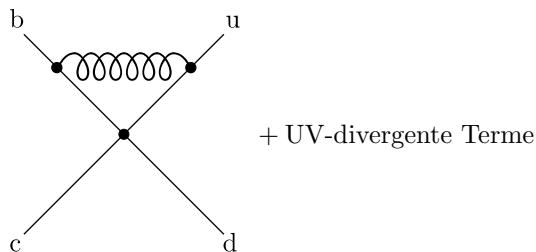
Zusammengesetzte Operatoren

Ein Beispiel dazu ist der Zerfall eines b-Quarks:

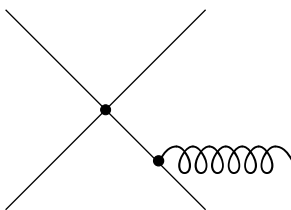


Die Korrekturen der Quantenchromodynamik lauten:

a.) Virtuelle Prozesse:



b.) Reelle Abstrahlung:



Virtuelle Korrekturen weisen UV- und IR-Divergenz auf; letztere jedoch nur, wenn die äußeren Quarks auf der Massenschale sitzen. Wir trennen die Problematik und setzen die äußeren Impulse auf $p^2 = -M^2$.

8.1 Berechnung von Zerfällen

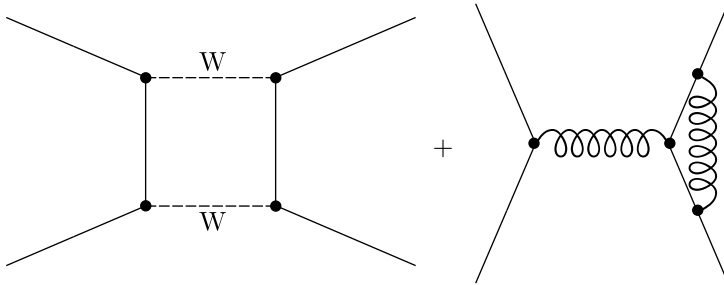
Wir amputieren die GREENSche Funktion, die sich aus folgendem Objekt ergeben:

$$\langle \bar{\psi}(p_1)\bar{\psi}(-p_2)\psi(p_3)\bar{\psi}(-p_4)O_O(0) \rangle = S_F(p_1)\gamma_\mu^2 S_F(p_2)S_F(p_3)(\gamma^\mu)^2 S_F(p_4)$$

Die Summe der Korrekturen ist divergent. Wir müssen damit einen Counterterm $\delta_O O(x)$ addieren, so dass die Normierungsbedingung

$$O_{\text{BORN}} + \text{Korrektur} + \text{Counterterm}|_{M^2} \equiv O_M$$

oder $O_O = Z_-(M)O_M$ gilt per Definition. Im Beispiel werden die Divergenzen bei $q^2 = M_W^2$ abgeschnitten, denn



sind UV-endlich nach der Quark-Wellenfunktionsrenormierung. Also ist $O_{M_W} = O_O + \text{Term der Ordnung } \alpha_s(M_W^2)$ ohne große Logarithmen. Bei $M^2 \ll M_W^2$ ergibt sich

$$O_{M^2} = O_O \left[1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \log \left(\frac{M^2}{M_W^2} \right) \right]$$

und die Korrektur wird eventuelle von $O(1)$ sein. Außerdem wissen wir nicht, ob $\alpha_s(M_W^2)$ oder $\alpha_s(m_0^2)$ zu nehmen ist. Lösung: Renormierungsgruppe und CALLAN-SYMANZIK-Gleichung

8.1.1 ϕ^4 -Theorie

Wir betrachten folgende GREEN-Funktion

$$G_r^{(n,O)}(p_1, \dots, p_n, k) \equiv \langle \phi_r(p_1) \dots \phi_r(p_n) O_n(k) \rangle = Z(M)^{-\frac{n}{2}} Z_O(M)^{-1} \langle \phi_0(p_1) \dots \phi_0(p_n) O_O(k) \rangle$$

und die CALLAN-SYMANZIK-Gleichung

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + n\gamma(\lambda) + \gamma_O(\lambda) \right] G_r^{(n,O)} = 0 \text{ wobei } \gamma_O = \frac{1}{Z_O} M \frac{\partial}{\partial M} Z_O = \frac{\partial \log(Z_O)}{\partial \log(M)}$$

8.2 Renormierung lokaler zusammengesetzter Operatoren

Wir betrachten den Counter-Term $\delta\mathcal{L}$, den man zur LAGRANGE-Funktion addieren muss.

