

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: INTERPRETATIONEN UND SPEZIELLE PROBLEME DER QUANTENMECHANIK

Prof. Dr. Ralph von Baltz

Vorlesung Wintersemester 2004/2005

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung INTERPRETATIONEN UND SPEZIELLE PROBLEME DER QUANTENMECHANIK
von Herrn Prof. Dr. RALPH VON BALTZ im Wintersemester 2004/2005
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Wesenszüge der Quantenphysik | 5 |
| 1.1 | Komplementarität | 5 |
| 2 | Strukturumriss und Minimalinterpretation der Quantentheorie | 7 |
| 2.1 | Stationärer Zustand | 7 |
| 2.2 | Un-Worte in der Quantenmechanik | 8 |
| 2.3 | Erhaltungsgrößen | 8 |
| 2.3.1 | Wahrscheinlichkeitsinterpretation | 9 |
| 2.3.2 | Quantisierung als Eigenwert-Problem (original nach SCHRÖDINGER) | 9 |
| 2.3.3 | Zeitentwicklung | 9 |
| 2.4 | „Messproblem“ | 10 |
| 2.4.1 | Harmonischer Oszillator | 10 |
| 2.4.2 | Überlagerung zweier stationärer Zustände | 12 |
| 2.5 | Bemerkungen zur Interpretation der Quantenmechanik | 13 |
| 2.5.1 | Messung bei $t = t_0$ | 13 |
| 2.5.2 | Realistische Auffassung | 13 |
| 2.5.3 | Positivistische Auffassung | 13 |
| 2.5.4 | Beispiel: Elektronen | 14 |
| 2.5.5 | Reduktion der Wellenfunktion beim Messprozess | 14 |
| 2.6 | Zustandsoperatoren (allgemeiner Zustandsbegriff der Quantenmechanik, JOHN VON NEUMANN) | 15 |
| 2.6.1 | Klassische Physik | 15 |
| 2.6.2 | Quantenmechanik | 15 |
| 2.6.3 | „Ableitung“ (Notbehelf bei Interpretation) | 16 |
| 2.6.4 | Ableitung des Zustandsoperators $\hat{\rho}$ | 16 |
| 2.6.5 | Erstes Rechenbeispiel | 17 |
| 2.6.6 | Zweites Rechenbeispiel | 18 |
| 2.7 | Zwei Spin-1/2-Teilchen im Singulett (Verschränkung) | 20 |
| 2.8 | Diskussion einiger Experimente, Gedankenexperimente und Paradoxa zur Quantenmechanik . . | 22 |
| 2.8.1 | SCHRÖDINGERS Katze | 22 |
| 2.8.2 | These | 22 |
| 2.8.3 | Überlagerungen von zwei Zuständen | 23 |
| 2.9 | EPR-Paradoxon (besser: Gedankenexperiment) | 24 |
| 2.9.1 | EINSTEINS Überzeugung | 24 |
| 2.9.2 | BOHMSche Variante des EPR-Gedankenexperiments | 25 |
| 2.10 | Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation | 27 |
| 2.10.1 | EINSTEIN-Waage | 27 |
| 2.11 | LORENTZ-Invarianz | 28 |
| 2.12 | Wachhund und Bombe (Quanten-Zenon-Effekt, Non Quantum Demolition Measurement) . . . | 29 |
| 2.12.1 | Wachhund | 29 |
| 2.12.2 | Analogon aus der klassischen Optik | 30 |
| 2.12.3 | Induzierte Übergänge | 30 |
| 2.12.4 | Bombe | 31 |
| 2.13 | Welcher-Weg-Detektor | 33 |
| 2.13.1 | Quanten-Radierer | 34 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3 | Quantenmechanik mit verborgenen Parametern/Bohmsche Quantenmechanik | 35 |
| 3.1 | BELL-Ungleichungen, BELL-SPECKER-KOCHEN-Theorem | 38 |
| 3.1.1 | BELL-KOCHER-SPECKER-Theorem | 39 |
| 3.2 | BOHMS Quantenmechanik | 39 |
| 4 | Alternativer Formalismus der Quantenmechanik und Interpretationen | 41 |
| 4.1 | HAMILTON-JACOBI-Theorie der klassischen Mechanik | 41 |
| 4.2 | Propagator und Pfad-Integralformalismus der Quantenmechanik | 43 |
| 4.2.1 | AHARONOV-BOHM-Effekt | 45 |
| 4.3 | WIGNER-Funktion | 46 |
| 4.3.1 | Bewegungsgleichung für die WIGNER-Funktion | 48 |
| 4.4 | BERRY-Phase (geometrische oder topologische Phase | 49 |
| 4.5 | Klonen und Teleportation von Quantenzuständen | 50 |
| 4.5.1 | Klonen | 50 |
| 4.5.2 | Teleportation | 51 |
| 4.6 | Dekohärenz | 52 |

Kapitel 1

Wesenszüge der Quantenphysik

- 1.) Stochastische Natur
- 2.) Komplementarität (Teilchen-Welle-Dualismus)
- 3.) Quantisierung bestimmter Werte
- 4.) Verschränkung (Korrelationen \neq Wechselwirkung)
- 5.) Dekohärenz natürlicher Zustände

1.1 Komplementarität

Existieren zwei oder mehrere klassische äquivalente Möglichkeiten, so hat man quantenmechanische Interferenzen.

Kapitel 2

Strukturumriss und Minimalinterpretation der Quantentheorie

In der theoretischen Physik gibt es zwei grundlegende abstrakte Begriffe, nämlich der Begriff des Zustands Z und der Größe G . Diese Begriffe kommen in der folgenden Bedeutung vor: Jeder Naturvorgang kann als Übergang zwischen verschiedenen Zuständen aufgefasst werden. In einem Zustand hat jede Größe einen (reellen Zahlen-) Wert $W(Z, G)$, der also vom Zustand und der Größe abhängt.

Wie funktioniert nun die Quantenphysik konkret? Sie benutzt als Operationsbereich einen Vektorraum über komplexen Zahlen; dies ist die „Spielwiese“, auf dem man sich befindet. Die Elemente dieses Vektorraums V sind Vektoren φ, ψ (mathematische Bezeichnung) oder $|\varphi\rangle, |\psi\rangle$ (Physik). Diese Vektoren kann man addieren und mit komplexen Zahlen multiplizieren; dies ist die mathematische Vektorraumstruktur. In diesem Vektorraum kann man ein Skalarprodukt zwischen den Vektoren φ_1 und φ_2 definieren durch $(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1)^*$ (komplexe Zahl), das die Eigenschaft $(\varphi, \varphi) \geq 0$ besitzt. $(\varphi, \varphi) = 0$ gilt dann und nur dann, wenn $\varphi = 0$ ist. Ein Zustand $|\varphi\rangle$ heißt normiert, falls $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$ gilt, wobei die Menge der normierten Vektoren jedoch keinen Vektorraum darstellt, da beispielsweise im allgemeinen die Summe zweier normierter Vektoren kein normierter Vektor ist. Eine Größe in diesem Vektorraum kann als linearer hermitescher Operator \hat{G} dargestellt werden mit den Eigenschaften:

$$* \hat{G}(\varphi_1 + \varphi_2) = (\hat{G}\varphi_1) + (\hat{G}\varphi_2)$$

$$* (\varphi_1, \hat{G}\varphi_2) = (\hat{G}\varphi_1, \varphi_2)$$

Der Wert $W(Z, \hat{G}) = (\psi, \hat{G}\psi)$ ist reell. Kommen wir nun zur Dynamik: Wir fragen uns, wie sich ein Zustand $\psi(x)$ zur Zeit $t = 0$ zeitlich entwickelt: $\psi(x, t = 0) \mapsto \psi(x, t)$. Zur Beschreibung der Dynamik, also des Bewegungsgesetzes der Zustandsvektoren dient die SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle}$$

\hat{H} ist der HAMILTON-Operator („Hamiltonian“); dies ist ein Energie-Operator.

2.1 Stationärer Zustand

In einem stationären Zustand hat jede Größe (die nicht selbst explizit von der Zeit abhängt) einen zeitlich konstanten Wert. Dies führt auf:

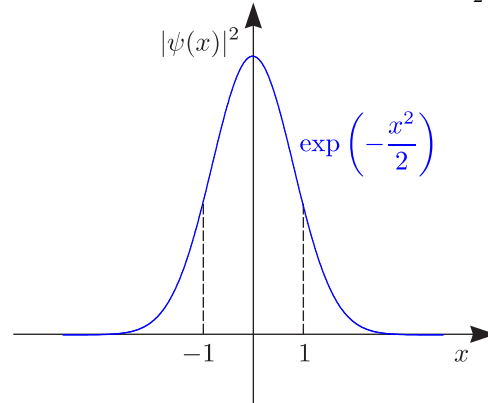
$$\psi(x, t) = \exp(i\phi(t))\psi(x) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\psi(x)$$

Setzt man diesen Ansatz in die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung ein, so erhält man die zeitunabhängige: $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$. Nebenbemerkung: Harmonische Oszillatoren haben klassisch $x = 0$ und $v = 0$ als stationären Zustand, quantenmechanisch jedoch unendlich viele stationäre Zustände!

2.2 Un-Worte in der Quantenmechanik

- * Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens $|\psi(x)|^2$

Diese Begriff kommt aus einer Zeit, in der es die Quantenmechanik noch nicht gab, nämlich aus der Zeit des BOHRschen Atommodells, in dem sich Elektronen auf bestimmten Bahnen um den Atomkern bewegen. Man sollte daher $|\psi(x)|^2 = |\langle x|\psi\rangle|^2$ als Übergangswahrscheinlichkeit von $|\psi\rangle$ im Ortseigenesystem $|x\rangle$ deuten. Was spricht gegen die Existenz einer Bahn? Betrachten wir dazu einen harmonischen Oszillator im Grundzustand, also mit der Grundzustandsenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ und der Grundzustandswellenfunktion



$$\psi_0(x) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Klassische Umkehrpunkte befinden sich in den Wendepunkten.

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + (V(x) - E)\psi(x) = 0$$

Für $x > 1$ oder $x < -1$ ist die klassische kinetische Energie < 0 , es ist also keine klassische Bewegung möglich. Klassisch gilt $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, aber quantenmechanisch kann L_z nur die Werte $0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots$ annehmen.

$$|\psi\rangle \mapsto |x\rangle : |\langle x|\psi\rangle|^2$$

- * Unschärferelation, Unbestimmtheits-Prinzip

Besser ist der Begriff Unbestimmtheits-Relation. Oft liest man: „Man kann x und p nicht gleichzeitig scharf messen.“ Besser ist jedoch die Formulierung: „Es gibt keinen Zustand, in dem sowohl x als auch p einen scharfen Zustand haben.“

- * Zeitunabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$

Man redet besser vom Eigenwertproblem der Energie. $\psi_n(x)$ ist dann ein Energie-Eigenzustand (stationärer Zustand). $H\psi = E\psi$ ist im Gegensatz zu

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H}\psi(x, t)$$

nicht für alle ψ 's gültig.

2.3 Erhaltungsgrößen

Speziell wollen wir solche Erhaltungsgrößen betrachten, welche selbst nicht explizit von der Zeit abhängen. \hat{G} ist erhalten, wenn $W(Z, G) = \langle \psi|\hat{G}|\psi\rangle$ für **alle** ψ zeitlich konstant ist:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t)|\hat{G}|\psi(t)\rangle = \left\langle \psi(t) \left| \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{G}] \right| \psi(t) \right\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

Damit dies gilt, muss $[\hat{H}, \hat{G}]$ gleich 0 sein; \hat{H} und \hat{G} müssen also miteinander vertauschen.

2.3.1 Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Da $W(Z, \hat{G})$ ein Erwartungswert ist, muss sich dieser als eine Summe von Wahrscheinlichkeiten schreiben lassen:

$$W(Z, \hat{G}) = \sum_n g_n \cdot W_n$$

W_n ist die Wahrscheinlichkeit, den Wert g_n von G zu finden. Es müssen also die Wahrscheinlichkeiten W_n bekannt sein und welche Werte g_n überhaupt auftreten können. Diese bestimmten Werte sind gerade die Eigenwerte von \hat{G} .

2.3.2 Quantisierung als Eigenwert-Problem (original nach Schrödinger)

Welche Werte von \hat{G} treten überhaupt auf? Betrachten wir die Streuung von \hat{G} :

$$(\Delta G)^2 = \langle \psi | \hat{G}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle^2 = \left\langle \psi \left| \left(\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \right)^2 \right| \psi \right\rangle \geq 0$$

Wir suchen nun solche Zustände, bei denen die Streuung gleich 0 ist:

$$\Delta \hat{G} = 0 \Rightarrow \left\langle \psi \left| \left(\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \right)^2 \right| \psi \right\rangle \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Delta \hat{G} = \left(\psi, \left(\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \right)^2 \psi \right) = \left(\left(\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \right) \psi, \left(\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \right) \psi \right) \stackrel{!}{=} 0$$

Es sei nun $\tilde{\psi} = (\hat{G} - \langle \hat{G} \rangle) \psi$. Aus der Forderung $\tilde{\psi} = 0$ erhält man:

$$\hat{G}|\psi\rangle = \langle \hat{G} \rangle |\psi\rangle \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\hat{G}|\psi\rangle = g|\psi\rangle \text{ mit } g = \langle \hat{G} \rangle}$$

Dabei handelt es sich um das Eigenwertproblem des Operators \hat{G} mit dem Eigenwert g . Kommen wir nun zurück zur Wahrscheinlichkeits-Interpretation:

$$W(Z, G) = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{G} \hat{1} | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \hat{G} \sum_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n| \right| \psi \right\rangle \text{ mit } \hat{G}|\varphi_n\rangle = g_n|\varphi_n\rangle$$

Man bezeichnet dies auch als Zerlegung der Einheit. Weiterhin gilt nun:

$$W(Z, G) = \sum_n \langle \psi | g_n |\varphi_n\rangle \langle \varphi_n | \psi \rangle = \boxed{\sum_n g_n \cdot |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2 \text{ mit } |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2 = W_n}$$

Dieses Wertfunktional ist also genau von der Struktur eines statistischen Erwartungswertes.

2.3.3 Zeitentwicklung

Darunter wollen wir die Lösung der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung verstehen. Es sei also $\psi(x)$ zur Zeit $t = 0$ gegeben. Dann wollen wir wissen, wie $\psi(x, t)$ zu einem späteren Zeitpunkt t aussieht!

$$\boxed{\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right) \psi(x, t = 0)}$$

Dies gilt, sofern \hat{H} nicht explizit von t abhängt. Die Strategie ist, $\psi(t = 0)$ zu entwickeln:

$$|\psi(t = 0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle \text{ mit } H|\varphi_n\rangle = E|\varphi_n\rangle$$

$$f(\hat{H})|\psi(t = 0)\rangle = \sum_n c_n f(E_n) |\varphi_n\rangle$$

Dies kann man sich durch die Reihenentwicklung der Funktion f klar machen. Betrachten wir als Beispiel die Exponentialfunktion:

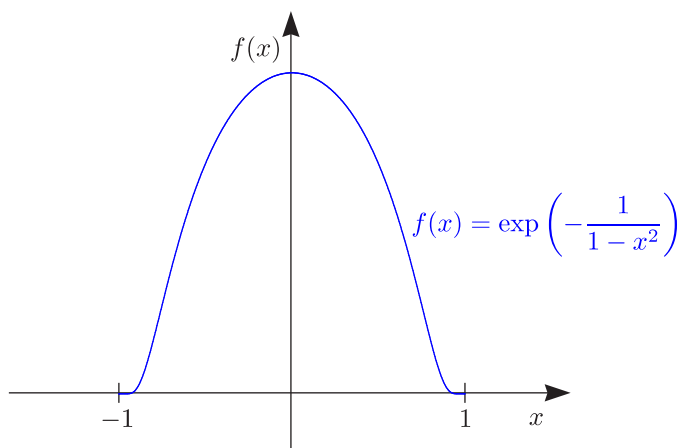
$$\exp\left[-\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\right] = 1 - \frac{1}{!} \cdot \left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)^2 + \dots$$

Die Reihenkoeffizienten wendet man dann auf $|\psi(t = 0)\rangle$ an.

Gegenbeispiel

Wir betrachten den HAMILTON-Operator eines freien Teilchens:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

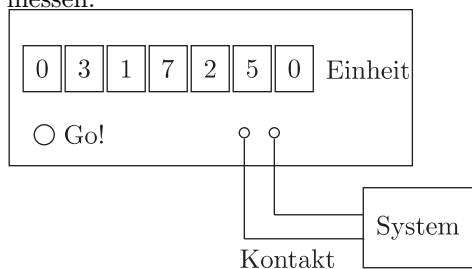


$$\psi(x, t = 0) = \exp\left[-\frac{1}{1-x^2}\right] \text{ für } |x| < 1$$

Wie entwickelt sich diese Funktion im Laufe der Zeit? Sie bleibt in der Mitte des Koordinatensystems; sie zerfließt aber. Dies ist so, weil der Erwartungswert des Impulses einer reellen Funktion immer gleich 0 ist. Für $|x| > 1$ gilt $\hat{H}\psi(x) \equiv 0$, das heißt, $\psi(x, t) \equiv 0$ für $|x| > 1$.

2.4 „Messproblem“

Wir glauben, dass es für jede Größe ein Messgerät gibt, das es gestattet, die entsprechende Größe fehlerfrei zu messen:



- * Beliebige Genauigkeit
- * Beliebig kleine Messzeit
- * Für jede Größe gibt es ein eigenes Messgerät.

Unterscheide: Zustandsgröße, Einzelmessung/Messung

2.4.1 Harmonischer Oszillator

Wir betrachten als System den harmonischen Oszillator mit

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \text{ mit } \lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \text{ als Einheit}$$

Stationäre Zustände sind:

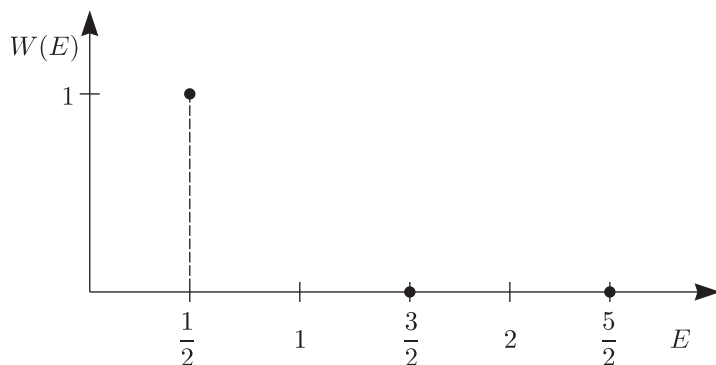
$$\psi_n(x) \sim H_n(x) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\lambda^2}\right)$$

Der Grundzustand wird beschrieben durch:

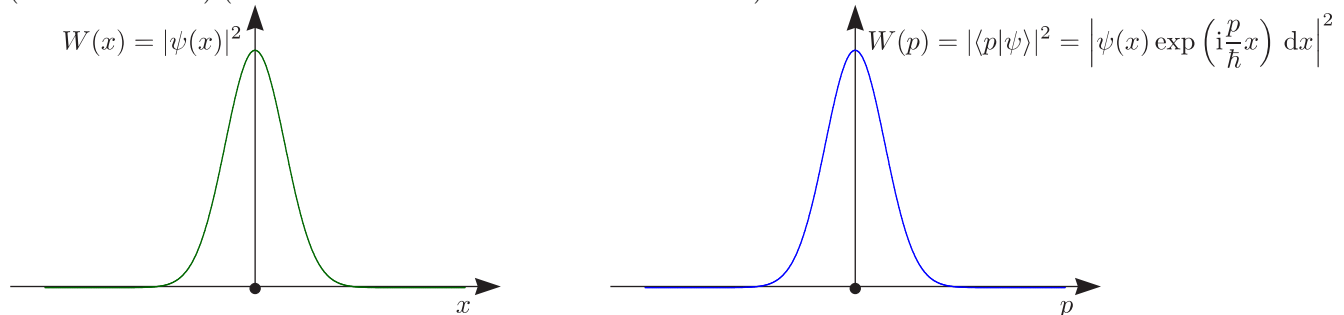
$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Wie bringt man nun einen harmonischen Oszillator in den Grundzustand (Präparation)? Der Oszillator befinde sich in irgendeinem Energieeigenzustand. Dann bringt man ihn in Kontakt mit dem Energie-Messgerät, das einen Wert für E_n anzeigt. Die Präparation nimmt man nun durch Selektion der Messwerte vor; man probiert also solange, bis das Messgerät den Wert $E = \frac{1}{2}$ anzeigt. „Messung“ bedeutet in dieser statistischen Situation also, dass man eine Wiederholung von vielen Einzelmessungen durchführt.

