

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Prof. Dr. Kühn

Vorlesung Wintersemester 2005/2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 18. Februar 2006

Mitschrieb der Vorlesung ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE
von Herrn Prof. Dr. KÜHN im Wintersemester 2005/2006
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	Äquivalenz-Prinzip	5
1.1.1	Schwaches Äquivalenz-Prinzip	5
1.1.2	Krümmung von Flächen (nach GAUSS)	6
1.1.3	Krümmung eines n -dimensionalen Raumes	6
1.2	Der RIEMANNsche Krümmungstensor	7
1.3	Feldgleichungen	7
1.4	Zusammenhang zwischen Gravitationspotential und Metrik	8
1.5	Experimentelle Tests	9
2	Tensor-Analysis, Lineare Räume	11
2.1	Ko- und kontravariante Koordinaten	11
2.1.1	Linearer Raum mit Basisvektoren $\vec{e}_i, i = 1, \dots, n$	11
2.1.2	Lineare Transformationen der Basisvektoren	11
2.1.3	Metrik	11
2.1.4	Einschub aus der Festkörperphysik: Das reziproke Gitter	12
2.2	Tensoren n -ter Stufe	13
2.2.1	Multiplikation von Tensoren, Verjüngung	13
2.3	Metrik, Krümmung und zweidimensionale Flächen	14
2.3.1	Beispiel: Geometrie auf der Kugel	14
2.3.2	Geometrie	14
2.4	Hyperkugel	15
2.4.1	Kugelkoordinaten	15
2.4.2	Geometrie auf Kugel im gekrümmten Raum	16
2.5	Parallelverschiebung und CHRISTOFFEL-Symbole	17
2.5.1	Zweidimensionale anschauliche Diskussion	18
2.5.2	Parallel-Transport eines Vektors entlang eines Breitenkreises \mathcal{B} von A nach A	20
2.5.3	Tensor-Felder über beliebigen Mannigfaltigkeiten	21
2.5.4	Kovariante Ableitung	21
2.6	Krümmungstensor	22
2.7	Geodätische Linien	23
2.7.1	Parallelverschiebung eines Vektors in seine Richtung	23
2.7.2	Geodäte als Linie stationärer (minimaler) Länge zwischen zwei Punkten	23
3	Physikalische Grundgesetze	25
3.1	Energie-Impuls-Tensor als Quelle des Gravitationsfeldes	25
3.2	EINSTEINGleichungen	26
3.2.1	Analogie zur Elektrodynamik	28
3.3	Schwache Felder/Linearisierte Feldgleichungen	28
4	Statische Felder	31
4.1	Ziel	31
4.2	SCHWARZSCHILD-Metrik	31
4.3	Bewegung im Zentralfeld	32
4.3.1	Erinnerung: KEPLERproblem	32
4.3.2	Bahnkurve	35
4.3.3	Ablenkung von Licht im Feld der Sonne	37
4.4	Qualitative Diskussion	38
4.5	Bewegung zum Zentrum	39

4.5.1	Beobachter von außen	39
4.6	„Geschichte“ des von verschiedenen Bahnpunkten emittierten Lichts	39
4.6.1	Rotverschiebung	40
4.7	Kreisbahnen	41
4.7.1	Zentralpotential in NEWTONScher Mechanik	41
4.7.2	Allgemeine Relativitätstheorie	41
4.8	Rotierende Schwarze Löcher (KERR-Metrik 1963)	42
4.8.1	Ereignishorizont	42
4.8.2	LENSE-THIRING-Effekt	42
4.8.3	HAWKING-Strahlung	43
4.8.4	Gravitationswellen	43
4.8.5	Wirkung der Welle auf Testkörper	45
4.9	Abstrahlung	45
4.9.1	Wiederholung: Elektrodynamik	46
4.9.2	Dipolnäherung	46
4.9.3	Beispiel: Rotierender starrer Körper	48
5	Entstehung von Neutronensternen und Schwarzen Löchern	49
6	Beobachtung von PSR1913+16	51
6.1	Kreisbewegung	51
6.2	Ellipsenbahn	52
6.2.1	Bestimmung der Bahnparameter	53
6.3	Auswertungen/Messung von Gravitationswellen	55
6.3.1	Detektoren	55
6.3.2	Abschätzung der Empfindlichkeit	55

Kapitel 1

Einführung

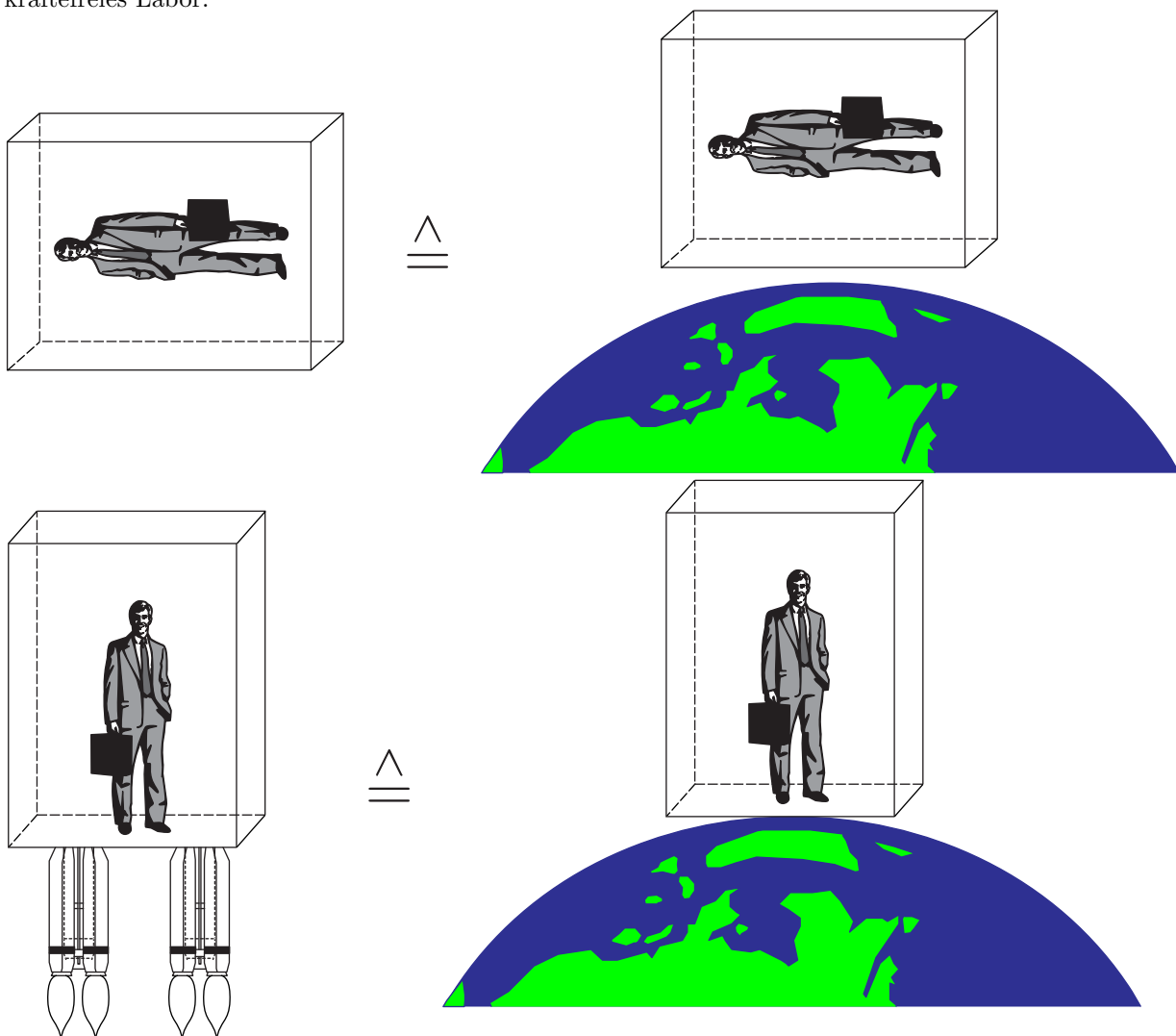
1.1 Äquivalenz-Prinzip

1.1.1 Schwaches Äquivalenz-Prinzip

Träge (inertiale) und schwere (gravitative) Masse sind gleich (bzw. proportional).

$$\vec{F} = m_1 \cdot \vec{a}, \vec{F} = G \frac{Mm_g}{r^2} \vec{e} \text{ mit } G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

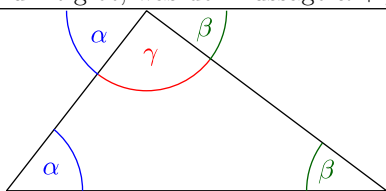
Nach EINSTEIN ist die beschleunigte Bewegung lokal äquivalent zum Gravitationsfeld. Betrachten wir ein kräftefreies Labor:



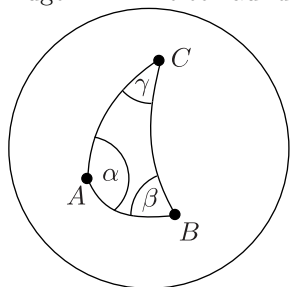
Achtung! Dies gilt nur für kleine Labors, also „lokal“. Größere Bereiche unterliegen Gezeitenkräften als Folge der Raumkrümmung.

1.1.2 Krümmung von Flächen (nach Gauß)

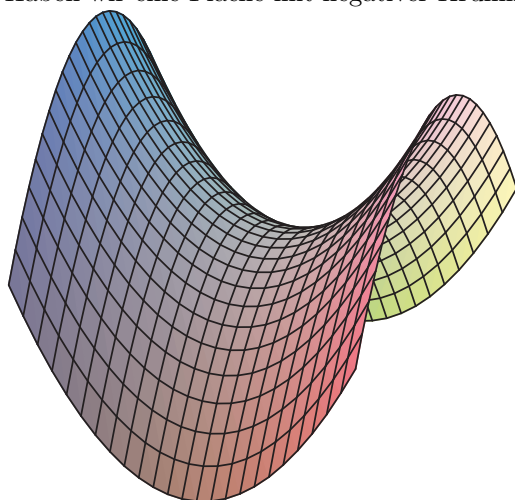
Das **Parallelen-Axiom** besagt, dass es auf einer ebenen Fläche genau eine zur Fläche parallele Gerade durch einen Punkt gibt, was der Aussage $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ entspricht.



Die Geometrie beispielsweise auf einer Kugeloberfläche unterscheidet sich jedoch drastisch von der Geometrie auf einer Ebene. Geraden, welche auf einer Fläche Geodäten sind, entsprechen Großkreisen auf einer Kugel. Ein Dreieck auf der Kugeloberfläche besitzt die Fläche $F_{\Delta} = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ („sphärischer Exzess“).

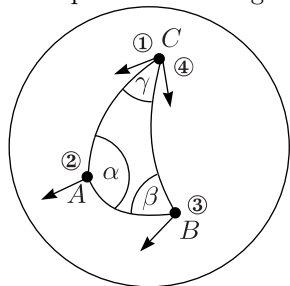


Durch Messung von α , β , γ und F lässt sich R^2 berechnen. R hängt nicht ab von der Gestalt des Dreiecks. Haben wir eine Fläche mit negativer Krümmung ($\kappa < 0$) so gilt $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.



Das obige Bild zeigt beispielsweise einen Sattelpunkt mit negativer Krümmung. Hier gilt also $\sum_i \alpha_i < \pi$. Hinweis: Zylinder- und Kegeloberfläche sind nicht gekrümmt, da sie lokal isometrisch zur euklidischen Ebene sind (Kegel: Defekt-Winkel).

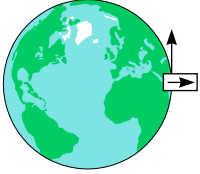
Eine alternative Beschreibung der Krümmung erfolgt durch den Paralleltransport eines Vektors entlang einer geschlossenen Kurve. Man läuft entlang des Weges $C \mapsto A \mapsto B \mapsto C$. Der Winkel $\varphi \neq 0$ zwischen Vektor ① und Vektor ④ charakterisiert ebenfalls die Krümmung. Man betrachtet also die Änderung des Vektors beim Transport auf einem geschlossenen Wege. Normierung der Änderung relativ zur umfahrenden Fläche



1.1.3 Krümmung eines n -dimensionalen Raumes

Die Änderung eines Vektors beim Paralleltransport auf einem geschlossenen Weg hängt ab von der Richtung des Vektors und von der Orientierung der umfahrenden Fläche. $A^{\sigma\rho} = \alpha^{\sigma}b^{\rho} - \alpha^{\rho}b^{\sigma}$ charakterisiert die umfahrende

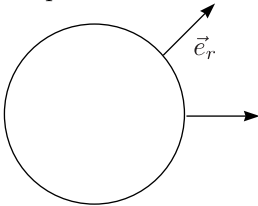
Fläche. Die Änderung des Vektors ist gegeben durch $\delta V^\mu = R^{\mu}_{\lambda\sigma\rho} A^{\sigma\rho} V^\lambda$, wobei $R^{\mu}_{\lambda\sigma\rho}$ der Krümmungstensor ist. Dieser hat die Dimension einer inversen Fläche, also $1/\text{cm}^2$.



Kräftefrei nur am Schwerpunkt, Beschleunigung: $\delta a = 3GM/r^3 d$

Die globale Beschreibung des Gravitationsfeldes ist nur durch „nicht-kartesische“ Koordinaten möglich. Damit muss die Gravitationstheorie in allgemeinen Koordinaten formuliert werden. Dies führt uns zum Begriff des „Paralleltransports von Vektoren“.

Wird der Paralleltransport in Richtung einer Geodäten durchgeführt, so bleibt der Vektor parallel oder senkrecht. Eine **Geodäte** ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Wir benötigen nun eine Metrik, um das ganze beschreiben zu können. Beim Paralleltransport in beliebigen Koordinaten müssen wir die Änderung des Systems mit berücksichtigen. Wir betrachten ein triviales Beispiel, nämlich Kugelkoordinaten. Hier wird beispielsweise die Richtung des Vektors \vec{e}_r festgelegt durch die beiden Winkel ϑ und φ .



1.2 Der Riemannsche Krümmungstensor

Sehr wichtig zur Beschreibung des Raumes und dessen Krümmung ist der sogenannte Krümmungstensor $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ hängt ab vom Koordinatensystem. Wenn alle Komponenten von $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ gleich null sind, dann ist $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$ in allen Koordinatensystemen.

1.3 Feldgleichungen

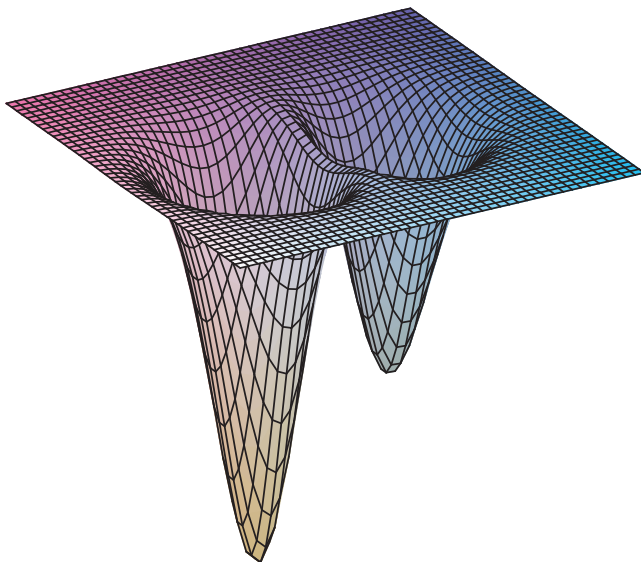
Materie wird als Quelle des Feldes angesehen (in Analogie zur Elektrodynamik). Wir werden uns mit den Größen Masse/Energie, Druck, Spannung auseinandersetzen (Quellen des Feldes):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} + \underbrace{(\Lambda g_{\mu\nu})}_{? \text{ Dunkle Energie ?}}$$

Dies sind die berühmten EINSTEINGleichungen. $R_{\mu\nu}$ ergibt sich durch einmalige Verjüngung aus dem Krümmungstensor, also $R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu}$ und R ist gegeben durch $R \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. Betrachten wir das ganze qualitativ (ohne Indizes):

$$R \sim \frac{G}{c^2} \rho$$

Die Materiedichte ρ ist also Quelle der Krümmung R des Raumes. Das gewöhnliche Gravitationsfeld ist analog zum elektrischen Feld aus der Elektrostatik. Schnell bewegte Massen führen zu neuen Feldkomponenten $\neq 0$ (Analogie: Magnetfeld). Dies führt zur Strahlung. (Die Einsteingleichungen sind nichtlinear und haben deshalb auch für $T_{\mu\nu} = 0$ interessante Lösungen.) Ein anschauliches Bild für statische Felder stellt eine Gummimembran dar, auf der sich Stahlkugeln befinden. Die Deformation der Membran soll für die Deformation der Metrik stehen.



1.4 Zusammenhang zwischen Gravitationspotential und Metrik

Wir wollen zunächst eine rein heuristische Diskussion (ohne Herleitung) führen. Betrachten wir zunächst die Wirkung eines freien Teilchens, die gegeben ist durch:

$$S_{nr} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m v^2(t) dt \text{ mit } v = \frac{dx(t)}{dt}$$

Die Wirkung wird minimal für $v = \text{const.}$ In der speziellen Relativitätstheorie gilt:

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \beta^2(t)} dt = -mc^2 \int d\tau \ (\approx -mc^2(t_2 - t_1) + S_{nr})$$

Mit Potential im nichtrelativistischen Fall ergibt sich:

$$S_{nr} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m v^2(t) - m\phi(x) \right) dt \text{ mit dem Gravitationspotential } \phi(x)$$

Ein Ansatz, die relativistische Wirkung anzugeben, ist:

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \beta^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

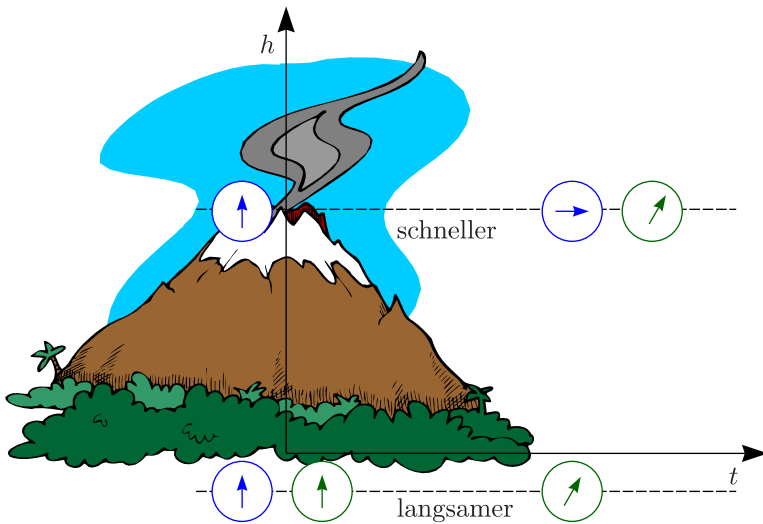
Dies ist natürlich in dieser Form nicht zwingend, aber man erkennt, dass sich im nichtrelativistischen Grenzfall die richtige Wirkung ergibt. In der speziellen Relativitätstheorie gilt bekanntlich:

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2} (d\vec{x})^2$$

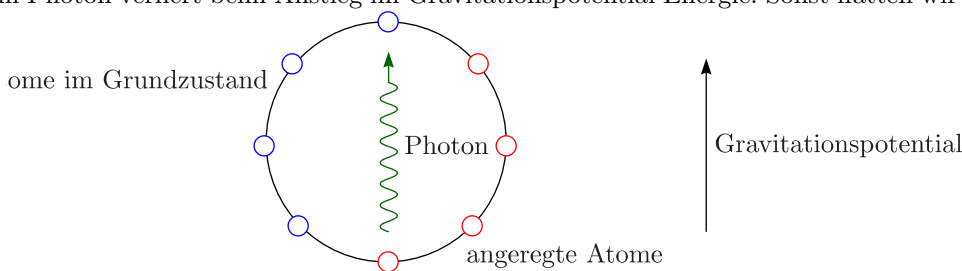
also mit dem Potential:

$$\boxed{c^2(d\tau)^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\phi(x)}{c^2} \right) (dt)^2 - (d\vec{x})^2}$$

Eine mögliche Interpretation ist, dass $g_{00} = 1 + 2\phi(x)/c^2$ abhängig vom Ort ist. Die Lichtgeschwindigkeit ist aber scheinbar abhängig vom Potential. Licht wird in der Umgebung einer Masse abgelenkt. Außerdem konvertiert $(1 + 2\phi/c^2)^{\frac{1}{2}}$ die gemessene Zeit bei verschiedenen Potentialen.



Ein Photon verliert beim Anstieg im Gravitationspotential Energie. Sonst hätten wir ein „perpetuum mobile“.



Angeregte Atome sind wegen der Masse-Energie-Äquivalenz schwerer ($M + E/c^2$) als Atome der Masse M im Grundzustand.

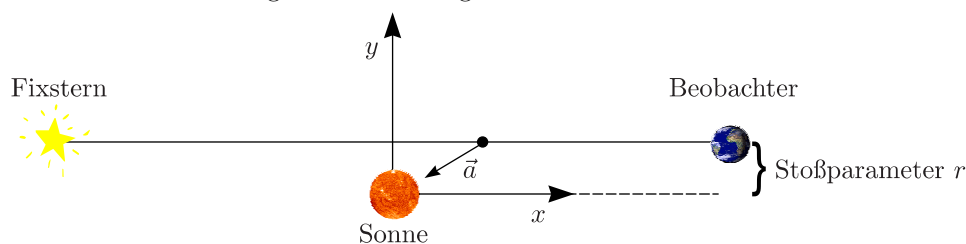
1.5 Experimentelle Tests

a.) Periheldrehung des Merkurs

Experimentell wurden $42''/100$ Jahre zusätzlich zu etwa $5600''$ durch Störung anderer Planeten gemessen.

b.) Beugung des Lichts im Feld der Sonne

Wir machen eine **naive** Abschätzung auf der Basis, dass das Photon eine Kugel mit Geschwindigkeit c ist. Wir haben also folgende Anordnung:



Die transversale Komponente der Beschleunigung ist gegeben durch $a_y = -GMr/(x^2+r^2)^{3/2}$ mit $x = x(t)$. Die transversale Änderung der Geschwindigkeit ergibt sich aus:

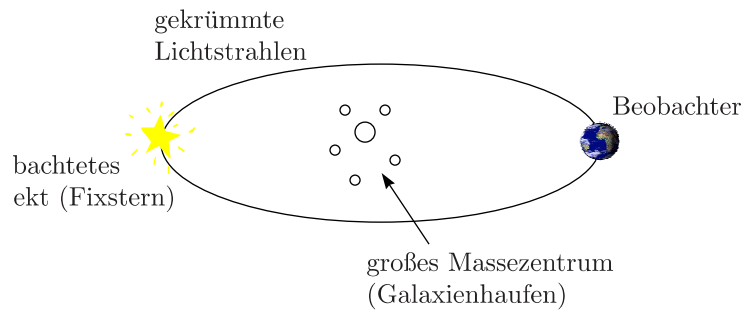
$$\Delta v = \int_{-\infty}^{+\infty} a_y(t) dt = -\frac{GMr}{r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{tc}{r}\right)^2 + 1\right]^{3/2}} = \boxed{-\frac{2GM}{cr}}$$

Die Winkeländerung ist dann gegeben durch:

$$\boxed{-\frac{\Delta v}{c} = \frac{2GM}{c^2 r}} \approx 0,86''$$

Tatsächlich berechnete EDDINGTON im Jahre 1919 mit der allgemeinen Relativitätstheorie einen Faktor 2.

c.) Effekte



* Zwei Bilder des gleichen Objekts

* Linseneffekt

d.) Gravitationswellen (bisher indirekt, Abstrahlung von Neutronensternen)

e.) Kosmologie

Kapitel 2

Tensor-Analysis, Lineare Räume

Unser Ziel ist es, die Metrik in beliebigen (also insbesondere „schiefwinkligen“) Koordinatensystemen zu formulieren.