- i.) Wir betrachten den Strom $J_\mu = \bar{\psi} \partial_\mu \psi$, welcher erhalten ist. Aus $J^\mu J_\mu = 0$ folgt, dass die Ladung Q erhalten ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q = 0 \text{ mit } Q = \int d\vec{x} J_0$$

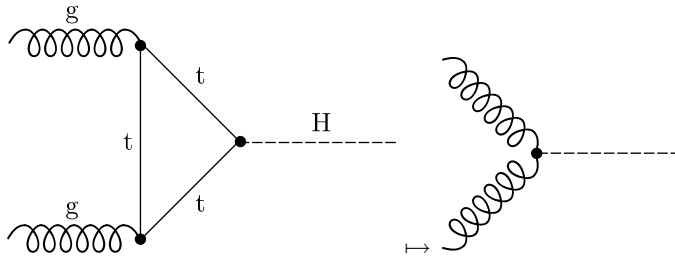
Für den Energie-Impuls-Tensor ergibt sich:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi} (\partial^\mu \partial^\nu + \partial^\nu \partial^\mu \psi - F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, (E, \vec{p}) = \int d^3\vec{x} T^{0\nu}$$

8.2. RENORMIERUNG LOKALER ZUSAMMENGESETZTER OPERATOREN

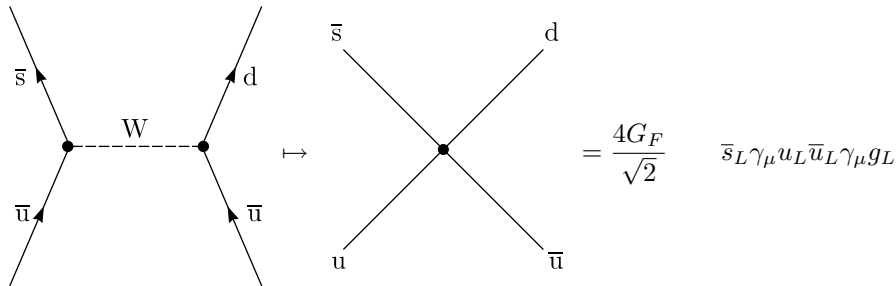
ii.) Wir betrachten den Prozess $gg \mapsto H$.



Der Impuls der Gluonen und des HIGGS-Bosons ist viel kleiner als der des t-Quarks.

$$\frac{1}{v} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} H \text{ mit } v \approx 250 \text{ GeV}$$

Dies ist einer der wichtigen Prozesse, die man am LHC untersuchen wird. Außerdem untersucht man CP-Verletzung anhand des Kaon-Zerfalls $K^0 \mapsto \pi^+ \pi^-$.



$K^0 \mapsto \bar{d}s, \pi^+, \pi^-, \bar{u}d, u\bar{d}$

$$\frac{1}{k^2 - M_W^2} \mapsto -\frac{1}{M_W^2}$$

$$\bar{s}_L = \bar{s} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right)$$

$$O_M = Z_M O_O$$

$$\gamma_O = \frac{1}{Z_M} \frac{\partial}{\partial \log(M)} \cdot Z_M$$

Der Ausdruck sagt uns, welchen Counterterm wir zur LAGRANGE-Funktion addieren müssen. Wie berechnet man dies nun?

$$O \mapsto |m\varphi| \sim \varphi^m(x)$$

Wir gehen aus von der GREEN-Funktion $G^{m,1}$:

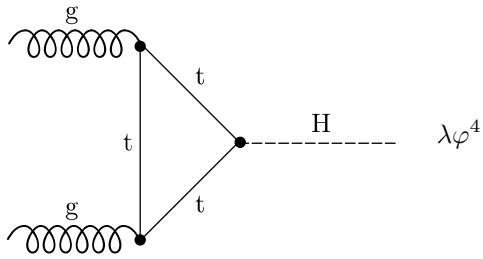


$$G^{m,1} = \langle \varphi(y_1) \dots \varphi(y_n) \cdot O(x) \rangle = Z^{-\frac{m}{2}} Z_O^{-1} \cdot \langle \varphi_0 \dots \rangle$$

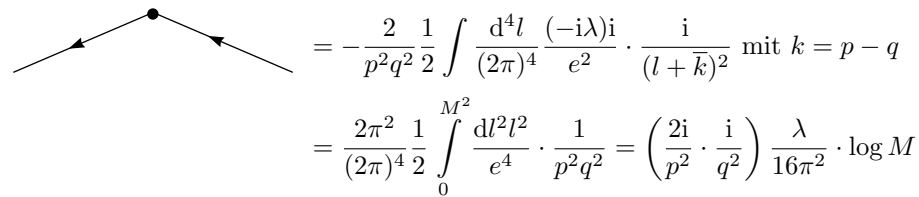
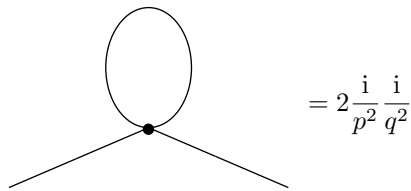
Wir erhalten damit:

$$\boxed{\gamma_O = M \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_0 + \frac{m}{2} \delta_Z \right)}$$

Beispiel:



Wir betrachten $\delta\mathcal{L} = m^2\varphi^2$.



Kapitel 9

Quantenchromodynamik

9.1 Bildung von Hadronen

Wir wollen den Prozess $e^+e^- \mapsto$ Hadronen näher untersuchen. Das zugehörige Matrixelement lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\langle \text{had} \left| T \left\{ \int dx dy A_\mu(x) A_\nu(y) j_{lep}^\mu(x) j_{had}^\nu(y) \right\} \right| e^+ e^- \right\rangle = \\ &= \int dx dy \langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle \langle 0 | j_{lep}^\mu | e^+ e^- \rangle \langle \text{had} | j^\nu(y)_{had} | 0 \rangle \end{aligned}$$

$\langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$ ist gegeben durch den Photonpropagator:

$$\langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2} \exp(-ik(x-y))$$

Wir verwenden $j_\mu(x) = \exp(iPx) j_\mu(0) \exp(-iPx)$, wobei P der Translationsoperator ist.

$$\exp(-iPx) | e^+ e^- \rangle = \exp(-ip_{e^+e^-} x) | e^+ e^- \rangle$$

Damit ergibt sich für das Matrixelement:

$$\mathcal{M} = \int dx dy \int \frac{dk}{(2\pi)^4} \exp(-ik(x-y)) \exp(-ip_{e^+e^-} x + ip_{had} y) \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2} \langle \text{had} | j_{had}^\nu(0) | 0 \rangle \langle 0 | j_{lep}^\mu(0) | e^+ e^- \rangle$$

Das leptonische Matrixelement $\langle 0 | j_{lep}^\mu(0) | e^+ e^- \rangle$ ist gegeben durch $e\bar{v}(p^+) \gamma^\mu u(p^-)$. Damit ergibt sich weiter, indem wir die Integrationen nach x und y ausführen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int \frac{dk}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k + p_{e^+e^-}) (2\pi)^4 \delta(k + p_{had}) \frac{-i}{k^2} \langle \text{had} | j_{had}^\nu | 0 \rangle e\bar{v}(p^+) \gamma^\mu u(p^-) = \\ &= \boxed{\mathcal{M} = (2\pi)^4 \delta(p_{e^+e^-} - p_{had}) \langle \text{had} | j^\mu(0) | 0 \rangle e\bar{v}(p^+) \gamma_\mu u(p^-) \frac{-i}{k^2}} \end{aligned}$$