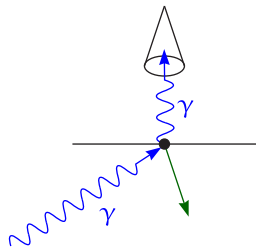
Zustandspräparation: ψ_0 ψ_0 ψ_0 ... ψ_0



Gebot: An jedem Mitglied des Ensembles darf nur einmal gemessen werden, da durch die Messung der Zustand (**unkontrolliert**) (durch den intrinsisch statistischen Charakter) verändert werden können.



Wenn man ein System in Ruhe lässt, dann ändert sich der Zustandsvektor nach der SCHRÖDINGER-Gleichung. Führt man eine Messung beispielsweise von x durch, so befindet sich das System in einem Eigenzustand von x . Betrachten wir beispielsweise ein γ -Mikroskop, das HEISENBERG in einer seiner Arbeiten erwähnt hat:



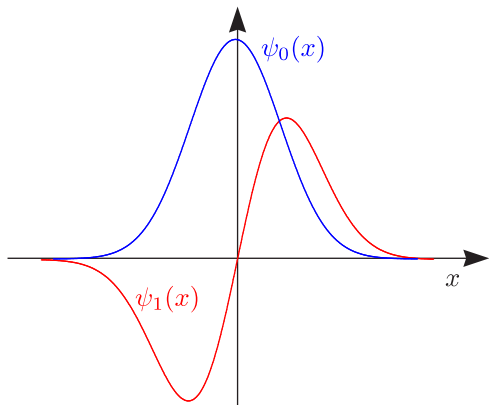
Man verändert den Impuls des Elektrons durch den optischen Abbildungsprozess. Damit gilt die Unbestimmtheitsrelation $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$. Die Auflösung wird umso besser, je kleiner λ_γ ist.

Mathematisch gesehen ist die Unbestimmtheitsrelation eine Folge der Vertauschungsregeln von Ort und Impuls, also $[\hat{x}, \hat{p}] = -i\hbar$ und außerdem der SCHWARZSchen Ungleichung des Skalarproduktes $|\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2 \leq \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle$. Für gleiche $|\psi\rangle$'s gilt:

$$(\Delta x)^2 = \langle \psi | x^2 | \psi \rangle - \langle \psi | x | \psi \rangle^2, (\Delta p)^2 = \langle \psi | p^2 | \psi \rangle - \langle \psi | p | \psi \rangle^2$$

2.4.2 Überlagerung zweier stationärer Zustände

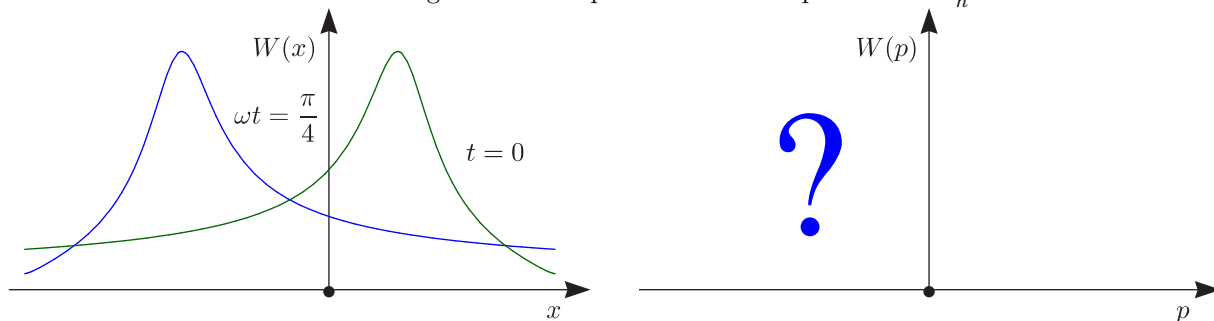
$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x) + \psi_1(x)]$$



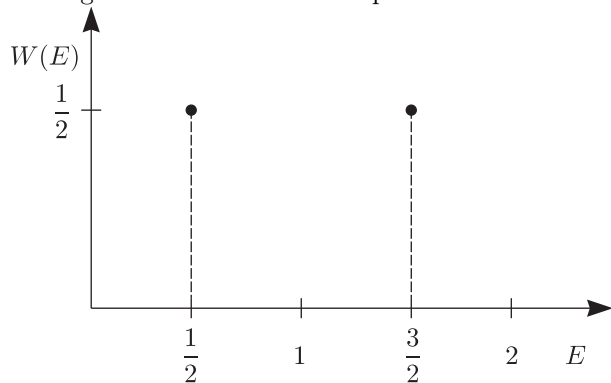
Die Zeitabhängigkeit gewinnt man nun durch:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_0(x) \exp\left(-i\frac{E_0 t}{\hbar}\right) + \psi_1(x) \exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) \right]$$

Dabei handelt es sich um ein schwingendes Wellenpaket mit der Frequenz $\omega = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$.



Im Gegensatz zur Orts- oder Impulsstatistik ändert sich die Statistik der Energie nicht: Die Energie ist erhalten!



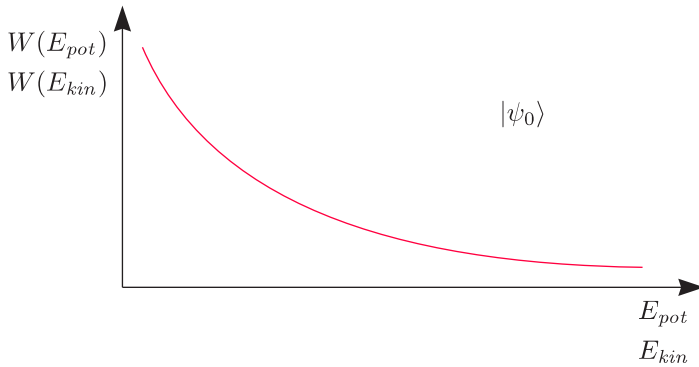
* Kinetische Energie: $\hat{H}_{kin} = \frac{p^2}{2m}$

* Potentielle Energie: $\hat{H}_{pot} = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \sum_p p^2 w(p) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} W(p) p^2 dp \stackrel{p^2 \leftrightarrow p^2}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{W}(p_2) p_2 dp_2$$

$$[W(-p) + W(p)] dp = \tilde{W}(p_2) 2p dp$$

$$\tilde{W}(E_{pot}) = \frac{1}{2} \left[W(-\sqrt{E_{kin}}) + W(+\sqrt{E_{kin}}) \right] \frac{1}{\sqrt{E_{kin}}}$$



Der HAMILTON-Operator setzt sich zusammen aus \hat{H}_{kin} und \hat{H}_{pot} . Man erhält als Energie:

$$E_0 \equiv \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle = \langle H_{kin} \rangle + \langle H_{pot} \rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Für die Streuung gilt $\Delta E = 0$, $\Delta E_{kin} \neq 0$ und $\Delta E_{pot} \neq 0$. Quantenmechanische Streuungen haben nichts mit klassischen Fehlern zu tun!

2.5 Bemerkungen zur Interpretation der Quantenmechanik

* $t = 0$: $\psi^S(x)$ gesch., $\psi_0^M(q)$ = im Grundzustand

$$\psi_{ges}(x, q) = \psi^S(x) \cdot \psi_0^M(q)$$

* $t > 0$: Kontakt von System und Messgerät

$$\psi_{ges}(x, q; t) = \sum_m \psi_m^S(x) \cdot \psi_n^M(q) \cdot C_{mn}(t)$$

ψ_m^S und ψ_n^M sind stationäre Zustände von System und Messgerät.

2.5.1 Messung bei $t = t_0$

* Definierte Anzeige vom Messgerät zur Größe \hat{G} : g_0

* System muss im Eigenzustand von \hat{G} zum Eigenwert g_0 sein.

Die Anzeige wird fixiert durch die Wechselwirkung mit der Umgebung (Irreversibilität). Es besteht folgendes Problem: Die Quantenmechanik umfasst die klassische Mechanik, sie bedarf aber der klassischen Physik zur Interpretation; Messgeräte sind nämlich klassisch. Zu diesem Thema gibt es interessante Bücher:

* BAUMANN, SEXL: Interpretation der Quantenmechanik

* SELLERI: Debatte um die Quantentheorie

* WHEELER und ZUREK: The Quantum Measurement Problem (gesammelte Artikel)

2.5.2 Realistische Auffassung

Man nimmt an, dass die „Bausteine der Atomphysik“ (Elektron, Proton, ..., Quarks, ...) **unabhängig** von uns und unseren „Messungen“ existieren. Das **Ziel** ist es, die Struktur und atomare Vorgänge durch **Bilder** (anschauliche Modelle) zu verstehen und Naturgesetze so zu formulieren, dass jeder beobachtete Effekt auf (mindestens) eine Ursache zurückgeführt wird.

2.5.3 Positivistische Auffassung

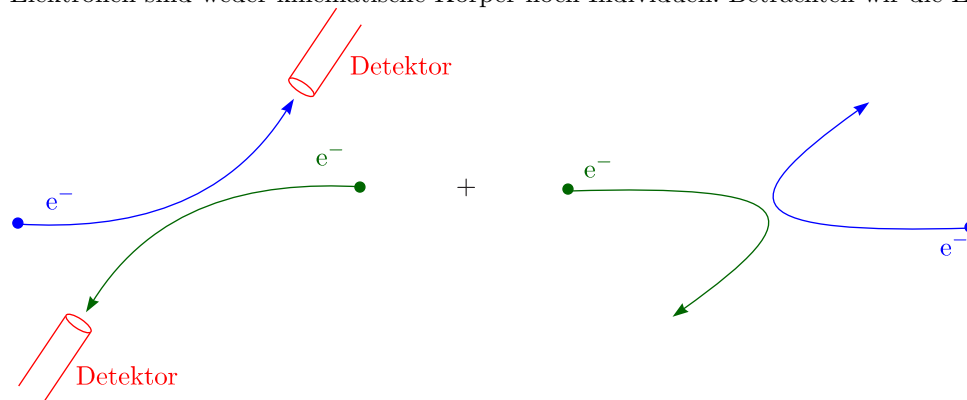
Weder den Phänomenen noch den Beobachtungsmitteln kann eine eigenständige Realität zugeschrieben werden.

* Es besteht eine gewisse Willkür, was zum System „Messgerät“ zählt. Das heißt, die Grenzen zwischen der „Quantenwelt“ und der makroskopischen Welt verläuft fließend. Wieso ein Messgerät also einen bestimmten Wert anzeigt, kann man bis heute nicht begründen.

* Die klassische Physik nimmt eine Art „Zwitterstellung“ ein; die Quantenmechanik umfasst die klassische Physik, bedarf ihrer aber zur Interpretation.

2.5.4 Beispiel: Elektronen

Elektronen sind weder kinematische Körper noch Individuen. Betrachten wir die Elektron-Elektron-Streuung:



Der Detektor kann nicht unterscheiden, ob der erste oder der zweite Vorgang abläuft. Die Quantenmechanik ist philosophisch nicht neutral:

- * leugnet Realität
- * Die Messung stört nicht vorhandene Werte, sondern sie erzeugt diese!

2.5.5 Reduktion der Wellenfunktion beim Messprozess

Bei der Messung geht die Wellenfunktion $\psi(x)$ über in $\varphi_{n_0}(x)$, welcher Eigenzustand der Messgröße ist.

$$\psi(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x) \mapsto \psi_{n_0}(x)$$

SCHRÖDINGER hat postuliert, dass das System am Anfang die Wellenfunktion $\psi(x)$ und am Ende φ_{n_0} aufweist. Dazwischen vermischen sich jedoch die Basissysteme von System und Messgerät:

$$\sum_{mn} c_{mn}(t) \psi_m^S(x) \times \varphi_n(q) \neq \tilde{\psi}^S(x) \cdot \tilde{\psi}^M(q)$$

„Die Wellenfunktion des isolierte Systems geht beim Messprozess „verloren“; sie existiert nicht mehr. Was nicht existiert, kann sie nicht ändern.“ (nach SCHRÖDINGER).

1.) Kopenhagener Interpretation:

$|\psi\rangle$ ist für alle Mitglieder des Ensembles gleich; es handelt sich um eine vollständige Beschreibung (nach BORN, BOHR, HEISENBERG).

$$\boxed{\psi} \quad \boxed{\psi} \quad \boxed{\psi} \quad \dots \quad \dots \quad \boxed{\psi}$$

Hierzu gibt es einen Text von STOPP mit dem Titel „Copenhagen Interpretation“ im American Journal of Physics 40, 1098 (1972). Außerdem kann man die Internetseite von J.G.CRAMER besuchen: [//faculty.washington.edu/cramer/theory.htm](http://faculty.washington.edu/cramer/theory.htm).

2.) Statistische Interpretation:

$|\psi\rangle$ gehört dem gesamten Ensemble (nach EINSTEIN). Werte $W(Z, G) = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle$ sind statistische Erwartungswerte (BORN). Dafür gibt es sehr schöne Übersichtsartikel von BALLENTINE im Review of Modern Physics 42, 358 (1970) und von LALOE im American Journal of Physics 69, 655 (2001). Eine interessante Internetseite zur stochastischen Quantenmechanik ist:

www-2.cs.cmu.edu/~lafferty.

HEISENBERG:

„Wichtigstes“ Ziel der Naturwissenschaften ist die Formulierung von Gesetzen, welche die Vorgänge regieren – nicht Bereitstellung von anschaulichen Bildern. Die letzte Wurzel der Erscheinungen sind mathematisch formale Gesetze“.

2.6 Zustandsoperatoren (allgemeiner Zustandsbegriff der Quantenmechanik, John von Neumann)

2.6.1 Klassische Physik

* Ideale (reine) Zustände:

Das Tupel (x, p) legt einen bestimmten Zustand fest. Man geht also davon aus, das Teilchen habe einen bestimmten Ort und Impuls hat. Die Werte physikalischer Größen sind Funktionswerte $G(p, x)$. $\Delta G > 0$ ist eine Folge von Fehlern.

* Realer Zustand („Gemisch“):

Ort und Impuls lassen sich nur mit bestimmten Unsicherheiten angeben. Um mit der mangelnden Kenntnis umzugehen, bedient man sich einer statistischen Beschreibung, nämlich einer Wahrscheinlichkeitsdichte $W(p, x) \geq 0$ mit $\iint W(x, p) dx dp = 1$. Beispielsweise gilt für eine thermische Verteilung:

$$W \sim \exp\left(-\frac{H(p, x)}{k_B T}\right)$$

Diese Disziplin heißt klassische statistische Physik. Der Wert von G wird als statistischer Erwartungswert gesehen:

$$W(Z, G) = \iint W(p, x) G(x, p) dx dp$$

2.6.2 Quantenmechanik

* Reine Zustände:

Diese werden durch Zustandsvektoren (Kets) $|\psi\rangle$ oder Wellenfunktionen $\psi(x)$ beschrieben. Es gilt $\Delta G_0 = 0$, aber $\Delta G_n > 0$ für $n \geq 1$. Man kann also nicht die Streuung aller Größen beseitigen; Streuungen sind nicht unbedingt Folge von Fehlern!

$$W(Z, G) = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle = \sum_n g_n W(g_n) \text{ mit } W(g_n) = |\langle g_n | \psi \rangle|^2, \hat{G} | g_n \rangle = g_n | g_n \rangle$$

Man kann einen Wahrscheinlichkeitsoperator \hat{W} definieren mit $W(g_n) = \langle \psi | \hat{W} | \psi \rangle$. Um $W(g_n) = |\langle g_n | \psi \rangle|^2$ zu erhalten, muss man die Form $\hat{W}_{\hat{G}}(g_n) = |g_n\rangle\langle g_n|$ wählen; dabei handelt es sich um einen Projektionsoperator $\hat{P}_{|g_n\rangle}$.

* Reale Quantenzustände („Gemische“):

Anstelle des Zustandsvektors $|\psi\rangle$ betrachten wir einen Zustandsoperator $\hat{\rho}$, welcher hermitesch, positiv definit ist und für den außerdem $\text{Sp}(\hat{\rho}) = 1$ gilt. Damit folgt für den Wert:

$$W(Z, G) = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{G}) = \sum_n \langle n | \hat{\rho} \hat{G} | n \rangle$$

$\{|n\rangle\}$ ist hierbei eine beliebige orthonormale Basis, da sich die Spur unter Basistransformationen nicht ändert. Im Falle eines reinen Zustandes ist $\hat{\rho}$ gerade der Projektor auf diesen Zustand, also $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ($|n=1\rangle = |\psi\rangle, |n>1\rangle \perp |\psi\rangle$). Hier gilt nun:

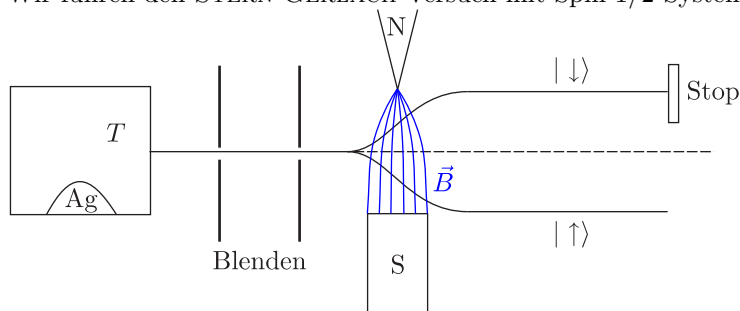
$$\text{Sp}(\hat{\rho} \hat{G}) = \sum_n \langle n | \psi \rangle \langle \psi | \hat{G} | n \rangle = \sum_n \langle \psi | \hat{G} | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle$$

Allgemein gilt für ein inkohärentes **Gemisch** von Zuständen:

$$\hat{\rho} = \sum_m W_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m| \text{ mit } W_m \geq 0 \text{ und } \sum_m W_m = 1$$

2.6.3 „Ableitung“ (Notbehelf bei Interpretation)

Wir führen den STERN-GERLACH-Versuch mit Spin-1/2-Systemen durch.



STERN-GERLACH ①

Das magnetische Moment des Elektrons ist $\vec{\mu} = g \cdot \frac{e\hbar}{2m} \vec{S}$. $|\uparrow\rangle$ sei Eigenzustand von $\hat{\sigma}_z$ zum Eigenwert $+1$. In welchem Zustand sind die Spins nach Verlassen des Ofens? In keinem, zumindest nicht in einem mit Ket $\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ mit $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \frac{1}{2}$; die Phasen von α und β sind unbestimmt. Wir entwickeln diesen fragwürdigen Zustand nach der Eigenbasis:

$$|?\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \text{ mit } C_n = |C_n| \cdot \exp(i\varphi_n)$$

φ_n ist statistisch. Berechnen wir nun den Erwartungswert:

$$\langle \hat{G} \rangle = \langle ? | \hat{G} | ? \rangle = \sum_m \sum_n C_m^* C_n \langle m | \hat{G} | n \rangle$$

Wir mitteln nun über alle Phasen (aufgepropfter klassischer Mittelwert):

$$\overline{\langle \hat{G} \rangle}^\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_{mn}}{2\pi} \exp(-i(\varphi_m - \varphi_n)) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases}$$

$$\overline{\langle \hat{G} \rangle}^\varphi = \sum_m |C_m|^2 \langle m | \hat{G} | m \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{G}) \text{ mit } \hat{\rho} = \sum_m W_m |m\rangle \langle m|, W_m = |C_m|^2$$

Man beseitigt durch die Mittelwertbildung sämtliche Interferenzen. Betrachten wir das Ensemble:

$$\boxed{\psi_1} \quad \dots \quad \boxed{\psi_1} \quad \boxed{\psi_2} \quad \dots \quad \boxed{\psi_2} \quad \dots$$

Es ist nicht bekannt, welches Einzelsystem welche ψ_m hat. Das System hat keine Wellenfunktion, bevor man es nicht in Kontakt mit dem Messgerät gebracht hat. Es gibt keine Interferenzen von ψ_1 und ψ_2 . Eine kohärente Überlagerung von ψ_1 und ψ_2 ist $C_1|\psi_1\rangle + C_2|\psi_2\rangle$.

2.6.4 Ableitung des Zustandsoperators $\hat{\rho}$

- * $\hat{\rho}$ hermitesch, Eigenwerte reell
- * $\hat{\rho}$ positiv, Eigenwerte ≥ 0
- * $\text{Sp}(\hat{\rho}) = 1$

Daraus ergibt sich $0 \leq \text{EW} \leq 1$.