2.1 Ko- und kontravariante Koordinaten

Ab jetzt werden wir die Summationskonvention verwenden.

2.1.1 Linearer Raum mit Basisvektoren \vec{e}_i , $i = 1, \dots, n$

Jedes Element \vec{x} aus diesem Raum kann dargestellt werden als

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x^i \vec{e}_i$$

x^1, \dots, x^n bezeichnet man auch als **Koordinaten**. Man spricht von einem n -dimensionalen Raum, genau dann wenn es n linear unabhängige Vektoren gibt und $n + 1$ Vektoren immer linear abhängig sind. Wir sagen: Der Raum wird „aufgespannt“ durch die Menge dieser Basisvektoren, also $\{\vec{e}_i\}$. In einem n -dimensionalen Raum gibt es lineare Unterräume der Dimension $n' < n$, die durch n' Vektoren \vec{e}'_i und einem Koordinatenursprung \vec{a} festgelegt werden. Die Elemente sind dann gegeben durch:

$$\vec{x} = \vec{a} + \sum_{i=1}^{n'} x^i \vec{e}'_i$$

Für $n' = 1$ ist dies eine Gerade und für $n' = 2$ eine Ebene.

2.1.2 Lineare Transformationen der Basisvektoren

Wir betrachten Abbildungen der Basisvektoren $\vec{e}_i \mapsto \vec{e}'_k = A_{ki} \vec{e}_i$, wobei $\det(A) \neq 0$ gelten soll. Dann gilt für jeden Satz von Koordinaten:

$$\vec{x} = \sum_i x^i \vec{e}_i = \sum_l x^l \vec{e}'_l = \sum_{l,k} x^l A_{lk} \vec{e}_k$$

Also gilt $x^i = x^l A_{li}$ bzw. $x^l = (A^{-1})_{li} x^i$. Die x^i werden als „kontravariante“ Koordinaten bezeichnet.

2.1.3 Metrik

Die „Bilinearform“ $Q(\vec{x}, \vec{y})$ ist linear in \vec{x} und \vec{y} , also gilt $Q(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = \lambda Q(\vec{x}, \vec{y})$ bzw. $Q(\vec{x}, \mu \vec{y}) = \mu Q(\vec{x}, \vec{y})$. Beschreibung in festen Koordinatensystemen:

$$Q(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,k} g_{ik} x^i y^k$$

Q ist „ausgeartet“ genau dann, wenn es ein $\vec{x} \neq \vec{0}$ gibt, so dass $Q(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \forall \vec{y}$. Andernfalls ist Q „nicht ausgeartet“. Falls Q ausgeartet ist, dann gilt $Q(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ für alle \vec{y} und ein spezielles \vec{x} . Hieraus folgt:

$$\sum_i g_{ik} x^i = 0 \text{ und } x^i \neq 0 \Rightarrow \det(g_{ik}) = 0$$

Diese Eigenschaft bleibt bei Koordinatentransformationen **erhalten**. Wir definieren eine quadratische Form $Q(\vec{x}) \equiv Q(\vec{x}, \vec{x})$. $Q(\vec{x})$ geht aus einer symmetrischen Bilinearform eindeutig hervor. Aus $Q(\vec{x}) = 0 \forall \vec{x}$ folgt $Q(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \forall \vec{x}, \vec{y}$, falls Q symmetrisch ist. Eine symmetrische Bilinearform $Q(\vec{x}, \vec{y})$, welche zu einer positiv definiten quadratischen Form $Q(\vec{x}) \equiv Q(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ (für $\vec{x} \neq \vec{0}$) gehört, definiert ein **Skalarprodukt** $\vec{x} \cdot \vec{y} = Q(\vec{x}, \vec{y})$. Q ist die **metrische Fundamentalform**. Kongruente Abbildungen lassen das Skalarprodukt von Vektoren ungeändert. Außerdem ändert sich der Winkel zwischen zwei Vektoren, definiert durch $\cos \vartheta = \vec{x} \cdot \vec{y} / ((\vec{x} \cdot \vec{x})^{\frac{1}{2}} (\vec{y} \cdot \vec{y})^{\frac{1}{2}})$ nicht bei kongruenten Abbildungen. Es muss gelten:

$$\left| \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{(\vec{x} \cdot \vec{x})^{\frac{1}{2}} (\vec{y} \cdot \vec{y})^{\frac{1}{2}}} \right| \leq 1$$

Um dies zu beweisen, schauen wir uns die Bilinearform für eine beliebige Linearkombination aus \vec{a} und \vec{b} an:

$$Q(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda^2 Q(\vec{a}, \vec{a}) + 2\lambda\mu Q(\vec{a}, \vec{b}) + \mu^2 Q(\vec{b}, \vec{b}) \geq 0$$

Wählen wir $\lambda = \sqrt{Q(\vec{a})}^{-1}$ und $\mu = \sqrt{Q(\vec{b})}^{-1}$, so ergibt sich:

$$1 + 2 \frac{1}{\sqrt{Q(\vec{a})}} \frac{1}{\sqrt{Q(\vec{b})}} Q(\vec{a}, \vec{b}) + 1 \geq 0$$

Hieraus folgt die Behauptung.

In einem kartesischen Koordinatensystem muss für kongruente Abbildungen gelten:

$$\sum_i (x'^i)^2 = \sum_i (x^i)^2 \Rightarrow (a^{-1})_{ij} = a_{ji}$$

Eine Linearform über \vec{x} in Abhängigkeit von den Komponenten x^i bezüglich einer Basis $\{\vec{e}_i\}$ lässt sich immer schreiben als $p_i x^i$, wobei $\{p_i\}$ für $i = 1, \dots, n$ die Linearform festlegt. Wenn diese Form invariant sein soll unter beliebigen Transformationen $x'^i = a^i_j x^j$, $p_i x^i = p'_i x'^i$, so müssen sich die p_i transformieren nach $p'_i = p_j \hat{a}^j_i$, wobei $\hat{a}^j_i a^i_{j'} = \delta^j_{j'}$, mit $\hat{a} = a^{-1}$. Die x^i sind kontravariante Koordinaten und die p_i kovariante Koordinaten. Der Übergang zwischen ko- und kontravariant im metrischen Raum wird definiert durch den metrischen Tensor:

$$Q(\vec{x}) \equiv \vec{x}^2 \equiv x^2 = x^i x_i = x^i x^j g_{ij}, \quad x_i \equiv g_{ij} x^j$$

Die Umkehrung ist gegeben durch $x^i = g^{ij} x_j$, wobei g^{ij} invers zu g_{ij} ist. Die \vec{e}_i waren die kovarianten Basisvektoren mit der Eigenschaft $Q(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij}$.

Wir definieren kontravariante Basisvektoren $\{\vec{e}^i\}$ durch die Forderung $\vec{e}^i \vec{e}_j = \delta^i_j$. Berechne \vec{e}^i aus \vec{e}_i durch den Ansatz $\vec{e}^i = \vec{e}_{j'} g^{j'i}$. Wir setzen also diesen Ansatz in obige Bedingung ein und erhalten:

$$\vec{e}_{j'} g^{j'i} \vec{e}_j = \delta^i_j \Leftrightarrow \boxed{g_{jj'} g^{j'i} = \delta^i_j}$$

g^{ji} ist invers zu g_{ji} , also gilt $g^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ mit $\vec{e}^i \vec{e}^j \equiv g^{ij}$.

Führen wir eine Ähnlichkeitstransformation $\vec{e}_i \mapsto \vec{e}'_i = a_i^j \vec{e}_j$ durch, so folgt hieraus $\vec{e}^i \mapsto \vec{e}'^i = (\hat{a}^i_j) \vec{e}^j$.

2.1.4 Einschub aus der Festkörperphysik: Das reziproke Gitter

Ein Gitter in drei Dimensionen ist charakterisiert durch die Basisvektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} . Im allgemeinen ist ein solches Gitter schiefwinklig und die $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind verschieden normiert! Die fundamentalen Translationen im „reziproken Gitter“ sind festgelegt durch die Basisvektoren $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ mit der Bedingung $\vec{A} \cdot \vec{a} = 1 \cdot (2\pi)$, $\vec{A} \cdot \vec{b} = 0$ und $\vec{A} \cdot \vec{c} = 0$. \vec{A}, \vec{B} und \vec{C} ist eine kontravariante Basis. Beispielsweise ist \vec{A} folgendermaßen definiert:

$$\vec{A} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

Beschreibung der Wellenvektoren: $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$, Forderung $\vec{k} \cdot \vec{x} = 2\pi n$

2.2 Tensoren n -ter Stufe

(Ein Tensor 1.Stufe ist ein Vektor.) Ein Tensor ist dadurch charakterisiert, dass er ein bestimmtes Transformationsverhalten aufweist. Beispielsweise gilt beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem für die Komponenten ξ^i eines Vektors $\xi^i \mapsto \bar{\xi}^i = a^i_j \xi^j$. Für einen Tensor 2.Stufe mit (zwei) kovarianten Indizes muss gelten:

$$\mathbb{T}_{ij} \xi^i \eta^j = \bar{\mathbb{T}}_{ij} \bar{\xi}^i \bar{\eta}^j \Rightarrow \mathbb{T}_{ij} \mapsto \bar{\mathbb{T}}_{ij} = \mathbb{T}_{i'j'} \hat{a}^i_{i'} \hat{a}^j_{j'} \text{ mit } \hat{a} = a^{-1}$$

Ebenso gilt $\mathbb{T}^{ij} \mapsto \bar{\mathbb{T}}^{ij} = \mathbb{T}^{i'j'} a^i_{i'} a^j_{j'}$. Jeder Index wird also entweder durch a oder a^{-1} transformiert. Analog funktioniert dies für Tensoren n -ter Stufe $\mathbb{T}_{ijkl\dots}$. Ebenso kann ein Tensor teilweise ko- bzw. kontravariante Indizes haben. Mit dem metrischen Tensor kann man dann Indizes hoch- bzw. herunterziehen: $\mathbb{T}_{ij}{}^k = \mathbb{T}_{ijk'} g^{k'k}$.

2.2.1 Multiplikation von Tensoren, Verjüngung

Einen Tensor \mathbb{T}_{ijkl} kann man verjüngen, indem man zwei Indizes gleichsetzt und dann darüber summiert, also $\mathbb{T}_{ijk}{}^k = \hat{\mathbb{T}}_{ij}$. (Mit dem metrischen Tensor muss man zuerst einen der beiden Indizes nach oben bringen, nämlich $\mathbb{T}_{ijk}{}^k = \mathbb{T}_{ijkk'} g^{k'k}$. Beispielsweise erhält man die Spur eines Tensors zweiter Stufe durch Verjüngung:

$$\text{Spur}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}_{ij} g^{ij} = \mathbb{T}_i{}^i$$

$\mathbb{T}_{ijk\dots}$ ist symmetrisch bezüglich i und j , wenn $\mathbb{T}_{ijk\dots} = \mathbb{T}_{jik\dots}$. Er ist schiefsymmetrisch, wenn $\mathbb{T}_{ijk\dots} = -\mathbb{T}_{jik\dots}$ gilt. Betrachten wir beispielsweise den Tensor zweiter Stufe $C_{ij} \equiv a_i b_j - b_i a_j$. Dieser ist schiefsymmetrisch. (Im dreidimensionalen Raum führt dies zum Vektorprodukt.)

Ein Vektor definiert die Richtung einer Geraden und hat eine Länge. Zwei Vektoren ξ^i, η^j spannen eine Ebene auf (Orientierung, Drehsinn, Größe einer Fläche). Wir definieren $\xi^i \eta^k - \xi^k \eta^i \equiv \varphi^{ik}$. φ^{ij} legt Orientierung, Drehsinn und Größe einer Fläche fest. $\xi^i \mapsto \xi'^i = \xi^i + \eta^i$ lässt die Fläche ungeändert. Zum Quadrat der Fläche kommen wir durch:

$$F^2 = \frac{1}{2} \varphi^{ik} \varphi_{ik} = \frac{1}{2} \cdot 2 \xi^i \eta^k (\xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k) = \xi^2 \eta^2 - (\xi \eta)^2 = \xi^2 \eta^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

Hieraus folgt also $F = \sqrt{\xi^2 \eta^2} |\sin \theta|$. (In drei Dimensionen gilt beispielsweise $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.) Der dreidimensionale Raum wird aufgespannt durch drei Vektoren ξ', η' und ζ^i . Damit definieren wir hier analog zu dem zweidimensionalen Fall:

$$\varphi^{ikl} \equiv \det \begin{pmatrix} \xi^i & \xi^k & \xi^l \\ \eta^i & \eta^k & \eta^l \\ \zeta^i & \zeta^k & \zeta^l \end{pmatrix}$$

In drei Dimensionen ist dies ein Pseudoskalar $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. ε_{ijk} ist ein Tensor dritter Stufe in drei Dimensionen. $\varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$ ist ein Skalar in drei Dimensionen. φ^{ikl} ist ein Tensor dritter Stufe. Durch die drei Vektoren wird ein Parallelepiped (Spat) aufgespannt, für das gilt:

$$|V|^2 = \frac{1}{3!} \varphi^{ijk} \varphi_{ijk}$$

Man kann dies herunterkochen auf, wobei P die Anzahl der Permutationen bezeichnen soll:

$$\varphi_{123} \varphi^{123} = g_{1i} g_{2k} g_{3l} \varphi^{ikl} \varphi^{123} = (g_{1i} g_{2k} g_{3l} (-1)^P) \varphi^{123} \varphi_{123} = \det(g_{ij}) \varphi^{123} \varphi_{123}$$

$$V^2 = \det(g_{ij}) \cdot \left[\det \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{pmatrix} \right]^2 \Rightarrow V = \sqrt{\det(g_{ij})} \cdot \det \begin{pmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \\ \eta^1 & \eta^2 & \eta^3 \\ \zeta^1 & \zeta^2 & \zeta^3 \end{pmatrix}$$

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnung $g = \det(g_{ij})$. Das n -dimensionale Volumen in einem n -dimensionalen Raum, das aufgespannt wird durch n Vektoren ξ_1^i, \dots, ξ_n^i ist nun definiert als:

$$V = \sqrt{g} \det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^n & \dots & \xi_n^n \end{pmatrix}$$

2.3 Metrik, Krümmung und zweidimensionale Flächen

2.3.1 Beispiel: Geometrie auf der Kugel

Der Raum ist zweidimensional, isotrop und homogen; kein Punkt ist ausgezeichnet. Für kleine Regionen ist der Raum näherungsweise flach. Wir bestimmen die Metrik, indem wir von der Gleichung ausgehen, welche die Kugeloberfläche beschreibt: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$. Die Länge eines Linienelements ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. Berechne dx_3 aus obiger Gleichung: $x_3 dx_3 = -x_1 dx_1 - x_2 dx_2$. Hieraus ergibt sich dann:

$$(dl)^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Wir führen außerdem dimensionslose Polarkoordinaten in der x_1 - x_2 -Ebene ein:

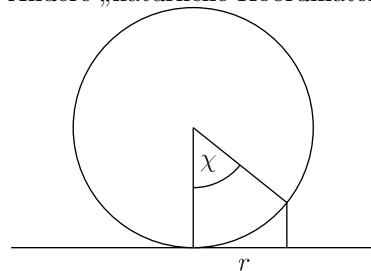
$$x_1 = ar \sin \varphi, x_2 = ar \cos \varphi \Rightarrow (dl)^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2 \right) \text{ für } 0 \leq r < 1$$

Damit ergeben sich die Komponenten des metrischen Tensors:

$$g_{rr} = \frac{a^2}{1-r^2} \text{ und } g_{\varphi\varphi} = a^2 r^2$$

Für $r \ll 1$ ist die Metrik näherungsweise euklidisch. Es gilt nämlich $dl^2 \approx a^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$, was die Metrik einer Ebene in Polarkoordinaten ist. Umgekehrt führt für r nahe 1 eine kleine Änderung dr zu einer großen Änderung des Abstands zweier Punkte auf der Kugeloberfläche, weil $1/(1-r^2)$ groß wird.

Andere „natürliche Koordinaten“ sind χ und ρ .

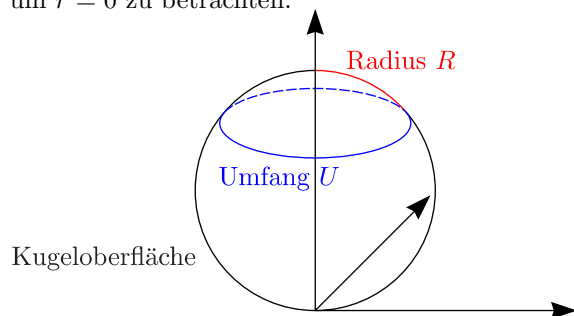


Es gilt $\sin(\chi) = r$. Die Metrik ist festgelegt durch:

$$dl^2 = a^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\varphi^2) \text{ mit } \sin(\chi) = r, \cos(\chi) d\chi = dr \text{ und } d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-r^2}$$

2.3.2 Geometrie

Verhältnis von Umfang zu Radius eines Kreises. Wegen der Homogenität des Raumes genügt es, einen Kreis um $r = 0$ zu betrachten.



Anschaulich ist der Umfang $U = 2\pi r a$ und der Radius $R = \chi a$. Hieraus ergibt sich:

$$\frac{U}{R} = \frac{2\pi ar}{\chi a} = 2\pi \frac{\sin \chi}{\chi} = \frac{2\pi r}{\arcsin(r)} < 2\pi$$

Der Umfang wächst bis zu $\chi = 90^\circ$ und schrumpft dann wieder. Nun wollen wir das ganze formal mittels unserer Metrik herleiten:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

Der Radius wird gemessen entlang $\varphi = \text{const.}$ (Großkreis)

$$\int_0^{r_1} dl = a \int_0^{r_1} \sqrt{\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2} = a \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = a \arcsin(r_1)$$

Der Umfang wird gemessen entlang $r = r_1$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$\int_{\substack{r=r_1=\text{const.} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} dl = a \int_0^{2\pi} r_1 d\varphi = 2\pi a r_1$$

Der Flächeninhalt eines Kreises kann man berechnen aus $d = a d\chi \cdot a \sin(\chi) d\varphi$, wobei df das differentielle Flächenelement ist:

$$g_{\chi\chi} = a^2, g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \chi \text{ und } g_{\chi\varphi} = g_{\varphi\chi} = 0$$

Hieraus ergibt sich $\sqrt{\det(g_{ij})} = a^2 \sin \chi$. Die von einem Kreis mit Radius $a\chi_1$ umschlossene Fläche ist:

$$F = \int_0^{\chi_1} d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi a^2 \sin(\chi) = \boxed{2\pi a^2 (1 - \cos(\chi_1))}$$

Für kleine χ_1 erhält man durch Entwickeln der Ausdrücke:

$$F = 2\pi a^2 \left(1 - \left(1 + \frac{\chi_1^2}{2} + O(\chi_1^4) \right) \right) = \pi a^2 \chi_1^2 + O(\chi_1^4)$$

Die Kugeloberfläche ist gleich $F = 2\pi a^2 (1 - (-1)) = 4\pi a^2$. Für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ist die Krümmung definiert durch $K = 1/(R_1 \cdot R_2)$, wobei R_1 der minimale und R_2 der maximale Radius an diesem Punkt ist. Im allgemeinen ist es nicht möglich, eine Fläche mit beliebiger Krümmung in einen dreidimensionalen Raum einzubetten. Ein einfaches Beispiel ist eine Fläche mit der Metrik

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2 \right]$$

Übungsaufgabe: Geometrie auf Fläche mit dieser Metrik. Zeige, dass $U/R = 2\pi \sinh(\chi)/\chi$ und $F = 2\pi a^2 (1 + \cosh(\chi))$. Lokal: Negative Krümmung entspricht einem Sattelpunkt.

2.4 Hyperkugel

Wir interessieren uns für die Geometrie einer dreidimensionalen „Hyperkugel“ eingebettet in einen vierdimensionalen Raum. Die Gleichung der Hyperkugel ist gegeben durch $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a$. Die Metrik lautet $dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$. Wegen obiger Gleichung gilt:

$$x_4 dx_4 = -x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3 \Rightarrow dx_4^2 = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

2.4.1 Kugelkoordinaten

(entspricht den Polarkoordinaten aus dem vorherigen Beispiel)

$$x_1 = ar \sin \vartheta \sin \varphi, x_2 = ar \sin \vartheta \cos \varphi \text{ und } x_3 = ar \cos \vartheta$$

$$dx_1^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial r} dr + \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2$$

$$dx_2^2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial r} dr + \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2$$

$$dx_3^2 = \left(\frac{\partial x_3}{\partial r} dr + \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2$$

Nach einiger Rechnung erhält man dann:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = a^2 dr^2 + a^2 r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Gemischte Terme kommen in der Metrik nicht vor, weil die Koordinatenlinien senkrecht aufeinander stehen. Damit erhält man:

$$dx_4^2 = \frac{a^4 r^2 dr^2}{a^2 - a^2 r^2} = a^2 \frac{r^2 dr^2}{1 - r^2}$$

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right)$$

Wie zuvor können wir $r = \sin(\chi)$ substituieren:

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$$

Vergleiche dies mit sphärischen Koordinaten im R^4 :

$$x_1 = a \sin(\chi) \sin(\vartheta) \cos(\varphi), \quad x_2 = a \sin(\chi) \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$x_3 = a \sin(\chi) \cos(\vartheta), \quad x_4 = a \cos(\chi)$$

2.4.2 Geometrie auf Kugel im gekrümmten Raum

a.) Umfang eines Kreises:

$$U = \int_{\substack{r=r_0, \vartheta=\frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} \sqrt{dl^2} = 2\pi a r_0$$

$$R = \int_{\substack{0 \leq r \leq r_0 \\ \vartheta=\frac{\pi}{2}, \varphi=\text{const.}}} \sqrt{dl^2} = a \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = a \arcsin(r_0)$$

Damit erhält man $U/R < 2\pi$.

b.) Oberfläche einer Kugel mit den Koordinaten $r = r_0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$F = 4\pi a^2 r_0^2 \quad \text{und} \quad R = a \arcsin(r_0)$$

c.) Volumen:

$$V = a^3 \int d\vartheta d\varphi \sin \vartheta \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r^2 = 4\pi a^3 \left[\frac{1}{2} \arcsin(r_0) - \frac{r_0}{2} \sqrt{1-r_0^2} \right]$$

In Analogie zum zweidimensionalen Fall gilt: Alle von einem Punkt ausgehende Geodäten treffen sich an einem Antipoden. Auch im dreidimensionalen Raum gibt es die Möglichkeit konstanter negativer Krümmung, wobei dieser Raum nicht im \mathbb{R}^4 eingebettet werden kann.