$\langle \text{had} | j^\mu(0) | 0 \rangle$ wird für „exklusive“ Endzustände durch Formfaktoren beschrieben. Diese Formfaktoren beschreiben die Ladungsverteilung im Ortsraum. Die allgemeine Struktur wird festgelegt durch LORENTZkovarianz, die Impulse der Hadronen im Endzustand und durch Stromerhaltung und eventuell durch Symmetrien.

Beispiel:

Es sei beispielsweise $|\text{had}\rangle \equiv |\pi^+(q^+) + \pi^-(q^-)\rangle$:

$$\langle \pi^+(q^+) \pi^-(q^-) | j_{had}^\mu(0) | 0 \rangle = (q_+^\mu - q_-^\mu) F(q_+, q_-) + \underbrace{(q_+^\mu + q_-^\mu)}_{=0}$$

Der zweite Term verschwindet wegen $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ und damit $q^\mu \langle j_\mu(0) \rangle = 0$. Die Funktion $F(q_+, q_-)$ ist ein Skalar. $q_+^2 = q_-^2 = m_\pi^2$ ist fest und es ist $2q_+ q_- = q^2 - 2m_\pi^2$, womit F nur eine Funktion von q^2 ist: $F = F(q^2)$.

Beispiel:

Betrachten wir nun Protonen:

$$\langle p(q^+) \bar{p}(q^-) | j_{had}^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_s(q^+) [\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu F_2(q^2) \gamma^5 + \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2m} q_\nu F_3(q^2)] v_{s'}(q^-)$$

mit $q = q^+ + q^-$

$F_2(0)$ liefert das anomale magnetische Moment, $F_1(0)$ ist gleich eins (oder e) und $F_3(0)$ ist das elektrische Dipolmoment (T-Verletzung).

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$$

Die Funktionen F_1 , F_2 und F_3 sind analytische Funktionen von q^2 und beschreiben für $q^2 < 0$ Streuung, für $q^2 > 4m^2$ Produktion und $q = 0$ statische Größen. Betrachten wir drei Pionen π^+ , π^- und π^0 , so ist $\langle 3\pi | j_{had}^\mu | 0 \rangle$ eine Funktion von q^+ , q^- und q^0 , die Stromerhaltung erfüllen muss.

9.1.1 Wirkungsquerschnitt

Dieser folgt durch Bildung von $|\mathcal{M}|^2$. Unter Ausnutzung der Spinsummen und $m_e = 0$ ergibt sich:

$$d\sigma_{e^+e^- \rightarrow had} = \frac{e^2}{2q^2(q^2)^2} (g_{\mu\nu} p^+ p^- - p_\mu^+ p_\nu^- - p_\mu^- p_\nu^+) \cdot \sum_{had} (2\pi)^4 \delta(q - p^+ - p^-) \langle 0 | j_\mu(0) | had \rangle \langle had | j_\mu(0) | 0 \rangle$$

Das erste q^2 im Nenner ist der Flussfaktor. Wenn $|had\rangle = |\pi^+ \pi^-\rangle$ ist, dann gilt:

$$\sum_{had} (2\pi)^4 \delta(q - p_+ - p_-) = \int \frac{d\vec{q}_+}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_+} \frac{d\vec{q}_-}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_-} (2\pi)^4 \delta(q - p_1 - p_2) = \frac{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}{8\pi} \int \frac{d\Omega(q^+)}{4\pi}$$