- * Reiner Zustand durch Projektor: $\hat{\rho} = \hat{P}_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle \langle \psi|$
- * Spektralzerlegung: $\hat{\rho} = \sum_m W_m |m\rangle \langle m|$, $|m\rangle$ ist Eigenzustand von $\hat{\rho}$
- * Entropie: $S = -k_B \cdot \text{Sp}(\hat{\rho} \ln(\hat{\rho})) \geq 0$
Die Quantenmechanik kann Zustand mit $S > 0$ beschreiben.
- * Zeitliche Entwicklung von $\hat{\rho}$ (SCHRÖDINGER-Bild)

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] = 0 \quad \left(=: \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \right)}$$

(Dies ist die VON NEUMANN-Gleichung. Bilde Matrixelemente bezüglich irgendeiner Basis $|m\rangle$: $\rho_{mn}(t)$.)

2.6.5 Erstes Rechenbeispiel

Betrachten wir wieder den STERN-GERLACH-Versuch mit Spin 1/2, den wir in x -, y - und z -Richtung aufstellen:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\sigma}_x) = 0 \text{ (}\uparrow_x, \downarrow_x \text{ 50\%)}, \quad \langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{4}{5}, \quad \langle \hat{\sigma}_z \rangle = \frac{3}{5}$$

Betrachten wir den Zustandsoperator in Matrixdarstellung

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix}$$

in der Basis von \uparrow_z, \downarrow_z mit reellem a , wobei $0 \leq a \leq 1$. Es handelt sich um einen reinen Zustand, falls gilt $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Bei einem Gemisch ist nämlich $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$. Es seien W_ν die Eigenwerte und $|\nu\rangle$ die Eigenvektoren von $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum W_\nu |\nu\rangle \langle \nu|$$

Der Begriff des „Gemisches“ bezieht sich auf die (in)kohärente Überlagerung. Fassen wir noch einmal zusammen:

* Kopenhagener Interpretation:

Ensemble ψ ψ ψ ψ

* „Statistische Interpretation: ψ gehört zu Ensemble als Ganzes

ψ :

* Gemisch (Hilfsvorstellung):

ψ_1 ψ_2 ψ_3 ψ_n

Betrachten wir nun ein Spin-1/2-System mit $\langle \hat{\sigma}_x \rangle = 0$, $\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{4}{5}$ und $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \frac{3}{5}$. Der Dichteoperator werde in der Basis von $\hat{\sigma}_z$ (immer Angabe der **Basis!**) beschrieben durch $\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix}$. Wir müssen also drei reelle Zahlen a , b_1 und b_2 mit $b = b_1 + ib_2$ finden, um das Problem zu lösen.

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\sigma}_x) = \text{Sp} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = b + b^* = 2\text{Re}(b)$$

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\sigma}_y) = -2\text{Im}(b) \stackrel{!}{=} \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{2i}{5}}$$

$$\langle \hat{\sigma}_z \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{\sigma}_z) = 2a - 1 \stackrel{!}{=} \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{5}}$$

Damit erhalten wir also:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2i}{5} \\ \frac{2i}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \quad \hat{\rho}^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2i}{5} \\ \frac{2i}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2i}{5} \\ \frac{2i}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \hat{\rho}$$

Damit handelt es sich also um einen **reinen** Zustand und kein Gemisch. $\hat{\rho}$ lässt sich darstellen als:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| \text{ mit } |\psi\rangle \hat{=} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$$

Außerdem handelt es sich um einen reinen Zustand, da $\langle \hat{\sigma}_x \rangle^2 + \langle \hat{\sigma}_y \rangle^2 + \langle \hat{\sigma}_z \rangle^2 = 1$ ist; was jedoch nur bei Spin-1/2-Systemen funktioniert. Immer gilt jedoch:

$$\langle \hat{\sigma}_x^2 \rangle + \langle \hat{\sigma}_y^2 \rangle + \langle \hat{\sigma}_z^2 \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$$

2.6.6 Zweites Rechenbeispiel

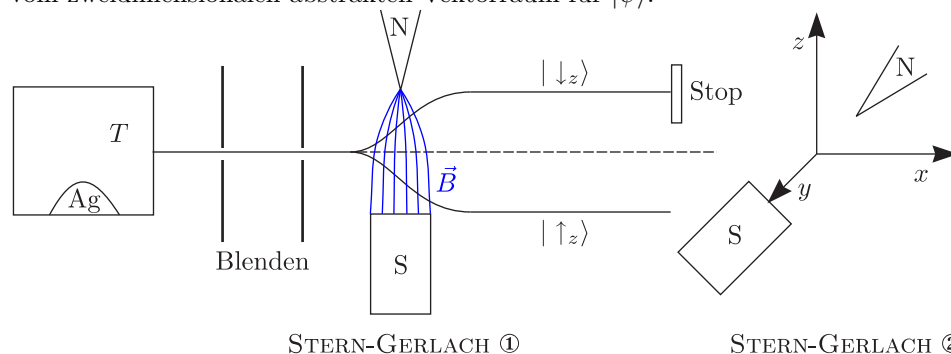
Es sei nun

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ mit } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Frage: In welche Richtung zeigt der Spin?

$$\langle\psi|\hat{\sigma}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle\psi|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle \\ \langle\psi|\hat{\sigma}_y|\psi\rangle \\ \langle\psi|\hat{\sigma}_z|\psi\rangle \end{pmatrix}$$

Dabei muss es sich um einen **normalen** Vektor im dreidimensionalen Anschauungsraum. Man unterscheide vom zweidimensionalen abstrakten Vektorraum für $|\psi\rangle$.



Vor der Präparation des $|\uparrow\rangle$ -Zustandes durch STERN-GERLACH-Versuch ① handelt es sich beim Atomstrahl um ein Gemisch bezüglich des Spins. Der Dichteoperator dieses Gemisches wird beschrieben durch:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \frac{1}{2}\mathbf{1}$$

Für die Messung von $\hat{\sigma}_y$ mit STERN-GERLACH-Versuch ② erhält man:

$$W(\uparrow_y) = \langle\uparrow_z|\hat{P}_{|\uparrow_y\rangle}|\uparrow_z\rangle = |\langle\uparrow_y|\uparrow_z\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

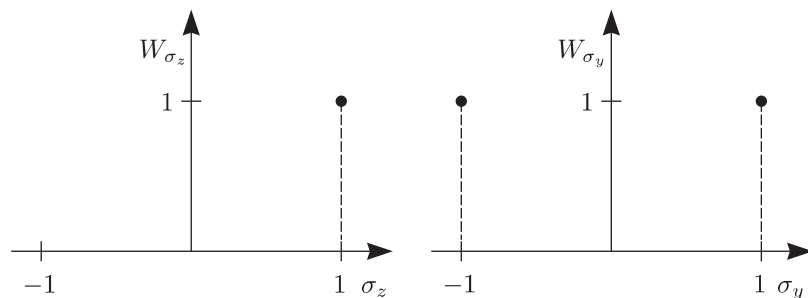
$$W(\downarrow_y) = \langle\downarrow_z|\hat{P}_{|\downarrow_y\rangle}|\uparrow_z\rangle = |\langle\downarrow_y|\uparrow_z\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Die normierten Eigenzustände von

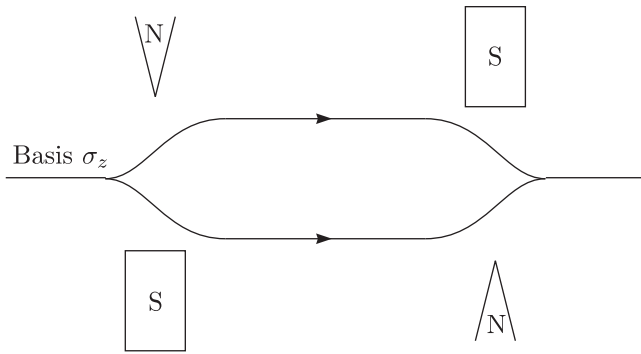
$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

lauten in der $\hat{\sigma}_z$ -Basis:

$$|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } |\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

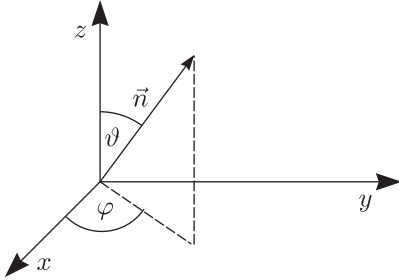


$$|\psi\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha}|\alpha(\sigma_y - EZ)\rangle$$



STERN-GERLACH ①

Ein schöner Artikel zu dieser Thematik ist SCULLY: „Spin Coherence and Humpty Dumpty“. Wir betrachten den allgemeinen Spin-Operator in Richtung \vec{n} :



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \hat{\sigma} = n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \exp(-i\varphi) \sin \vartheta \\ \exp(i\varphi) \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Die Eigenzustände von $\hat{\sigma}_n$ lauten:

$$|\uparrow_{\vec{n}}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\vartheta}{2}) \\ \exp(i\varphi) \cdot \sin(\frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow_{\vec{n}}\rangle = \begin{pmatrix} -\exp(-i\varphi) \cdot \sin(\frac{\vartheta}{2}) \\ \cos(\frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix} = \hat{U} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ sind die Basisvektoren von $\hat{\sigma}_z$. (Nebenbemerkung: Zustände transformieren sich nach halbem Winkel. Eine 2π -Drehung des Koordinatensystems führt also zu einer Multiplikation des Zustandes mit dem Wert -1 .) Die Matrix \hat{U} lautet:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\vartheta}{2}) & -\exp(-i\varphi) \cdot \sin(\frac{\vartheta}{2}) \\ \exp(i\varphi) \cdot \sin(\frac{\vartheta}{2}) & \cos(\frac{\vartheta}{2}) \end{pmatrix}$$

Was ist nun die Wahrscheinlichkeit, $\sigma_n = \pm 1$ zu messen für den Zustand $|\uparrow_z\rangle$?

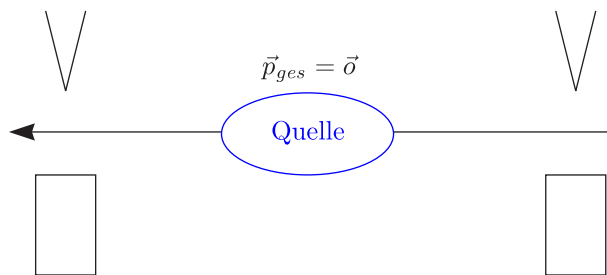
$$W(\uparrow_n) = \langle \uparrow_z | P_{|\sigma_n=1\rangle} | \uparrow_z \rangle = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \quad W(\downarrow_n) = \langle \uparrow_z | \hat{P}_{|\sigma_n=-1\rangle} | \uparrow_z \rangle = \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$P_{|\uparrow_n\rangle} = \left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\uparrow_z\rangle + \exp(i\varphi) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\downarrow_z\rangle \right] \cdot \left[\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \langle \uparrow_z| + \exp(-i\varphi) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \langle \downarrow_z| \right] = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot |\uparrow_z\rangle \langle \uparrow_z| + \dots$$

$$\langle \uparrow_z | \hat{\sigma}_n | \uparrow_z \rangle = +1 \cdot W(\uparrow_n) + (-1) \cdot W(\downarrow_n) = \boxed{\cos(\vartheta)}$$

Das System verhält sich also rotationsunabhängig!

2.7 Zwei Spin-1/2-Teilchen im Singulett (Verschränkung)



STERN-GERLACH ①

STERN-GERLACH ②

Der Gesamtimpuls und Gesamtdrehimpuls beider Teilchen sei gleich null, so dass nur Spin-Zustände existieren, wobei $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ der Gesamtspin darstellt und $[\hat{S}^2 + \hat{S}_z] = 0$ gilt. Der Singulett-Zustand ist ein **reiner** Zustand:

$$|S = 0, S_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow_z\rangle|\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle|\uparrow_z\rangle]$$

* Der Singulett-Zustand ist vollständig rotationsinvariant.

* $|\text{Singulett}\rangle \neq |?\rangle_1 \otimes |?\rangle_2$ (Verschränkung)

Man kann sich nun folgende Fragen stellen:

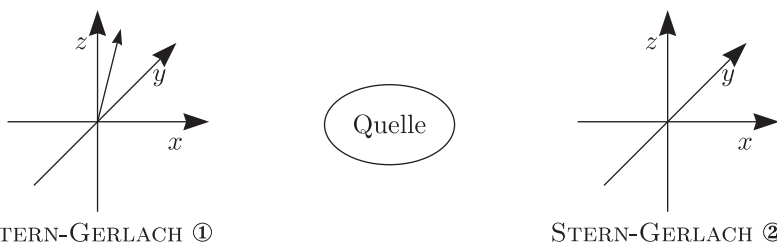
- 1.) Messung von $\hat{\sigma}_n$ für Teilchen 1 mit STERN-GERLACH ①, kein STERN-GERLACH ②

$$W(\uparrow_n) = \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_n=1\rangle} \mathbf{1}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle = \frac{1}{2}$$

$$W(\downarrow_n) = \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_n=-1\rangle} \mathbf{1}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle = \frac{1}{2}$$

Dies gilt unabhängig von der Richtung \vec{n} . Der Zustand von Spin 1 ist daher ein **Gemisch**; es ist $\hat{\rho}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{1}_1$.

- 2.) Messung wie (1), aber mit STERN-GERLACH ②/Messresultat Nr.1 nicht zur Kenntnis
- 3.) Messung mit STERN-GERLACH ① und STERN-GERLACH ②, beide Resultate werden zur Kenntnis genommen



STERN-GERLACH ①

STERN-GERLACH ②

Betrachten wir den Singulett-Zustand:

$$|S = 0, S_z = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle^{(1)}|\downarrow\rangle^{(2)} - |\downarrow\rangle^{(1)}|\uparrow\rangle^{(2)} \right)$$

Wir berechnen die Eigenzustände zu

$$\hat{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \exp(-i\varphi) \sin \vartheta \\ \exp(+i\varphi) \sin \vartheta & -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$|\uparrow_n\rangle = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\uparrow\rangle + \exp(i\varphi) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\downarrow\rangle$$

$$|\downarrow_n\rangle = \exp(-i\varphi) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\uparrow\rangle + \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\downarrow\rangle$$

Der Projektor auf $|\sigma_n\rangle$ lautet:

$$\hat{P}_{|\sigma_n\rangle} = |\sigma_n\rangle\langle\sigma_n| = \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) (|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) + \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$$

2.7. ZWEI SPIN-1/2-TEILCHEN IM SINGULETT (VERSCHRÄNKUNG)

a.) Die Messung erfolgt nur an einem Spin:

$$W(\sigma_n) = \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_n\rangle}^{(1)} | \text{Singulett} \rangle$$

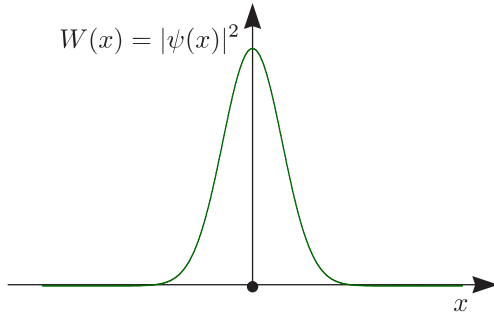
Es gilt $W^{(1)}(\uparrow_n) = \frac{1}{2}$ und $W^{(1)}(\downarrow_n) = \frac{1}{2}$ bezüglich jeder Richtung \vec{n} . Das Teilsystem 1 befindet sich **nicht** in einem reinen Zustand $|\uparrow\rangle$, sondern in einem Gemisch mit $\hat{\rho}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Das Gesamtsystem befindet sich in einem reinen Zustand, die Teilsysteme aber **nicht!**

b.) STERN-GERLACH ② vorhanden, aber das Resultat wird ignoriert. Allgemein stehe STERN-GERLACH ① in \vec{a} - und STERN-GERLACH ② in \vec{b} -Richtung:

$$\begin{aligned} W(\sigma_a) &= W(\uparrow_a, \downarrow_a) = \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_a\rangle}^{(1)} \hat{P}_{|\uparrow_b\rangle}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle + \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_a\rangle}^{(1)} \hat{P}_{|\downarrow_b\rangle}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle = \\ &= \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_a\rangle}^{(1)} \left(\hat{P}_{|\uparrow_b\rangle}^{(2)} + \hat{P}_{|\downarrow_b\rangle}^{(2)} \right) | \text{Singulett} \rangle = \langle \text{SINGULETT} | \hat{P}_{|\sigma_a\rangle}^{(1)} \mathbf{1}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle \end{aligned}$$

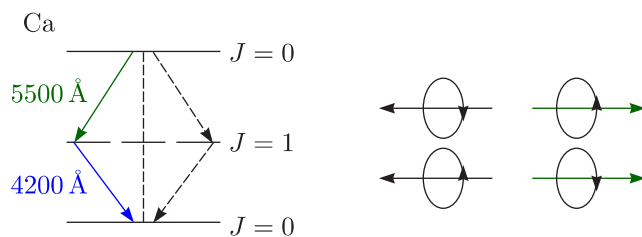
Man erhält also dasselbe Ergebnis wie in a). Es ist egal, ob der zweite STERN-GERLACH-Versuch vorhanden ist oder nicht. Dies ist klar, da keine (Spin-)Wechselwirkung der beiden Teilchen im Spiel ist. In der Praxis wird das Experiment mit Photonen durchgeführt, da diese im Gegensatz zu Elektronen keine Ladung tragen.

Betrachten wir beispielsweise den harmonischen Oszillator im Grundzustand. Führt man eine x -Messung durch, so projiziert man den Zustand $|\psi_0\rangle$ auf den Ortseigenzustand $|x\rangle$: $W = |\langle x | \psi_0 \rangle|^2$.



Was passiert, falls man die x -Messung nicht zur Kenntnis nimmt? Am Anfang befinde sich der Oszillator im Zustand $|\psi_0\rangle$ und der Dichteoperator ist gegeben durch $\hat{\rho} = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$. Nach der x -Messung gilt:

$$\hat{\rho} = \int w(x) |x\rangle\langle x| dx \neq |\psi\rangle\langle\psi| \quad \left(\sum_n W_n |a_n\rangle\langle a_n| \right)$$



c.) Gemessene Wahrscheinlichkeit für STERN-GERLACH ① und ②:

$$W(\sigma_a, \sigma_b) = \langle \text{Singulett} | \hat{P}_{|\sigma_a\rangle}^{(1)} \otimes \hat{P}_{|\sigma_b\rangle}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle$$

Wir wählen $\vec{a} \parallel z$, da $|\text{Singulett}\rangle$ rotationsinvariant ist; ϑ sei der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} .

$$W(\uparrow_a, \uparrow_b) = W(\downarrow_a, \downarrow_b) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$$

$$W(\uparrow_a, \downarrow_b) = W(\downarrow_a, \uparrow_b) = \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\vartheta}{2} \right)$$

Für $\vec{a} = \vec{b}$ und $\vartheta = 0$ besteht eine strenge **Korrelation**. Für $\vartheta = 60^\circ$ gilt:

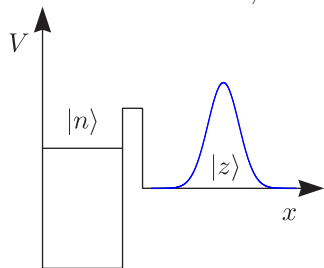
$$W(\uparrow\uparrow) = W(\downarrow\downarrow) = \frac{1}{8}, \quad W(\uparrow\downarrow) = W(\downarrow\uparrow) = \frac{3}{8}$$

| STERN-GERLACH ① | | STERN-GERLACH ② | |
|------------------------|------------------|------------------------|------------------|
| $\vec{n} = \vec{a}$ | $\sigma_n^{(1)}$ | $\vec{n} = \vec{b}$ | $\sigma_n^{(2)}$ |
| $\vartheta = 0$ | + | $\vartheta = 0$ | - |
| | - | | + |
| | - | | + |
| | - | | + |
| | + | | - |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\vartheta = 60^\circ$ | - | $\vartheta = 60^\circ$ | ⋮ |
| | - | | ⋮ |
| | + | | ⋮ |
| | + | | ⋮ |
| | ⋮ | | ⋮ |

2.8 Diskussion einiger Experimente, Gedankenexperimente und Paradoxa zur Quantenmechanik

2.8.1 Schrödingers Katze

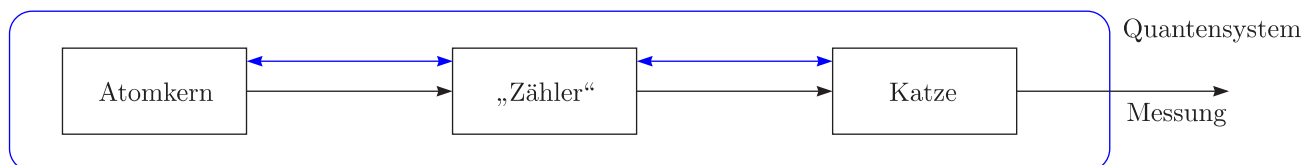
Der Hintergrund ist folgender: Die Realität einer Größe \hat{A} zeigt sich im Eigenzustand von \hat{A} zum Eigenwert a . Befindet sich das System bereits im Eigenzustand der zu messenden Größe, so wird der Zustand durch die Messung nicht zerstört. Der zentrale Punkt ist, dass man eine **Überlagerung** zweier Zustände hat, beispielsweise von einem Atomkern, der zerfällt.



$$|\psi\rangle = C_1(t)|n\rangle + C_2(t)|z\rangle$$

Vom wissenschaftlichen Zustand aus gibt es eine nette Sammlung mit dem Titel: „Wie viele Leben hat SCHRÖDINGERS Katze? Ein Buch mit einem ähnlichen Titel, nämlich „Wie tot ist SCHRÖDINGERS Katze?“ ist von dem Philosophen WALTER MEISSNER später verfasst worden. Die Messung führt zur Reduktion der Wellenfunktion (Zerfall oder nicht Zerfall). Außerdem lohnt es sich auch, in das Buch von GRIBBIN: „Auf der Suche nach SCHRÖDINGERS Katze“ zu schauen.