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right]$$

Oder in hyperbolischen Koordinaten:

$$dl^2 = a^2 [\chi^2 + \sin^2(\chi) (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]$$

Die einzigen zu einem homogenen und isotropen Raum führenden Metriken lauten:

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \quad \text{mit } k = \pm 1, 0$$

(oder gehen daraus durch Koordinatentransformation hervor). Dies ist außerdem der Ortsanteil der ROBERTSON-WALKER-Metrik:

$$ds^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] + c^2 dt^2$$

Für $k = +1$ ist das Volumen endlich; für $k = 0, -1$ jedoch nicht.

Zusammenfassung:

Eine Fläche im dreidimensionalen Raum wird festgelegt durch eine beliebige Funktion $f(x, y, z) = 0$ (*). Die Metrik ist zunächst

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \text{ mit } dz = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

und z ist als Funktion von x, y festgelegt. Unabhängig von einer Einbettung definieren wir $dl^2 = g_{ik}(x^i, x^k) dx^i dx^k$ und analog in x^n Dimensionen:

$$ds^2 \equiv dl^2 = g_{ik}(x^1, \dots, x^n) dx^i dx^k \tag{**}$$

Das Volumenelement ist definiert durch:

$$\int \sqrt{g} dx^1 \dots dx^n \text{ mit } g = \det(g_{ik})$$

Winkel zwischen zwei infinitesimalen Linienelementen Δ_1^i und Δ_2^i lautet:

$$\cos \theta = \frac{\Delta_1 \cdot \Delta_2}{\sqrt{\Delta_1^2} \cdot \sqrt{\Delta_2^2}} \text{ mit } \Delta_1 \cdot \Delta_2 = g_{ik} \Delta_1^i \Delta_2^k$$

Eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit \mathcal{R}_m sei gegeben durch eine Parameterdarstellung $x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^m)$ mit $1 \leq m < n$ und die Metrik im \mathcal{R}_m ist gegeben durch:

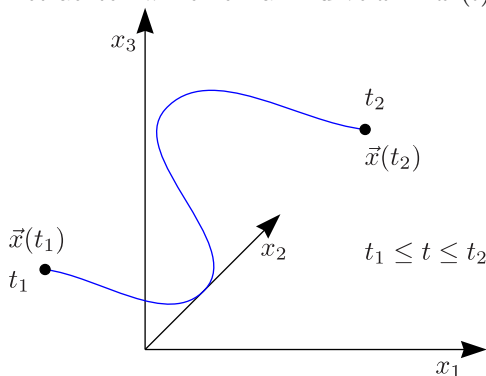
$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^i}{\partial u^2} du^2 + \dots + \frac{\partial x^i}{\partial u^m} du^m$$

Eingesetzt in Gleichung (**) ergibt dies:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^m \hat{g}(u_1, \dots, u_m) du^i du^k$$

Beispiel: Eindimensionale Mannigfaltigkeit

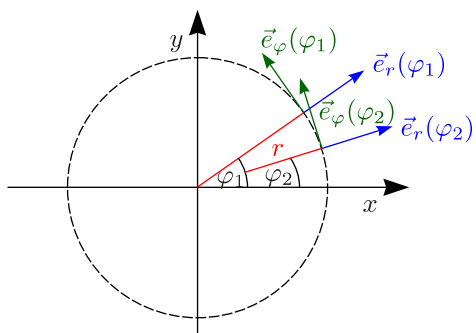
Betrachten wir eine Bahnkurve $x^i = x^i(t)$, wobei $t_0 \leq t \leq t_1$.



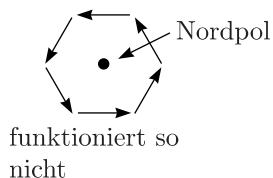
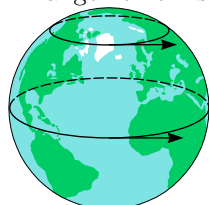
$$dl = \sqrt{dl^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}} dt$$

2.5 Parallelverschiebung und Christoffel-Symbole

Problematisch kann die Parallelverschiebung bei krummlinigen Koordinaten sein. Betrachten wir beispielsweise Polarkoordinaten mit den Einheitsvektoren \vec{e}_r und \vec{e}_φ .



Im allgemeinen ist $\vec{e}_r(\varphi_1) \neq \vec{e}_r(\varphi_2)$. Problem: Kugeloberfläche

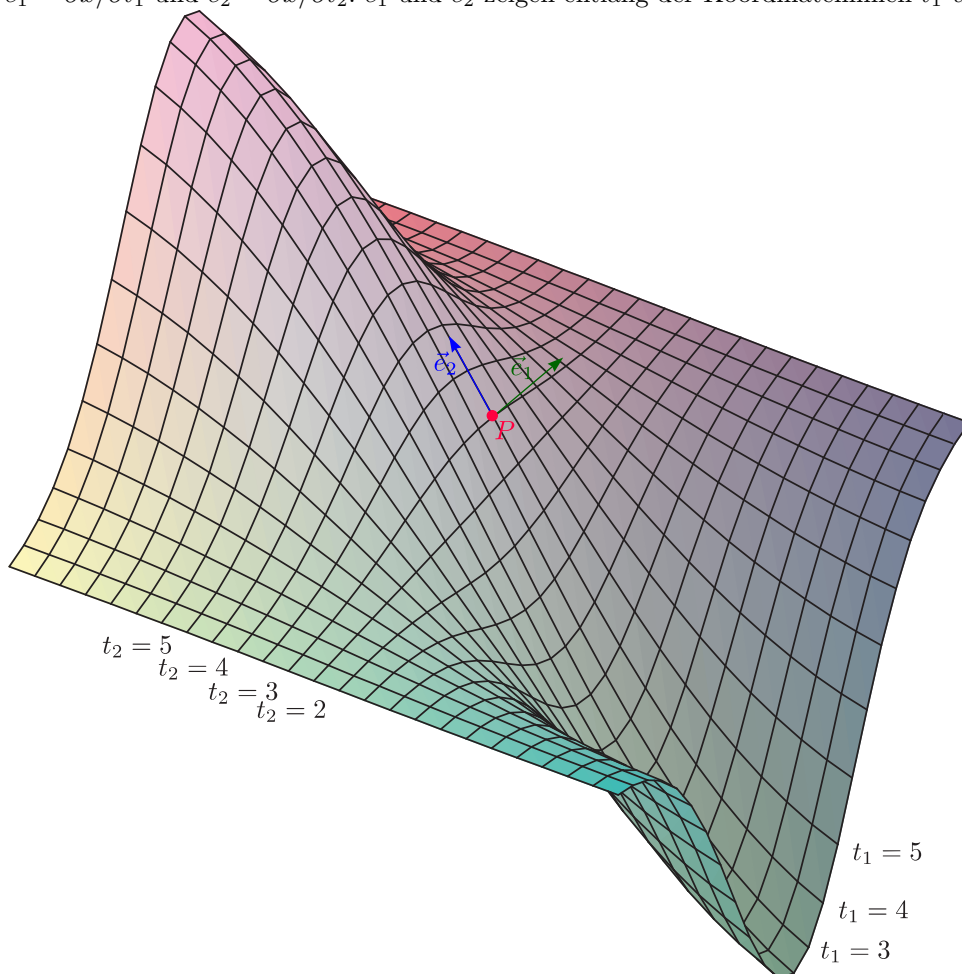


2.5.1 Zweidimensionale anschauliche Diskussion

Die Fläche F sei im dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet. Wir hantieren mit dreidimensionalen Vektoren

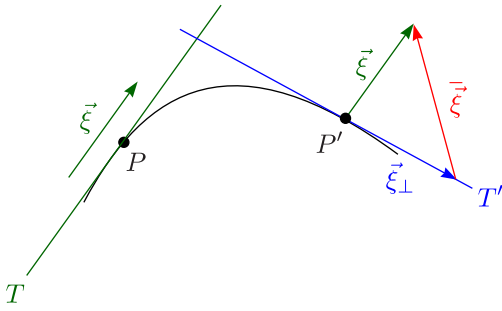
$$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t_1, t_2) \\ x_2(t_1, t_2) \\ x_3(t_1, t_2) \end{pmatrix} = \vec{x}(t_1, t_2)$$

Jeder Punkt von F ist festgelegt durch t_1, t_2 . Am Punkt (t_1, t_2) wird eine Tangentialebene aufgespannt durch $\vec{e}_1 = \partial \vec{x} / \partial t_1$ und $\vec{e}_2 = \partial \vec{x} / \partial t_2$. \vec{e}_1 und \vec{e}_2 zeigen entlang der Koordinatenlinien t_1 und t_2 .



Flächenvektoren am Punkt $P(t_1 = 4, t_2 = 4)$ liegen in der Tangentialebene $\vec{\xi} = \xi^1 \vec{e}_1 + \xi^2 \vec{e}_2$. Die Metrik am Punkt P ist gegeben durch $g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$. Kommen wir nun zur Parallel-Verschiebung:

- i.) Verschiebe $\vec{\xi}$ von $P(t_1, t_2)$ nach $P'(t_1 + dt_1, t_2 + dt_2)$ **räumlich** parallel.



T und T' sind zwei Tangentialebenen.

- ii.) $\vec{\xi}$ liegt nicht in T' . Zerlege $\vec{\xi} = \vec{\xi} + \vec{\xi}_\perp$ mit $\vec{\xi}$ in T' und $\vec{\xi}_\perp$ senkrecht auf T' .
- iii.) Definition: $\vec{\xi}$ in P' ist aus $\vec{\xi}$ in P durch Parallelverschiebung hervorgegangen (LEVI-CIVITA) und \vec{x} ist Projektion von \vec{x} auf T' . Warum ist dies eine gute Definition?

- a.) Weder Längen noch Winkel zwischen Vektoren werden bei infinitesimalen Parallelverschiebungen geändert. Beweis

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x} + \vec{x}_\perp) \cdot (\vec{y} + \vec{y}_\perp) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}_\perp}_{=0} + \underbrace{\vec{x}_\perp \cdot \vec{y}}_{=0} + \underbrace{\vec{x}_\perp \cdot \vec{y}_\perp}_{HO}$$

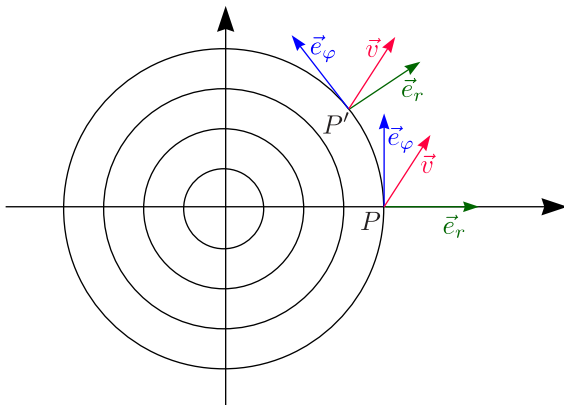
Also gilt $d(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, also auch speziell $d(\vec{x}^2) = 0$, woraus folgt:

$$d \cos \theta = d \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\sqrt{\vec{x}^2} \cdot \sqrt{\vec{y}^2}} \right) = 0$$

- b.) Die Verschiebung ist eindeutig festgelegt durch die Metrik g_{ik} , das heißt, zu jedem Vektor ξ^i am Punkt P kann der zu ξ^i parallele Vektor am Punkt P' konstruiert werden. Die Änderung der Koordinaten ist eindeutig festgelegt durch die Metrik und den zu verschiebenden Vektor.

Wir wollen Punkt b.) beweisen. Berechne Änderung der Koordinaten $d\xi^i$ aus ξ^i und der Metrik.

- i.) $\vec{\xi}$ liegt in T' .
- ii.) $d\vec{\xi}$ entspricht der Änderung des dreidimensionalen Vektors $\vec{\xi}$ bei Verschiebung $\vec{\xi}_\perp$ steht senkrecht auf T' (bzw. auch auf T bis auf Terme höherer Ordnung) und somit gilt $0 = d\vec{\xi} = d\xi^i \vec{e}_i + \xi^i d\vec{e}_i$ (*). (Hierbei ist $d\xi^i$ die Änderung der Komponenten und $d\vec{e}_i$ die Änderung der Basisvektoren bei der Verschiebung. Dies lässt sich bereits in einem zweidimensionalen flachen Raum (Ebene) bei krummlinigen Koordinaten verstehen.



Für die Basis bei P gilt:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i} \text{ und } d\vec{e}_i = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k} dt_k \Rightarrow d\vec{e} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k} \right) dt_k$$

Diese Änderung wird durch die Basisvektoren \vec{e}_1 und \vec{e}_2 aufgespannt.

$$\overline{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k}\right)} = \Gamma_{ik}^1 \vec{e}_1 + \Gamma_{ik}^2 \vec{e}_2 \quad (**)$$

Aus Gleichung (*) folgt:

$$d\xi^i \vec{e}_i = -\xi^i \overline{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k}\right)} dt_k = -\xi^i \Gamma_{ik}^l \vec{e}_l dk \Rightarrow \boxed{(d\xi^i + \Gamma_{jk}^i \xi^j dt_k) \vec{e}_i = 0}$$

Ferner sind die Γ_{jk}^i symmetrisch ($\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$), da man die Ableitungen vertauschen kann. (**). Die Γ_{jk}^i bezeichnet man als CHRISTOFFEL-Symbole; die gegen die Änderung der Komponenten eines Vektors an beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem. Für einen Vektor \vec{a} erhält man die Komponenten der Projektion von \vec{a} auf T durch $\vec{a} = a^1 \vec{e}_1 + a^2 \vec{e}_2 \equiv a^i \vec{e}_i$ durch $\vec{a} \cdot \vec{e}_j = a_j = a^i g_{ij}$. Wir wenden dies an auf den Vektor $\overline{\partial \vec{x} / (\partial t_j \partial t_k)} = \Gamma_{jk}^l \vec{e}_l$. Definiere

$$\Gamma_{i,jk} \equiv \overline{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k}\right)} \cdot \vec{e}_i$$

und somit $g_{i'j} \Gamma_{jk}^{i'} = \Gamma_{ijk}$. Wir berechnen man die CHRISTOFFEL-Symbole aus der Metrik g_{ik} :

$$g_{ik} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_k} \text{ mit } \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial t_l} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_l} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_k \partial t_l} = \Gamma_{kil} + \Gamma_{ikl}$$

$$-\frac{\partial g_{ik}}{\partial t_l} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i \partial t_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_l} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial t_k \partial t_l} = -(\Gamma_{lki} + \Gamma_{kli})$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial t_k} = \Gamma_{ilk} + \Gamma_{lik}$$

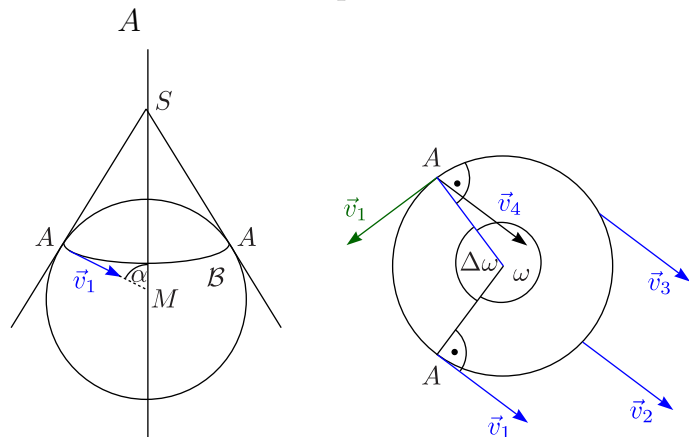
Addieren wir diese drei Gleichungen, so ergibt sich eine Formel, mit der wir Γ_{ikl} aus der Metrik berechnen können:

$$\boxed{\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial t_l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial t_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial t_i} \right)}$$

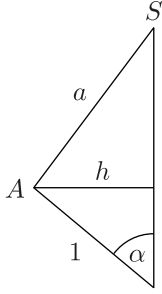
Jeder Punkt der Fläche wird durch t_1 und t_2 festgelegt. CHRISTOFFELsymbole sind keine Tensoren! (Sie sind in machen Systemen an einem festen Punkt gleich Null, in anderen jedoch nicht.)

- c.) An einem Punkt P findet man stets ein geodätisches Koordinatensystem, so dass dort $\Gamma_{aik} = 0$ (durch Anlegen einer Tangentialebene). Beweis: Wähle ein kartesisches System, so dass \vec{e}_1 und \vec{e}_2 in der Tangentialebene liegen und \vec{e}_3 senkrecht dazu. Betrachten wir eine Flächengleichung in der Form $x = t_1, y = t_2$ und $z = f(t_1, t_2)$. Daraus folgt, dass $\overline{\partial \vec{x} / (\partial t_i \partial t_k)}$ nur eine z -Komponente hat. Damit verschwinden die Projektion $\overline{\partial \vec{x} / (\partial t_i \partial t_k)}$ und auch die CHRISTOFFELsymbole Γ_{ijk} .

2.5.2 Parallel-Transport eines Vektors entlang eines Breitenkreises \mathcal{B} von A nach



$\Delta\omega$ bezeichnet man als **Defekt-Winkel**. Der Vektor hat sich um $\Delta\omega$ gedreht. Nebenrechnung:



Wir lesen aus der Zeichnung $a = \tan(\alpha)$, $h = \sin(\alpha)$ und $h/a = \cos(\alpha)$ ab. Damit gilt $\omega = 2\pi h = 2\pi \cos \alpha$ und $\Delta\omega = 2\pi(1 - \cos(\alpha))$. $\Delta\omega$ ist gleich der umfahrenen Fläche.

2.5.3 Tensor-Felder über beliebigen Mannigfaltigkeiten

Koordinaten werden jetzt wieder mit x_i statt t_i bezeichnet. Wir betrachten nun die Koordinatentransformation von x^i nach x'^i , wobei $x^i = x^i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ und die Umkehrtransformation gegeben ist durch $x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Mit der Metrik bezüglich x^i lautet $gds^i = g_{ik} dx^i dx^k$ gilt $dx'^i = \partial x'^i / \partial x^k dx^k = \alpha^i_k(x) dx^k$. α ist hierbei eine Funktion von x^i . Andererseits gilt $dx^i = \partial x^i / \partial x'^k dx'^k = \bar{\alpha}^i_k(x') dx'^k$.

$$\delta^i_m = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^m} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = \alpha^i_k \cdot \bar{\alpha}^k_m$$

Also gilt $(\bar{\alpha}) = (\alpha^{-1})$. Der metrische Tensor transformiert sich folgendermaßen:

$$ds^2 = g_{ik}(x) \bar{\alpha}^i_l dx'^l \bar{\alpha}^k_m dx'^m \equiv g'_{lm} dx'^l dx'^m \text{ mit } g'_{lm} = g_{ik} \bar{\alpha}^i_l \bar{\alpha}^k_m$$

Umgekehrt gilt $g_{lm} = g'_{ik} \alpha^i_l \alpha^k_m$.

Größen, die sich wie dx^i transformieren sind die kovarianten Komponenten eines Vektors A , nämlich $A'^i = \alpha^i_k A^k$. Ein Skalarfeld $S(x)$ ist invariant unter dieser Transformation. Tensoren Γ^{ij} transformieren sich wie $A^i B^j$, also $\Gamma'^{ij} = \alpha^i_k \alpha^j_l \Gamma^{kl}$. Die Verjüngung eines Tensors funktioniert wie schon früher besprochen, nämlich $\hat{T} \equiv \Gamma^i_i = \Gamma^{ij} g_{ij}$.

2.5.4 Kovariante Ableitung

Wir interessieren uns für die Änderung eines Vektorfeldes A^i zwischen x_j und $x_j + dx_j$. Verschiebe $A^i(x)$ parallel von x nach $x + dx$ und vergleiche die resultierenden Komponenten mit denen von $A^i(x + dx)$.

$$D_j A^i = \partial_j A^i + \Gamma^i_{jk} A^k$$

ist die Definition der kovarianten Ableitung. Für Skalarfelder gilt $D_j S = \partial_j S$. Wie werden Tensorfelder abgeleitet?

$$D_i(A^j B^k) = (D_i A^j) B^k + A^j (D_i B^k) = (\partial_i A^j + \Gamma^j_{il} A^l) B^k + A^j (\partial_i B^k + \Gamma^k_{il} B^l) = \partial_i(A^j B^k) + \Gamma^j_{il} A^l B^k + \Gamma^k_{il} A^j B^l$$

Damit gilt also:

$$D_i \Gamma^{jk} = \partial_i \Gamma^{jk} + \Gamma^j_{il} \Gamma^{lk} + \Gamma^k_{il} \Gamma^{jl}$$

Analog gilt $D_j A_i = \partial_j A_i - \Gamma^l_{ij} A_l$. Beweis:

$$D_j(A^i B_i) = \partial_j(A^i B_i)$$

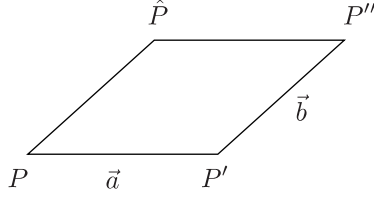
$$(D_i A^i) B_i + A^i (D_j B_i) = \text{nachrechnen}$$

$$D_j A_i - D_i A_j = \partial_j A_i - \partial_i A_j$$

Man kann in einem bestimmten Punkt ein lokal kartesisches Koordinatensystem so definieren, dass die CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden, aber nicht deren Ableitung.

2.6 Krümmungstensor

Wir untersuchen die Verschiebung eines Vektors ξ von $P(x) \mapsto P'(x+a) \mapsto P''(x+a+b)$ und von $P(x) \mapsto \hat{P}(x+b) \mapsto P''(x+b+a)$.



