Lösungen zu einigen Fragestellungen

Zu Singulett- und Triplettzuständen

Wir betrachten ein System, das aus zwei Spin-1/2 zusammengesetzt ist. Wir wollen den Gesamtspinoperator $\mathbf{S}^2$ ausdrücken durch die Operatoren der einzelnen Spins. Dazu verwenden wir

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 &= 2(S_{x,1}S_{x,2} + S_{y,1}S_{y,2} + S_{z,1}S_{z,2}) = \\ &= 2\left\{\frac{1}{4}(S_{+,1} + S_{-,1})(S_{+,2} + S_{-,2}) - \frac{1}{4}(S_{+,1} - S_{-,1})(S_{+,2} - S_{-,2}) + S_{z,1}S_{z,2}\right\} = \\ &= S_{+,1}S_{-,2} + S_{-,1}S_{+,2} + 2S_{z,1}S_{z,2} \end{aligned} \tag{2}$$

Somit können wir den Spinoperator $\mathbf{S}^2$ des Gesamtspins durch die Spinoperatoren der einzelnen Spins ausdrücken:

$$\boxed{\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_1^2 + \mathbf{S}_2^2 + S_{+,1}S_{-,2} + S_{-,1}S_{+,2} + 2S_{z,1}S_{z,2} \,.} \tag{3}$$

Betrachten wir nun die Wirkung der Spinoperatoren der einzelnen Spins auf deren Eigenzustände:

$$\mathbf{S}_1^2|\pm\rangle = \hbar^2 S_1(S_1+1)|\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\pm\rangle \,, \quad \mathbf{S}_2^2|\pm\rangle = \hbar^2 S_2(S_2+1)|\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\pm\rangle \,. \tag{4a}$$

$$S_+|+\rangle = 0 \,, \quad S_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \,, \quad S_-|-\rangle = 0 \,, \quad S_-|+\rangle = \hbar|+\rangle \,, \tag{4b}$$

$$S_z|+\rangle = \hbar S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \,, \quad S_z|-\rangle = \hbar S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \,. \tag{4c}$$

Damit gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2|+,+\rangle &= \mathbf{S}_1^2|+,+\rangle + \mathbf{S}_2^2|+,+\rangle + S_{+,1}S_{-,2}|+,+\rangle + S_{-,1}S_{+,2}|+,+\rangle + 2S_{z,1}S_{z,2}|+,+\rangle = \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2|+,+\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2|+,+\rangle + 2\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2|+,+\rangle = 2\hbar^2|+,+\rangle \stackrel{!}{=} \hbar^2 S(S+1)|+,+\rangle \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Hieraus lesen wir $S = 1$ ab. Weiterhin gilt:

$$S_z|+,+\rangle = S_{z,1}|+,+\rangle + S_{z,2}|+,+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+,+\rangle + \frac{\hbar}{2}|+,+\rangle = \hbar|+,+\rangle \stackrel{!}{=} \hbar S_z|+,+\rangle \,. \tag{6}$$

Daraus ergibt sich $S_z = 1$. Also ist $|+,+\rangle$ Eigenzustand zu den Gesamtspinoperatoren $\mathbf{S}^2$ und S_z. Der Gesamtspin ist $S = 1$ und $S_z = 1$. Schauen wir uns nun den Zustand $|+,-\rangle$ and:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2|+,-\rangle &= \mathbf{S}_1^2|+,-\rangle + \mathbf{S}_2^2|+,-\rangle + S_{+,1}S_{-,2}|+,-\rangle + S_{-,1}S_{+,2}|+,-\rangle + 2S_{z,1}S_{z,2}|+,-\rangle = \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2|+,-\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2|+,-\rangle + \hbar^2|-,+\rangle + 2\left(\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)|+,-\rangle = \hbar^2|+,-\rangle + \hbar^2|-,+\rangle \,. \end{aligned} \tag{7}$$

$|+,-\rangle$ ist somit kein Eigenzustand zum Gesamtspinoperator $\mathbf{S}^2$. Dies gilt ebenso für $|-,+\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^2|-,+\rangle &= \mathbf{S}_1^2|-,+\rangle + \mathbf{S}_2^2|-,+\rangle + S_{+,1}S_{-,2}|-,+\rangle + S_{-,1}S_{+,2}|-,+\rangle + 2S_{z,1}S_{z,2}|-,+\rangle = \\ &= \frac{3}{4}\hbar^2|-,+\rangle + \frac{3}{4}\hbar^2|-,+\rangle + \hbar^2|+,-\rangle + 2\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\left(\frac{\hbar}{2}\right)|-,+\rangle = \hbar^2|-,+\rangle + \hbar^2|+,-\rangle \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Also gilt für diesen Zustand:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)\right\} = 2\hbar^2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)\right\} \stackrel{!}{=} \\ &\stackrel{!}{=} \hbar^2 S(S+1)\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)\right\} \,, \end{aligned} \tag{9}$$

also handelt es sich um einen Eigenzustand zum Gesamtspinoperator $\mathbf{S}^2$, wobei $S = 1$ ist.

$$\mathbf{S}^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+,-\rangle - |-,+\rangle) \right\} = 0 \overset{!}{=} \hbar^2 S(S+1) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+,-\rangle - |-,+\rangle) \right\} , \tag{10}$$

womit das ein Eigenzustand zu $\mathbf{S}^2$ ist. Es ist darüber hinaus $S = 0$.