2.8.2 These



Der Apparat bestehend aus GEIGERZähler, Hämmerchen, Blausäure, usw. ist ein „Verstärker“, der die atomare Unbestimmtheit in die Makrowelt überträgt. (Es gibt keine Interferenzen zwischen Makrozuständen.)

$$|\text{Katze}\rangle = d_1(t)|\text{lebendig}\rangle + d_2(t)|\text{tot}\rangle$$

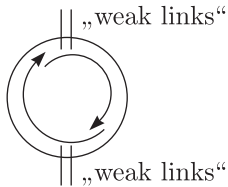
Das Problem wird bis heute als nicht befriedigend angesehen. Was sagen einige Leute dazu? Betrachten wir einige Kommentare aus Sicht der „Lehrmeinung“:

- a.) Der GEIGERZähler ist ein typisches Messgerät; er vollzieht die Messung, egal ob man das System betrachtet oder nicht. (Die Reduktion der Wellenfunktion bezieht sich auf den Atombau, der Zähler befindet sich bereits im Makrozustand.)

- b.) Das System besteht aus Atomkern, Zähler, ... und schließlich der Katze; wir betrachten jedoch **nur** die Katze. Es handelt sich um ein ungelöstes Problem des Messprozesses.
- c.) Der Zähler führt eine Aktion auf den Zerfall durch jedoch keine Reaktion. Damit liegt keine Wechselwirkung im Sinne der Quantenmechanik vor. Wir wandeln das Problem so ab, dass wir den Atomkern über eine Wechselwirkung mit der Katze koppeln.

$$|\text{Atomkern} + \text{Katze}\rangle = C_1|n\rangle^A \otimes |l\rangle^K + C_2|n\rangle^A \otimes |t\rangle^K + C_3|z\rangle^A \otimes |l\rangle^K + C_4|z\rangle^A \otimes |t\rangle^K$$

Eine „Katze“ für den Theoretiker sind SQUIDS (Supraleitende Quanten-Interferometer). Diese bestehen aus einem supraleitenden Ring mit „Schwachstellen“:



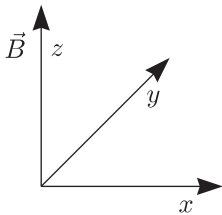
- d.) Die Katze ist in **keinem** reinem Zustand, sondern einem Gemisch:
Das gesamte Quantensystem lässt sich beschreiben durch:

$$|\text{Atom} + \text{Katze}\rangle = \sum_{\alpha=n, z; \kappa=l, t} C_{\alpha, \kappa} |\alpha\rangle_{\text{Atom}} \otimes |\kappa\rangle_{\text{Katze}}$$

$$\hat{\rho}_{\text{Katze}} = \text{Sp}_{\text{Atom}}(\rho_{A+K}) = |C_1|^2 |l\rangle\langle l| + |C_2|^2 |t\rangle\langle t|$$

2.8.3 Überlagerungen von zwei Zuständen

- a.) Spin 1/2 im Magnetfeld:



Das Magnetfeld zeige in z -Richtung:

$$\hat{H} = -g \cdot \frac{e}{2m} \cdot B \cdot \hat{\sigma}_z$$

Das System besitzt zwei Eigenzustände, nämlich:

$$|\uparrow_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_{\uparrow} = -\frac{g}{2} \cdot \frac{e\hbar}{2m} \cdot B$$

$$|\downarrow_z\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E_{\downarrow} = -\frac{g}{2} \cdot \frac{e\hbar}{2m} \cdot B$$

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Spin in einem Eigenzustand zu $\hat{\sigma}_x$:

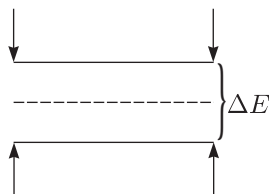
$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $t > 0$ gilt dann:

$$|t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow_z\rangle \exp\left(-\frac{iE_{\uparrow}}{\hbar} \cdot t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow_z\rangle \exp\left(-\frac{iE_{\downarrow}}{\hbar} \cdot t\right)$$

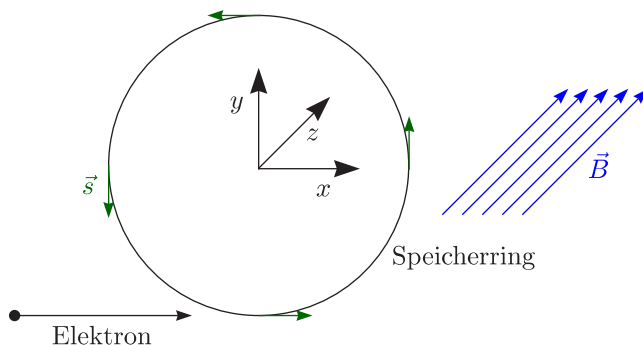
Die Energiedifferenz ist:

$$\Delta E = g \cdot \frac{e\hbar}{2m} B = \hbar \cdot \omega_{\text{Spin}} \text{ mit } \omega_s = \frac{g}{2} \cdot \frac{e\hbar}{m} \cdot B$$



ω_s ist die Frequenz der Spin-Präzession. Die Zyklotronfrequenz eines Elektrons im Magnetfeld ist gegeben durch:

$$\omega_c = \frac{e\hbar}{m} B = \omega_s \text{ für } g = 2$$



Ist $g \neq 2$, so ist eine Änderung der Spin-Richtung mit der Zahl der Umläufe beobachtbar:

$$\frac{g}{2} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \dots = 1,001\,159\,652\,193 \pm 0,000\,000\,000\,010$$

b.) G. LUDWIG: „Wie viele Leben hat Schrödingers Katze?“

Quantenmechanik \longrightarrow „Makro-Zustand“

Der Vollzug des Grenzübergangs ist nicht eindeutig, man hat nur **Hypothesen** („Luftschlösser“). Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik folgt nicht aus der Quantenmechanik, da die in der SCHRÖDINGER und VON-NEUMANN-Gleichung beinhaltete Entropie konstant ist.

2.9 EPR-Paradoxon (besser: Gedankenexperiment)

EINSTEIN-PODOLSKY-ROSEN: Physical Review 47, 777 (1939): „Can quantum mechanical Description of Physical Reality be considered complete?“

Es gibt hier eine Menge von Missverständnissen und Behauptungen, die falsch sind. EINSTEIN selbst mochte die Quantenmechanik nicht, da

- * Statistische Natur („Gott würfelt nicht.“)
- * Die Quantenmechanik kennt keine objektive Realität. („Ist der Mond da, wenn niemand guckt?“)
- * nicht lokal (was man hier tut, beeinflusst irgendetwas anderes woanders, „geisterhafte/spukhafte Ferwirkungen“)

2.9.1 Einsteins Überzeugung

- * Die Quantenmechanik ist abgeschlossen; sie ist nicht durch Hinzunahme von „verborgenen“ Größen vervollständigbar.
- * Die Quantenmechanik ist trotzdem nicht der „Weisheit letzter Schluss“.
- * Die statistische Interpretation von BORN ist unverzichtbar.
- * Er glaubt, die Schwachstelle der Quantenmechanik gefunden zu haben.
 - Die Quantenmechanik ist korrekt!

➤ Ist die Quantenmechanik vollständig?

Die **Elemente der Realität** sind nicht a priori bekannt, sondern sind über Messung/Experimente zu finden.

These: Sofern wir – ohne das System zu zerstören – mit Sicherheit den Wert einer Größe vorhersagen können, dann existiert ein Element der Realität zu dieser Größe.

Das Problem der Quantenmechanik nach der Lehrmeinung ist:

- * Größe \hat{A} : Eigenzustand $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$
- * System befindet sich in $|a\rangle$: \hat{A} hat Realität

Wenn das System sich nicht in einem Eigenzustand von \hat{A} befindet, hat dann \hat{A} keine Realität? Kommen wir nun zum EPR-Paradoxon:



Zwischen den Teilchen bestehe **keine Wechselwirkung** in großen Entfernungen; eine Messung an Teilchen ② stört das Teilchen ① nicht.

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[ik(x_2 - x_1 - x_0)] \frac{dk}{2\pi} = \delta(x_2 - x_1 - x_0)$$

Man führt eine Impulsmessung von ② durch:

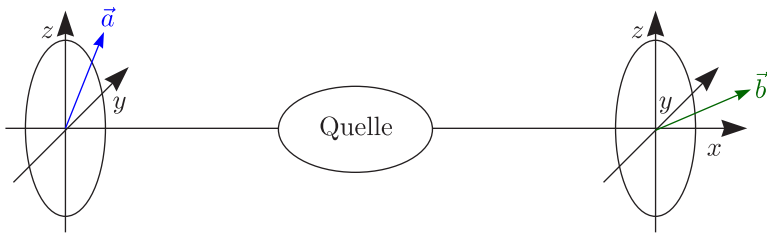
$$\exp[ik_0(x_2 - x_1 - x_0)] = \exp(ik_0x_2) \cdot \exp(-ik_0x_1) \cdot \exp(-ik_0x_0)$$

Teilchen ① hat also den Impuls $-\hbar k_0$.

$$\delta(x_2 - x_1 - x_0) = \int \delta(x_1 - x') \delta(x_2 - x' - x_0) dx'$$

Ist der Ort von Teilchen ② ξ_0 , so gilt $\delta(x_2 - \xi_0) \cdot \delta(x_1 - \xi - x_0)$ und damit hat Teilchen ① den Ort $\xi_0 + x_0$.
besser: Impuls an ② (\Rightarrow ① hat $p_1 = -p_2$), Ort an ①

2.9.2 Bohmsche Variante des EPR-Gedankenexperiments



STERN-GERLACH ①

STERN-GERLACH ②

* STERN-GERLACH ①:

$$W(\uparrow|\vec{a}) \text{ oder } W(\downarrow|\vec{a}) = \frac{1}{2}$$

Dies gilt unabhängig von \vec{a} .

* STERN-GERLACH ① und ②:

$$W(\uparrow\uparrow|\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta = W(\downarrow\downarrow|\vec{a}, \vec{b})$$

$$W(\uparrow\downarrow|\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta = W(\downarrow\uparrow|\vec{a}, \vec{b})$$

Lokalität (eventuelle Realität der Größe Spin bei STERN-GERLACH ① und ②)

BELL: Journal de Physique, C2-41 (1981): „BERTELMANN’s socks and nature of reality“

Man hat einen Input, nämlich die Stellungen der STERN-GERLACH-Versuche, also \vec{a} , \vec{b} und einen Output, nämlich die Größen A und B der STERN-GERLACHS, also $\uparrow, \downarrow (\pm 1)$. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit die Größe A zu finden, falls der Versuch in \vec{a} -Richtung zeigt mit $P(A|\vec{a})$. Ein Kanal bestimmt also die Wahrscheinlichkeiten $P_1(A|\vec{a})$ und $P_2(B|\vec{b})$. Statistische Unabhängigkeit von A und B bedeutet $P(A, B|\vec{a}, \vec{b}) = P_1(A|\vec{a})P_2(B|\vec{b})$, die gesamte Wahrscheinlichkeit ergibt sich also als Produkt der gemessenen Wahrscheinlichkeiten für A und B . Für eine Korrelation muss $P(A, B|\vec{a}, \vec{b}, \lambda) = P_1(A|\vec{a}, \lambda) \cdot P_2(B|\vec{b}, \lambda)$ gelten, wobei λ eine weitere unbekannte Größe ist. λ ist uns nicht zugänglich („verborgen“):

$$P(A, B|\vec{a}, \vec{b}) = \int \varrho(\lambda) \cdot P_1(A|\vec{a}, \lambda) \cdot P_2(B|\vec{b}, \lambda) d\lambda$$

$\varrho(\lambda)$ ist eine auf eins normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung mit $\varrho \geq 0$. Dass P_1 nur von \vec{a} und P_2 nur von \vec{b} abhängt, bezeichnet man als **Lokalität**. Was ist nun der Erwartungswert, die beiden Spins korreliert zu finden?

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \text{Singulett} | \hat{\sigma}_{\vec{a}}^{(1)} \hat{\sigma}_{\vec{b}}^{(2)} | \text{Singulett} \rangle = \sum_{\sigma_a = \pm 1} \sum_{\sigma_b = \pm 1} \sigma_a \sigma_b \cdot W(\sigma_a, \sigma_b | \vec{a}, \vec{b}) = -\cos \vartheta$$

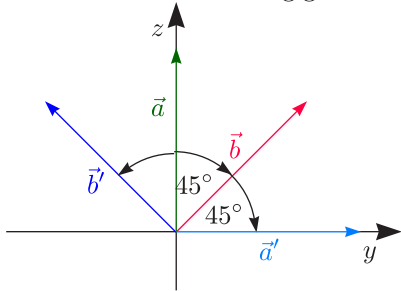
ϑ ist der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} . Wie formulieren wir dieses Ergebnis für unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung $\varrho(\lambda)$:

$$\begin{aligned} E(\vec{a}, \vec{b}) &= \int \varrho(\lambda) \cdot \left[(1 \cdot 1)P_1(\uparrow | \vec{a}, \lambda) \cdot P_2(\uparrow | \vec{b}, \lambda) + ((-1) \cdot (-1))P_1(\downarrow | \vec{a}, \lambda) \cdot P_2(\downarrow | \vec{b}, \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + (1 \cdot (-1))P_1(\uparrow | \vec{a}, \lambda) \cdot P_2(\downarrow | \vec{b}, \lambda) + ((-1) \cdot 1)P_1(\downarrow | \vec{a}, \lambda) \cdot P_2(\uparrow | \vec{b}, \lambda) \right] d\lambda = \\ &= \int d\lambda \varrho(\lambda) \cdot [P_1(\uparrow | \vec{a}, \lambda) - P_1(\downarrow | \vec{a}, \lambda)] \cdot [P_2(\uparrow | \vec{b}, \lambda) - P_2(\downarrow | \vec{b}, \lambda)] = \int d\lambda \varrho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \cdot \bar{B}(\vec{b}, \lambda) \end{aligned}$$

$\bar{A}(\vec{a}, \lambda)$ hängt nur von STERN-GERLACH ① und $\bar{B}(\vec{b}, \lambda)$ nur von STERN-GERLACH ② (und dem Parameter λ) ab. Aus der Lokalität folgen die BELLSchen Ungleichungen und außerdem die Ungleichungen von CLAUSER, HOLT, HORNE und SHIMONY.

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) + E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) - E(\vec{a}', \vec{b}')| \leq 2$$

Es tauchen als unabhängige Einstellungen \vec{a} , \vec{a}' , \vec{b} und \vec{b}' auf.



Man erhält vier Messreihen mit den STERN-GERLACH-Versuchen (\vec{a}, \vec{b}) , (\vec{a}, \vec{b}') , (\vec{a}', \vec{b}) und (\vec{a}', \vec{b}') . Somit ergibt sich für diesen Fall:

$$|-\cos(45^\circ) + (-\cos(45^\circ)) + (-\cos(45^\circ)) - (-\cos(135^\circ))| = |-3\cos(45^\circ) - \cos(45^\circ)| = 2\sqrt{2} \stackrel{!}{>} 2$$

Dies ist ein Widerspruch des quantenmechanischen Resultats mit der Annahme der Lokalität.

Wir wollen nun den Beweis der BELLSchen Ungleichung skizzieren:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) \pm E(\vec{a}, \vec{b}') = \int d\lambda \varrho(\lambda) \bar{A}(\vec{a}, \lambda) \cdot [\bar{B}(\vec{b}', \lambda) \pm \bar{B}(\vec{b}, \lambda)]$$

Nun nehmen wir auf beiden Seiten den Betrag:

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) \pm E(\vec{a}, \vec{b}')| \leq \int d\lambda \varrho(\lambda) \cdot \underbrace{|\bar{A}(\vec{a}, \lambda)|}_{\leq 1} \cdot |\bar{B}(\vec{b}, \lambda) \pm \bar{B}(\vec{b}', \lambda)|$$

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) \pm E(\vec{a}, \vec{b}')| + |E(\vec{a}, \vec{b}) \mp E(\vec{a}, \vec{b}')| \leq \int \varrho(\lambda) d\lambda \underbrace{\left[\left| \overline{B}(\vec{b}, \lambda) \pm \overline{B}(\vec{b}', \lambda) \right| + \left| \overline{B}(\vec{b}, \lambda) \mp \overline{B}(\vec{b}', \lambda) \right| \right]}_{\leq 2 \text{ da } |\overline{B}| \leq 1}$$

Außerdem gilt:

$$|a + b| + |a - b| = 2|a| \text{ oder } 2|b|$$

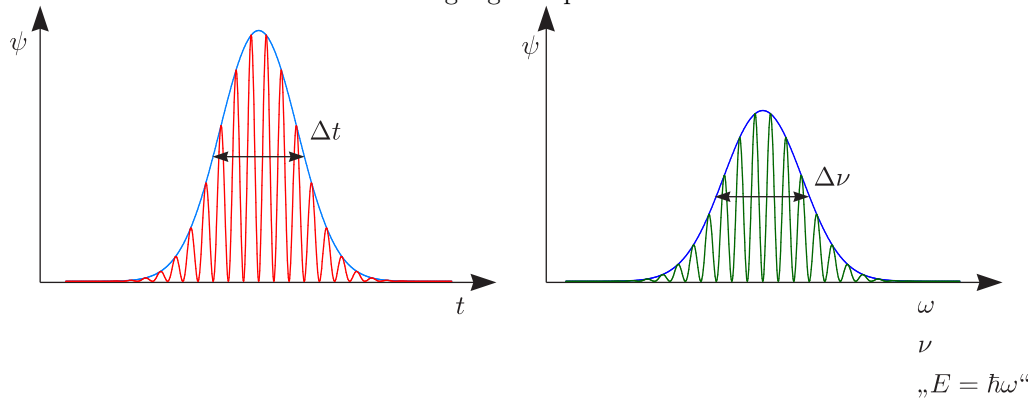
$$|E(\vec{a}, \vec{b}) \pm E(\vec{a}, \vec{b}')| + |E(\vec{a}, \vec{b}) \mp E(\vec{a}, \vec{b}')| \leq 2 \cdot \underbrace{\int \varrho(\lambda) d\lambda}_{=1}$$

$$|(a + b) + (c - d)| \leq |a + b| + |c + d|$$

2.10 Energie-Zeit-Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \text{ analog } \Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Wir wollen dies durch FOURIER-Zerlegung interpretieren:



Die Breiten sind reziprok: $\Delta t \cdot \Delta \nu \geq 1$. Dies gilt auch für x und $p = \hbar k$. $\Delta E \cdot \Delta t$ ist von ganz anderer Natur als $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, da kein Zeitoperator existiert.

2.10.1 Einstein-Waage

Wir betrachten eine Energie (Frequenz-)Änderung:

$$\hbar\omega - \hbar\omega' = \Delta m \cdot g \cdot \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta T}{T}$$

$$\Delta m \cdot c^2 = \hbar \cdot \Delta\omega$$

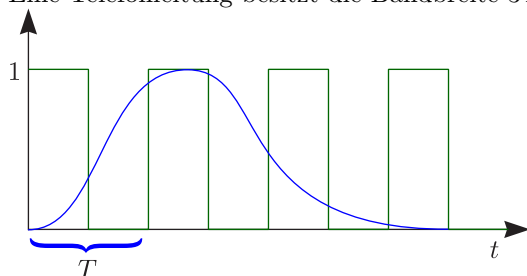
$$* p \mapsto \hbar k: \Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

$$* E \mapsto \hbar\omega: \Delta\omega \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

Es besteht die Nebenbedingung:

$$\text{Frequenz} = \frac{\text{Energie-Differenz}}{t}$$

Eine Telefonleitung besitzt die Bandbreite 3 kHz; hieraus ergeben sich 1000 Bit pro Sekunde.