Wir berechnen als erstes die Änderung bei $P \mapsto P' \mapsto P''$:

$$1.) P \mapsto P': \xi^i \mapsto \xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha a^\beta$$

$$2.) P' \mapsto P'':$$

$$\begin{aligned} \xi^i &\mapsto \xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha a^\beta - \Gamma^i_{\alpha'\beta'}(x+a)(\xi^{\alpha'} - \Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha a^\beta)b^{\beta'} = \\ &= \xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha a^\beta - \left(\Gamma^i_{\alpha'\beta'}(x) + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha'\beta'}}{\partial x^\lambda} a^\lambda \right) (\xi^{\alpha'} - \Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}\xi^\alpha a^\beta)b^{\beta'} = \\ &= \xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha a^\beta - \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\xi^{\alpha'} b^{\beta'} + \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}\xi^\alpha a^\beta b^{\beta'} + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha'\beta'}}{\partial x^\lambda} a^\lambda \xi^{\alpha'} b^{\beta'} + O(a^2) \end{aligned}$$

Die Änderung entlang des Weges $P \mapsto \hat{P} \mapsto P''$ erhalten wir aus dem obigen Ergebnis dadurch, indem wir a und b vertauschen:

$$\xi^i \mapsto \xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha b^\beta - \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\xi^{\alpha'} a^{\beta'} + \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}\xi^\alpha b^\beta a^{\beta'} + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha'\beta'}}{\partial x^\lambda} b^\lambda \xi^{\alpha'} a^{\beta'} + O(b^2)$$

Nun bilden wir die Differenz mit dem vorherigen Ergebnis. Dabei benennen wir teilweise die inneren Indizes (also die, über welche summiert wird) um, was ja erlaubt ist:

$$\begin{aligned} &\xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha a^\beta - \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\xi^{\alpha'} b^{\beta'} + \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}\xi^\alpha a^\beta b^{\beta'} + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha'\beta'}}{\partial x^\lambda} a^\lambda \xi^{\alpha'} b^{\beta'} - \\ &+ \left[\xi^i - \Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha b^\beta - \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\xi^{\alpha'} a^{\beta'} + \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta}\xi^\alpha b^\beta a^{\beta'} + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha'\beta'}}{\partial x^\lambda} b^\lambda \xi^{\alpha'} a^{\beta'} \right] = \\ &= \left(\left[-\Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha a^\beta + \Gamma^i_{\alpha'\beta'}\xi^{\alpha'} a^{\beta'} \right] + \left[-\Gamma^i_{\alpha'\beta'}\xi^{\alpha'} b^{\beta'} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\xi^\alpha b^\beta \right] + \xi^\alpha a^\beta b^{\beta'} \left[\Gamma^i_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta'} \right] + \right. \\ &\quad \left. \xi^\alpha a^\beta b^{\beta'} \left[\frac{\partial \Gamma^i_{\alpha\beta'}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta'}} \right] \right) = \xi^\alpha a^\beta b^{\beta'} \left(\Gamma^i_{\alpha'\beta'}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta} - \Gamma^i_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha'}_{\alpha\beta'} + \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha\beta'}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta'}} \right) \equiv \\ &\equiv -R^i_{\alpha\beta\beta'}\xi^\alpha a^\beta b^{\beta'} \end{aligned}$$

Das Resultat ist antisymmetrisch unter Vertauschung von a und b . Dies entspricht der Änderung von ξ auf dem geschlossenen Weg. Damit gilt:

$$R^i_{j\alpha\beta} = \Gamma^i_{k\alpha}\Gamma^k_{j\beta} - \Gamma^i_{k\beta}\Gamma^k_{j\alpha} + \frac{\partial \Gamma^i_{j\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^i_{j\alpha}}{\partial x^\beta}$$

Der RICCI-Tensor $R_{j\beta}$ folgt durch einmalige Verjüngung des RIEMANNschen Krümmungstensors, also $R_{j\beta} \equiv R^i_{j\beta}$. Der Krümmungsskalar R ergibt sich dadurch, dass man den RICCI-Tensor noch einmal verjüngt: $R \equiv R^i_i$. Den Krümmungstensor erhält man bei Betrachtung des Kommutators der kovarianten Ableitung:

$$[D_\alpha, D_\beta]A_j(x) = D_\alpha D_\beta A_j(x) - D_\beta D_\alpha A_j(x) = -R^i_{j\alpha\beta}A_i(x)$$

Man kann den Krümmungstensor natürlich auch noch direkt mittels des metrischen Tensors ausdrücken:

$$R_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\partial_j \partial_\beta g_{i\alpha} + \partial_i \partial_\alpha g_{j\beta} - \partial_j \partial_\alpha g_{i\beta} - \partial_i \partial_\beta g_{j\alpha}) + g_{kl} (\Gamma^k_{i\alpha}\Gamma^l_{j\beta} - \Gamma^k_{j\alpha}\Gamma^l_{i\beta})$$

Der Krümmungstensor besitzt folgende Symmetrien: $R_{ij\alpha\beta} = R_{\alpha\beta ij}$, $R_{ij\alpha\beta} = -R_{ji\alpha\beta}$ (Vertauschung zweier benachbarten Indizes vorne und hinten) und $R_{ij\alpha\beta} + R_{i\alpha\beta j} + R_{i\beta j\alpha} = 0$ (zyklische Vertauschung der dreien

hinteren Indizes). Außerdem besitzt er $n^2(n^2 - 1)/12$ unabhängige Komponenten, was wir hier jedoch nicht beweisen wollen.

$$\frac{n^2(n^2 - 1)}{12} = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ 1 & \text{für } n = 2 \\ 6 & \text{für } n = 3 \\ 20 & \text{für } n = 4 \end{cases}$$

Im Fall $n = 2$ ist lediglich $R_{1212} = -R_{2112} = R_{2121} = -R_{1221} \neq 0$.

$$R_{ij\alpha\beta} = \frac{g_{i\beta}g_{j\alpha} - g_{i\alpha}g_{j\beta}}{-g} R_{1212} \text{ mit } g = \det(g_{ik})$$

Außerdem gilt für $n = 2$:

$$R_{ij} = \frac{g^{ij}}{g} R_{1212} \text{ und } R = \frac{2}{g} R_{1212}$$

2.7 Geodätische Linien

2.7.1 Parallelverschiebung eines Vektors in seine Richtung

Wir gehen aus von einer beliebigen Kurve in Parameterdarstellung, nämlich $x^i = x^i(s)$ mit s als Parameter. Jeder Punkt auf der Linie wird durch den Wert des Parameters festgelegt. Man kann anschaulich zwei verschiedene Interpretationen für s gegen, nämlich als Weglänge oder als Zeit. An jedem Punkt sei ein Vektor $v^i(s)$ gegeben. Was bedeutet es, wenn man diesen Vektor zu sich selbst parallel verschiebt? $v^i(s)$ wird zu sich selbst parallel verschoben, wenn $dv^i + \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha dx^\beta = 0$ gilt. Wir können dies jetzt differentiell betrachten:

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

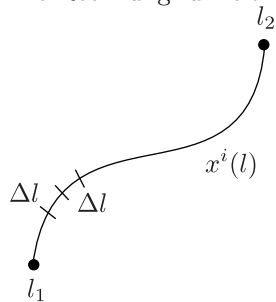
Der Tangentenvektor an die Kurve lautet $u^i = dx^i(s)/ds$. (Falls man s als Zeit interpretiert, stellt u^i den Geschwindigkeitsvektor dar.) Falls u^i konstant bleibt, so gilt (mit $v^i \equiv u^i = dx^i/ds$):

$$\frac{d^2}{ds^2} x^i(s) + \Gamma^i_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \text{ oder äquivalent } \frac{du^i(s)}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0$$

Dies ist die sogenannte **Geodätengleichung**.

2.7.2 Geodäte als Linie stationärer (minimaler) Länge zwischen zwei Punkten

Die Rechnung funktioniert analog zum HAMILTONSchen Prinzip aus der klassischen Mechanik.



Für beliebige Parametrisierungen gilt:

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} ds^2$$

Das Funktional, das nun die Weglänge beschreibt, ist gegeben durch:

$$L[x] = \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{g_{ik}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}}$$

Im Extremum verschwindet die Variation dieses Funktionals:

$$0 = \delta L = L[x^i] - L[x^i + \delta x^i] = - \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}}} \left(2 \frac{d\delta x^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} g_{ik} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \delta x^j \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right)$$

Durch partielle Integration erhalten wir, wobei wir davon ausgehen, dass die Randterme verschwinden:

$$0 = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}}} \left[-2\delta x^i \left(\frac{d^2 x^k}{ds^2} g_{ik} + \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \frac{dx^l}{ds} \right) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \delta x^j \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds} \right]$$

Definieren wir $u^i \equiv dx^i/ds$, so ergibt sich, wobei die die stummen Indizes im zweiten Term umbenennen müssen:

$$0 = \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{1}{2\sqrt{g_{ik}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}}} \delta x^i \left(-2 \frac{du^k}{ds} g_{ik} - 2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^k u^l + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} u^l u^k \right)$$

Für beliebige $\delta x^i(s)$ ist dies nur dann gleich 0, wenn der Integrand verschwindet:

$$0 = \frac{du^k}{ds} g_{ik} + \underbrace{\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} u^k u^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l}_{\Gamma_{ikl} u^k u^l}$$

Durch Multiplikation mit g^{ji} erhalten wir die Geodätengleichung aus dem vorherigen Abschnitt. Damit führen zwei völlig unterschiedliche geometrische Ausgangssituationen zur selben Gleichung.

Kapitel 3

Physikalische Grundgesetze

3.1 Energie-Impuls-Tensor als Quelle des Gravitationsfeldes

Ähnlich wie es bei RIEMANNschen Räumen möglich ist, an jedem Punkt **lokal** ein kartesisches Koordinatensystem einzuführen (Tangentenraum), so lässt sich in der physikalischen Raum-Zeit immer **lokal** ein Inertialsystem einführen mit der Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir erwarten, dass sich die Wirkung der Gravitation durch die Metrik beschreiben lässt. Zur Erinnerung: Im nichtrelativistischen statischen Grenzfall gilt für die Eigenzeit:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\phi(x)}{c^2} \right) dt^2 - d\vec{x}^2$$

Für schwache Felder gilt $\Delta\phi(x) = 4\pi G\rho(\vec{x})$, wobei ρ_G die Materiedichte ist. Wie lautet nun die relativistische Formulierung? Wir erinnern uns an die Elektrostatik, wo $\Delta\phi(\vec{x}) \sim \rho_{em}(\vec{x})$ gilt mit $\rho_{em}(\vec{x})$ als Ladungsdichte.

$$\int_V d\vec{x} \rho_{em}(\vec{x}) = Q$$

ist Erhaltungsgröße; es gilt also $dQ/dt = 0$. ρ_{em} ist die nullte Komponente eines Vierervektors $\vec{j}(\vec{x})$, welcher die Stromdichte darstellt.

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho(\vec{x}, t) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \text{ mit der Kontinuitätsgleichung } 0 = \partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Wir gehen nun über von der Materiedichte zur Energiedichte. Die Gesamtenergie E des Systems ist gegeben durch:

$$E = \int_V d\vec{x} \rho_G(\vec{x})$$

Entsprechend gibt es eine Impulsdichte. Wenn man über diese integriert, erhält man den gesamten Impuls \vec{P} . Der Energie-Impulstensor ist nun allgemein gegeben durch:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{0i} \\ T^{j0} & T^{ji} \end{pmatrix}$$

Dieser ist symmetrisch; es gilt also $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. Wir definieren $T^{00} := \rho c^2$, wobei ρ die Energiedichte darstellt und T^{0i} als Impulsdichte. (Übungsaufgabe: Wie lautet $T^{\mu\nu}$ für das elektromagnetische Feld?) Es gilt $\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0$, was für $\mu = 1, 2, 3, 4$ also vier Gleichungen entspricht. Dies führt mit dem GAUSSschen Satz zu:

$$\frac{d}{dt} \int_V d\vec{x} T^{0\mu}(\vec{x}, t) = \int_{\partial V} dF_I T^{i\mu}(\vec{x}, t) = 0 \text{ für ein abgeschlossenes System}$$

Also ist

$$P^\mu \equiv \frac{1}{c} \int_V d\vec{x} T^{0\mu}$$

zeitlich konstant. Der räumliche Anteil ist gegeben durch den Spannungstensor einer relativistischen Flüssigkeit:

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - \eta^{\alpha\beta} p$$

p ist hierbei der Druck und ρ die Massendichte. Wir machen dazu folgenden Ansatz:

$$\Delta \left(1 + \frac{2\phi_0}{c^2}\right) = 2 \cdot \frac{4\pi G}{c^2} \cdot \frac{\rho c^2}{c^2}$$

Im nichtrelativistischen statischen Grenzfall gilt:

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{00}$$

Wie lautet die Verallgemeinerung davon? Wir nehmen

$$\square g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

an. \square ist nicht invariant. Das Gravitationsfeld trägt hier nicht bei zur Energiedichte. Suche eine Differentialgleichung vom Typ:

$$\boxed{G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}}$$

Wir stellen folgende Forderungen an $G_{\mu\nu}$:

- 1.) Wegen $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ muss $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ gelten. $G_{\mu\nu}$ ist RIEMANN-Tensor.
- 2.) G enthält die erste und zweite Ableitung von g_{ij} . Terme der zweiten Ableitung sollen jedoch nur linear auftauchen.
- 3.) Nichtlineare Terme sollen auftreten, da die Krümmung zum Energie-Impuls-Tensor beiträgt.
- 4.) Die NEWTONschen Gesetze sollen als Grenzfall herauskommen.

3.2 Einsteingleichungen

$G_{\mu\nu}$ sei eine Kombination aus dem Krümmungstensor $R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}$, denn $R^{\rho}_{\mu\lambda\nu}$ enthält erste und zweite Ableitungen von g_{ij} und nichtlineare Terme, nämlich zum Beispiel das Produkt zweier CHRISTOFFEL-Symbole. Ebenso sind der RICCI-Tensor und R als skalare Krümmung möglich, um $G_{\mu\nu}$ zu konstruieren. $R_{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}R$ sind symmetrisch, womit wir den Ansatz $G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$ machen. Jetzt müssen wir also noch a und b bestimmen.

- * Wegen $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ besteht eine Relation zwischen a und b .
- * Der NEWTON-Grenzfall legt dann a fest.

Beweis:

a.) BIANCHI-Identität: $\boxed{D_\lambda R_{\rho\mu\sigma\nu} + D_\sigma R_{\rho\mu\nu\lambda} + D_\nu R_{\rho\mu\lambda\sigma} = 0}$

Um diese zu beweisen, verwenden wir ein lokal geodätisches System, so dass die CHRISTOFFEL-Symbole verschwinden. Es gilt jedoch nicht $D_i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$. Dann ist $D_i (g_{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\delta\epsilon} \Gamma^\delta_{\zeta\kappa}) = 0$, da nach der Produktregel immer ein CHRISTOFFEL-Symbol stehen bleibt. Deshalb gilt auch $D_i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \partial_i \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ und wegen $D_i g_{jk} = 0$ ist $\partial_i g_{jk} = 0$. In einem solchen Koordinatensystem wird die Lage nun sehr einfach:

$$D_i R_{\alpha m s q} = g_{\alpha r} (\partial_i \partial_s \Gamma^r_{mq} - \partial_i \partial_q \Gamma^r_{ms})$$

$$D_q R_{\alpha m i s} = g_{\alpha r} (\partial_q \partial_i \Gamma^r_{ms} - \partial_q \partial_s \Gamma^r_{mi})$$

$$D_s R_{\alpha m q i} = g_{\alpha r} (\partial_s \partial_q \Gamma^r_{mi} - \partial_s \partial_i \Gamma^r_{mq})$$

Bilden wir die Summe dieser drei Gleichungen, so heben sich alle Terme gegenseitig weg, womit die BIANCHI-Identität gezeigt wurde.

b.) Aus der BIANCHI-Identität folgt direkt, indem wir mit der Metrik den ersten Index des RIEMANNschen Krümmungstensors hochziehen und im zweiten und dritten Summanden die letzten beiden Indizes des Krümmungstensors vertauschen (Antisymmetrie):

$$D_\lambda R^\rho_{\mu\sigma\nu} - D_\sigma R^\rho_{\mu\lambda\nu} - D_\nu R^\rho_{\mu\sigma\lambda} = 0$$

Setzen wir ρ mit σ gleich und summieren darüber (Verjüngung), so erhalten wir eine Beziehung zwischen den Komponenten des RICCI-Tensors:

$$D_\lambda R_{\mu\nu} - D_\rho R^\rho_{\mu\lambda\nu} - D_\nu R_{\mu\lambda} = 0$$

Aus $\mu = \nu$ und anschließende Summation (also nochmalige Verjüngung) ergibt sich nun schließlich folgende nützliche Relation:

$$D_\lambda R - D_\rho R^\rho_{\lambda} - D_\rho R^\rho_{\lambda} = 0 \Leftrightarrow D_\lambda R = 2D_\rho R^\rho_{\lambda}$$

Ferner gilt $D_\lambda g_{\mu\nu} = 0$. (nachrechnen!) Damit erhalten wir durch Einsetzen der zuletzt erhaltenen Gleichung:

$$0 = D_\mu G^{\mu\nu} = aD_\mu R^{\mu\nu} + bD_\mu(Rg^{\mu\nu}) = aD_\mu R^{\mu\nu} + b \cdot (2D_\rho R^\rho_{\mu}g^{\mu\nu}) = (a + 2b) \cdot D_\mu R^{\mu\nu} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{a}{2}}$$

Auf diese Weise haben wir also die Konstante b festgelegt:

$$G_{\mu\nu} = a \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right)$$

Aus dem NEWTONSchen Grenzfall, also $G_{00} \approx \Delta g_{00}$, bestimmen wir nun die Normierung a :

$$c.) G^\mu_{\mu} = a \left(R - \frac{1}{2} R \cdot 4 \right) = -aR \tag{*}$$

Ferner gilt $T^{ij} \ll T^{00}$ ($O(v^2/c^2)$). Hieraus folgt $G^{ij} \ll G^{00}$ und man braucht bei der Verjüngung von $G_{\mu\nu}$ nur den ersten Term mit $\mu = \nu = 0$ berücksichtigen:

$$G^\mu_{\mu} \approx G^0_0 = a \left(R^0_0 - \frac{1}{2} R \cdot 1 \right) \text{ da } g^\mu_{\nu} = \delta^\mu_{\nu} + \text{Korrekturen} \tag{**}$$

Durch Kombination der beiden Gleichungen (*) und (**) ergibt sich $R^0_0 = -R/2$ und $\boxed{G^0_0 = 2aR^0_0}$.
Entwicklung:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + k_{\mu\nu} \text{ mit } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Für schwache Felder treten nur lineare Terme in $k_{\mu\nu}$ auf. So ergibt sich für den RICCI-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \approx \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$$

Für stationäre Felder gilt $\partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\rho} = 0$. Für R_{00} folgt also $R_{00} \approx -\partial_\rho \Gamma^{\rho}_{00}$. Der erste Term verschwindet. Im allgemeinen haben die CHRISTOFFEL-Symbole folgende Gestalt:

$$\Gamma_{\rho,\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$$

Betrachten wir den statischen Fall. Dann verschwinden alle Zeitableitungen ∂_0 (also die ersten beiden Summanden):

$$\Gamma_{\rho 00} = -\frac{1}{2} \partial_\rho g_{00}$$

$$R_{00} \approx -\partial_\rho \Gamma^{\rho 00} = -\frac{1}{2} \partial_\rho g_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}$$

Also gilt

$$G_{00} = 2aR_{00} = -2 \cdot \frac{1}{2} a \Delta g_{00} = -a \Delta g_{00}$$

woraus schlussendlich $a = -1$ folgt.

Jetzt sind die EINSTEINSchen Gleichungen vollständig:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Durch Verjüngung ergibt sich

$$R - 2R = -\frac{8\pi G}{c^4}T^\mu{}_\mu \Rightarrow R = \frac{8\pi G}{c^4}T^\mu{}_\mu$$

weshalb auch folgendes gilt:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right)$$

Mittels Λ als Energiedichte des Vakuums lässt sich obige Gleichung verallgemeinern:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

Im Grenzfall gilt $\Delta\phi = 4\pi G\rho + c^2\Lambda$. Dabei handelt es sich aufgrund der Symmetrie der Tensoren $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ und $T_{\mu\nu}$ um zehn Gleichungen für die Metrik. Es ist aber $D^\mu G_{\mu\nu} = 0$ identisch erfüllt. Dies sind vier zusätzliche Bedingungen, womit sechs Gleichungen übrig bleiben. Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ besitzt zehn unabhängige Komponenten, aber er ist nur bestimmt bis auf Koordinatentransformationen (vier Funktionen $x'_\mu(x_0, x_1, x_2, x_3)$ für $\mu = 0, 1, 2, 3$).

3.2.1 Analogie zur Elektrodynamik

Der Satz von Gleichungen $D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ und $D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ entspricht den EINSTEIN-Gleichungen und der BIANCHI-Identität.

Ableitung nach F	Ableitung nach Γ
Ableitung nach Potential	Ableitung nach $g_{\mu\nu}$ nicht linear in g
$\square A_\mu = j_\mu$ (LORENTZ-Eichung), linear in A_μ	$g_{\mu\nu}$ wird durch Koordinatentransformation modifiziert
Potential wird durch Eichtransformation modifiziert	

3.3 Schwache Felder/Linearisierte Feldgleichungen

Wir machen den Ansatz $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}$ mit $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. $R_{\mu\nu}^{(1)}$ soll hierbei linear in $h_{\mu\nu}$ und $R_{\mu\nu}^{(2)}$ quadratisch in $h_{\mu\nu}$ sein.

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho\partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\sigma g_{\rho\nu}) + O(\Gamma^2)$$

Durch Verjüngung erhalten wir den RICCI-Tensor

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = R^e{}_{\mu\rho\nu}{}^{(1)} = \frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu\partial_\nu h^e{}_\rho{}^e - \partial_\nu\partial_\rho h^e{}_\mu{}^e - \partial_\rho\partial_\mu h^e{}_\nu{}^e) + O(h^2)$$

und durch nochmalige Verjüngung den Krümmungsskalar:

$$R^{(1)} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} + O(h^2)$$

Setzen wir dies in die EINSTEIN-Gleichungen ein, so folgt:

$$2R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{16\pi G}{c^2}\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right)$$

Dies ist ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem. Erinnern wir uns an dieser Stelle an die Elektrodynamik:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \text{ und } \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \text{ mit } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Die homogene Gleichung ist automatisch erfüllt. Bei den inhomogenen Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = j^\nu$$

handelt es sich um vier gekoppelte Differentialgleichungen. Wir fordern LORENTZ-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$. Falls die LORENTZ-Bedingung nicht gilt, falls also $\partial_\mu A^\mu = f(x) \neq 0$, so führt man eine Eichtransformation durch. Setze dazu $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda$ (dies ist möglich, weil ja $F^{\mu\nu}$ bei einer solchen Transformation sich nicht ändert) und fordere:

$$0 = \partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu \Lambda = f(x) - \square \Lambda$$

Also ist Λ als Lösung von $\square \Lambda = f$ zu wählen. Dies ist jedoch immer noch unbestimmt bis auf Lösungen der homogenen Gleichung $\square \Lambda = 0$.