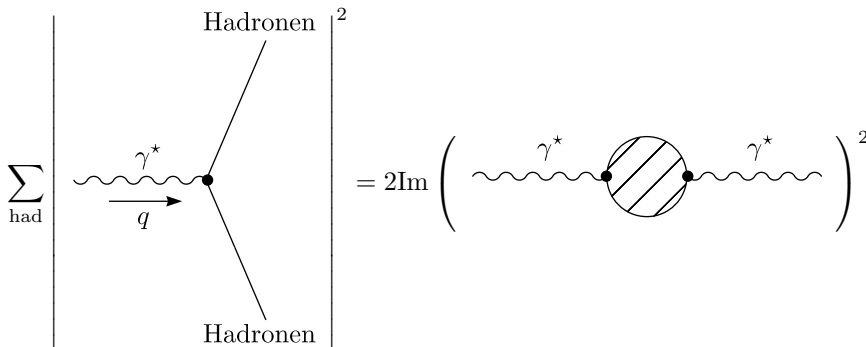
Inklusiver Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{had} |_{m^2(had)=q^2=(p^++p^-)^2}$$

Wir betrachten nun:

$$\begin{aligned} & \int_{had} (2\pi)^4 \delta(q - p^+ - p^-) \langle 0 | j_\mu(0) | had_q \rangle \langle had_q | j_\nu(0) | 0 \rangle \\ & \sum_{had} \int_{q^2} dx \exp(i(q - p_1 - p_2)x) \langle 0 | \exp(-iPx) j_\mu(x) \exp(iPx) | had_q \rangle \langle had_q | j_\nu(0) | 0 \rangle = \\ & = \sum_{had} \int_{q^2} dx \exp(i(q - p_1 - p_2)x) \cdot \exp(i(p_+ + p_-)x) \langle 0 | j_\mu(x) | had_q \rangle \langle had_q | j_\nu(0) | 0 \rangle = \\ & = \boxed{\int dx \exp(iqx) \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle}_{\substack{q^2 > 0 \\ q_0 > 0}} \end{aligned}$$

Das Ziel ist:



(siehe optisches Theorem)

9.1.2 Einschub: Callan-Lehmann-Spektraldarstellung

Wir erinnern uns daran, dass für ein freies Feld $D(x-y)$ folgendermaßen definiert ist:

$$D(x-y) \equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \exp(-ip(x-y)) \text{ mit } p_0 = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Es ist außerdem $\tilde{D}(p, m^2) = 2\pi \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0)$.

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) \equiv \Delta(x-y) = \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_0} [\exp(-ip(x-y)) - \exp(ip(x-y))] (= 0 \text{ für } (x-y)^2 < 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta \Delta(p, m^2) = 2\pi \delta(p^2 - m^2) \varepsilon(p_0)}$$

$$D_F \equiv \langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ip(x-y))$$

$$\boxed{\tilde{D}_F = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}}$$

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(0)], 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-ipx) (2\pi) \delta(p^2 - m^2) \varepsilon(p_0)$$

9.2 Wechselwirkende Felder

Wir schieben ein vollständiges System von Zwischenzuständen ein:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \mathbf{1} \phi(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(y) | 0 \rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p(\lambda)} \langle 0 | \phi(x) | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | \phi(y) | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(y) | 0 \rangle + \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m_{\lambda^2}) \theta(p_0) \langle 0 | \phi(x) | \lambda_p \rangle \langle \lambda_p | \phi(y) | 0 \rangle \end{aligned}$$

λ_p sei ein Zustand mit Impuls \vec{p} und $p^2 = m_{\lambda}^2$ als invariante Masse. λ_0 sei dieser Zustand in seinem Schwerpunktsystem ($\vec{p} = \vec{0}$). Die Menge aller $\lambda \{ \lambda_0 \}$ sind alle Zustände mit $\vec{p} = \vec{0}$, angefangen von (im allgemeinen) isolierten Einteilchenzustand $p_0 = m$, usw. $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$ ist null, wenn ϕ ein Vektor- oder Spinorfeld wäre.