Die Grundfrequenz ist $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$. Hieraus folgt $T = 1 \text{ ms}$ und damit 1000 Bit pro Sekunde. Das Telefon überträgt 50 kBit pro Sekunde. Δt : exponentieller Abfall

2.11 Lorentz-Invarianz

Dies geht auf BOHR (1928) zurück. (x, t) und (\vec{p}, E) sind Vierer-Vektoren. Wenn es die x - p -Unbestimmtheitsrelation gibt, dann gibt es auch die für E und t . Wie leitet man die Relation für E und t konventionell ab? Betrachten wir drei hermitesche Operatoren \hat{A} , \hat{B} und \hat{C} mit $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$.

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | \hat{C} | \psi \rangle \right|$$

Hieraus folgt die x - p -Relation. Zur Herleitung der E - t -Relation sei nun $\hat{A} \equiv \hat{H}$ und \hat{B} beliebig (kein Zustandsoperator):

$$\Delta \hat{H} \cdot \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | [\hat{H}, \hat{B}] | \psi \rangle \right|$$

Im SCHRÖDINGER-Bild gilt

$$\frac{d\hat{B}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{B}]$$

so dass:

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{B} | \psi(t) \rangle = \left\langle \psi(t) \left| \frac{d\hat{B}}{dt} \right| \psi(t) \right\rangle$$

$$\Delta \hat{H} \cdot \frac{\Delta \hat{B}}{\left| \langle \psi(t) | \frac{d\hat{B}}{dt} | \psi(t) \rangle \right|} \geq \frac{1}{2} \hbar \text{ mit } \frac{\Delta \hat{B}}{\left| \langle \psi(t) | \frac{d\hat{B}}{dt} | \psi(t) \rangle \right|} \equiv \Delta t$$

Wir wählen speziell \hat{B} als Projektor auf den Zustand $|\psi(t=0)\rangle$:

$$\hat{B} = \hat{P}_{|\psi(t=0)\rangle} = |\psi(t=0)\rangle \langle \psi(t=0)|$$

Damit ist es möglich das Quadrat der Unbestimmtheit von B zu berechnen:

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{B})^2 &= \langle \psi(t) | \hat{P}^2 | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | \hat{P} | \psi(t) \rangle^2 = \langle \psi(t) | \hat{P} | \psi(t) \rangle - \langle \psi(t) | \hat{P} | \psi(t) \rangle^2 = \\ &= |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 - |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^4 = W(t) \cdot (1 - W(t)) \end{aligned}$$

Den Ausdruck $|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 \equiv W(t)$ bezeichnen wir als nicht-zerfallene Wahrscheinlichkeit.

$$\left\langle \psi(t) \left| \frac{d\hat{B}}{dt} \right| \psi(t) \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \hat{B} | \psi(t) \rangle = \frac{d}{dt} W(t)$$

Hieraus ergibt sich also:

$$(\Delta t)^2 = \frac{W(1-W)}{\left| \frac{d}{dt} W \right|^2}$$

Wir machen den speziellen Ansatz $W(t) = \exp(-\gamma \cdot t)$, den wir von der Theorie des „radioaktiven Zerfalls“ her kennen:

$$(\Delta t)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \cdot [\exp(\gamma \cdot t) - 1]$$

Wir betrachten $(\Delta t)^2$ für verschiedene Zeiten t :

$$\Delta t = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} & \text{für } t \ll \frac{1}{\gamma} \\ \sim \frac{1}{\gamma^2} & \text{für } t \sim \frac{1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma^2} \exp(\gamma \cdot t) & \text{für } t \gg \frac{1}{\gamma} \end{cases}$$

Inzwischen steckt hier der „Wurm“ drin! ΔH ist konstant für ein abgeschlossenes System (Atomkern). Damit ergibt sich $\Delta H \cdot \Delta t \mapsto 0$ für $t \mapsto 0$, was im Widerspruch zu $\Delta H \cdot \Delta t \geq \frac{1}{2} \hbar$ steht.

$W(t) \neq \exp(-\gamma \cdot t)$ für $t \mapsto 0$

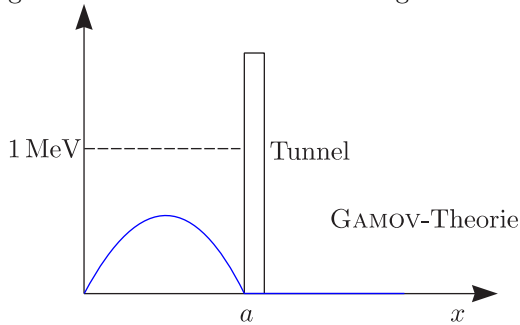
Es ist also $\gamma = \gamma(t)$ mit $\gamma(t) \mapsto 0$ und $t \mapsto 0$. Kommen wir zum Experiment von NORMAN et. al. Physical Review Lett 60, 2246 (1988):

2.12. WACHHUND UND BOMBE (QUANTEN-ZENON-EFFEKT, NON QUANTUM DEMOLITION MEASUREMENT)

* ^{60}Co : β^- ; 5,27 a: bis $10^{-4}t_{1/2}$

* ^{36}Mn : β^- ; 2,58 h: $0,3 t_{1/2}$ bis $45 t_{1/2}$

Es gibt keine Abweichung vom Exponentialgesetz. Nach AVIGNON: Physical Review Letters 61, 2624 (1988) gibt es eine Kurz-Zeit-Abweichung von etwa 10^{-22} s.



Es sind zwei Zeiten charakteristisch, nämlich die Zerfallszeit (BARWE) und die Oszillationsdauer im Potentialtopf τ_{osc} .

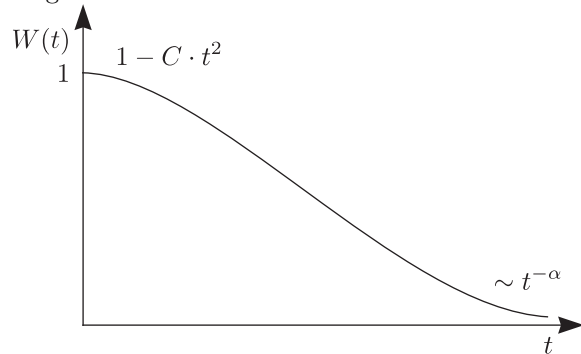
$$\tau_{osc} \simeq \frac{a}{v} \sim \frac{a}{\sqrt{E}}$$

Mit a bezeichnen wir die Ausdehnung des Kernpotentials; sie liegt bei ungefähr 10^{-13} cm. Außerdem ist $E \approx 1$ MeV und $\tau_{osc} \approx 10^{-22}$ s. Wir betrachten nun $W(t)$ für kleine t :

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle &= \left\langle \psi(t) \left| \exp \left(-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t \right) \right| \psi(0) \right\rangle = \left\langle \psi(t) \left| 1 - i \frac{\hat{H}t}{\hbar} + \frac{1}{2!} \left(-i \frac{\hat{H}t}{\hbar} \right)^2 + \dots \right| \psi(0) \right\rangle = \\ &= 1 - i \frac{t}{\hbar} \cdot \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(0) \rangle - \frac{1}{2} \frac{t^2}{\hbar^2} \cdot \langle \psi(t) | \hat{H}^2 | \psi(0) \rangle + \dots \end{aligned}$$

$$W(t) = |\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{\hbar^2} \cdot \langle \psi(t) | \hat{H}^2 | \psi(0) \rangle \right)^2 + \left(-i \frac{t}{\hbar} \cdot \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(0) \rangle \right)^2 + \dots = 1 - \frac{t^2}{\hbar^2} (\Delta H)^2 + O(t^4)$$

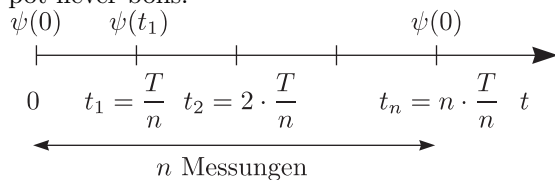
Es gibt keinen linearen Anteil in t .



2.12 Wachhund und Bombe (Quanten-Zenon-Effekt, Non Quantum Demolition Measurement)

2.12.1 Wachhund

Kontinuierliche Messungen an einem System unterbinden die zeitliche Entwicklung des Zustandes. „A watched pot never boils.“



* Eine Messung in T :

$$|\langle \psi(0) | \psi(t) \rangle|^2 = W_1(t)$$

* Zwei Messungen in T :

$$\left| \left\langle \psi(0) \left| \exp\left(-i \frac{\hat{H}}{\hbar} \cdot \frac{T}{2}\right) \right| \psi(0) \right\rangle \left\langle \psi(0) \left| \exp\left(-i \frac{T}{\hbar} \hat{H}\right) \right| \psi(0) \right\rangle \right|^2 = W_1\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

* \vdots

* Nach n Schritten ergibt sich $W_n(T) = \left(W_1\left(\frac{T}{n}\right)\right)^n$. Für den exponentiellen Zerfall gilt:

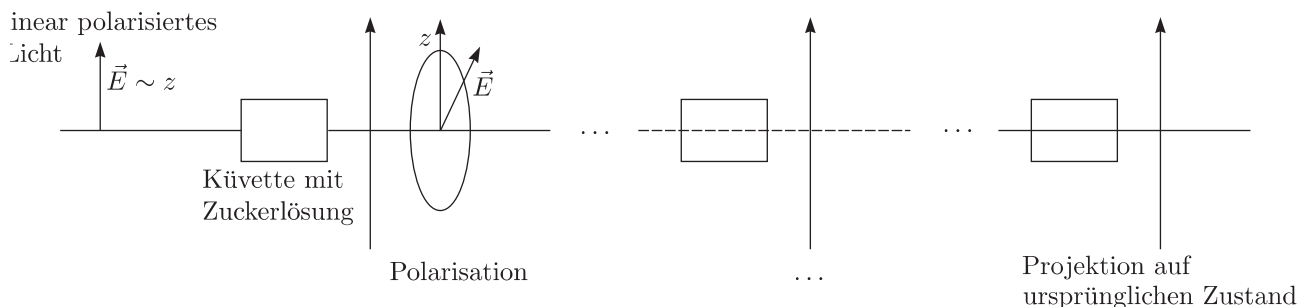
$$W_n(T) = \left[\exp\left(-\gamma \cdot \frac{T}{n}\right) \right]^n = \exp(-\gamma \cdot T)$$

$$W_n = \left[1 - k \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^2 \right]^n \mapsto 1 \text{ für } n \mapsto \infty$$

Mit $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$ ergibt sich:

$$\ln(W_n) = n \cdot \ln\left[1 - k \cdot \frac{t^2}{n^2}\right] \mapsto n \cdot \left(-k \cdot \frac{t^2}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n} \mapsto 0$$

2.12.2 Analogon aus der klassischen Optik



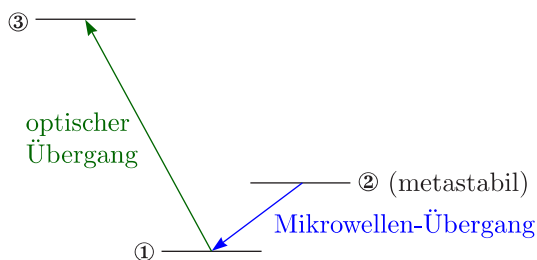
Es ist $\vartheta_1 = \frac{\theta}{N}$ und nach N Drehungen der Polarisationsebene gilt $N \cdot \vartheta_1 = \theta (= 90^\circ)$.

$$E_{1,z} = E_0 \cdot \cos(\vartheta_1)$$

$$E_N = E_0 \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{N}\right) \right]^N \mapsto E_0$$

Für $\theta = 90^\circ$, $N = 6$ ergibt sich $I_N = (E_N)^2 = \frac{2}{3}$. Aha: Zerfall von Neutron im Atomkern. Protonen „bewachen“ das zerfallende Neutron. Ein freies Neutron besitzt eine Zerfallszeit von 1000 s. Ein Gegenbeispiel ist ${}^6\text{He}$, das in einer Zeit von 0,6 s zerfällt. Offenbar argumentieren wir falsch.

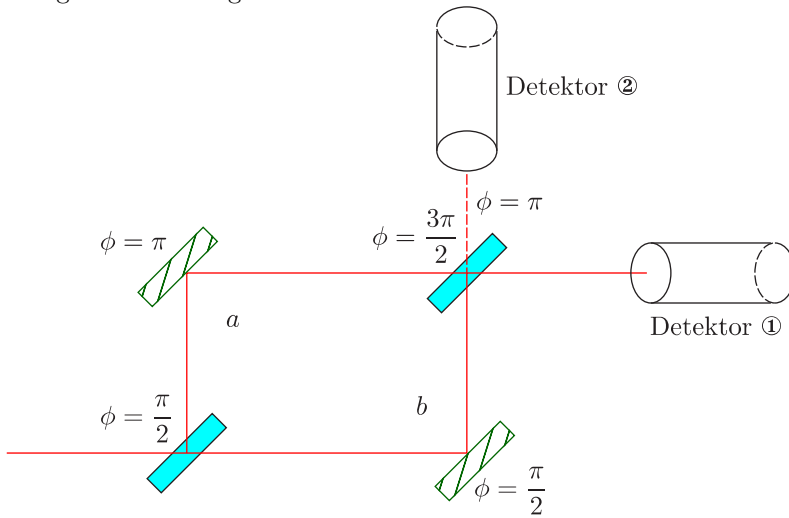
2.12.3 Induzierte Übergänge



ITANO et. al Physical Review A, 41, 2295 (1990), 43, 5165 (1991).

2.12.4 Bombe

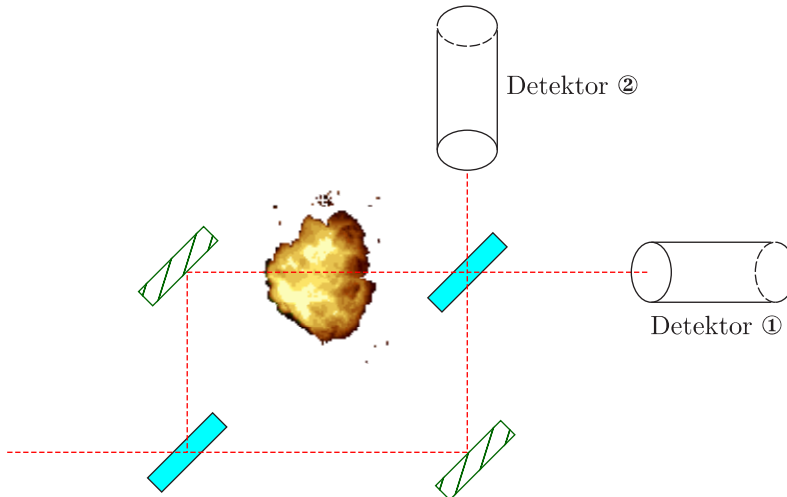
Dieses Problem wurde von ELITZUR und VAIDMAN (1993) zur Sprache gebracht. Man kann Zustände messen, ohne den Zustand zu zerstören. Wir betrachten ein sogenanntes MACH-ZEHNDER-Interferometer, in das ein einziges Photon eingestrahlt wird:



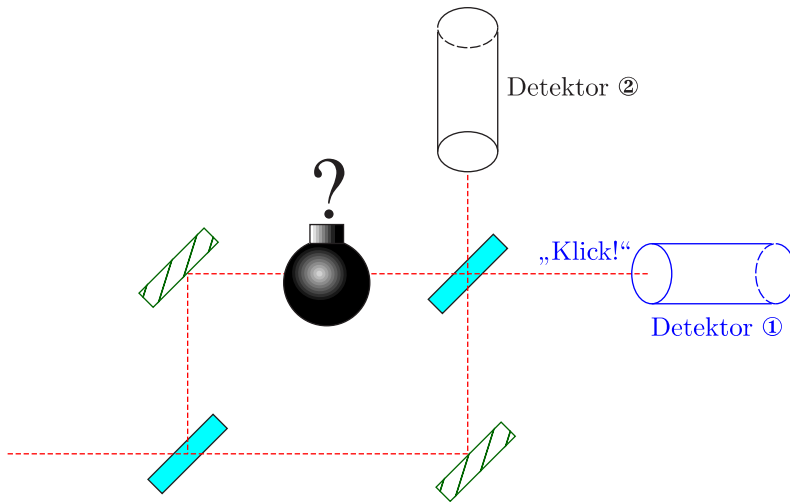
- * Oberer Strahlengang a : Drei Reflexionen führen zu einem Phasensprung ϕ von $3 \cdot \frac{\pi}{2}$.
- * Unterer Strahlengang b : Eine Reflexion führt zu $\phi = 1 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Es ergibt sich die Phasendifferenz $2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ zwischen beiden Teilstrahlen. Stellt man ein Hindernis in den Weg a , so existiert 50% Wahrscheinlichkeit dafür, dass Detektor ① oder Detektor ② ein Photon registriert. Befindet sich die Bombe im oberen Zweig, so sind folgende drei Ereignisse möglich:

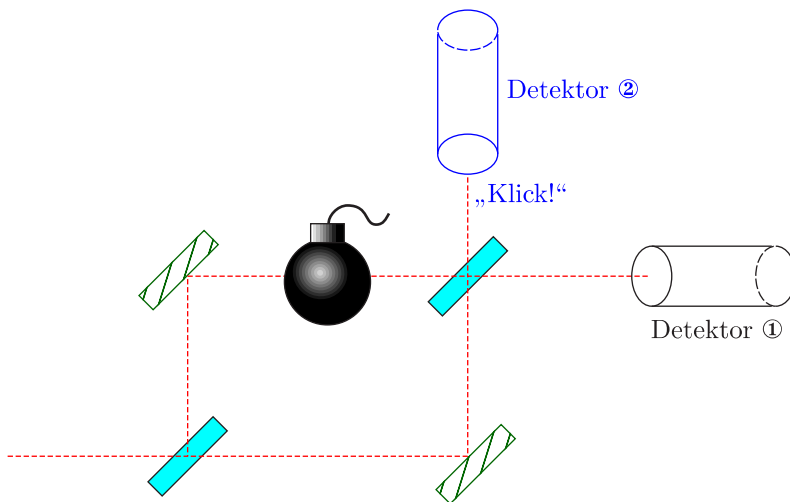
- * Bombe explodiert; sie hatte also einen Zünder!



- * Detektor ① klickt: man kann keine Aussage treffen, ob die Bombe keinen Zünder hatte oder das Photon den Weg b eingeschlagen hat.



* Detektor ② klickt: Es handelt sich um eine scharfe Bombe, die **nicht** explodiert ist!



Siehe auch: KURIET, ZEILINGER (November 1996)

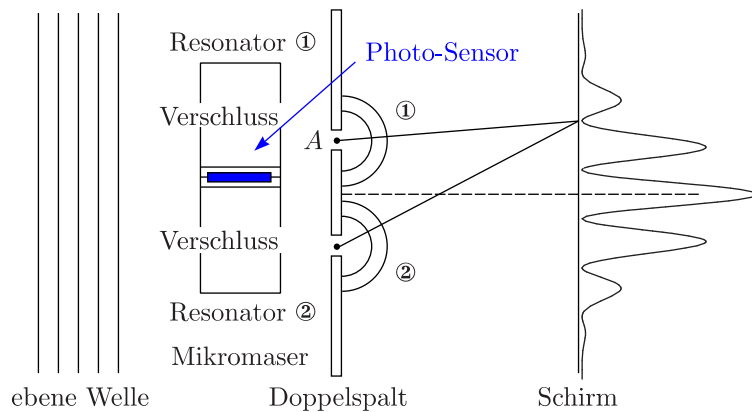
www.aleph99.org/scimu

Mit der Bombe in *b* ergibt sich:

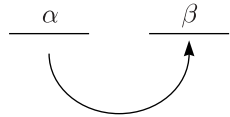
$$W = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right]^{2N}$$

| | |
|-----------|--------------------------------|
| $N = 1$ | $W = 0$ |
| $N = 2$ | $W = \frac{1}{4}$ |
| $N = 6$ | $W = \frac{2}{3}$ (realisiert) |
| $N = 20$ | $W = 88\%$ |
| $N = 100$ | $W = 97\%$ |

2.13 Welcher-Weg-Detektor

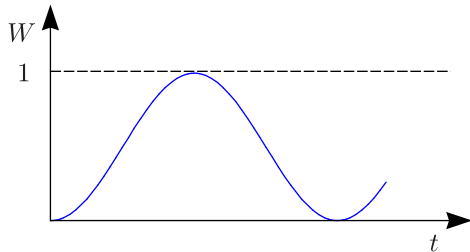


Das Elektron kann zwei verschiedene Weg einschlagen, nämlich ① oder ②. Nach BOHR und EINSTEIN gilt $\Delta x \cdot \Delta p_x > \frac{1}{2}\hbar$, was verhindert, dass man feststellen kann, ob das Teilchen längs ① oder ② „läuft“. Dies kann man gut in den „FEYNMAN lectures“: Band III nachlesen. In jedem Einzelfall gilt Impulserhaltung. Die **Unbestimmtheitsrelation** kann man **umgehen**, indem man bei Punkt A einen „Spion“, genannt WIGNERS Freund, hinstellt. In der Praxis wird das Spion durch ein Zwei-Niveau-Atom realisiert. Bei einem entarteten Zustand reicht eine beliebig kleine Wechselwirkung, um einen Übergang vom einen Zustand α in den anderen Zustand β zu verursachen. Das Experiment führt man mit Pb-Atomen durch, bei denen der Übergang $63 p_{3/2} \mapsto 61 d_{5/2}$ mit einer Frequenz von 21,5 GHz (≈ 1 cm) stattfindet (RYDBERG-Zustände). Zum Mikromaser: Das in den Resonatoren eingespeiste elektrische Feld erzwingt (induziert) Übergänge.