Ähnlich wie Eichtransformationen in der Elektrodynamik wirken, gilt dies für Koordinatentransformationen in der Relativitätstheorie. Wir führen also eine Transformation $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ durch, wobei $\epsilon^\mu(x)$ klein sein soll. Insbesondere ist dann:

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} = \eta_\mu^\lambda + \partial^\lambda \epsilon_\mu(x)$$

Durch diese Transformation ändert sich die Metrik:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\kappa} g_{\lambda\kappa} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \text{ mit } h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\nu \epsilon_\mu(x) + \partial_\mu \epsilon_\nu(x)$$

Wir fordern $2\partial_\rho h^e_\nu - \partial_\nu h^e_\rho = 0$; dies sind vier Bedingungen. Dann gilt:

$$2\partial_\rho h^e_\nu - \partial_\nu h^e_\rho = \square h_{\mu\nu}$$

Falls $2\partial_\rho h^e_\nu - \partial_\nu h^e_\rho = 2f_\nu \neq 0$ ist, fordere $2\partial_\rho h'^e_\nu - \partial_\nu h'^e_\rho = 0$.

$$0 = \underbrace{2\partial_\rho h^e_\nu - \partial_\nu h^e_\rho}_{2f_\nu} + 2\partial_\rho (\partial^\rho \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon^\rho) - \partial_\nu \partial^\rho \epsilon_\rho \cdot 2 \Rightarrow \square \epsilon_\nu = f_\nu$$

Im neuen System gilt:

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Der Term auf der rechten Seite ist der Quellterm. Die Lösung erfolgt wie die Lösung der MAXWELL-Gleichungen mit retardierten Potentialen.

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{\left(T_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{T}{2} \right) \left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Dies beschreibt einen HERZSchen Dipol (Abstrahlung von Gravitationswellen).

Kapitel 4

Statische Felder

4.1 Ziel

Das Ziel ist, $g_{\mu\nu}$, $R_{\rho\mu\sigma\nu}$ in der Umgebung der Sonne zu betrachten. Dabei treten die schon besprochenen Effekte wie Rotverschiebung, Lichtablenkung und Periheldrehung auf. Was auch experimentell gemessen wurde, ist die Radarechverzögerung. (Ein von der Erde ausgesandtes Radarsignal kann von einem anderen Planeten reflektiert und bei uns wieder empfangen werden. Passiert der Radarstrahl dabei das Gravitationsfeld der Sonne, so tritt eine Laufzeitverzögerung auf. Der Effekt wurde erstmals von SHAPIRO im Jahre 1964 theoretisch vorgeschlagen.)

4.2 Schwarzschild-Metrik

a.) Ansatz:

Wir betrachten eine kugelsymmetrische Massenverteilung. Die Metrik auf einer Kugelschale (bei konstantem Abstand vom Zentrum) ist gegeben durch:

$$ds^2 \sim d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

Gleiche $d\theta$ und $\sin \theta d\phi$ entsprechen gleichen Längen (Rotationssymmetrie). Flächen mit verschiedenem Abstand vom Zentrum werden durch die Oberfläche festgelegt. (Wieviel Farbe benötigt man, um eine bestimmte Kugeloberfläche anzustreichen?) Es gilt $F|_{r=r_0} = 4\pi r_0^2$, aber r ist im allgemeinen **nicht** der Abstand vom Zentrum. Wir setzen die Metrik im allgemeinen Falle folgendermaßen an:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - \bar{A}(r) dr^2 - 2D(r)c dt dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Die Funktionen A , B und D sind unabhängig von θ und ϕ wegen der Kugelsymmetrie. Außerdem sind sie unabhängig von t , weil uns nur die statischen Lösungen interessieren. Wir eliminieren D , indem wir

$$t' = t + \psi(r), dt' = dt + \partial\psi/\partial r dr \text{ wobei } \frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{D}{cB}$$

wählen. Damit verschwindet der gemischte Term mit $dr dt$.

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \text{ mit } A = \bar{A} - B \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 c^2 - 2Dc \frac{\partial\psi}{\partial r} = \bar{A} + \frac{D^2}{B}$$

Der Lauf der Uhren hängt ab von r und die Geometrie in drei Dimensionen ist nicht euklidisch.

b.) Analogie zur Elektrodynamik:

Wir betrachten ausgehend von $\square A_\mu = j_\mu$ den Fall $j_0 \neq 0$, $\vec{j} = \vec{0}$, woraus auch $\vec{A} = \vec{0}$ folgt. Wenn j_0 außerdem sphärisch, symmetrisch und statisch ist, gilt:

$$\square\phi = 0 \text{ mit } \phi = \phi(r) \Rightarrow \Delta\phi = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0$$

Hieraus folgt $\phi = a/r + br$ als allgemeines Potential. Zur Konvergenz für $r \mapsto \infty$ muss $b = 0$ gewählt werden.

c.) EINSTEIN-Gleichungen:

$T^{\mu\nu}$ sei rotationsinvariant, stationär und $= 0$ für $r > R$. Damit gilt $R_{\mu\nu} = 0$ für $r > R$ (woraus man jedoch nicht schließen sollte, dass der Krümmungstensor verschwindet). Berechnen $R_{\mu\nu}$ aus

$$g_{00} = B(r), g_{11} = -A(r), g_{22} = -r^2 \text{ und } g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

Aus der Metrik berechnet man die CHRISTOFFEL-Symbole und daraus den RIEMANNschen Krümmungstensor. Durch Verjüngung erzeugt man dann den RICCI-Tensor. Die Rechnung wollen wir hier nicht durchführen, sondern wir geben direkt das Ergebnis an:

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA}$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA}$$

$$R_{22} = -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} \text{ und } R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$$

Als erstes kommen wir auf folgende Gleichung:

$$0 = \frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = \frac{d}{dr} \ln(A \cdot B)$$

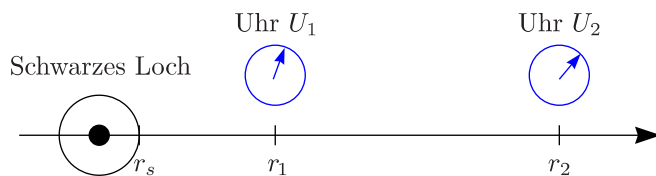
Hieraus ergibt sich $A \cdot B = \text{const.}$ Für große r soll $A \mapsto 1$ und $B \mapsto 1$ gelten, woraus $A \cdot B \mapsto 1$ und damit $A = 1/B$ folgt. Im nächsten Schritt betrachten wir:

$$R_{22} = -1 - \frac{r}{2} B \left(-\frac{B'}{B} \cdot 2 \right) + B = -1 + rB' + B = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(rB) = 1 \Rightarrow rB = r + \text{const.} = r - 2a$$

So folgt:

$$B = 1 - \frac{2a}{r} \text{ und } A = \frac{1}{1 - \frac{2a}{r}}$$

Weiterhin gilt $a = GM/c^2$ (Dimension einer Länge) und der SCHWARZSCHILD-Radius ist gegeben durch $r_s = 2a$.



Zunächst haben wir gleiche Uhren U_1 und U_2 . U_1 wird gegen U_2 rotverschoben. Zeigt U_1 die Zeit „1 Sekunde“ an, so zeigt U_2 die Zeit

$$1 \text{ Stunde} \cdot \left(1 - \left(\frac{GM}{c^2 \cdot r_1} - \frac{GM}{c^2 \cdot r_2} \right) \right)$$

an. Alternativ: Die Uhren sind also mit einem Faktor $(1 - GM/(c^2 r))^{-1}$ zu skalieren. Dies ist eine universelle Zeit, nicht die Eigenzeit! Im Teilraum $t = \text{const.}$ (zweidimensional) ist die Krümmung $\neq 0$.

$$-ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{2a}{r}} dr^2 + r^2 d\varphi^2 \text{ in Äquatorialebene } \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

Wir erkennen, dass die Metrik eine Krümmung hat. Aufgrund der Krümmung entstehen Gezeitenkräfte!

4.3 Bewegung im Zentralfeld

4.3.1 Erinnerung: Keplerproblem

Wir gehen aus von folgender LAGRANGEfunktion:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \right) \right) - V(r)$$

Es gelten natürlich die EULER-LAGRANGE-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Falls $\partial L / \partial q = 0$ ist, ist q eine „zyklische Koordinate“ und damit ist $\partial L / \partial \dot{q}$ konstant. Eine solche zyklische Koordinate ist $q = \varphi$:

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}) = 0 \tag{1}$$

Für $q = \vartheta$ ergibt sich

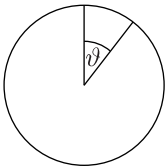
$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\vartheta}) - mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0 \tag{2}$$

und schlussendlich für $q = r$:

$$\frac{d}{dt} (m\dot{r}) - mr \left(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 \right) + \partial_r V(r) = 0 \tag{3}$$

Dies sind drei gekoppelte Differentialgleichungen zweiten Grades. Integration von Gleichung (1) liefert eine Erhaltungsgröße, nämlich den Drehimpuls in z -Richtung:

$$mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = \text{const.} = L_z$$



Gleichung (2) wird gelöst, indem man $\vartheta = 0$ oder $\pi/2$ (konstant) wählt. Es findet also entweder eine Bewegung entlang der Polarachse oder in der Äquatorialebene statt. Wir interessieren uns im folgenden nur für die Bewegung in der Äquatorialebene mit $L = L_z$, $\dot{\vartheta} = 0$ und $\sin \vartheta = 1$. Dann folgt aus Gleichung (1):

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$$

Dies setzen wir in Gleichung (3) ein und erhalten:

$$m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} + \partial_r V(r) = 0$$

Der Ausdruck L^2/mr^3 beschreibt die Zentrifugalkraft. Für die Lösung von Gleichung (3) verwenden wir, dass $V(r)$ zeitunabhängig ist. Wir multiplizieren also diese Gleichung nun mit \dot{r} :

$$m\dot{r}\ddot{r} + \left(-\frac{L}{mr^3} + \partial_r V(r) \right) \dot{r} = 0$$

Durch scharfes Hinsehen, können wir die linke Seite der Gleichung schreiben als Zeitableitung eines bestimmten Ausdrucks, nämlich der Energie E :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right) = 0$$

Die Energie E ist also eine Erhaltungsgröße. Schließlich resultiert:

$$\boxed{\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} \text{ und } \dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}}$$

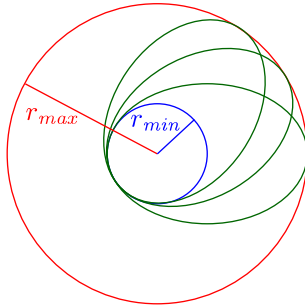
Hieraus erhalten wir die Bahnkurve der Form $r(\varphi)$ folgendermaßen:

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{L^2}{2mr^2} - V(r)}} = dt = \frac{dt}{d\varphi} d\varphi = \frac{L}{mr^2} d\varphi$$

Man kommt also auf folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

Durch Integration folgt $\varphi(r)$ und durch Invertieren $r(\varphi)$. Die Bahn verläuft immer zwischen r_{min} und r_{max} .



$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr$$

ist die Winkeländerung bei einem Umlauf. Man hat eine geschlossene Bahn, wenn $\Delta\varphi = 2\pi n_1/n_2$, weil sich dann die Bahn wieder nach n_2 Umläufen schließt. Es gibt nur zwei Potentiale für die das zutrifft, nämlich $V(r) \sim 1/r$ oder $V(r) \sim r^2$. Speziell für das KEPLERpotential $V = -m\kappa/r$ gilt also:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{L} \sqrt{2m \left(E + \frac{m\kappa}{r} \right) - \frac{L^2}{r^2}}$$

Setzen wir $u(\varphi) \equiv 1/r(\varphi)$, $du/d\varphi = -1/r^2 dr/d\varphi$, so folgt:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{L} \sqrt{2m(E + m\kappa u) - L^2 u^2}$$

Differenzieren wir dies nochmals nach φ , so resultiert:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{1}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{2m(E + m\kappa u) - L^2 u^2}} (2m^2\kappa - 2L^2 u) \cdot \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{1}{L} \sqrt{\dots}$$

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{m^2\kappa}{L^2}}$$

Die Lösung davon ist gegeben durch:

$$\boxed{u = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi) \text{ mit } \frac{1}{p} = \frac{m^2\kappa}{L^2} \text{ und } e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\kappa^2}}$$

Soweit zum KEPLERproblem!

Die Bahnkurve werde nun beschrieben durch $x^i(s)$.

$$\dot{u}^k g_{ik} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} u^k u^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l = 0 \text{ mit } \frac{dx^i}{ds} \equiv \dot{x}^i = u^i$$

Wir wollen nun die Geodätengleichung für die SCHWARZSCHILD-Metrik betrachten. Dazu sei $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \vartheta$ und $x^3 = \varphi$. Achtung: \dot{x} bedeutet die Ableitung nach dem Bahnparameter s und nicht notwendigerweise nach t ! Für $i = 0$ erhalten wir folgende Gleichung:

$$\ddot{t} B c^2 + \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \dot{t} \dot{r} = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{t} = -\frac{B'}{B} \dot{t} \dot{r}} \quad (0)$$

Als nächstes betrachten wir $i = 1$:

$$\boxed{\ddot{r} \cdot (-A) + (-A' \dot{r}^2) - \frac{1}{2} (B' c^2 \dot{t}^2 - A' \dot{r}^2 - 2r \dot{\vartheta}^2 - 2r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) = 0} \quad (1)$$

Für $i = 2$ ergibt sich:

$$\ddot{\vartheta} \cdot (-r^2) + (-2r) \cdot \dot{\vartheta} \dot{r} - \frac{1}{2} (-2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2) = 0 \quad (2)$$

Schlussendlich kommen wir zu $i = 3$:

$$\ddot{\varphi} \cdot (-r^2 \sin^2 \vartheta) + (-2r \sin^2 \vartheta \dot{r} \dot{\varphi} - 2\dot{r} \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vartheta}) = 0 \quad (3)$$

Gleichung (2) wird gelöst durch $\vartheta = \pi/2$, also $\ddot{\vartheta} = \dot{\vartheta} = 0$, $\sin \vartheta = 1$ und $\cos \vartheta = 0$. Zusammenfassend erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\ddot{t} = -\frac{B'}{B} \dot{t} \dot{r} \quad (0)$$

$$2\ddot{r}A + \dot{r}^2 A' + B' c^2 \dot{t}^2 - 2r\dot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\varphi}) = 0 \quad (3')$$

Im Gegensatz zum KEPLERproblem haben wir jetzt anstelle von zwei Gleichungen noch drei Gleichungen. Die Gleichungen (1) und (3) haben Ähnlichkeit mit den Gleichungen des KEPLERproblems. Zuerst wollen wir die dritte Gleichung ausschlichten: $r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \equiv l$ (3'). (Dies ist der Drehimpuls dividiert durch die Masse.) Gleichung (0) können wir als totale s -Ableitung folgendermaßen aufschreiben:

$$\frac{d}{ds} (\ln(\dot{t}) + \ln(B(r))) = 0 \Rightarrow B(r) \dot{t} = \text{const.} \equiv F \quad (0')$$

Dies stellt ein Zusammenhang zwischen Bahnparameter und der Zeit dar. Falls B konstant ist, dann wäre \dot{t} konstant und $t \sim s + c$. \dot{t} und $\dot{\varphi}$ aus den Gleichungen (0') und (3') in Gleichung (1) eingesetzt, liefert uns eine Differentialgleichung für r .

$$2\ddot{r}A + \dot{r}^2 A' + \frac{B' c^2 F^2}{B^2} - 2\frac{l^2}{r^3} = 0 \quad (1')$$

Das erstaunliche ist, dass wir nun analog zum KEPLERproblem verfahren können. Wir multiplizieren also (1') mit \dot{r} :

$$\frac{d}{ds} \left(A\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2 c^2}{B} \right) = 0 \Rightarrow A\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2 c^2}{B} = \text{const.} \equiv -E$$

Die Einheit von E ist (Länge/Zeit)². An diesem Punkt gehen wir nun über zu unserer SCHWARZSCHILD-Metrik, also $A^{-1} = B = 1 - 2a/r$ mit $a = GM/c^2$. Damit erhalten wir:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{aE}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{al^2}{r^3} = \frac{cF^2 - E}{2} \quad (*)$$

Der Term $\dot{r}^2/2$ ist die kinetische Energie und der Rest auf der linken Seite der Gleichung (*) das effektive Potential $V_{\text{eff}} = V_{\text{NEWTON}} + V_{\text{Zentr}} + V_{\text{korrr}}$. Der Zusatzterm V_{korrr} führt also dazu, dass die Bewegung des Körpers nicht geschlossen ist. Der Zentrifugalterm und V_{NEWTON} sind vergleichbar:

$$\frac{V_{\text{korrr}}}{V_{\text{NEWTON}}} = -\frac{2a}{r} \approx -\frac{r_s}{r_{\text{Bahn}}}$$

4.3.2 Bahnkurve

Der Bahnparameter s ergibt sich aus $B(r)\dot{t} = F$. Wähle $F = 1$, womit $dt = 1/B ds = A(r) ds$ folgt. (t ist die Koordinatenzeit, s die Eigenzeit und $A(r) = g_{00}$.)

$$\dot{r}^2 = c^2 - E + \frac{2aE}{r} - \frac{l^2}{r^2} + 2a\frac{l^2}{r^3} \Rightarrow \Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \dots dr - 2\pi$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{d\varphi}{ds}} \right)^2 = \frac{r^4}{l^2} \left(c^2 - E + \frac{2aE}{r} - \frac{l^2}{r^2} + 2a\frac{l^2}{r^3} \right)$$

Wir gehen so vor wie beim KEPLERproblem und zwar setzen wir $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$.

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \left(-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{l^2} [c^2 - E + 2aEu - l^2u^2 + 2al^2u^3] \quad (§)$$

Wir interpretieren $c^2 - E$ als E_{KEPLER} , differenzieren (§) nach φ und dividieren durch $du/d\varphi$:

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{du^2}{d\varphi^2} = \frac{1}{l^2} \left(0 + 2aE \frac{du}{d\varphi} - 2l^2u \frac{du}{d\varphi} + 2 \cdot 3al^2u^2 \frac{du}{d\varphi}\right)$$

$$\boxed{\frac{du^2}{d\varphi^2} + u = \frac{aE}{l^2} + 3au^2}$$

Bis jetzt wurden alle Rechnungen exakt durchgeführt. An dieser Stelle wollen wir jedoch die Näherung $au \ll 1$ benutzen. Wir gehen aus von der Lösung des KEPLERproblems und machen deshalb folgenden Ansatz:

$$u = u_0 = \frac{aE}{l^2} (1 + e \cos \varphi)$$

In erster Näherung folgt deshalb:

$$\frac{du_1^2}{d\varphi^2} + u_1 = \frac{aE}{l^2} + 3a \left(\frac{aE}{l^2}\right)^2 (1 + e \cos \varphi)^2$$

Diese Gleichung hat gerade die Form der Gleichung eines harmonischen Oszillators mit äußerer Kraft. Mittels der GREENSchen Funktion kann man deren Lösung berechnen:

$$u_1 = u_0 + \frac{3a^3}{l^4} \left[1 + e\varphi \sin \varphi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos(2\varphi)\right)\right]$$

(Durch Einsetzen kann man verifizieren, dass dies tatsächlich eine Lösung der obigen Gleichung ist.) Der Term $e\varphi \sin \varphi$ wächst kumulativ. Damit folgt:

$$u_1 = \frac{aE}{l^2} \left[1 + e \left(\cos \varphi + \frac{3a^2}{l^2 E} \varphi \sin \varphi\right)\right]$$

Wir betrachten $3a^2/l^2 E \varphi$ als $\delta\varphi$ und machen folgende Nebenrechnung, wobei wir nur lineare Terme in $\delta\varphi$ berücksichtigen wollen:

$$\cos \varphi + \delta\varphi \sin \varphi \approx \cos(\delta\varphi) \cos \varphi + \sin(\delta\varphi) \sin \varphi = \cos(\varphi - \delta\varphi)$$

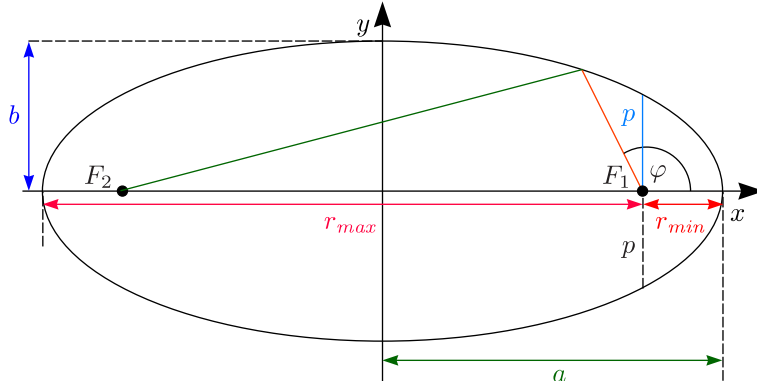
Damit erhalten wir weiter:

$$u_1 = \frac{aE}{l^2} \left[1 + e \cos \left(\varphi - \frac{3a^2}{l^2 E} \varphi\right)\right]$$

Durch die Verschiebung nach einer Periode lautet damit:

$$-\delta\varphi_{2\pi} = \frac{3a^2}{l^2 E} \cdot 2\pi = 3\pi \cdot r_s \cdot \frac{a}{l^2 E} = 3\pi \frac{r_s}{p} \text{ mit } \left(\frac{a}{l^2 E}\right)^{-1} = p$$

p ist der sogenannte Bahnparameter.



$$r_{max} = \frac{p}{1 - e}, r_{min} = \frac{p}{1 + e} \text{ und } a = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} = \frac{p}{1 - e^2}$$

a ist die große Halbachse. Machen wir nun folgende Tabelle:

Planet	große Halbachse [10^6 km]	e	$6\pi MG/L$	Umläufe/100 y	$\Delta\varphi/100$ y	
					(Theorie)	(Experiment)
Merkur	57,91	0,2056	0,1038	415	43,03''	43,11'' \pm 0,45''
Venus	108,21	0,0068	0,058	149	8,6'	8,4' \pm 4,8'
Erde	149,60	0,0167	0,038	100	3,8'	5,0' \pm 1,2'

Nach NEWTON gilt, wenn man die anderen Planeten berücksichtigt: $5557,62'' \pm 0,20''$. Beobachtet werden $5600,73'' \pm 0,41''$.

4.3.3 Ablenkung von Licht im Feld der Sonne

Der Fall $m = 0$ stellt eine Bedingung an die Integrationskonstante. Wir betrachten Gleichung (*), welche der Energieerhaltung entspricht:

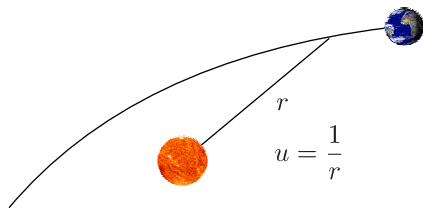
$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{aE}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{al^2}{r^3} = \frac{c^2 F^2 - E}{2}$$

Verwende $F = 1$ und große r :

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{c^2 - E}{2}$$

Speziell für das Photon gilt $\dot{r} = c$. Hieraus folgt sofort $E = 0$ und wir erhalten folgende Differentialgleichung für $u(\varphi)$:

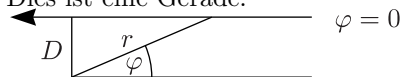
$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3au^2$$



Die Lösung im flachen Raum ist gegeben durch

$$u_0 \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{D} \sin \varphi \text{ mit } r = \frac{D}{\sin \varphi}$$

Dies ist eine Gerade.