$$\langle 0 | \phi(x) | \lambda_p \rangle = \langle 0 | \exp(iPx) \phi(0) \exp(-iPx) | \lambda_p \rangle = \exp(-ipx) \langle 0 | U_{\lambda}^{-1} U_{\lambda} \phi(0) U_{\lambda}^{-1} U_{\lambda} | \lambda_p \rangle = \exp(-ipx) \langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x) \mathbf{1} \phi(y) | 0 \rangle &= \underbrace{\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle \langle 0 | \phi(y) | 0 \rangle}_{\rightarrow 0} + \sum_{\lambda} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (2\pi) \delta(p^2 - m_{\lambda}^2) \theta(p_0) \exp(-ip(x-y)) |\langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 = \\ &= \sum_{\lambda} \int D(x-y, m_{\lambda^2}) |\langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 = \int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) D(x-y, M^2) \text{ mit } \varrho(M^2) = \\ &= \sum_{\lambda} 2\pi \delta(M^2 - m^2) |\langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2 \end{aligned}$$

$|\langle 0 | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$ hängt nur von m_{λ}^2 ab. Wir können damit jede Zweipunktfunktion schreiben als Überlagerung von freien Zweipunktfunktionen. Dies gilt natürlich nur für den Vakuumerwartungswert. Für das zeitgeordnete Produkt gilt:

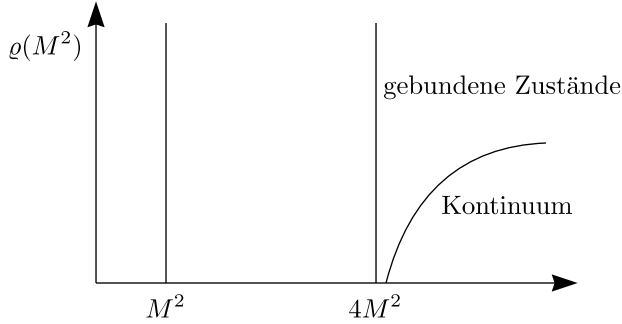
$$\langle 0 | T(\phi(x), \phi(y)) | 0 \rangle = \int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) D_F(x-y, M^2)$$

Gehen wir über in den Impulsraum:

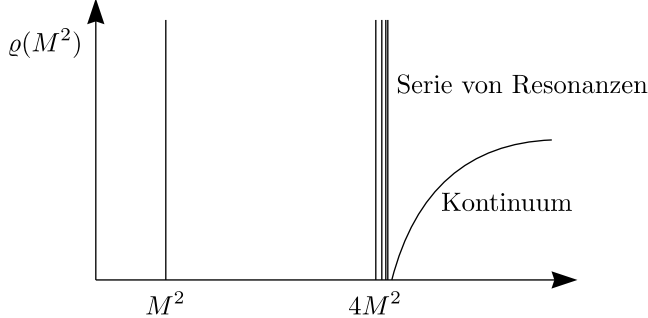
$$\langle 0 | \widetilde{\phi(x)} \widetilde{\phi(0)} | 0 \rangle(p) = \int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) 2\pi \delta(p^2 - M^2) \theta(p_0)$$

$$\langle 0 | [\widetilde{\phi(x)}, \widetilde{\phi(0)}] | 0 \rangle(p) = \int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) 2\pi \delta(p^2 - M^2) \varepsilon(p_0)$$

$$\langle 0 | T(\widetilde{\phi(x)} \widetilde{\phi(0)}) | 0 \rangle = \int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$



j anstelle von ϕ :



Der renormierte Propagator soll das Residuum 1 haben. Im allgemeinen gilt vor der Renormierung: $\varrho(M^2) = 2\pi\delta(M^2 - m^2)Z$. (Das Residuum ist die Wellenfunktionsrenormierung Z .) Der zeitgeordnete Propagator ist eine analytische Funktion von p^2 mit Pol bei $p^2 = M^2$, eventuell Polen bei Bindungszuständen und einem Verzweigungsschnitt oberhalb $4m^2$.