Bei einem Zwei-Niveau-System ergibt sich folgende Übergangswahrscheinlichkeit:

$$W = \sin^2\left(\frac{\omega_R \cdot t}{2}\right) \text{ mit } \omega_R = \frac{e \cdot d}{\hbar}$$



d ist das Dipolmatrixelement des Übergangs. Warum wird durch „Nachsehen“ (Atom 1 oder 2) die Interferenzfigur zerstört? Ohne den Photosensor (Verschlüsse zu) gilt $\psi(r) = \psi_1(r) + \psi_2(r)$. Mit dem Mikromaser findet ein Übergang von einem energetisch höheren Zustand statt; es wird im Resonator ein Photon erzeugt. Dann gilt:

$$\psi = \psi_1(r)|1_1, 0_2\rangle + \psi_2(r)|0_1, 1_2\rangle$$

$|1_1, 0_2\rangle$ bedeutet, dass man ein Photon im Resonator 1 und null Photonen im Resonator 2 hat. Anschließend sieht man nach, in welchem Resonator sich das Photon befindet. Auf dem Schirm ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 \langle 1, 0|1, 0\rangle + |\psi_2|^2 \langle 0, 1|0, 1\rangle + \psi_1 \psi_2^* \langle 1, 0|0, 1\rangle + \psi_1^* \psi_2 \langle 0, 1|1, 0\rangle = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

Das heißt, die Orthogonalität der inneren anregbaren Zustände das Auftreten von Interferenzen verhindert. Ohne Resonator hat man zwei Zustände ψ_1 und ψ_2 . Mit Resonator hat außer ψ_1 und ψ_2 zwei innere Zustände, also ein Vier-Zustands-System. Beobachtet wird der Unterraum der Ortseigenzustände.

2.13.1 Quanten-Radierer

Dieser wurde realisiert durch SCULLY, ENGLERT, WALTER im MPI GARCHING. Wir betrachten das Experiment mit Photo-Sensor. Was misst dieser? Wir betrachten (anti)symmetrische Zustände:

$$\psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 \pm \psi_2)$$

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle \pm |0, 1\rangle)$$

Man kann nun das obige $\psi(r)$ mit diesen Zustände schreiben als $\psi(r) = \phi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle$, was als Übung zu Hause nachgerechnet werden kann. Mit Sensor, dessen Verschlüsse noch zu sind, ergibt sich:

$$\psi(r) = [\psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle] |g\rangle$$

$|g\rangle$ sei der Grundzustand des Sensors. Was passiert nun, wenn man die Verschlüsse öffnet? Es kommen die Eigenschaften der symmetrischen und antisymmetrischen Zustände zum tragen. Antisymmetrische Zustände $|-\rangle$ besitzen in der Mitte, wo sich der Photosensor befindet einen Knoten, womit der Sensor nur auf symmetrische Zustände $|+\rangle$ anspricht.

$$\psi(r) = \psi_+|0, 0\rangle|e\rangle + \psi_-|-\rangle|g\rangle$$

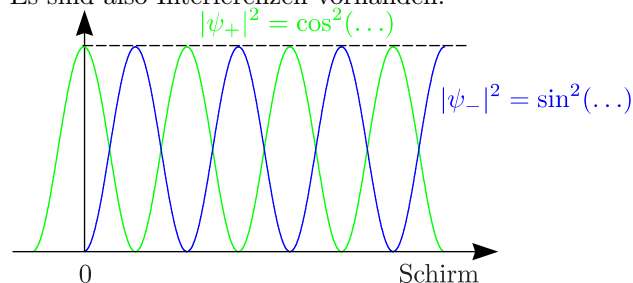
$|e\rangle$ ist der angeregte Zustand des Sensors. Auf $|-\rangle$ spricht der Sensor nicht an, weshalb dieser sich im Grundzustand befindet. Es gilt aufgrund der Orthogonalität der $|g\rangle$ und $|e\rangle$:

$$|\psi(r)|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

Es findet damit keine Interferenz statt! Nun wird der Anteil von $|\psi_-|-\rangle|g\rangle$ „ausradiert“. Die Atome auf dem Schirm werden nach jedem einzelnen Ereignis rot bzw blau markiert.

$$|\psi_+|0, 0\rangle|e\rangle|^2 = |\psi_+|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re}(\psi_1\psi_2^*)$$

Es sind also Interferenzen vorhanden!



$$|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2 = 1$$

Korrelationen im vierdimensionalen Zustandsraum

- * ENGLERT, WALTER: Physik in unserer Zeit Nr.5, 213 (1992)
- * SCULLY, ENGLERT, WALTER: Nature 351, 111 (1991)
- * DÜRR, NONN, REMPE: Natur 395, 33 (1998)

Kapitel 3

Quantenmechanik mit verborgenen Parametern/Bohmsche Quantenmechanik

Die Quantenmechanik besagt:

- * Es gibt keinen Zustand, in dem **alle** Größen streuungsfrei sind.
- * Es gibt aber Zustände, in denen spezielle Größen $G \Delta G = 0$ haben, nämlich Eigenzustände von \hat{G} .

Die These ist, dass Streuungen Δx und Δp (im reinen Zustand) die Folge von Schwankungen unkontrollierter Variablen. Es handelt sich also um eine deterministische Theorie. Es sei ein Zustand $Z = (\psi, \lambda)$ gegeben, wobei λ ein verborgener Parameter sei.

- * Zu **festem** λ ist der Wert $W(Z, G)$ Element der Erwartungswerte von \hat{G} . Die Werte sind dann streuungsfrei.
- * $\int W(\psi, \lambda; G) P(\lambda) d\lambda = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle$ W ist der Wert der Größe, P die Wahrscheinlichkeit und $\langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle$ der quantenmechanische Erwartungswert.

1.) VON NEUMANN'S „Unmöglichkeitbeweis“

Die Voraussetzung ist, dass $W(Z, G)$ linear in \hat{G} ist. Was für Argumente gibt es dafür?

- \hat{G} und $c \cdot \hat{G}$ sollen gleichberechtigt sein (siehe $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ oder $\langle \hat{p}_x \rangle$, $\langle \hat{p}_y \rangle$, $\langle \hat{p}_z \rangle$, welche die Komponenten eines \vec{p} -Vektors sind. Daraus folgt, dass $\hat{\vec{p}}$ ein Vektoroperator ist, also $\hat{\vec{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$. Dieser Vektoroperator muss sich unter Drehungen des Koordinatensystems genauso transformieren wie \vec{p} .
- Transformationseigenschaft

$$W(Z, \hat{G} = \alpha \hat{G}_1 + \beta \hat{G}_2) = \alpha W(Z, \hat{G}_1) + \beta W(Z, \hat{G}_2)$$

Die Linearität von W bezüglich \hat{G} ist nicht unproblematisch. Betrachten wir dazu den HAMILTONOPERATOR des harmonischen Oszillators:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$$

Damit gilt:

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{H}_{kin} | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{H}_{pot} | \psi \rangle$$

Beispielsweise gilt für einen Eigenzustand von \hat{H} , nämlich $|\psi_n\rangle$:

$$\underbrace{E_n}_{\Delta H=0} = \underbrace{\left\langle \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} \right| \psi_n \right\rangle}_{\Delta H_{kin} \neq 0} + \underbrace{\left\langle \psi_n \left| \frac{m\omega^2}{2} x^2 \right| \psi_n \right\rangle}_{\Delta H_{pot} \neq 0}$$

Streuungen sind also nicht additiv. VON NEUMANNs Beweis funktioniert nun so: Wir betrachten $\hat{H} = \hat{A} + \hat{B}$. Eigenwerte sind im allgemeinen nicht additiv. Beispielsweise gilt:

$$\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_z = \sqrt{2}\hat{\sigma}_n \text{ mit } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenwerte gilt $\pm 1 \pm 1 \neq \sqrt{2}(\pm 1)$.

2.) BELLS „Gegenbeispiel“

Die Linearitätsannahme ist zu einschränkend (nach BELL: Review Modern Physics (1960)). Dazu betrachten wir ein Spin-1/2-System mit einem einzigen Spin-1/2. Ein beliebiger Zustand wird dargestellt als zweikomponentiger Spinor:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Dies ist immer ein Eigenzustand von $\vec{n} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_n$. Ein Operator \hat{A} im Spinraum ist immer darstellbar durch $\hat{A} = a_0 \mathbf{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ mit (a_0, \vec{a}) . Die Eigenwerte von \hat{A} sind $a_0 \pm |\vec{a}|$. Der Erwartungswert ist:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = a_0 + (\vec{n} \cdot \vec{a})$$

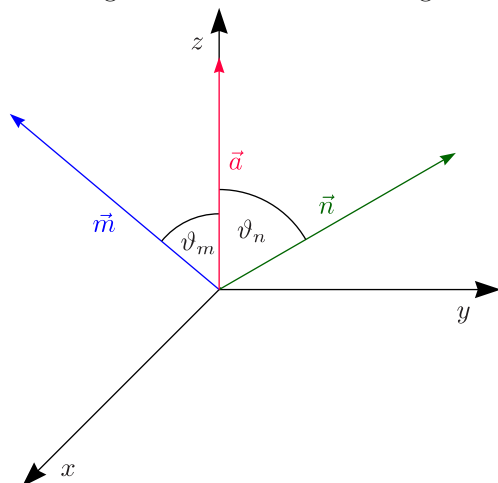
Betrachten wir nun **verborgene Parameter**, so dass \vec{A} (also $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ und $\vec{\sigma}_{\vec{a}}$ Werte ± 1):

$$W(\psi, \lambda; \hat{A}) = \begin{cases} a_0 + |\vec{a}| & \text{für } (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} > 0 \\ a_0 - |\vec{a}| & \text{für } (\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} < 0 \end{cases}$$

\vec{m} sei ein beliebiger Einheitsvektor.

$$\iint W(\vec{n}, \vec{m}; \vec{A}) \frac{d^2\Omega_m}{4\pi} = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n}$$

Es wird gemittelt über alle Richtungen \vec{m} des verborgenen Parameters.



Mit

$$\vec{m} = (\sin \vartheta_m \cos \varphi_m, \sin \vartheta_m \sin \varphi_m, \cos \vartheta_m) \text{ und } \vec{n} = (\sin \vartheta_n \cos \varphi_n, \sin \vartheta_n \sin \varphi_n, \cos \vartheta_n)$$

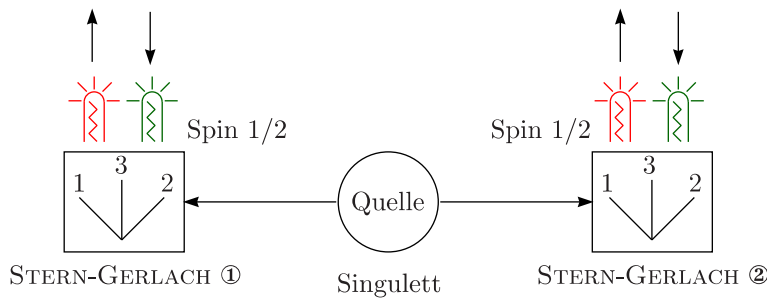
und

$$(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{a} = a \cdot (\cos \vartheta_m + \cos \vartheta_n)$$

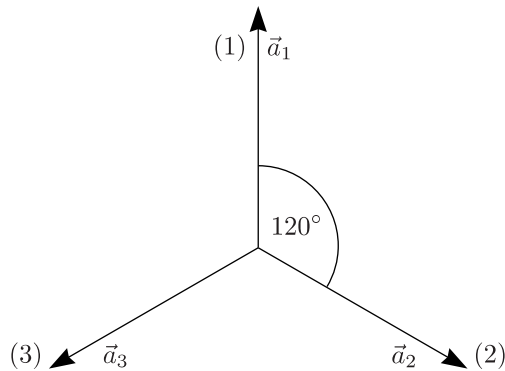
ergibt sich, wobei der Umbruch vom Minus- zum Pluszeichen also bei $\cos \vartheta_m = -\cos \vartheta_n$ stattfindet:

$$\begin{aligned} \iint \frac{d^2\Omega_m}{4\pi} &= \frac{1}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^\pi \sin \vartheta_m d\vartheta_m \cdot \left\{ \begin{array}{ll} a_0 + |\vec{a}| & \text{für } \cos \vartheta_m > \cos \vartheta_n \\ a_0 - |\vec{a}| & \text{für } \cos \vartheta_m < \cos \vartheta_n \end{array} \right\} \stackrel{\cos \vartheta_m = \xi}{=} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \begin{array}{ll} a_0 + |\vec{a}| & \text{für } \xi > \cos \vartheta_n \\ a_0 - |\vec{a}| & \text{für } \xi < \cos \vartheta_n \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{-\cos \vartheta_n} (a_0 - |\vec{a}|) d\xi + \frac{1}{2} \int_{-\cos \vartheta_n}^1 (a_0 + |\vec{a}|) d\xi = \\ &= a_0 + a \cos \vartheta_n = a_0 + \vec{a} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

3.) EPR – „Neuer Anlauf“



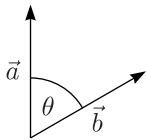
Die STERN-GERLACH-Versuche stehen in folgenden Richtungen zueinander:



Die Resultate der STERN-Gerlach-Messungen sind \uparrow und \downarrow . Quantenmechanisch gilt:

$$W(\uparrow_{\vec{a}}, \uparrow_{\vec{b}}) = W(\downarrow_{\vec{a}}, \downarrow_{\vec{b}}) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

$$W(\uparrow_{\vec{a}}, \downarrow_{\vec{b}}) = W(\downarrow_{\vec{a}}, \uparrow_{\vec{b}}) = \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \text{Singulett} | \hat{\sigma}_a^{(1)} \hat{\sigma}_b^{(2)} | \text{Singulett} \rangle = \sum_{\substack{\sigma_a^{(1)} = \pm 1 \\ \sigma_b^{(2)} = \pm 1}} \sigma_a^{(1)} \sigma_b^{(2)} W = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Der Trick in der Darstellung ist, die roten mit den grünen Lämpchen im STERN-GERLACH-Versuch ② zu vertauschen. Die Paare $\uparrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow$, $\uparrow\downarrow$ und $\downarrow\uparrow$ kommen gleich häufig vor, wenn man über alle Schalter 1,2,3 summiert, da:

$$\sum \vec{a}_i = 0 \Rightarrow \sum_{a_i} E(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

| Schalter | | Anzeige | |
|----------|---|---------|--------|
| 1 | 1 | R | R (↑↓) |
| 1 | 1 | R | R |
| 1 | 1 | G | G (↓↑) |
| 1 | 1 | G | R (↓↓) |
| 1 | 2 | G | R (↓↓) |
| 1 | 2 | G | G (↓↑) |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 3 | 3 | G | G (↓↑) |

a.) Gleiche Schalter (11, 22, 33) liefern nur RR oder GG mit je 50%.

b.) Verschiedene Schalter

$$\left. \begin{array}{l} 12 \quad 21 \\ 13 \quad 31 \\ 23 \quad 32 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{RR} + \text{GG} : 25\% \\ \text{RG} + \text{GR} : 75\% \end{array} \text{ nach Quantenmechanik}$$

Interpretation:

a.) Instruktionstabelle $[F_1 \mid F_2 \mid F_3]$ mit $F_k = R, G$ sind für beide Teilchen gleich.

b.) Muster:

1.) $[R \mid R \mid R]$ liefert RR für alle Schalter.

2.) $[R \mid R \mid G]$ $[R \mid G \mid R]$ $[G \mid R \mid R]$

3.) $[R \mid G \mid G]$ $[G \mid R \mid G]$ $[G \mid G \mid R]$

4.) $[G \mid G \mid G]$ liefert GG für alle Schalter.

$[R \mid R \mid G]$ liefert:

1.) $[11 \mid \text{RR}]$ $[12 \mid \text{RR}]$ $[13 \mid \text{RG}]$ $[23 \mid \text{RG}]$

2.) $[22 \mid \text{RR}]$ $[21 \mid \text{RR}]$ $[31 \mid \text{GR}]$ $[32 \mid \text{GR}]$

3.) $[33 \mid \text{GG}]$

RR in zwei von sechs Fällen, RG + GR in vier von sechs Fällen!

Betrachten wir verschiedene Schalter:

1.) $[R \mid R \mid R]$ $[G \mid G \mid G]$ gleiche Farben in 100%, verschiedene in 0%

2.) $[R \mid R \mid G]$ gleiche Farben in $\frac{1}{3}$, verschiedene in $\frac{2}{3}$

3.) $[R \mid R \mid R]$ dito $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

Die Wahrscheinlichkeit, gleiche Farben für verschiedene Schalter zu finden, muss $\geq \frac{1}{3}$ sein. Das quantenmechanische Resultat ist jedoch $\frac{1}{4}$.

3.1 Bell-Ungleichungen, Bell-Specker-Kochen-Theorem

Es handelt sich um Ungleichungen für Messgrößen (Erwartungswerte) unter der Annahme von Lokalität und Determinismus. EPR: zwei Teilchen, verschränkte Zustände

Für den Erwartungswert bei einem Doppel-STERN-GERLACH-Versuch hatten wir folgenden Erwartungswert hergeleitet:

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = \langle \text{Singulett} | \vec{\sigma}_a^{(1)} \cdot \vec{\sigma}_b^{(2)} | \text{Singulett} \rangle = -\vec{a} \cdot \vec{b} = \int A(\vec{a}, \lambda) \cdot B(\vec{b}, \lambda) W(\lambda) d\lambda$$

Durch einen versteckten Parameter λ können die beiden Systeme gekoppelt sein.

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{b}') + E(\vec{a}', \vec{b}) + E(\vec{a}', \vec{b}')| \leq 2 \quad (1)$$

Es sind vier Richtungen im Spiel, nämlich \vec{a}, \vec{a}' von STERN-GERLACH ① und \vec{b}, \vec{b}' von STERN-GERLACH ②. Das Minuszeichen kann man beliebig setzen.

$$|E(\vec{a}, \vec{b}) - E(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + E(\vec{b}, \vec{c}) \quad (2)$$

$$E(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}, \quad E(\vec{a}, \vec{c}) = -\cos(120^\circ) = +\frac{1}{2}$$

Damit werten wir die zweite Ungleichung aus:

$$\left| -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{2}$$

Hieraus ergibt sich also eine **falsche Aussage**. Mit $E(\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(120^\circ) = \frac{1}{2}$ folgt:

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{3}$$

Diese Aussage ist **richtig!**

3.1.1 Bell-Kocher-Specker-Theorem

Aus diesem Theorem folgt, dass es keine Möglichkeit gibt, die quantenmechanische Indeterminiertheit durch „verborgene“ Variablen zu retten. Wir betrachten nur einen Spezialfall dieses Theorems.