Näherung:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} u_1 + u_1 = 3au_0^2 = \frac{3a}{D^2} \sin^2 \varphi$$

Die Lösung lautet (nachrechnen):

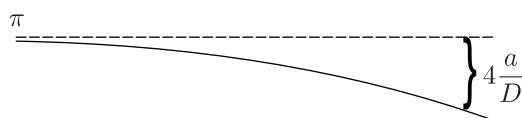
$$u_1 = \pm \frac{\sin \varphi}{D} + \frac{a}{D^2} (1 + \cos \varphi)^2$$

Die Bahnkurve verschwindet im Unendlichen, wenn $u = 1/r \mapsto 0$. Berechne φ aus der Bedingung

$$\sin \varphi + \frac{a}{D} (1 + \cos \varphi)^2 = 0$$

Die erste Lösung ist gegeben durch $\varphi_1 = \pi$. φ_2 liegt nahe bei Null, womit wir $\sin(\varphi)$ durch φ ersetzen:

$$\varphi + \frac{a}{D} (1 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = -\frac{4a}{D}$$



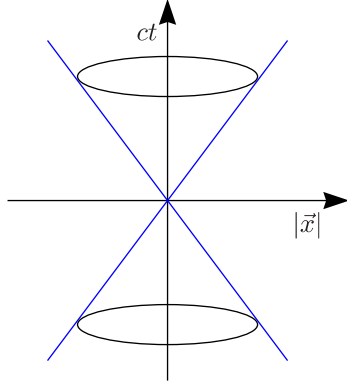
Die Ablenkung ist gegeben durch $2r_s/D$.

4.4 Qualitative Diskussion

Die SCHWARZSCHILD-Metrik

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right]$$

ist singularär bei $r = r_s$, wobei r_s gegeben ist durch $r_s = 2GM/c^2$. Synchrone Uhren können von $r \mapsto \infty$ ausgehend für $r \mapsto r_s$ definiert werden. Diese entsprechen aber nicht der Eigenzeit. Für $r \mapsto r_s$ kann es ruhende Körper geben ($dr = d\vartheta = d\varphi = 0$), die natürlich von irgendwelchen Kräften stabilisiert werden. Eine „Bahn“ in der Raumzeit ist dann keine Geodäte. Die Eigenzeit und t skalieren mit dem Faktor $(1 - r_s/r)^{1/2}$. Dies wechselt das Vorzeichen, also wäre $d\tau^2$ dann negativ. (keine Lösung) Als Illustration betrachten wir das Verhalten des Lichtkegels bei r_s . Der Lichtkegel ist ein Hyperkegel, welcher durch $d\tau^2 = 0$ festgelegt wird. (Für die MINKOWSKI-Metrik hat der Lichtkegel die Form $c^2 t^2 - \vec{x}^2 = 0$.)



Sämtliche mögliche Bahnen (Weltlinien) eines Teilchens mit $m \neq 0$ liegen im Inneren des Kegels. Für die SCHWARZSCHILD-Lösung machen wir den folgenden Ansatz und zwar führen wir eine neue Zeitkoordinate ein, die gegeben ist durch

$$\tilde{t} = t + \frac{r_s}{r} \ln \left| \frac{r}{r_s} - 1 \right| \quad \text{mit} \quad d\tilde{t} = dt + \frac{dr}{c} \frac{1}{\frac{r}{r_s} - 1}$$

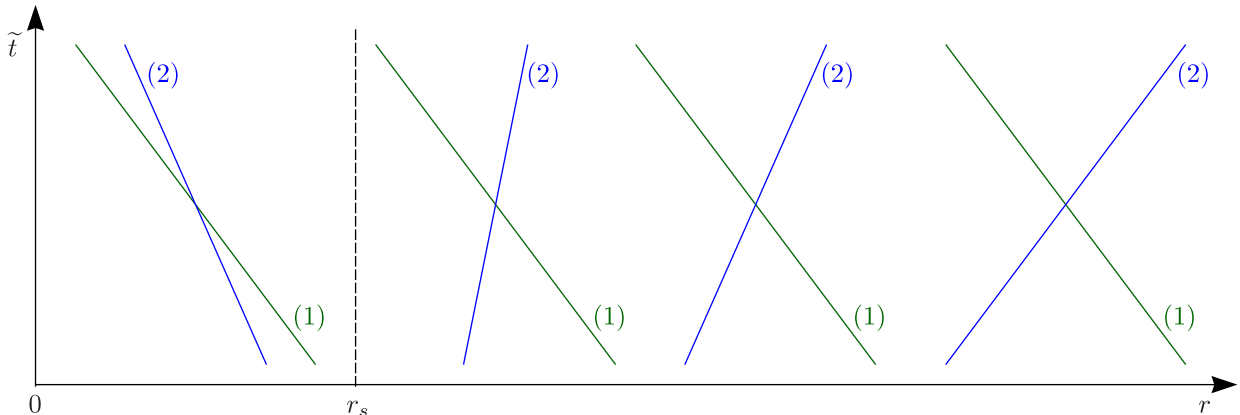
$$dt^2 = d\tilde{t}^2 - 2d\tilde{t} \frac{dr}{c} \frac{1}{\frac{r}{r_s} - 1} + \frac{dr^2}{c^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^2}$$

Die SCHWARZSCHILD-Lösung geht dann über in:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) d\tilde{t}^2 - 2 \frac{r_s}{r} d\tilde{t} \frac{dr}{c} - \underbrace{\left[\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^2} \right]}_{1 + \frac{r_s}{r}} \frac{dr^2}{c^2} \quad \text{für} \quad d\varphi = d\vartheta = 0$$

Der Lichtkegel wird bestimmt durch die Gleichung $d\tau^2 = 0$, welche zwei Lösungen (1) und (2) besitzt, nämlich:

$$d\tilde{t} = -\frac{dr}{c} \quad \text{und} \quad d\tilde{t} = \frac{1}{c} \frac{1 + \frac{r_s}{r}}{1 - \frac{r_s}{r}} dr$$



Für $r > r_s$ ist $d\tilde{t}/dr > 0$ (Ausbreitung weg vom Zentrum), für $r < r_s$ ist $d\tilde{t}/dr < 0$ und für $r \mapsto 0$ folgt $d\tilde{t}/dr \mapsto -1/c$.

4.5 Bewegung zum Zentrum

Wir gehen aus von der Bewegungsgleichung für $\vartheta = \pi/2$, also

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - \frac{GM}{r} = \varepsilon \text{ mit } \varepsilon = \frac{c^2 - E}{2} \text{ und } F = 1$$

und betrachten die radiale Bewegung ($\varphi = \text{const.}, \dot{\varphi} = 0$). Für $r \mapsto \infty$ soll $\dot{r} \mapsto 0$ gelten. Hieraus folgt $\varepsilon = 0$.

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r} = 0 (*) \Rightarrow \dot{r}^2 r = 2GM = r_s c^2 \text{ mit } \dot{r} \equiv \frac{dr}{d\tau}$$

(Im natürlichen Einheitensystem ist $\tau c/r_s$ die Einheit der Zeit.) Die Lösung obiger Differentialgleichung kann durch Trennung der Veränderlichen ermittelt werden. Wir erhalten

$$r(\tau) = \left(-\frac{3}{2}\tau\right)^{\frac{2}{3}} (2GM)^{\frac{1}{3}}$$

wobei $\tau = 0$ bei $r = 0$ erreicht wird. (τ ist die Eigenzeit des einfallenden Teilchens.) Beispielsweise ist $\tau = -2/3r_s/c$ bei $r = r_s$, es gibt also kein drastisches Verhalten bei $r = r_s$. Falls aber $r_s = 3 \text{ km}$ ist (Sonne), so gilt $r_s/c = 10^{-5} \text{ s}$.

4.5.1 Beobachter von außen

Wir müssen τ auf t umrechnen (synchrone Uhren):

$$dt = \frac{d\tau}{1 - \frac{r_s}{r}} = \frac{r}{r - r_s} \frac{d\tau}{dr} dr$$

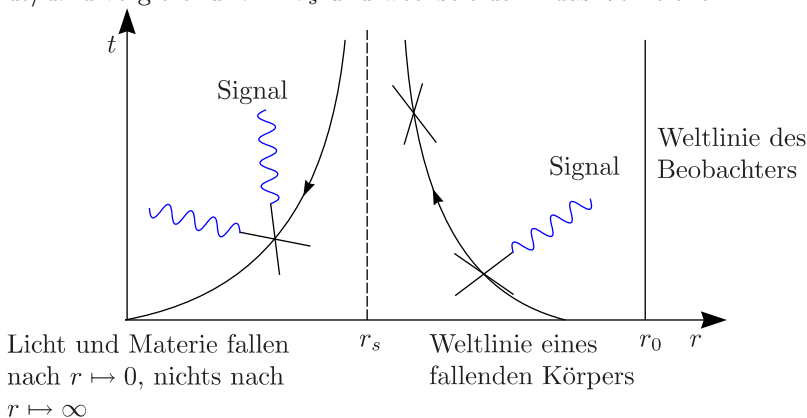
Unter Verwendung von Gleichung (*) folgt:

$$\frac{d\tau}{dr} = -\sqrt{\frac{r}{2GM}} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = -\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2GM}(r - r_s)}$$

Mittels einer Integraltabelle (BRONSTEIN) folgt:

$$t = \frac{r_s}{c} \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} + \ln \left(\frac{1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

dt/dr divergiert für $r \mapsto r_s$ und wechselt dann das Vorzeichen.



4.6 „Geschichte“ des von verschiedenen Bahnpunkten emittierten Lichts

Wir gehen wieder aus von der SCHWARZSCHILD-Metrik

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} dr^2$$

mit $d\vartheta = d\varphi = 0$. Für Licht gilt $d\tau = 0$, also

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)}$$

Sei t_E die Emissionszeit und t_0 die Beobachtungszeit. Dann ist die Laufzeit des Lichts gegeben durch

$$t_0 - t_E = \frac{1}{c} \int_{r_E}^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} = \frac{r_0 - r_E}{c} + \frac{r_s}{c} \ln \left(\frac{r_0 - r_s}{r_E - r_s} \right)$$

was für $r_E \mapsto r_s$ divergiert, da der Logarithmus dominiert. Die Laufzeit des Lichts ist also divergent! Für $r_E, r_0 \gg r_s$ dominiert der Term $(r_0 - r_E)/c$.

4.6.1 Rotverschiebung

Zwei Wellenberge werden bei t_E und $t_E + \Delta t_E$ emittiert; deren Ankunft seien bei t_0 und $t_0 + \Delta t_0$.

a.) In Synchronzeit gilt $\Delta t_E = \Delta t_0$.

b.) Eigenzeit:

Für den ruhenden Beobachter gilt:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2$$

$$\Delta\tau_E = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_E}} \Delta t \quad \text{und} \quad \Delta\tau_0 = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}} \Delta t$$

Die Rotverschiebung ist dann gegeben durch:

$$z = \frac{\Delta\tau_0}{\Delta\tau_E} - 1 = \sqrt{\frac{1 - \frac{r_s}{r_0}}{1 - \frac{r_s}{r_E}}} - 1$$

Für $r_0 \gg r_s$ findet damit eine Reduktion der Frequenz um den Faktor $\sqrt{1 - r_s/r_E}$ statt. Für große r_E geht dieser Faktor über in $1 - 1/2r_s/r_E$. Die Anzahl der beobachteten Photonen pro Zeiteinheit nimmt ab um den Faktor $\sqrt{1 - r_s/r_E}$, womit die Leistung dE/dt um $(1 - r_s/r_E)/(1 - r_s/r_0)$ reduziert wird. Was ist der Zusammenhang zwischen r_0, r_E, t_0 und t_E ?

$$t_0 - t_E = \frac{1}{c}(r_0 - r_E) + \frac{r_s}{c} \ln \left(\frac{r_0 - r_s}{r_E - r_s} \right) \Rightarrow \frac{r_0}{r_E} \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r_E}} = \exp \left(\frac{t_0 c}{r_s} \right)$$

$$\frac{l(r_0)}{l(r_E)} = \frac{1 - \frac{r_s}{r_E}}{1 - \frac{r_s}{r_0}} \approx 1 - \frac{r_s}{r_E} \quad \text{für } r_0 \gg r_E > r_s, r_0 \gg r_s$$

$$\boxed{l(t_0) = l(t_E) \exp \left(-\frac{t_0 c}{r_s} \right)}$$

Die Quelle bewegt sich mit konstanter Leuchtkraft l_E auf Geodäten (freier Fall ins Schwarze Loch). Für einen weit entfernten Beobachter B_∞ ist die Eigenzeit ungefähr gleich der Synchronzeit. Die Ankunftszeit der Photonen bei B_∞ wird gemessen bezüglich eines festen Zeitpunktes wie beispielsweise der Abreise des Raumschiffes. Die Zeit bis zur Rückkehr der Photonen ergibt sich aus der Reisezeit t_1 von B_∞ nach r_E plus der Laufzeit t_2 der Photonen.

$$t_1 \approx \frac{r_1}{c} \ln \frac{1}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{r_s}{c} \ln \left(\frac{1}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{3}{2}} - 1} \right)$$

$$T = t_1 + t_2 = 2 \frac{r_s}{c} \ln \left[\frac{1}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} - 1} \right] = 2 \frac{r_s}{c} \ln \left[\frac{\left(\frac{r}{r_s}\right)^{\frac{1}{2}} + 1}{\frac{r}{r_s} - 1} \right] \approx 2 \frac{r_s}{c} \ln \left(\frac{2}{\frac{r}{r_s} - 1} \right)$$

$$\frac{Tc}{2r_s} = -\ln \left(\frac{r}{r_s} - 1 \right) \Rightarrow \frac{r}{r_s} - 1 = \exp \left(-\frac{rc}{2r_s} \right) \Rightarrow \boxed{l(T) = l_E \exp \left(-\frac{Tc}{2r_s} \right)}$$

4.7 Kreisbahnen

4.7.1 Zentralpotential in Newtonscher Mechanik

Nach Umschreibung in radialen Koordinaten haben wir:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E \text{ mit } V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Das Teilchen pendelt zwischen r_- und r_+ . Dort ist $\dot{r} = 0$. Aus dieser Bedingung erhält man die Umkehrpunkte:

$$\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} = E \Rightarrow r_{\pm} = -\frac{GMm}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{GMm}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2mE}}$$

Für eine Kreisbahn ist $r_+ = r_- = r = -GMm/2E$. Um dies zu erfüllen, muss der Wurzelterm verschwinden, womit sich $L^2 = GMm^2r_{\pm}$ ergibt. Aus $L = r^2\dot{\varphi}m$ folgt dann $\dot{\varphi} = GM/r_{\pm}^3$. Für die Umlaufzeit gilt dann $T = 2\pi/\dot{\varphi} \sim r_{\pm}^{\frac{3}{2}}$.

4.7.2 Allgemeine Relativitätstheorie

$$A(r)\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{F^2c^2}{B(r)} = -E, B(r)\dot{t} = F \text{ und } r^2\dot{\varphi} = l \text{ mit } A^{-1}(r) = B(r) = 1 - \frac{r_s}{r}$$

$E > 0$ ist die Integrationskonstante, ebenso wie F und l . Wir formen die erste Gleichung um, indem wir explizit A durch B^{-1} ersetzen:

$$\boxed{\dot{r}^2 + \left(\frac{l^2}{r^2} + E\right) B(r) = Fc^2 \text{ mit } V_{\text{eff}}(r) = \left(\frac{l^2}{r^2} + E\right) B(r)} \quad (*)$$

Wir bestimmen die Umkehrpunkte bei $\dot{r} = 0$. Es handelt sich um eine Kreisbahn, falls $\dot{r} = 0$ für alle Bahnparameter. r muss also ein Minimum haben oder es muss $r_+ = r_-$ sein. Suche die Lösung der Gleichung (*) mit $\dot{r} = 0$ und $F = 1$, so dass r im Minimum liegt, also $r_+ = r_-$ ist.

$$\left(\frac{l^2}{r^2} + E\right) B = c^2 \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} \left[\left(\frac{l^2}{r^2} + E\right) B \right] = 0 \quad (2)$$

(2) liefert r als Funktion von $l^2/E \equiv r_l r_s$ und r_s .

$$\boxed{r = r_l \pm r_l \sqrt{1 - 3\frac{r_s}{r_l}}}$$

Es handelt sich um ein Minimum für das Pluszeichen. Dann beschreibt das Teilchen eine Kreisbahn mit $r = r_+$. Aus Gleichung (1) folgt l^2, E . Der kleinste erlaubte Wert für die Kreisbahn ist der, bei dem der Wurzelausdruck wieder verschwindet. Dann ist $r_l = 3r_s$ und der Bahnradius ist gegeben durch $r = r_l = 3r_s$. Mit einer Kreisbahn kann der SCHWARZSCHILD-Radius also nicht erreicht werden. $\dot{\varphi} = d\varphi/dp$ kann aus l^2 bestimmt werden. Was ist aber eigentlich $\dot{\varphi}$?

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{d\varphi}{dp} \frac{dp}{d\tau}$$

$(d\tau/dp)^2 = E/c^2$ erhält man aus

$$d\tau^2 = A dt^2 - \frac{B}{c^2} dr^2$$

- 1.) $I_i \neq 0$, unabhängig
- 2.) $(I'_1 - iI''_1)^3 = (I'_2 + iI''_2)^2 =$, zwei Invarianten und $\mu \neq 0$
- 3.) $I_i = 0$, $\mu \neq 0$

$$R_{ij} \neq 0$$

Man kann folgenden Tensor konstruieren:

$$C_{ikln} = R_{ikln} - \frac{1}{2}R_{il}g_{kl} + \frac{1}{2}R_{in}g_{kl} + \frac{1}{2}R_{kl}g_{in} - \frac{1}{2}R_{kn}g_{il} + \frac{1}{6}R(g_{il}g_{kn} - g_{in}g_{kl})$$

Für diesen Tensor gilt $C_{ikln}g^{kn} = 0$. Kommen wir nun zur SCHWARZSCHILD-Metrik:

$$R_{iklm} = g_{ij} \left(\partial_l \Gamma^j_{km} - \partial_m \Gamma^j_{kl} \right) + \Gamma^i_{kl} \Gamma^n_{kr} - \Gamma^i_{nk} \Gamma^n_{kl}$$

$$R_{0101} = g_{00} \partial_r \Gamma^0_{r0} + \Gamma_{0r0} \Gamma^1_{12} - \Gamma_{001} \Gamma^0_{10}$$

$$R_{0202} = \frac{R_{0303}}{\sin^2 \theta} = -\frac{r_g(r-r_g)}{2r^2}$$

$$R_{1212} = \frac{R_{1313}}{\sin^2 \theta} = \frac{r_g}{2(r-r_g)}$$

$$R_{2323} = -rr_g - \sin^2 \theta$$

$$R_{0101} R^{0101} = (R_{0101})^2 \cdot (g^{00} g^{11})^2 = \left(\frac{r_g}{r^3} \right)^2$$

4.8 Rotierende Schwarze Löcher (Kerr-Metrik 1963)

4.8.1 Ereignishorizont

Die KERR-Lösung führt wieder zu einem Ereignishorizont. Diesen hatten wir früher als SCHWARZSCHILD-Radius definiert.

$$r_- = \frac{r_s}{2} + \left[\left(\frac{r_s}{2} \right)^2 - a^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit } a = \frac{J}{Mc}$$

Alles, was sich innerhalb dieses Ereignishorizonts befindet, kann kein Signal nach außen abschicken. Die sogenannte Ergosphäre hängt vom Winkel ϑ ab.

$$r_+ = \frac{r_s}{2} + \left[\left(\frac{r_s}{2} \right)^2 - a^2 \cos^2 \vartheta \right]^{\frac{1}{2}}$$

Das ganze Material zwischen dem Ereignishorizont und der Oberfläche der Ergosphäre muss mit dem Schwarzen Loch rotieren. Ein rotierender Körper (insbesondere auch ein rotierendes Schwarzes Loch) führt zu einer scheinbaren Präzession des Internalsystems. Für einen ruhenden Beobachter dreht sich der Fixstern-Himmel. Führen wir eine Dimensionsbetrachtung durch:

$$[J] = M \cdot l^2 \cdot s, \quad \left[\frac{GM}{c^2} \right] = l \Rightarrow \left[\frac{GJ}{c^2} \right] = \frac{l^3}{s}$$

Die einzige Größe, die man mittels Gravitationskonstante, Masse, usw. als Drehfrequenz definieren kann, ist:

$$\boxed{k \frac{GJ}{c^2 R^3} \sim \omega \text{ mit } k = O(1)}$$

An der Erdoberfläche ist $\omega \sim 0,1''/\text{h}$.

4.8.2 Lense-Thirring-Effekt

Betrachten wir nahe beim Schwarzen Loch eine homogene Kugel mit einer Ausdehnung, welche dem SCHWARZSCHILD-Radius entspricht.

$$\omega = \Omega \frac{r_s^3}{5r^3}$$

Kollabiert die Sonne auf $r = r_s$, so ist deren Drehimpuls $\omega \sim 10^5$.

4.8.3 Hawking-Strahlung

Der Versuch ist, eine einheitliche Theorie der Quantenmechanik und Gravitation zu entwickeln. Virtuelle Paarerzeugung:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\sigma} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} E/c \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -E/c \\ 0 \\ -p_3 \end{pmatrix}$$

Falls nahe am Horizont, kann das zweite Photon den Horizont durchlaufen. Dabei wird raum- und zeitartig vertauscht. Das zweite Photon läuft in Richtung Singularität und das erste läuft nach außen. Die Impulsunschärfe beträgt $\Delta p \sim \hbar/r_s$.

$$\frac{kT}{c} \sim \Delta p \sim \frac{\hbar}{r_s}$$

Das Resultat ist dann:

$$T \sim \frac{\hbar c^3}{2kGM} \Rightarrow T = \frac{\hbar c^2}{8\pi kGM} = 6 \cdot 10^{-8} \left(\frac{M_\odot}{M} \right) \text{ K}$$

Aufgrund der Abstrahlung, verliert das Schwarze Loch natürlich Energie. Der Energieverlust (STEFAN BOLTZMANN) ist gegeben durch:

$$\frac{d(Mc^2)}{dt} = \sigma T^4 \cdot \text{Fläche}$$

Damit ergibt sich die Lebensdauer eines Schwarzen Loches:

$$\tau \approx \left(\frac{M}{10^{11} \text{ kg}} \right) \cdot 10^{10} \text{ y}$$

10^{10} y ist das Alter des Universums. (Vergleiche $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg und $M_{Erde} = 6 \cdot 10^{24}$ kg.)