$$\left(\frac{1}{i} \widetilde{D}_F - \frac{1}{i} \widetilde{D}^* \right) = \int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) \left(\frac{1}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} - \frac{1}{p^2 - M^2 - i\varepsilon} \right)$$

Mit

$$\frac{1}{x + i\varepsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

ergibt sich daraus:

$$\int \frac{dM^2}{2\pi} \varrho(M^2) 2\pi i \delta(p^2 - M^2) = i\varrho(p^2)$$

$$\widetilde{D}_{WW}(p) = -\text{Im} \left[i\widetilde{D}_{WF}(p^2) - (i\widetilde{D}(p^2))^* \right]$$

Analog gilt mit

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = \int \langle 0 | T(j_\mu(x) j_\nu(0)) | 0 \rangle \exp(-iqx) dx$$

$$\boxed{\int dx \exp(-iqx) \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle = 2\text{Im}\Pi_{\mu\nu}}$$

Wegen der Stromerhaltung gilt $\Pi_{\mu\nu}(q) = (g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\Pi(q^2)$.

9.2.1 Dispersionsrelation

Es gilt für den Imaginärteil von $\Pi(q^2)$:

$$\text{Im}\Pi(q^2) \sim \frac{\sigma(e^-e^- \mapsto \text{had})}{\sigma_{\text{point}}} \equiv R(s) \text{ mit } \sigma_{\text{point}} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s}$$

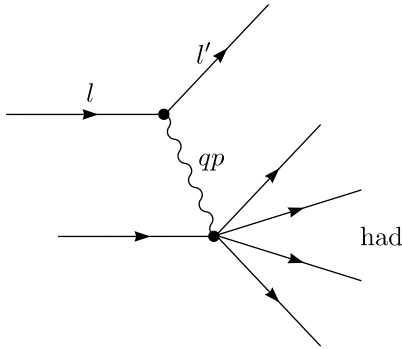
$$\Pi(q^2) \sim \int \left[\frac{ds}{s - q^2 - i\varepsilon} R(s) - \frac{ds}{s - i\varepsilon} R(s) \right]$$

Wir betrachten die n -te Ableitung an der Stelle $q^2 = 0$:

$$\left(\frac{d}{dq^2} \right)^n \Pi(q^2) \Big|_{q^2=0} = \int \frac{ds}{(s - q^2)^{n+1}} R(s) \Big|_{q^2=0} = \int \frac{ds}{s^{n+1}} R(s)$$

9.3 Lepton-Nukleon-Streuung/Tief inelastische Streuung

Wir betrachten folgenden Prozess:



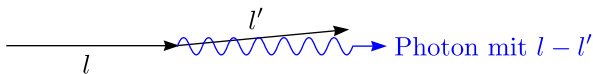
Es ist $q = l - l'$ und $q^2 < 0$.

- 1.) Elastische Streuung: $x = p'$ mit $p'^2 = m_p^2$

$$\langle p' | j_\mu | p \rangle$$

Nukleon-Formfaktor im raumartigen

- 2.) $q^2 \approx 0$



Ein fast reelles Photon streut am Nukleon.

- 3.) $-q^2 \gg m_n^2$, $\nu \equiv p \cdot q \gg m_n^2$

Dabei handelt es sich um die sogenannte tief-inelastische Streuung.

Für $-q^2 \mapsto \infty$ und $\nu \mapsto \infty$ erhält man ein festes $x = -\frac{q^2}{2\nu}$. Man überzeugt sich leicht davon, dass $1 - x > 0$ sein muss und damit $1 > x > 0$. Der Wirkungsquerschnitt wird charakterisiert durch Matrixelement $\langle p | j_\mu(x) j_\nu(0) | p \rangle$, da

$$\sum_x |\langle x | j | p \rangle|^2 = \sum_x \langle p | j | x \rangle \langle x | j | p \rangle = \langle p | j | p \rangle$$

$$\sigma \sim \int dx \exp(-iqx) \langle p | j_\mu(x) j_\nu(0) | p \rangle$$