- * 2 Spin-1/2 (andere Zustände als EPR)
- * 3 Spin-1/2

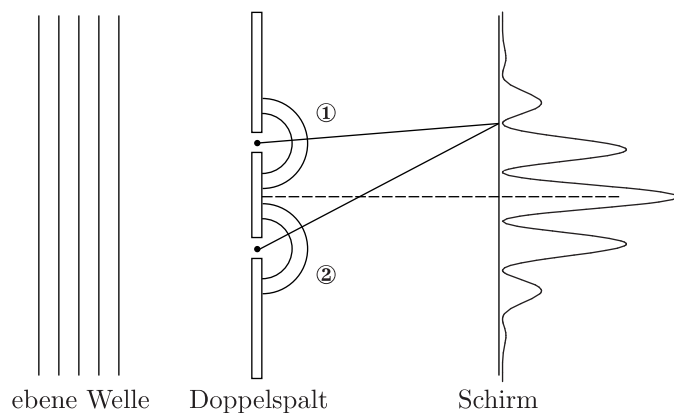
Wir betrachten $\hat{\sigma}_x^{(k)}, \hat{\sigma}_y^{(k)}$ und $\hat{\sigma}_z^{(k)}$ mit $k = 1, 2, 3$ Teilchen. Man hat einen achtdimensionalen Zustandsraum und zehn Observable. Alle Operatoren auf **einer** der fünf Linien kommutieren. Man kann deshalb für jede dieser vier Operatoren **einer** Linie einen gemeinsamen Eigenzustand finden. Die Eigenwerte aller Operatoren auf einer Linie sind gleich eins mit Ausnahme der **horizontalen Linie**. Wir betrachten beispielsweise:

$$\hat{\sigma}_y^{(2)} \cdot \hat{\sigma}_x^{(3)} \cdot (\hat{\sigma}_y^{(1)} \hat{\sigma}_y^{(2)} \hat{\sigma}_x^{(3)}) \cdot \hat{\sigma}_y^{(1)} \xrightarrow{\hat{\sigma}_y \cdot \hat{\sigma}_y = 1} \mathbf{1}$$

Dies ist, da \downarrow |simultaner Eigenzustand> = Produkt der Eigenwerte ist. Angenommen, es gibt ein dispersionsfreies Ensemble (Hypothese!) mit verborgenen Parametern, so dass man allen Variablen einen streuungsfreien Wert zuweisen kann, dann wird man erkennen, dass dies nicht funktioniert. Das Produkt aller zehn „Eigenwerte“ müsste eins sein. Die Nebenbedingung ist jedoch, dass alle Variablen, die auf dem Kreuzungspunkt der Linien stehen, doppelt vorkommen. Betrachtet man aber Produkte aller Operatoren, so erhält man -1 ; man hat also ein Vorzeichenproblem.

GHZ-Zustände: Nach GREENBERGER, HORNER und ZEILINGER

3.2 Bohms Quantenmechanik



Gibt es Trajektorien (von Teilchen)? BOHM akzeptiert die Quantenmechanik als Rechenvorschrift, er hat jedoch eine andere Sichtweise. Wir betrachten ein Teilchen im Potential. Die Quantenmechanik liefert eine Wellenfunktion $\psi(\vec{r}, t)$, woraus eine Teilchendichte $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ und eine Stromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

folgt. Wie sehen die Operatoren $\hat{\rho}$ und \hat{j} aus?

$$\rho(\vec{r}, t) = \langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle, \vec{j}(\vec{r}, t) = \langle \psi | \hat{j} | \psi \rangle$$

$$\hat{\rho} = \delta(\hat{r} - \vec{\xi}) \text{ und } \hat{j} = \frac{1}{2} \left[\delta(\hat{r} - \vec{\xi}) \cdot \frac{\hat{p}}{m} + \frac{\hat{p}}{m} \delta(\hat{r} - \vec{\xi}) \right] = \text{„}\hat{\rho} \cdot \hat{v}\text{“}$$

Diese erfüllen die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

Was sagt nun BOHM? Er definiert:

$$\ast \vec{v} \text{ durch } \vec{j} = \rho \cdot \vec{v}(\vec{r}, t)$$

$$\ast \vec{v} = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} \text{ wobei } \vec{R}(t) \text{ die Trajektorie von „Teilchen“ ist}$$

Man erhält durch Kombination folgende Differentialgleichung für $\vec{R}(t)$:

$$\boxed{\frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \frac{\vec{j}}{\rho}(\vec{r} = \vec{R}, t)}$$

Mit einem „Welcher-Weg-Detektor“ erhält man:

$$\psi = \psi_1|1\rangle + \psi_2|0\rangle$$

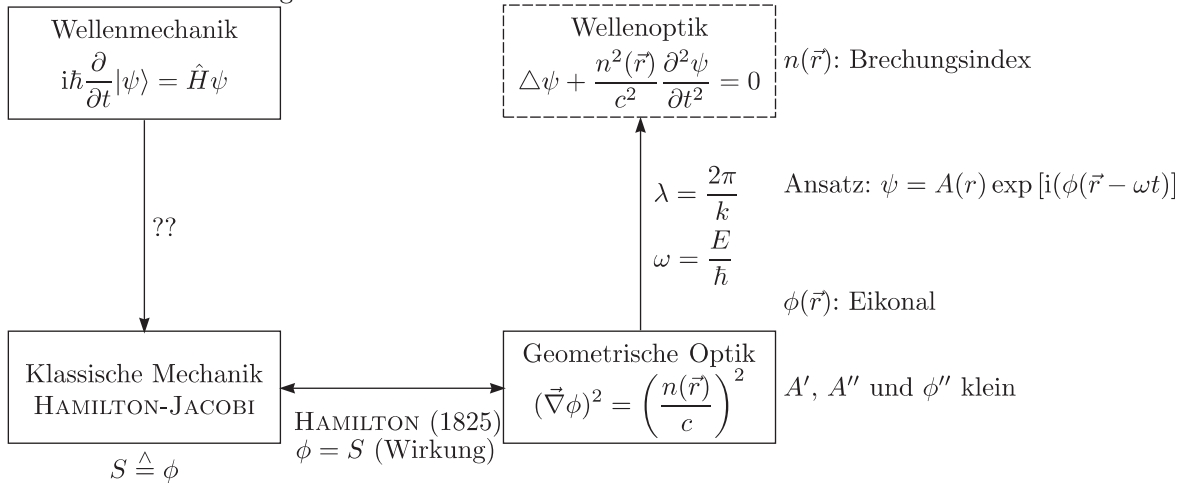
$$|\psi|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

Es gibt keine Interferenz.

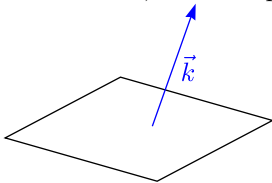
Kapitel 4

Alternativer Formalismus der Quantenmechanik und Interpretationen

Wie hat SCHRÖDINGER die SCHRÖDINGER-Gleichung gefunden? SCHRÖDINGER wusste von DE BROGLIE, dass die Elektronen Welleneigenschaften haben.



Für den einfachsten Fall einer ebene Welle ist die Phasenfunktion $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r}$. Die Flächen konstanter Phasen sind Ebenen, deshalb spricht man von ebenen Wellen.

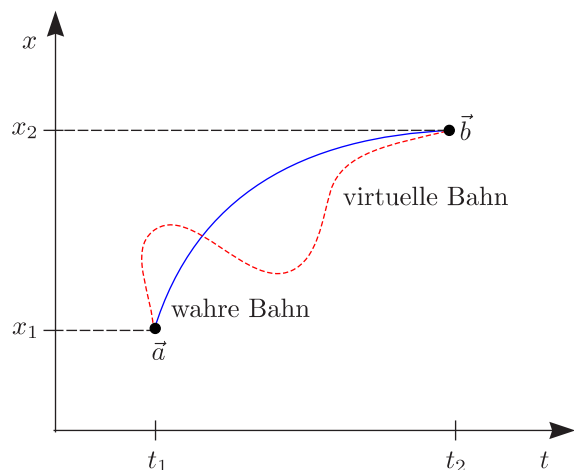


Die optischen Strahlen sind die Orthogonaltrajektorien auf den Flächen konstanter Phase, also $\vec{\nabla} \phi$.

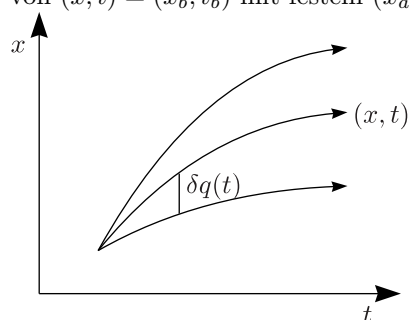
4.1 Hamilton-Jacobi-Theorie der klassischen Mechanik

Diese Theorie geht aus von der Wirkung:

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$



Bei festem \vec{a} und \vec{b} wird S für den klassischen Weg minimal. Wir betrachten nun $S(x_b, t_b; x_a, t_a)$ als Funktion von $(x, t) = (x_b, t_b)$ mit festem (x_a, t_a) auf dem klassischen Weg.



$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + H\left(p = \frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) = 0 \text{ mit } p = \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}$$

Dies ist eine partielle nichtlineare Differentialgleichung 1.Ordnung.

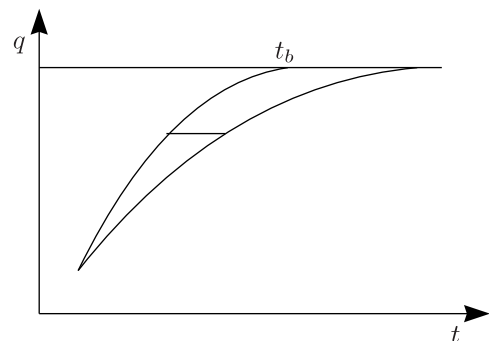
$$\psi \sim A \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{klass}}[x, t]\right)$$

Das \hbar muss auftauchen, damit das Argument dimensionslos ist! Dann hat SCHRÖDINGER eine Gleichung aufgestellt, die dieser Funktion genügt: SCHRÖDINGER-Gleichung.

Es sei t fest. Dann ergibt sich für die Variation von S :

$$\delta S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \Big|_{t_a}^{t_b} - \underbrace{\int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q(t) dt}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \Rightarrow p = \frac{\partial S}{\partial q}$$



Wir differenzieren die Wirkung nach der Zeit:

$$\frac{dS(q, t)}{dt} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q} \frac{dq(t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + p \cdot \dot{q}$$

Dies ist nichts anderes als die klassische HAMILTONfunktion. Damit gilt also:

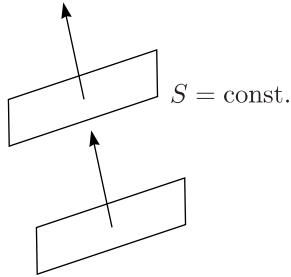
$$\frac{\partial S}{\partial t} + p\dot{q} - \mathcal{L} = 0$$

Betrachten wir nun ein freies Teilchen. Hier lautet die Wirkungsfunktion:

$$S(x, t) = \int_0^t \frac{m}{2} v^2 dt = \frac{m}{2} v^2 \cdot t = \boxed{\frac{m}{2} \cdot \frac{x^2}{t}}$$

Betrachten wir eine Fläche mit konstantem S :

$$dS = 0 = \frac{\partial S}{\partial t} + \text{gra } S(q, t) \frac{dq}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \text{gra } S(q, t) \dot{q}$$



Für ein abgeschlossenes System gilt:

$$H = H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

Durch Separation von Zeit t und Orts \vec{r} , also $S(\vec{r}, t) = -E \cdot t + W(\vec{r})$ ergibt sich die HAMILTON-JACOBI-Gleichung:

$$\frac{1}{2m} (\text{grad } W(\vec{r}))^2 + V(\vec{r}) = E$$

Betrachten wir nun eine Fläche mit konstantem S :

$$-E + |\text{grad } W(\vec{r})| \cdot |\vec{v}| = 0 \xrightarrow{\vec{v} \parallel \text{grad } W(\vec{r})} v = \frac{E}{\text{grad } W} = \frac{E}{|\vec{p}|}$$

\vec{p} ist die Phasengeschwindigkeit. Für ein freies Teilchen gilt $W(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r}$ mit $|\vec{a}| = E$ und $\frac{\vec{p}}{m} = \vec{a}$. Damit ergibt sich $v_s = \frac{1}{2} v_{\text{Teilchen}}$.

4.2 Propagator und Pfad-Integralformalismus der Quantenmechanik

Ein Propagator ist ein Zeitentwicklungsoperator in Ortsdarstellung. Gegeben ist $\psi(\vec{r}, t = 0)$:

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) \psi(\vec{r}, 0)$$

In Ortsdarstellung gilt:

$$\psi(x, t) = \langle x | \psi(t) \rangle = \sum_{x'} \left\langle x \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) \right| x' \right\rangle \langle x' | \psi(0) \rangle = \sum_{x'} \sum_n \left\langle x \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) \right| n \right\rangle \langle n | x' \rangle \psi(x', t = 0)$$

Da $|n\rangle$ ein Eigenzustand von \hat{H} ist, gilt:

$$\int dx' \left[\sum_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right) \phi_n(x) \phi_n^*(x') \right] \psi(x', t = 0)$$

Der Ausdruck in der Klammer heißt Propagator; wir bezeichnen diesen mit $K(x, x'; t)$.

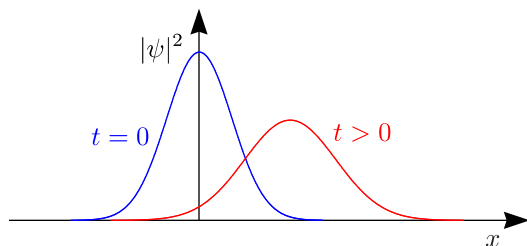
$$\psi(x, t) = \int K(x, x'; t) \psi(x', t = 0) dx'$$

$\psi(x', t = 0)$ ist eine beliebige Anfangsbedingung. Aus der Kenntnis von K folgen alle Lösungen der SCHRÖDINGER-Gleichung.

* $t = 0: K(x, x'; t = 0) = \delta(x - x')$

Betrachten wir ein freies Teilchen. Die Wellenfunktion am Anfang werde beschrieben durch eine GAUSSVERTEILUNG:

$$\psi(x, 0) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda^2}\right) \cdot \exp(ik_0x)$$



$$\psi(x, t) \sim \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{4a}\right) \cdot \exp\left(ik_0\left(x - \frac{\hbar k_0}{2m}t\right)\right)$$

$v_{gr} = \frac{\hbar k_0}{m}$ ist die Gruppengeschwindigkeit und $\frac{\hbar k_0}{2m}$ die Phasengeschwindigkeit. Damit folgt der Propagator für $a \mapsto 0$:

$$K(x, x', t) \sim \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2m} \frac{(x - x')^2}{t}\right) \text{ mit } S(x, t) = \frac{1}{2m} \frac{(x - x')^2}{t} \text{ an festen } x'$$

Für den quantenmechanischen Propagator gilt also:

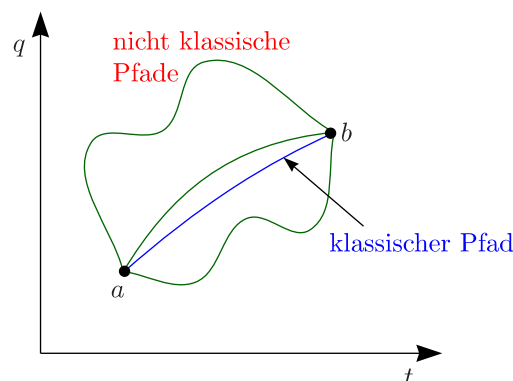
$$K(b, a) = \sum_{\substack{\text{alle Pfade} \\ \text{die } a \text{ mit} \\ \text{b verbinden}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(b, a)\right) \text{ mit } b = (x, t), a = (x', t' (= 0))$$

Die Exponentialfunktion ist eine Art Bewertungsfunktion. Die Anteile der nicht klassischen Pfade oszillieren sich immer stärker im Vergleich zu den klassischen Pfaden weg. Es gibt auch Beispiele (freies Teilchen, harmonischer Oszillator), bei denen sich alle nichtklassischen Pfade wegoszillieren.

* Wellenfunktion mit $K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \delta(x_b - x_a)$ mit $t_b = t_a$

* Lösung der zeitabhängigen SCHRÖDINGERGleichung

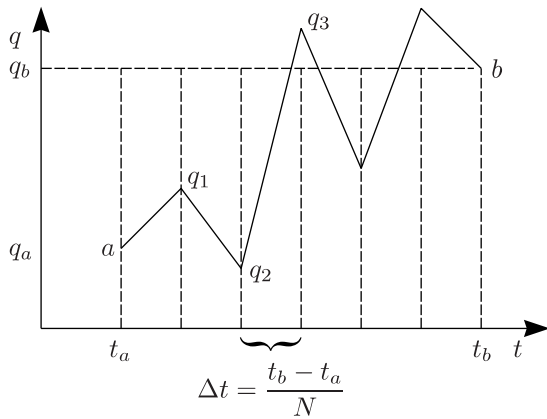
* Jede Wellenfunktion $\psi(x, t) = \int K(x, t; x', t = 0)\psi(x', t = 0) dx'$



Wenn \mathcal{L} eine quadratische Funktion in q, \dot{q} ist, gilt:

$$K = F(t) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q_{klassisch}(t))\right)$$

Wie berechnet man nun ein solches Pfadintegral?



Man approximiert den Weg durch einen Polygonzug. Wir versuchen die Menge aller Pfade auszuschöpfen durch die Menge aller Polygonzüge, die man durch a und b legen kann.

$$\sum_{\text{Pfade}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_1}{A} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_2}{A} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq_{N-1}}{A} \dots$$

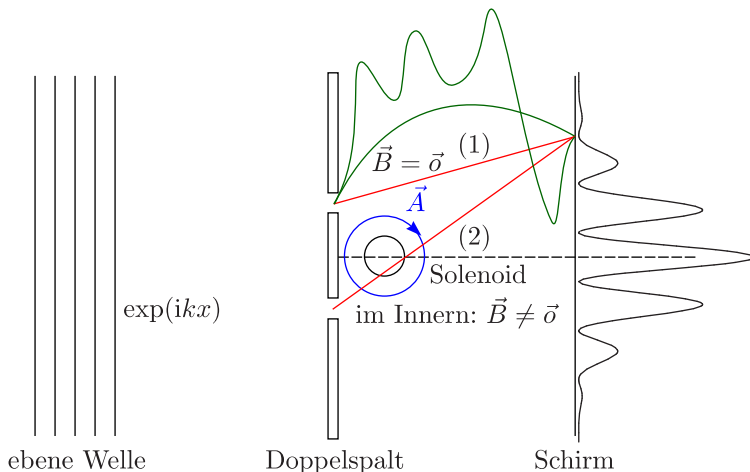
$$q_n \mapsto \frac{q_{n+1} + q_n}{2} \quad \text{und} \quad \dot{q}_n \mapsto \frac{q_{n+1} - q_n}{\Delta t}$$

Das „Maß“ A wird so gewählt, dass $K(q, \dot{q}, t = 0) = \delta(q - q')$ ist. Die Summe über alle Pfade ist das Funktionalintegral $\int \mathcal{D}q(t)$.

$$S = \int \mathcal{L} dt = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}(q_n, \dot{q}_n, t_n) \Delta t$$

Dies führt auf GAUSSintegrale in jedem Schritt.
Ein schönes Buch ist FEYNMAN und HIBBS: „Path-Integrals“

4.2.1 Aharonov-Bohm-Effekt



Es ist im Außenraum $\vec{A} \neq 0$. Die zugehörige LAGRANGE- und HAMILTONfunktion lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + q\vec{v} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2$$

Der Pfad 1 geht vom Spalt 1 aus und umfasst aber das Solenoid **nicht**.

$$K = \sum_{\text{Pfade}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) = \sum_{\text{Pfade 1}} + \sum_{\text{Pfade 2}} \dots \sum_{\text{Pfade } n}$$

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \int \vec{v} \cdot \vec{A} dt\right) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_0\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \int_{(1)} \vec{A} d\vec{r}\right)$$

Hierbei verschwindet das geschlossene Integral über alle Pfade der Klasse 1, da diese keinen Fluss einschließen.

$$K = K_0^{(1)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} q \int_{(1)} \vec{A} d\vec{r} \right) + K_0^{(2)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} q \int_{(2)} \vec{A} d\vec{r} \right)$$

Hieraus ergibt sich ψ und damit $|\psi|^2$:

$$|\psi|^2 = K_0^{(1)} \cdot K_0^{(2)} \cdot \exp \left(\frac{i}{\hbar} q \left[\int_{(1)} \vec{A} dr - \int_{(2)} \vec{A} d\vec{r} \right] \right) = K_0^{(1)} K_0^{(2)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} q \oint \vec{A} d\vec{r} \right) \sim \exp \left(i \left(\frac{\phi}{\phi_0} 2\pi \right) \right)$$

Es ist ein magnetischer Fluss angelegt:

$$\phi_0 = \frac{\hbar 2\pi}{q} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Gauß} \cdot \text{cm}^2$$

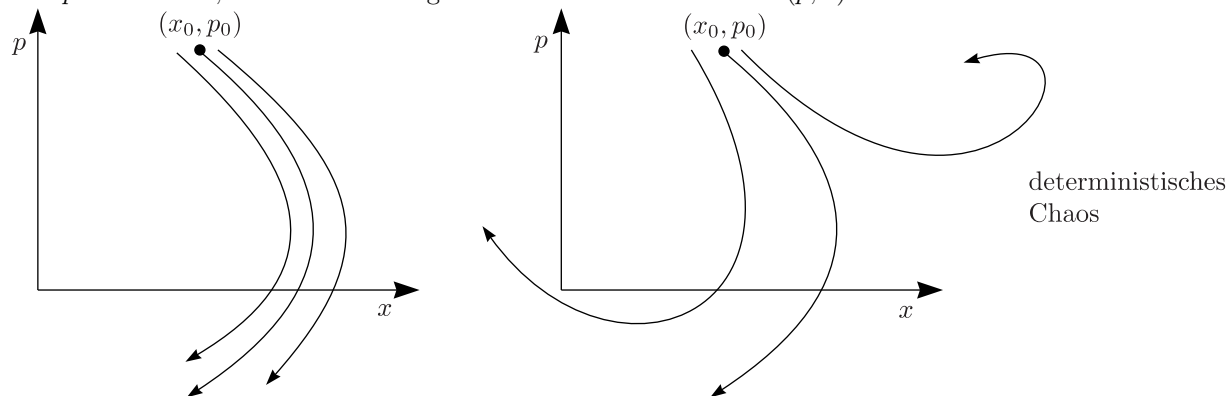
Es bleiben folgende Fragen:

- Wo taucht die Vertauschungsrelation $[\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar$ auf?
- Woher „weiß“ das Integral, dass es sich bei zwei identischen Teilchen um Bosonen oder Fermionen handelt?