4.8.4 Gravitationswellen

Für schwache Felder lassen sich die Feldgleichungen linearisieren. Wir entwickeln den metrischen Tensor:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \text{ mit } \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Die Koeffizienten $h_{\mu\nu}$ werden als „klein“ angenommen. Man entwickelt dann den Krümmungstensor wie folgt: $R = R^{(0)} + R^{(1)} + R^{(2)} + \dots$

$$R_{\rho\mu\sigma\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu}) + O(\Gamma\Gamma)$$

Wir benötigen wir die Feldgleichungen den RICCI-Tensor:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = (R^{\rho}_{\mu\rho\nu})^{(1)} = \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h^{\rho}_{\rho} - \partial_\nu \partial^{\rho} h_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial^{\rho} h_{\rho\nu})$$

Daraus folgt dann direkt der Krümmungsskalar:

$$R^{(1)} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} = \square h^{\rho}_{\rho} - \partial_\rho \partial_\sigma h^{\rho\sigma}$$

Betrachten wir nun den Einfluss einer Koordinatentransformation (Eichtransformation) $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, wobei $\epsilon^\mu(x)$ klein ist.

$$\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} = \eta_\mu^\lambda + \partial^\lambda \epsilon_\mu$$

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\kappa} g_{\lambda\kappa} \equiv \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \text{ also } h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu$$

Wir fordern nun (Eichbedingung)

$$\boxed{\partial^\rho h_{\rho\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\rho}_{\rho}}$$

womit der erste Term in der Entwicklung des RICCI-Tensors übergeht in

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu}$$

Die Feldgleichungen sind entkoppelt und damit von folgender Form:

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right)$$

Deren Lösung ist gegeben durch (analog zu den retardierten Potentialen aus der Elektrodynamik):

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = -\frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{\left(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu} \right) \left(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wir betrachten zunächst freie Lösungen. $h_{\mu\nu}$ ist ein symmetrischer Tensor mit zehn Komponenten. Die vier Eichbedingungen, welche wir zuvor verwendet haben, reduziert diese Anzahl zunächst auf sechs. Dann haben wir noch einen zweiten Satz von vier Eichbedingungen, nämlich die, welche $\square \varepsilon_\mu = 0$ erfüllen.

$$h_{\mu\nu} \mapsto h'_{\mu\nu} + \partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu \text{ und weiter } \square h_{\mu\nu} = \square h'_{\mu\nu} = 0$$

Damit bleiben $6 - 4 = 2$ unabhängige Komponenten übrig (Helizität $\pm 2!$). Wir suchen nun die Lösung der freien Gleichung $\square h_{\mu\nu} = 0$ mit dem Ansatz $h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}(k) \exp(-ik_\lambda x^\lambda) + e_{\mu\nu}^*(k) \exp(ik_\lambda x^\lambda)$, wobei $k^2 = k_\mu k_\nu \eta^{\mu\nu} = 0$ und $e_{\mu\nu}$ der symmetrische Polarisationsstensor ist. Eichbedingung:

$$2\eta^{\rho\mu} k_\mu e_{\rho\nu} = h_\nu \varepsilon_{\rho\mu} \eta^{\rho\mu}$$

Dies ist letzten Endes eine Bedingung an die lineare Gleichung, die der Polarisationsstensor erfüllen muss. Für eine Wellenausbreitung in x^3 -Richtung setzen wir $k_1 = k_2 = 0$ und $k_0 = -k_3 = k$, also $k_\mu = (k, 0, 0, \pm k)$.

- * $\nu = 0: 2(\varepsilon_{00} + \varepsilon_{30}) = \varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}$
- * $\nu = 1: 2(\varepsilon_{01} + \varepsilon_{31}) = 0$
- * $\nu = 2: 2(\varepsilon_{02} + \varepsilon_{32}) = 0$
- * $\nu = 3: 2(\varepsilon_{03} + \varepsilon_{33}) = -(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})$

Wähle sechs unabhängige Komponenten, also $\varepsilon_{00}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}$.

$$\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{31}, \varepsilon_{02} = -\varepsilon_{32}$$

$$(\nu = 0) + (\nu = 3): \varepsilon_{03} = -\frac{\varepsilon_{13} + \varepsilon_{00}}{2}$$

$$\nu = 3: \varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}$$

Wir konstruieren eine Transformation $\varepsilon^\mu(x) = \delta^\mu \exp(-ik_\lambda x^\lambda)$ und konstantem δ^μ .

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} - ik_\mu \delta_\nu - ik_\nu \delta_\mu$$

Die Eichbedingung bleibt gültig. Dies können wir testen durch $2k^\mu (k_\mu \delta_\nu + \delta_\mu k_\nu) = k_\nu (2k_\mu \delta^\mu)$. Für die sechs verbleibenden $e_{\mu\nu}$ ergibt sich $e'_{11} = e_{11}, e'_{12} = e_{12}$ und weiter:

$$e'_{13} = e_{13} - i(0)\delta_3 + i(-k)\delta_1 \text{ und } e'_{23} = e_{23} - i(0)\delta_3 - i(-k)\delta_2$$

$$e'_{33} = e_{33} + i(k)\delta_3 \cdot 2 \text{ und } e'_{00} = e_{00} - i(k)\delta_0 \cdot 2$$

Für eine passende Wahl von δ_μ können wir diese vier Komponenten verschwinden lassen. Also erhalten wir folgende Form für $h_{\mu\nu}$:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ik(x^3 - ct)]$$

Vergleiche dies mit der Strahlungseichung $(0, e_x, e_y, 0) \exp(ik_\mu x^\mu)$.

4.8.5 Wirkung der Welle auf Testkörper

Benachbarte ruhende Körper bewegen sich auf Geodäten. Ihr Abstand kann sich aber wegen der zeitlich veränderlichen Metrik ändern. (Wirkung der Gezeitenkräfte!) Schauen wir uns nun die Geodätengleichung an:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Aus dem CHRISTOFFEL-Symbol

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\sigma\lambda}}{2} (\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\mu\lambda} - \partial_\lambda h_{\mu\nu})$$

und der Metrik

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[ik(x_3 - x_0)]$$

folgt $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = 0$ für $\mu = \nu = 0$ oder $\mu = \nu = 3$. Anfangsbedingung:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = (c, 0, 0, 0) \Rightarrow \frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} = -\Gamma^\sigma_{00} \cdot c^2 = 0$$

$$\frac{dx^i}{d\tau} = 0 \text{ für alle } \tau \text{ und } \frac{dx^0}{d\tau} = c$$

Daraus ergibt sich $x^i(\tau) = \text{const.}$ und außerdem $x^0(\tau) = c\tau$. Der Abstand zwischen zwei ruhenden Körpern in der (x_1, x_2) -Ebene (mit $x_3 = 0$) ist gegeben durch:

$$dl^2 = (\delta_{mn} - h_{mn}(t)) dx^m dx^n \text{ für } m, n = 1$$

$$h_{mn} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{12} & -e_{11} \end{pmatrix} \exp(-i\omega t) \right]$$

Wir betrachten nun zwei Körper, von denen der eine im Ursprung, also bei $x_1 = x_2 = 0$ sitzt und der andere bei $x_1 = R \cos \varphi$ und $x_2 = R \sin \varphi$. Abstand:

1.) Wähle $e_{11} = h$ und $e_{12} = 0$.

$$\begin{aligned} dl^2 &= R^2 \left(1 - (\cos \varphi, \sin \varphi) \begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \cos(\omega t) \right) = R^2 (1 - h \cos(\omega t) [\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi]) = \\ &= R^2 (1 - h \cos(\omega t) \cos(2\varphi)) \end{aligned}$$

2.) Wähle $e_{11} = 0$ und $e_{12} = h$:

$$dl^2 = R^2 (1 - h \cos(\omega t) \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi) = R^2 (1 - h \cos(\omega t) \sin(2\varphi))$$

Die relative Änderung des Abstands ist gegeben durch:

$$\frac{dl^2}{R^2} = 1 - h \cos(\omega t) \begin{cases} \cos(2\varphi) & \text{für } e_{11} = 0, e_{12} = h \\ \sin(2\varphi) & \text{für } e_{11} = h, e_{12} = 0 \end{cases}$$

4.9 Abstrahlung

Ausgehend von der Gleichung

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2} \eta_{\mu\nu}) \left(\vec{x}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

und machen den Ansatz einer periodischen Quelle:

$$j(\vec{x}', t') = j(\vec{x}') \exp(-i\omega t') \text{ mit } t' = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$$

Sinnvoll ist dieser Ansatz beispielsweise bei einem rotierenden Doppelsternsystem. (Allgemein macht man eine FOURIER-Zerlegung.) Mit diesem Ansatz gehen wir in die Gleichung ein:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu})(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \exp\left(-i\omega t + \frac{i\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right)$$

Die Zeitabhängigkeit von $h_{\mu\nu}$ ist trivial: $\exp(-i\omega t)$. Damit spalten wir diese Zeitabhängigkeit ab und erhalten:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}') = \frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\eta_{\mu\nu})(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \exp\left(\frac{i\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right)$$

An dieser Stelle nehmen wir einige Umformungen vorweg, die später nützlich sein werden. Wegen $\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = 0$ gilt $\omega^2/c^2 h_{00} + \partial_i \partial_j h_{ij} = 0$. Es genügt also h_{ij} zu berechnen. Ferner genügt den $T_{\mu\nu}$ -Term auszuwerten und den Diagonalanteil notfalls per Eichtransformation zu definieren.

4.9.1 Wiederholung: Elektrodynamik

Hier gehen wir aus von der Gleichung $\square \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$.

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \mu_0 \int d\vec{x}' dt' G_R(t - t', \vec{x} - \vec{x}') \vec{j}(t', \vec{x}')$$

Wie zuvor machen wir den Ansatz eines periodischen Stroms, also $j(t', \vec{x}') = j(\vec{x}') \exp(-i\omega t')$, womit folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d^3\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \exp(ik|\vec{x} - \vec{x}'|) \vec{j}(\vec{x}') \quad (*)$$

Die Zeitabhängigkeit wurde also abgespalten. Wir betrachten hier den Fall, dass der Beobachter weit weg von der Quelle entfernt ist, also $\lambda \ll |\vec{x}|$. Selbst wenn man weit weg ist von der Quelle, muss man immer noch zwischen Nah- und Fernzone unterscheiden. Es gibt zwei verschiedene Parameter, nämlich die abgestrahlte Wellenlänge und die Ausdehnung der Quelle.

- * Nahzone: $|\vec{x}'| \ll \lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$
- * Fernzone: $|\vec{x}'| \gg \lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$

Es gilt immer $|\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$, dass also der Beobachter weit entfernt von der Quelle ist. $|\vec{x}'| \cdot k \ll 1$ bedeutet, dass die Quelle klein gegenüber der Wellenlänge ist. In der Fernzone [Nahzone] gilt zusätzlich $|\vec{x}k \gg 1$ [$|\vec{x}|k \ll 1$]. Es ist nun Gleichung (*) auszuwerten. Dazu machen wir folgende Entwicklungen:

$$k|\vec{x} - \vec{x}'| = k|\vec{x}| \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^2} + \dots\right) = k|\vec{x}| \left(1 - \vec{n} \cdot \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}|} + \dots\right)$$

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} \left(1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^2} + \dots\right) = \frac{1}{|\vec{x}|} \left(1 + \vec{n} \cdot \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}|} + \dots\right)$$

Wir suchen den jeweils führenden Term, sowohl bei der Entwicklung der Exponentialfunktion als auch bei $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$

4.9.2 Dipolnäherung

Hier werden nun führende Terme der Entwicklung mitgenommen:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} \text{ und } \exp(ik|\vec{x} - \vec{x}'|) = \exp(ik|\vec{x}|)$$

Damit folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\exp(ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \int d\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}')$$

Dies trägt bei, wenn das Integral über $\vec{j}(\vec{x}) \neq 0$ ist. Formen wir das Integral um;

$$0 = \int d^3\vec{x} \vec{\nabla} \cdot (x_i \vec{j}(\vec{x})) = \int d^3\vec{x} \nabla_k (x_i j_k(\vec{x})) = \int d^3\vec{x} (\delta_{ik} j_k + x_i \nabla_k j_k)$$

Ausgehend von

$$0 = \int d^3\vec{x} (j_i + x_i \nabla \cdot \vec{j})$$

gilt:

$$\int d^3\vec{x} \vec{j}(\vec{x}) = - \int d^3\vec{x} \vec{x} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') = - \int d^3\vec{x}' \vec{x}' \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}')$$

Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) \exp(-i\omega t) - \partial_0 \rho(\vec{x}) \exp(-i\omega t) = 0$ gilt:

$$- \int d^3\vec{x}' \vec{x}' \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}') = -i\omega \int d^3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') \equiv -i\omega \vec{p}$$

\vec{p} ist das Dipolmoment. Damit ist die Dipolnäherung gegeben durch:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \frac{\exp(ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \vec{p}}$$

\vec{A} fällt wie $\exp(ik|\vec{x}|)/|\vec{x}|$ ab. Wir berechnen nun \vec{E} und \vec{B} aus \vec{A} durch Differentiation:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ und } \partial_t \vec{E} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

Wir erinnern uns:

$$\vec{\nabla} f(|\vec{x}|) = f'(|\vec{x}|) \cdot \vec{n} \text{ mit } \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

$$\vec{\nabla} \times (f(|\vec{x}|) \cdot \vec{c}) = \vec{\nabla} f(|\vec{x}|) \times \vec{c}$$

\vec{c} ist ein konstanter Vektor. Mit $f(|\vec{x}|) = \exp(ik|\vec{x}|)/|\vec{x}|$ gilt:

$$f'(|\vec{x}|) = ik \frac{\exp(ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} - \frac{\exp(ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|^2}$$

Für große $|\vec{x}|$ ist der erste Summand der führende Term. Damit erhalten wir:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{i\mu_0\omega}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\exp(ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \vec{p} \right) = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} ck^2 \frac{\exp(ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \vec{n} \times \vec{p}}$$

Nun wieder zurück zur Relativitätstheorie. Analog gilt nun mit $k = \omega/c$ in erster Näherung:

$$\begin{aligned} h_{ij}(\vec{x}) &= -\frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{T_{ij}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \exp\left(i\frac{\omega}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right) = -\frac{4G}{c^4} \int d\vec{x}' \frac{T_{ij}}{|\vec{x}'|} \exp(ik|\vec{x}'|) + \dots = \\ &= h_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{\exp(-i[\omega t - k|\vec{x}|])}{|\vec{x}|} \left(-\frac{4G}{c^4}\right) \int d\vec{x}' T_{ij}(\vec{x}') \end{aligned}$$

Der Term außerhalb des Integrals beschreibt eine Kugelwelle. Verwende nun:

$$\partial_i \partial_j T^{ij}(\vec{x}) = -\frac{\omega^2}{c^2} T^{00}(\vec{x})$$

Multipliziere mit $x^k x^l$ und integriere über \vec{x} :

$$\int d\vec{x} x^k x^l \partial_i \partial_j T^{ij}(\vec{x}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \int d\vec{x} x^k x^l T^{00}(\vec{x})$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\partial_i \partial_j x^k x^l = \partial_i (\delta_j^k x^k + x^k \delta_j^l) = \delta_j^k \delta_i^l + \delta_i^k \delta_j^l$$

und wegen Symmetrie:

$$\int d\vec{x} T^{kl} = \frac{1}{2} \int d\vec{x} x^k x^l \partial_i \partial_j T^{ij}(\vec{x}) = -\frac{\omega^2}{2c^2} \int d\vec{x} x^k x^l T^{00}(\vec{x}) = -\frac{\omega^2}{2} D^{kl}$$

4.9.3 Beispiel: Rotierender starrer Körper

$T^{00}(\vec{x}, t)$ ist dominiert von der Materiedichte $c^2 \rho(\vec{x}, t)$. Was ist die Materiedichte für einen rotierenden starren Körper? Wir bezeichnen im folgenden das körperfeste System mit S' und das System des Beobachters mit S . Für eine Drehung um die z -Achse mit Frequenz Ω gilt: $\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}')$. Die betreffende Transformation ist:

$$x_1 = x'_1 \cos(\Omega t) - x'_2 \sin(\Omega t), \quad x_2 = x'_1 \sin(\Omega t) + x'_2 \cos(\Omega t) \quad \text{und} \quad x_3 = x'_3$$

Der Trägheitstensor ist nun definiert als:

$$I_{ij} = \int d\vec{x}' x'_i x'_j \rho(\vec{x}') \quad \text{also} \quad I = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Wir nehmen an, dass die Drehung um eine Hauptachse stattfindet. (Ohne Einschränkung sei dies die z -Achse.) Hieraus folgt $I_{13} = I_{23} = 0$. Den Trägheitstensor kann man natürlich diagonalisieren, womit nur die Diagonalelemente von Bedeutung sind. Wähle x'_1, x'_2 so, dass $T_{12} = 0$ ist (geeigneter Nullpunkt für t).

$$D^{lk} = \frac{1}{c^2} \int d\vec{x} x^k x^l T^{00}(\vec{x}, t) = \int d\vec{x}' x^k x^l \rho(\vec{x}')$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \int d\vec{x}' (x'_1 \cos(\Omega t) - x'_2 \sin(\Omega t))(x'_1 \cos(\Omega t) - x'_2 \sin(\Omega t)) \rho(\vec{x}') = \\ &= I_{11} \cos^2(\Omega t) + I_{22} \sin^2(\Omega t) - 2I_{12} \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) = \\ &= I_{11} \left(\frac{1}{2}(1 + \cos(2\Omega t)) \right) + I_{22} \left(\frac{1}{2}(1 - \cos(2\Omega t)) \right) = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) + \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \cos(2\Omega t) \end{aligned}$$

Analog folgt:

$$D_{22} = \frac{1}{2}(I_{11} + I_{22}) - \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \cos(2\Omega t)$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \int d\vec{x}' (x'_1 \cos(\Omega t) - x'_2 \sin(\Omega t))(x'_1 \sin(\Omega t) - x'_2 \cos(\Omega t)) \rho(\vec{x}') = I_{11} \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) - I_{22} \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) = \\ &= \frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \sin(2\Omega t) \end{aligned}$$

D_{13} und D_{23} verschwindet und $D_{33} = I_{33}$ ist konstant. Für die Abstrahlung spielt nur der zeitabhängige Anteil eine Rolle:

$$D_{11} - D_{22} = \text{Re} \left[\frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) \exp(-i2\Omega t) \right] \quad \text{und} \quad D_{12} = \text{Re} \left[\frac{1}{2}(I_{11} - I_{22}) i \exp(-i2\Omega t) \right]$$

Der Rest ist gleich Null. Zusammen mit $\omega \equiv 2\Omega$ erhalten wir schlussendlich:

$$h_{ij}(\vec{x}, t) = \frac{\exp(-i\omega t - ik|\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \frac{4G \omega^2 \Delta I}{c^4 2 2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir führen nun eine Dimensionsbetrachtung durch, um ein Gefühl für die Größenordnung der Effekte zu bekommen. Das Trägheitsmoment I hat die Dimension $[ml^2]$. Mit Gm/c^2 als SCHWARZSCHILD-Radius des Systems und ωl als der Umlaufgeschwindigkeit folgt:

$$h \sim \frac{r_s}{|\vec{x}|} \left(\frac{\text{Umlaufgeschwindigkeit}}{c} \right)^2$$

In Bereich des SCHWARZSCHILD-Radius ist die Metrik also sehr stark „verzogen“. Dieses Resultat ist zunächst nur für die Ausbreitung in die 3-Richtung unmittelbar zu interpretieren. In anderen Richtungen müssen wir auf den transversalen Anteil projizieren (analog zum elektrischen Dipol). \vec{n} sei die Ausbreitungsrichtung und $P_{jl} \equiv \delta_{jl} - n_j n_l$ der Projektor, welcher die transversale Komponente eines Vektors \vec{d} herausprojiziert. Also steht $P_{jl} d_l$ senkrecht zu \vec{n} . Versuch: $\tilde{D}_{jn} = D_{jl} D_{lm} P_{mn}$ ist „transversal“. Für die Spur gilt:

$$\tilde{D}_{jj} = P_{jl} D_{lm} P_{mj} = P_{ml} D_{lj} \neq 0$$

P_{jn} ist transversal! Aus $P_{jj} = 2$ folgt:

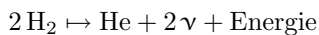
$$P_{jl} D_{lm} P_{mn} - \frac{1}{2} P_{jn} P_{ml} D_{lm} \equiv D_{ijn}^T$$

Dies ist spurlos und transversal! Was ergibt sich für $\vec{n} = (0, 0, 1)$, was verschwindet für $\vec{n} = (0, 1, 0)$?

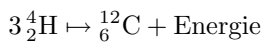
Kapitel 5

Entstehung von Neutronensternen und Schwarzen Löchern

Wir wollen schwere Sterne der Masse $M \approx 10 M_{\odot} - 20 M_{\odot}$ betrachten. Durch Gravitationsanziehung findet eine Kontraktion der Materie statt, womit sich das System erhitzt. An einem bestimmten Punkt setzt dann die thermonukleare Fusion ein, in der Wasserstoff zu Helium fusioniert:



Danach findet eine erneute Verdichtung statt, woraus ein Anstieg der Temperatur und des Druckes resultiert.



Dies geht solange bis der Kern mit größter Bindungsenergie pro Nukleon entsteht. Dabei handelt es sich um Eisen (Fe). Dann werden in einer Supernova die äußeren Schichten abgespalten und zurück bleibt ein Weißer Zwerg mit typischem Radius $R = 5000 \text{ km}$, in dem das Plasma extrem dicht ist. Die Dichte eines Weißen Zwerges liegt bei etwa $10^{11} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ und die Temperatur beträgt 10^9 K . Die Energie der Elektronen ist hier viel höher als die Bindungsenergie. Es besteht ein Gleichgewicht zwischen Gasdruck und PAULI-Prinzip. Wer von beiden gewinnt?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir einen Stern mit Masse M , Radius R und N Elektronen. Der Abstand zwischen den Elektronen ist dann etwa gegeben durch $\Delta x = R/N^{\frac{1}{3}}$ (PAULI-Prinzip!) und der Impuls dieser Elektronen ist

$$p = \frac{\hbar}{\Delta x} \approx \hbar \cdot \frac{N^{\frac{1}{3}}}{R}$$

Die Energie im nichtrelativistischen Fall pro Elektron hat die Größenordnung

$$E_{nrel} = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 N^{\frac{2}{3}}}{2m R^2}$$

und darüberhinaus ist die relativistische Energie pro Elektron gegeben durch:

$$E_{rel} = pc = \hbar \frac{N^{\frac{1}{3}} c}{R}$$

Ein solches Elektronengas bezeichnet man auch als „entartet“. Die Gravitationsenergie E_G pro Nukleon berechnet sich nach:

$$E_G = -\frac{GNm_N^2}{R}$$

Wir nehmen an, dass die Kompression des Gases adiabatisch verläuft (nicht exotherm). Für den Druck ergibt sich nun allgemein:

$$p = \frac{d(NE)}{dV} \sim \frac{N}{R^2} \frac{dE}{dR}$$

Damit folgt, dass der Druck des relativistischen Elektronengases P_{rel} proportional zu R^{-4} bzw. $\rho^{\frac{4}{3}}$ ist und der des nichtrelativistischen Elektronengases proportional zu R^{-5} bzw. $\rho^{\frac{5}{3}}$. Für die Gravitation folgt $P_G \sim R^{-4} \sim$

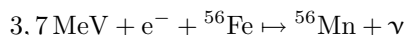
$\rho^{\frac{4}{3}}$. Im Falle niedriger Dichte gilt $P_{nr} > |P_G|$ für **geeignet kleine** R . Also überwiegt dann der PAULI-Druck der relativistischen Elektronen. Im Falle einer hohen Dichte ist die Situation komplett anders. Dann ist $P_{rel} \sim P_G$ (gleiches Potenzgesetz). Für kleine R findet dann ein Kollaps zum Neutronenstern statt. Der Grenzfall liegt bei $E_{rel} = |E_G|$, also:

$$\frac{\hbar N^{\frac{1}{3}} c}{R} = \frac{GNm_n^2}{R} \Leftrightarrow N^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar c}{Gm_n^2} \Rightarrow N_{max} = \left(\frac{\hbar c}{Gm_n^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{m_{\text{PLANCK}}}{m_n} \right)^3 = 2 \cdot 10^{57}$$

Dies ist eine Bedingung für die Anzahl N der Nukleonen bei vorgegebener Masse des Nukleons.

$$M_{\text{CHANDRASEKHAR}} = N_{max} \cdot m_n = 1,4 M_{\odot}$$

Diese Größenordnung ist also typisch für Sternmassen. (Diese Betrachtung ist nur qualitativ!) Beim Kollaps wächst die Energiedichte.