Dies führt zur Integration über „GRASSMANN-Variablen“.

4.3 Wigner-Funktion

Dies bezieht sich auf eine Phasenraumformulierung der Quantenmechanik, die große Ähnlichkeit mit der klassischen statistischen Physik hat. Betreibt man klassische statistische Physik, so geht man davon aus, dass x und p nicht exakt, sondern nur mit gewisser Wahrscheinlichkeit $W(p, x)$ beschreibbar sind.



Wir haben einen Zustand $W(p, x; t)$ und Erwartungswert $\langle G \rangle$ für diesen Zustand:

$$\langle G \rangle = \iint G(p, x) W(p, x) dp dx$$

Beispielsweise gilt für thermisches Gleichgewicht:

$$W \sim \exp \left(-\frac{H}{k_B T} \right) \text{ mit } H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Einen quantenmechanischen Zustand beschreibt man folgendermaßen:

- * Reiner Zustand: Wellenfunktion $\psi_n(x)$, $|n\rangle$
- * Gemisch: $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n| \Rightarrow \hat{\rho} = \sum_n W_n |n\rangle\langle n|$

Für einen reinen Zustand in Ortsdarstellung gilt:

$$\langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle = \langle x'' | \psi \rangle \langle \psi | x' \rangle \Rightarrow \varrho_{\text{rein}}(x'', x') = \psi(x'') \psi^*(x')$$

Wir betrachten nun die „Dichtematrix“ $\varrho(x'', x') = \langle x'' | \hat{\rho} | x' \rangle$ und führen zwei unabhängige Koordinaten x und ξ ein durch:

$$x'', x' \mapsto x = \frac{x'' + x'}{2}, \quad \xi = x'' - x'$$

$$\tilde{\varrho}(x, \xi) = \varrho\left(x + \frac{1}{2}\xi, x - \frac{1}{2}\xi\right)$$

Wir machen nun eine FOURIERtransformation:

$$W(x, p) := \int \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \xi\right) \tilde{\varrho}(x, \xi) \frac{d\xi}{2\pi\hbar}$$

Aufgrund der Hermizität von ϱ gilt $\varrho(x'', x') = \varrho^*(x', x'')$.

* Es gilt $W^* = W$ und somit ist W reell.

* Ortswahrscheinlichkeit:

$$|\psi(x)|^2, \langle x | \hat{\rho} | x \rangle = \int W \frac{dp}{2\pi\hbar}$$

* Impulswahrscheinlichkeit:

$$|\psi(p)|^2, \langle p | \hat{\rho} | p \rangle = \int W dx$$

* Obere Grenze: $|W(x, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}$

* Quantenmechanischer Erwartungswert

$$\langle \hat{G} \rangle = \langle \psi | \hat{G} | \psi \rangle = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{G}) = \iint W(x, p) G_w(x, p) \frac{dx dp}{2\pi\hbar}$$

G_w ist die WIGNER-Darstellung von \hat{G} . Dies funktioniert analog wie für $\hat{\rho}$ wie beispielsweise:

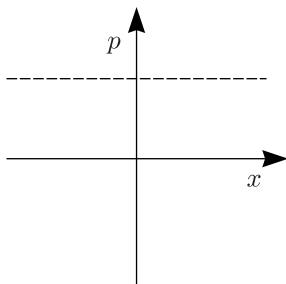
$$\langle x'' | V(\hat{x}) | x' \rangle = V(x') \delta(x'' - x')$$

$$\langle x'' | \hat{p} | x' \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x''} \delta(x'' - x')$$

Beispiel:

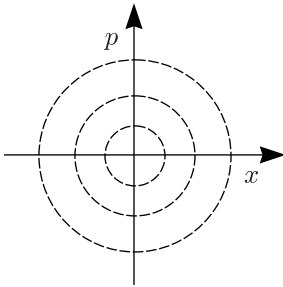
a.) Ebene Welle $\psi(x) = \exp(ikx)$

$$\varrho(x'', x') = \exp(ik(x'' - x')) = \exp(ik\xi) \Rightarrow W(x, p) = \delta(p - \hbar k)$$

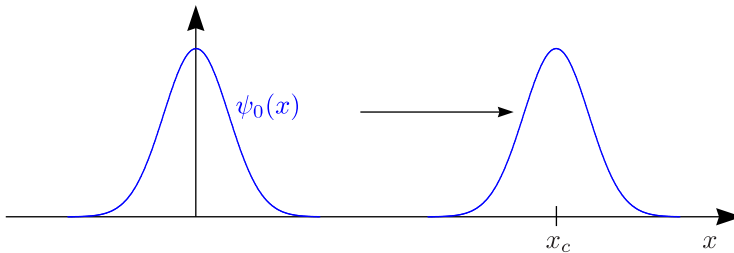


b.) Harmonischer Oszillator im Grundzustand $\psi_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

$$W(x, p) = \exp(-x^2 + p^2)$$



c.) Kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators



$$\psi(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x_0 - x_c)^2\right) \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar}px\right) \cdot \exp(i\phi(t))$$

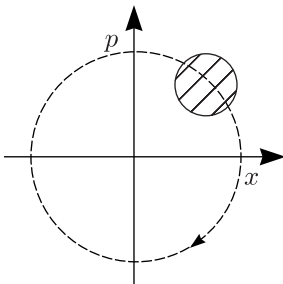
Dies löst die zeitabhängige SCHRÖDINGERGleichung, wenn:

$$x_c = x_c(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ und } p_c = \dot{x}_c(t) = -x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- * Zeit: $\frac{1}{\omega_0}$
- * Energie: $\hbar\omega_0$
- * Länge: $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$

$$W(x, p, t) = \exp(-([x - x_c(t)]^2 + [p - p_c(t)]^2))$$

Der harmonische Oszillator bewegt sich wie ein klassischer Oszillator im Phasenraum mit dem Unterschied, dass der Zustand durch ein endliches Gebiet und nicht einen einzelnen Punkt beschrieben wird.



Leider funktioniert dies nur für den Grundzustand.

4.3.1 Bewegungsgleichung für die Wigner-Funktion

Betrachten wir die VON NEUMANN-Gleichung:

$$\frac{d\hat{\varrho}}{dt} := \frac{\partial \hat{\varrho}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\varrho}] = 0$$

Dies drückt die Erhaltung des Phasenraumvolumens aus!

$$\frac{dW}{dt} := \frac{\partial W}{\partial t} + \{H, W\} = 0$$

In der Ortsdarstellung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(x'', x', t) + \frac{i}{\hbar} \left(\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x''^2} + U(x'') \right] - \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + U(x') \right] \right) \varrho(x'', x', t) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W(x, p, t) + \frac{p}{m} \frac{\partial W(x, p, t)}{\partial x} + \frac{i}{\hbar} \left(U \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) - U \left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) W(x, p, t) = 0$$

Wir betrachten den klassischen Grenzfall mit $\hbar \mapsto 0$. Wir können dann U entwickeln

$$U \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} \right) = U(x) + U'(x) \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p} + \dots$$

womit sich ergibt:

$$\frac{\partial W_{kl}}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial W_{kl}}{\partial x} + \left(-\frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial W_{kl}}{\partial p} = 0$$

Mit $\frac{p}{m} = \frac{\partial H}{\partial p}$ und $-\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}$ resultiert:

$$\frac{\partial W_{kl}}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial p}}_{\{H, W\}} = 0$$

$\{H, W\}$ ist die POISSON-Klammer. Dabei handelt es sich um das LIOUVILLE-Theorem $\frac{dW_{kl}}{dt} = 0$.

$$\boxed{\frac{\partial f(x, p, t)}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} f + \vec{F} \text{grad}_{\vec{p}} f = 0}$$

Dies ist die BOLTZMANN-Gleichung für eine N -Teilchen-Funktion $f_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$. Für eine Einteilchen-Verteilung gilt:

$$f_1(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) = \iint d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N d\vec{p}_1 \dots d\vec{p}_N f_N$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} + \vec{F} \text{grad}_{\vec{p}} \right) f_1 = \text{Funktion}(f_2) \equiv C(f_1)$$

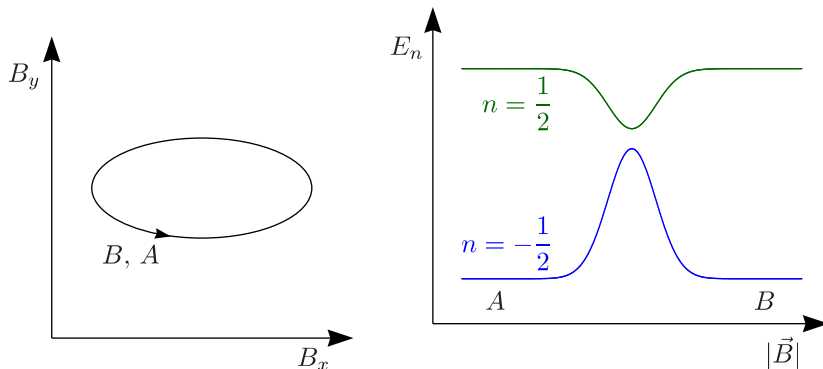
$C(f_1)$ ist das sogenannte Stoßintegral.

4.4 Berry-Phase (geometrische oder topologische Phase)

M.V.BERRY, Proc. of Royal Society A392, 45 (1984)

Hat man ein System mit zwei Parametern wie beispielsweise den Spin im Magnetfeld, so lautet der HAMILTON-Operator:

$$\hat{H}(\vec{B}) = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{B} \cdot \vec{S}$$



$$E_n(B) = -g \mu_B |\vec{B}| \cdot n \text{ mit } n = \pm \frac{1}{2}$$

Was passiert mit der Wellenfunktion? BERRY schreibt Eigenzustände in der Form $|n, B\rangle = |n(\vec{B})\rangle, \phi_n(\vec{B}, \vec{r})$. Ändert man $\vec{B} = \vec{B}(t)$ adiabatisch, so müssen wir die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung heranziehen.

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E(B(t))\right) \phi_n(B, \vec{r})$$

Damit dies die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung löst, müssen wir diesen Zustand umschreiben:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(B(t')) dt'\right) \exp(i\gamma_n(t)) \phi_n(\vec{B}, \vec{r})$$

Dies löst nun die zeitabhängige SCHRÖDINGER-Gleichung und führt auf eine Differentialgleichung für die BERRY-Phase γ_n :

$$\dot{\gamma}_n(t) = i\langle n|\vec{\nabla}_{\vec{B}} n(\vec{B})\rangle \frac{d\vec{B}}{dt} \text{ mit } \vec{\nabla}_{\vec{B}} n(\vec{B}) = \vec{\nabla}_{\vec{B}} \phi_n(\vec{B}, \vec{r})$$

γ_n ist reell wegen $\langle n|n\rangle = 1$ und $\vec{\nabla}_{\vec{B}} \langle 1|1\rangle = 0$. Obige Differentialgleichung lässt sich schön integrieren:

$$\boxed{\gamma_n(T) = \gamma_n(C) = \oint i\langle n|\vec{\nabla}_{\vec{B}} n(B)\rangle d\vec{B}}$$

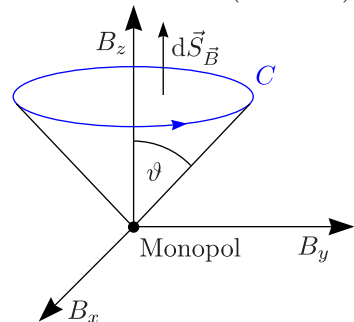
Dies müssen wir umformen, da $\vec{\nabla}_{\vec{B}} \phi_n(\vec{B}, \vec{r})$ eine bezüglich \vec{B} differenzierbare Basis erfordert. Wir verwenden den STOKESSchen Satz im \vec{B} -Raum (Parameterraum):

$$\gamma_n(C) = \iint_{S(C)} \vec{V}_n(\vec{B}) d\vec{S}_{\vec{B}} \text{ mit } \vec{V}_n(\vec{B}) = \text{Im} \left(\sum_{m \neq n} \frac{\langle m|\vec{\nabla}_{\vec{B}} \hat{H}(\vec{B})|n\rangle \times \langle n|\vec{\nabla}_{\vec{B}} \hat{H}(\vec{B})|m\rangle}{(E_m - E_n)^2} \right)$$

Dies ist also ein Integral über die Fläche, die von der Kurve C berandet wird. Beispielsweise gilt für den Spin:

$$\vec{\nabla}_{\vec{R}} \hat{H} = -g \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{S} \xrightarrow{n=\pm\frac{1}{2}} \vec{V}_n(\vec{B}) = n \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2}$$

Dies ist das Feld eines „Monopols“ im \vec{B} -Raum. γ_n ist der Raumwinkel, unter dem die Kurve C vom „Minipol“ aus erscheint: $\Omega = (1 - \cos \vartheta) \cdot 2\pi$.

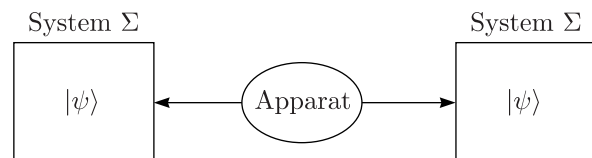


Interessante Artikel hierzu sind:

- * „The American Physical Society, Observation of BERRY'S Topological Phase by Use of an Optical Fiber“, Volume 57, Number 8, 25.August 1986
- * „The Geometric Phase by Michael Berry“, Scientific American December 1988

4.5 Klonen und Teleportation von Quantenzuständen

4.5.1 Klonen



Σ sei beispielsweise ein Wasserstoffatom.

WOOTTERS und ZUREK: Nature, October 1982, Seite 802

Die Linearität der SCHRÖDINGER-Gleichung verbietet Klonen. Als Beweisskizze betrachten wir ein Photon der Polarisation $|S\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\leftrightarrow\rangle$. Ein Photon kann entweder rechts, links, vertikal oder horizontal polarisiert sein; dies sind Eigenzustände. Will man nun das Klonen mit obigen Apparat durchführen, so passiert folgendes. Der Apparat befindet sich im Zustand $|A_0\rangle$ und wir wollen den Übergang $|A_0\rangle|S\rangle \mapsto |A_S\rangle|SS\rangle$ durchführen. Betrachten wir beispielsweise:

$$|A_0\rangle|\uparrow\rangle \mapsto |A_v\rangle|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|A_0\rangle|\leftrightarrow\rangle \mapsto |A_h\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$$

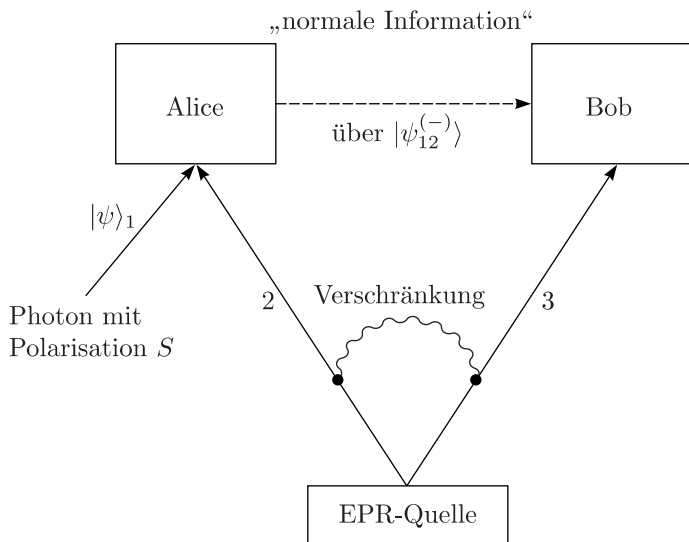
Aufgrund der Linearität der SCHRÖDINGER-Gleichung ist die Abbildung von links nach rechts eine lineare, unitäre Abbildung.

$$|A_0\rangle|S\rangle \mapsto \alpha|A_r\rangle|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|A_h\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$$

Einen Zwei-Photonen-Zustand erhält man mittels zweier Erzeugungsoperatoren aus dem Vakuumzustand:

$$a_s^\dagger a_s^\dagger |0\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha a_r^\dagger + \beta a_h^\dagger) \right]^2 |0\rangle \neq \alpha|A_r\rangle|\uparrow\uparrow\rangle + \beta|A_h\rangle|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle$$

4.5.2 Teleportation



Es gibt eine Korrelation zwischen 2 und 3.

$$|\psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_2|\leftrightarrow\rangle_3 - |\leftrightarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3)$$

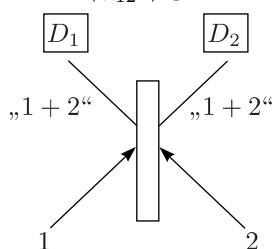
kein individueller Polarisationszustand von Photon 2,3

Alice macht eine Projektion vom Photon 1 + 2-Zustand auf:

$$|\psi_{12}^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1|\leftrightarrow\rangle_2 - |\leftrightarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$$

(Dieser Zustand hat ungerade Parität.) Dann hat das Photon 3 dieselbe Polarisation wie zuvor Photon 1. Spukhafte Fernwirkung! Es gibt jedoch folgende Probleme:

* Neben $|\psi_{12}^{(-)}\rangle$ gibt es drei weitere linear unabhängige Zustände, die aber gerade Parität haben.

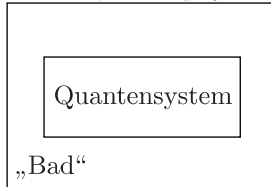


Stellt man für $\psi_{12}^{(-)}$ konstruktive Interferenz fest, so sind die Detektoren D_1 und D_2 in Koinzidenz. Für die restlichen drei gibt es destruktive Interferenz und damit keine Koinzidenz.

4.6 Dekohärenz

Quantenphysik \leftrightarrow Klassische Physik

In der Quantenphysik hat man Interferenz (Kohärenz), in der klassischen Physik jedoch nicht (Dekohärenz).



Das Gesamtsystem „Bad + Quantensystem“ hat eine reversible Dynamik. Man interessiert sich nur für einen relativ kleinen Ausschnitt, nämlich das sogenannte reduzierte System. Man erhält den statistischen Operator des reduzierten Systems durch $\hat{\rho}_{QS} = \text{Sp}(\hat{\rho}_{ges})$, wobei die Spur über alle Bad-Variablen auszuführen ist. (Zur Berechnung benötigt man den Pfadintegralformalismus nach FEYNMAN). In der Theorie von CALDEIRA-LEGETT wird das Bad durch ein Ensemble von harmonischen Oszillatoren beschrieben.

$$\frac{\partial \hat{\rho}_{QS}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}_{QS}, \hat{\rho}] = \gamma(x - x') \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right) \varrho(x, x', t) + \Lambda(x - x')^2 \varrho$$

γ ist die Relaxationskonstante ($-\gamma \cdot \vec{v}$) und Λ die Dekohärenz-Konstante. Die Dekohärenz-Zeiten sind gegeben durch:

$$\tau_{dek} = \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{\lambda_{dB}}{\Delta x} \right) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{\lambda_{dB}}{\Delta x} \right) = 10^{40}$$

λ_{dB} ist die thermische DE BROGLIE-Wellenlänge.