Mikroskopisch: $E + e^- + p \mapsto n + \nu$. Bei einem Neutronenstern laufen diese Prozesse im Millisekundenbereich ab. Es ändert sich also das Material, aus dem der Stern besteht. Der PAULI-Druck wird durch das Neutronengas hervorgerufen.

Ein Gravitationskollaps findet genau dann statt, wenn M größer als die CHANDRASEKHA-Masse ist und die Neutronen relativistisch sind.

$$R \leq \frac{\hbar}{m_n c} N_{max}^{\frac{1}{3}}$$

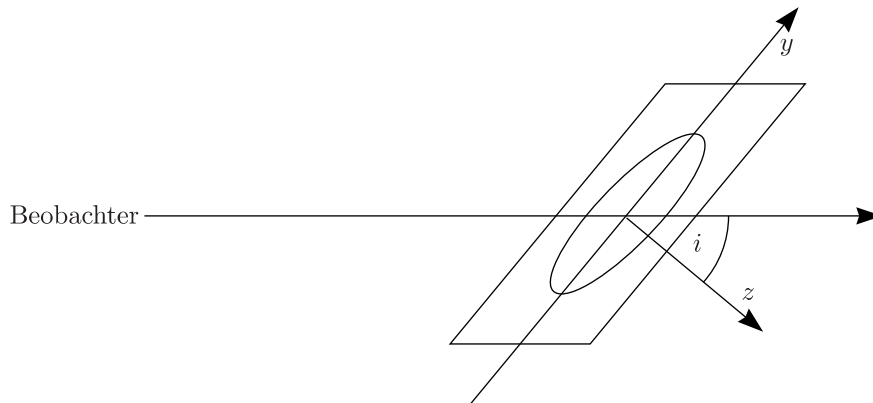
Der typische Zahlenwert liegt bei 5000 km für $m_f = m_e$ und bei etwa 3 km für $m_f = m_n$. Die besten Rechnungen liefern als Masse für einen Neutronenstern $M < 3,5 M_{\odot}$ und den Radius $R = 10 - 15$ km. Bis 1990 wurden sieben Messungen von binären Systemen durchgeführt, woraus die Neutronensternmasse $M \approx 1,5 M_{\odot} \pm 1 M_{\odot}$ berechnet wurde. Es gilt jedoch immer $M < 3,5 M_{\odot}$.

Kapitel 6

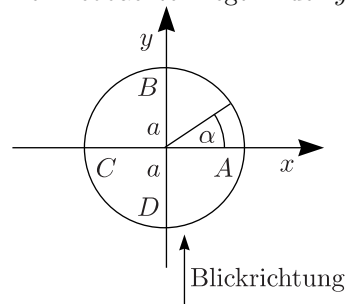
Beobachtung von PSR1913+16

Die Periode des Doppelsternsystems beträgt 59 ms und die Variation liegt bei $\pm 80 \mu\text{s}$ im Zyklus von 7,75 h. Aber Pulsare haben im allgemeinen eine externe Zeitstabilität. Beispielsweise liegt bei PSR1937+21 die Periode bei 1,5578 ms mit $\delta\nu/\nu = 10^{-19}$. Es gibt kein Signal des Begleiters. Über längere Zeit verschiebt sich das Muster.

6.1 Kreisbewegung



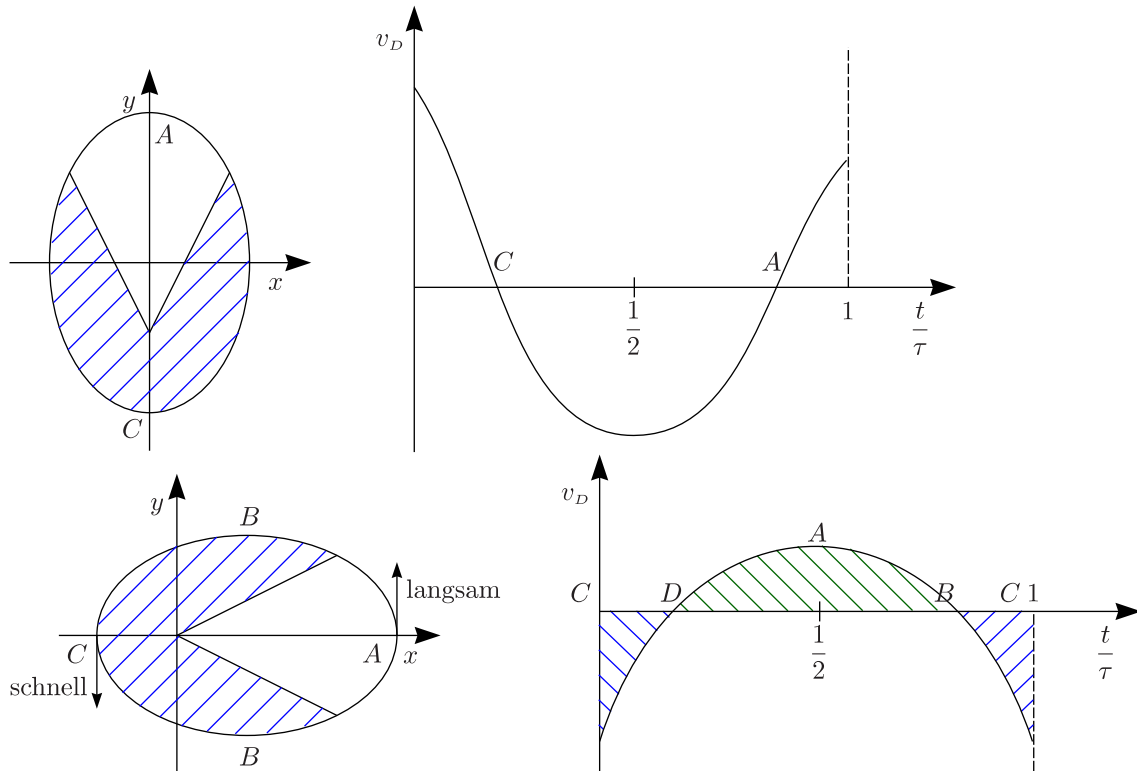
Der Beobachter liegt in der y - z -Ebene und x steht senkrecht zur Zeichenebene.



Integrieren wir die DOPPLERGESCHWINDIGKEIT, so ergibt sich:

$$\int_{\text{hin}} v_D(t) dt = \int_{\text{rück}} v_D(t) dt = v \sin(i) \int \cos(\alpha(t)) dt = v \sin(i) \int \cos(\alpha) \frac{dt}{d\alpha} d\alpha = v \sin(i) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) \frac{a}{v} d\alpha = 2a \sin(i)$$

6.2 Ellipsenbahn



Auch hier gilt:

$$\int_{\text{hin}} v_D(t) dt = \int_{\text{rück}} v_D(t) dt$$

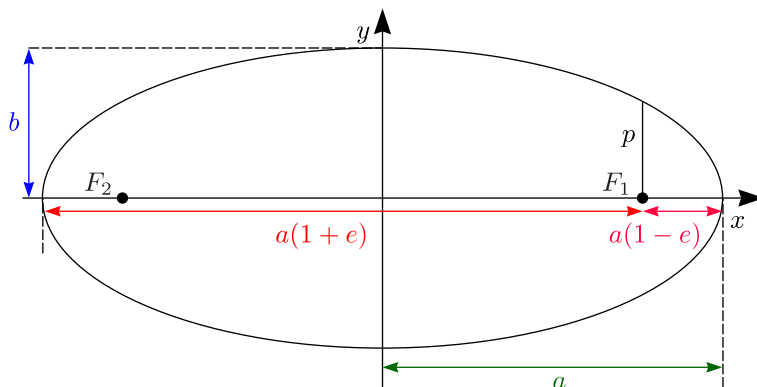
also sind die beiden Flächen unter der Kurve (grün und blau schraffierte Fläche) gleich. Das System bewegt sich auf einer elliptischen Bahn, deren Lage sich im Laufe der Zeit ändert.

- * Beobachtung: stark exzentrische Bahn
- * relativ schnelle Perihel-Präzession
- * Erinnerung:

$$\dot{\varphi}_{\text{Perihel}} = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)\tau c^2}$$

a ist hierbei die große Halbachse. Für eine Ellipse bestehen wir Zusammenhänge

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{und} \quad l = a(1 - e^2)$$



6.2.1 Bestimmung der Bahnparameter

Wir verwenden:

- 1.) Die Flächengeschwindigkeit ist konstant, also ist $r\dot{\varphi}m$ der konstante Drehimpuls. Aufgrund der Drehimpulserhaltung gilt also $r_A\dot{\varphi}_A = r_C\dot{\varphi}_C$. Damit folgt:

$$\frac{v_A}{v_C} = \frac{1-e}{1+e}$$

An den Punkten C (Aphel) und A (Perihel) ist $\dot{r} = 0$.

- 2.) Durch Integration der DOPPLERgeschwindigkeit erhält man die transversale Ausdehnung. (Alternativ: Die Zahl der Pulse erhöht [verringert] sich, wenn der Pulsar sich entfernt [näher].) Zusammen erhält man $\tau = 7,75$ h, $a \sin(i) = 2,34$ ls $\approx 700\,000$ km, $e = 0,617$ und $\dot{\varphi}_{\text{Perihel}} = 4,23''$ pro Jahr.

Wir gehen aus vom Gravitationsgesetz:

$$G \frac{MM'}{(a+a')^2} = \frac{4\pi^2 M' a'}{\tau^2} \Leftrightarrow G \frac{M}{(a+a')^2} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} a' \text{ und } G \frac{MM'}{(a+a')^2} = \frac{4\pi^2 M a}{\tau^2} \Leftrightarrow G \frac{M'}{(a+a')^2} = \frac{4\pi^2}{\tau^2} a$$

Durch Addition ergibt sich dann:

$$\frac{G(M+M')}{(a+a')^3} = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2$$

M und a sind Masse und große Halbachse des Pulsars und M' und a' die entsprechenden Größen vom Begleiter. Der Schwerpunktsatz besagt:

$$aM = a'M' \Rightarrow (a+a') = \frac{M+M'}{M'} a \Rightarrow a^3 \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \frac{(M')^3}{(M+M')^2}$$

$$(a \sin(i))^3 \frac{\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}{G} = \frac{(M' \sin(i))^3}{(M+M')^2} \text{ mit } a \sin(i) = \int v_D$$

- 3.) Die beobachtete Frequenz des Pulsars an den Punkten A und C (Perihel und Aphel) ist verschieden. Dies gilt auch bei senkrechter Aufsicht (also ohne DOPPLEReffekt).

- a.) Änderung aufgrund der Rotverschiebung durch das Gravitationspotential

Die Pulsarperiode ist gegeben durch:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{2GM'}{rc^2}\right)$$

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e} \approx 4 \text{ mit } \frac{GM'}{ac^2} \approx 10^{-6}$$

- b.) Schnelle Bewegung bei A und langsame bei C

Die LORENTZdilatation wirkt sich mit einem Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ aus.

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{1+e}{1-e} \approx 4 \text{ mit } \frac{v}{c} \sim 10^{-3}$$

Damit wächst die Periode um etwa 4 ms. Hieraus ist es dann möglich, M' zu berechnen.

$$M = 1,42(3) M_{\odot}, M' = 1,40(3) M_{\odot} \text{ und } \sin(i) = 0,76(14)$$

Weiter beobachtet man eine langsame Abnahme der Umlaufzeit von 7,75 Jahren, $d\tau/dt = -2,40(9) \cdot 10^{-12}$. Das ist eine Konsequenz der Gravitationsstrahlung. Die Abstrahlungsleistung für eine Kreisbahn ist gegeben durch:

$$L = \frac{G}{5c^5} 128\omega^6 M^2 a^4 \text{ mit Korrekturfaktor } \frac{1 + 73\frac{e^2}{24} + \frac{37}{96}e^4}{(1-e^2)^{\frac{7}{3}}}$$

Die Energie für zwei Objekte mit $M_1 = M_2 = M$ ist gegeben durch:

$$E = Mv^2 - \frac{GM^2}{2a}$$

Bei der Bewegung herrscht ein Gleichgewicht; die Zentrifugalkraft ist gleich der Gravitationskraft:

$$M \frac{v^2}{a} = \frac{GM^2}{4a^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{4a} \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{a^2} = \frac{GM}{4a^3} \text{ und } E = -\frac{GM^2}{4a} = -\frac{GM^2}{4} \left(\frac{4\omega^2}{GM} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Die relative Änderung der Energie lautet also wegen $E \sim \omega^{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{dE}{E} = \frac{2}{3} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2}{3} \frac{d\tau}{\tau} \Rightarrow \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{3}{2} \frac{dE}{E} = -\frac{3}{2} \frac{L}{E} = -\frac{768}{5} \frac{\omega^6 a^5}{c^5}$$

* Experimentell: $\frac{d\tau}{dt} = -2,40(9) \cdot 10^{-12}$

* Vorhersage: $\frac{d\tau}{dt} = -2,403(2) \cdot 10^{-12}$

$$\frac{d\left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)}{d(t\omega_s)} = \frac{24}{5} \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^{\frac{11}{3}}$$

Wir führen die neuen Variablen $y = \omega/\omega_s$, $x = t\omega_s$ ein und erhalten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{24}{5} y^{\frac{11}{3}}$$

Durch Trennung der Veränderlichen ergibt sich die Lösung dieser Differentialgleichung:

$$\omega = \omega_s \left[\frac{64}{5} (C - t\omega_s) \right]^{-\frac{3}{8}}$$

Mit der Anfangsbedingung $\omega = \omega_0$ bei $t = 0$ gilt schließlich:

$$\omega = \omega_s \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^{-\frac{8}{3}} - \frac{64}{5} t\omega_s \right]^{-\frac{3}{8}}$$

Das System kollabiert, wenn der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet. Für

$$\omega_s = \frac{c}{r_s} = \frac{c}{4,5 \text{ km}} \text{ und } \omega_0 = \frac{2\pi}{7,75 \text{ h}}$$

ist dies der Fall bei $t = 10^{11}$ Jahren. Das System ist also ziemlich stabil. Nun interessieren wir uns dafür, wie sich das Spektrum für große Zeitdauern verhält. Das Frequenzspektrum, also die abgestrahlte Leistung als Funktion von ω wollen wir berechnen.

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{128}{5} \frac{GM^2}{c^5} \omega^6 a^4$$

Nach dem dritten KEPLERSchen Gesetz gilt

$$\left(\frac{2a}{c} \right)^3 = \left(\frac{r_s}{c} \right) \omega^{-2}$$

und damit folgt:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{4}{5} M c^2 \omega_s^{-\frac{7}{5}} \omega^{\frac{10}{3}}$$

Unter Verwendung von $\frac{d\omega}{dt} = \frac{24}{5} \omega^{\frac{11}{3}} \omega_s^{-\frac{5}{3}}$ gilt:

$$\frac{dL}{d\omega} = \frac{dL}{dt} \frac{1}{\frac{d\omega}{dt}} = -\frac{M c^2}{6} \omega_s^{-\frac{2}{3}} \omega^{-\frac{1}{3}}$$

Geht man zu sehr hohen Frequenzen, wird die Abstrahlung gedämpft. (Das Zeitintervall, in dem diese Frequenz von Bedeutung ist, ist sehr kurz.) Das Potenzgesetz ist relativ flach. Bei der Verschmelzung zweier Neutronensterne gelte $a_{min} = 15 \text{ km}$, $r_s = 4,5 \text{ km}$ und damit

$$\omega_{max} = \left(\frac{r_s}{c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2a}{c} \right)^{-\frac{3}{2}} = 4 \text{ kHz}$$

6.3 Auswertungen/Messung von Gravitationswellen

Dazu betrachten wir folgende Illustration:

Die Metrik sei $g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$. Wir nehmen an, dass sich die Metrik in der Umgebung der Punkte A und B nicht sehr stark ändert. Für den Abstand zwischen A und B ergibt sich (für kleine ξ und $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$):

$$\xi' = [g_{11}(t, 0, 0, 0)]^{\frac{1}{2}} \xi = \left(1 + \frac{1}{2} h_{11}(t, 0, 0, 0)\right) \xi$$

Es seien h_+ und h_{\otimes} zwei Polarisationsmoden:

$$h_{ij} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz) + h_{\otimes} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz)$$

Die relative Änderung des Abstands ist:

$$\varepsilon = \frac{\xi' - \xi}{\xi} = \frac{h_{11}(t, 0, 0, 0)}{2} = \frac{h_+}{2} \cos(\omega t)$$

Wir betrachten Licht, welches bei $x = -\xi/2$ emittiert wird, zur Zeit t den Punkt $x = 0$ erreicht und bis $x = \xi/2$ weiterläuft. Die Weglänge $l(t)$ ist:

$$\begin{aligned} l(t) &= \int_{-\xi/2}^{\xi/2} dx \left[g_{11} \left(t + \frac{x}{c}, \vec{\sigma} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \approx \int_{-\xi/2}^{\xi/2} dx \left(1 + \frac{1}{2} h_{11} \left(t + \frac{x}{c}, \vec{\sigma} \right) \right) = \xi + \frac{1}{2} h_+ \int_{-\xi/2}^{\xi/2} \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) dx = \\ &= \xi + \frac{h_+}{2k} \left[\sin \left(\omega t + \frac{k\xi}{2} \right) - \sin \left(\omega t - \frac{k\xi}{2} \right) \right] = \xi + \frac{h_+}{k} \cos(\omega t) \sin \left(\frac{k\xi}{2} \right) \quad \text{mit } k = \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

$$\Delta l = \frac{h_+}{k} \sin \left(\frac{k\xi}{2} \right) \cos(\omega t)$$

Das Optimum für ξ erhalten wir aus der Bedingung:

$$\sin \left(\frac{k\xi}{2} \right) \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\pi}{k}}$$

In y -Richtung gilt $\Delta l_y = -\Delta l_x$ für \oplus -Polarisation. Die Größenordnung liegt bei $k = 2\pi/\lambda$.

$$\delta = \Delta l_x - \Delta l_y = 2 \frac{h_+ \lambda}{2\pi} \sin \left(\frac{\pi\xi}{\lambda} \right)$$

Mit $\lambda = 150 \text{ km}$, $h = 10^{-21}$ gilt $\delta = 5 \cdot 10^{-20} \text{ km} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ fm}$. (1 fm ist die Größenordnung des Protonradius!)

6.3.1 Detektoren

Forderung: $l_0 = \lambda/2$

- * Ligo (USA): 4 km
- * Virgo (Italien und Frankreich): 3 km
- * Geo 600 (Deutschland, Hannover): 600 m
- * Lisa (im Weltraum): $5 \cdot 10^6 \text{ km}$ (2010?)

6.3.2 Abschätzung der Empfindlichkeit

Zwischen der Amplitude in x - und y -Richtung sei ein Gangunterschied (bzw. Phasenverschiebung) Δ aufgeprägt. Die Intensität ist

$$I = \left| A + A \exp \left(i \frac{2\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right) \right|^2$$

$\lambda = \lambda_{em}$ ist die Wellenlänge des Lasers. (Ist die Phasendifferenz gleich Null, so hat man konstruktive Interferenz, bei $\Delta = \lambda/2$ destruktive Interferenz.) Die Änderungen sind schwer zu beobachten:

$$I = A^2 \left[\left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda} \right) \right)^2 + \sin^2 \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right)^2 \right] = A^2 2 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right) \right] = 4A^2 \cos^2 \left(\frac{\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right)$$

Was uns nun interessiert, ist das Photonrauschen. Dazu betrachten wir die Anzahl der Photonen:

$$N = N_{max} \cos^2 \left(\frac{\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right)$$

Nun ändert sich Δ um $d\Delta$:

$$dN = N_{max} \frac{\pi}{\lambda_{em}} \sin \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right) d\Delta$$

Wie viele Photonen brauche ich, um dies zu messen?

$$d\Delta = \frac{N^{\frac{1}{2}}}{N_{max} \frac{\pi}{\lambda_{em}} \sin \left(\frac{2\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right)}$$

$d\Delta$ wird klein, wenn $\sin(2\pi\Delta/\lambda_{em}) = 1$ wird. Dies bedeutet nichts anderes als $\Delta = \lambda_{em}/4$. Dann ist

$$\cos^2 \left(\frac{\pi\Delta}{\lambda_{em}} \right) = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

Am Arbeitspunkt ist $N \equiv N_0 = N_{max}/2$.

$$\boxed{d\Delta = \frac{N_0^{\frac{1}{2}} \lambda_{em}}{2N_0 \pi} = \frac{\lambda_{em}}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{N_0}}}$$

N_0 ist die Anzahl der Photonen am Arbeitspunkt. Die Länge der Meßstrecke ist $l_0 = \lambda/2$ und die Messdauer liegt bei $\Delta\tau \equiv l_0/c = \lambda/(2c)$. Damit folgt für die Messgenauigkeit:

$$d\Delta = \left(\frac{\hbar\lambda_{em}^2 \cdot 2\pi\nu_{em} \cdot 2c}{P(2\pi)^2\epsilon\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\hbar c\lambda_{em}\nu_{gr}}{\pi\epsilon P} \right)^{\frac{1}{2}}$$

P ist hierbei die Leistung und ϵ die Effizienz des Lasers. Die relative Änderung ist gegeben durch:

$$h = \frac{d\Delta}{l_0} = \frac{d\Delta}{\frac{\lambda_{gr}}{2}} = 2 \left(\frac{\hbar\lambda_{em}\nu_{gr}^3}{\pi c\epsilon P} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \left(\frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ W s}^2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot (10^3 \frac{1}{\text{s}})^3}{\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,3 \cdot 100 \text{ W}} \right)^{\frac{1}{2}} = 2,7 \cdot 10^{-21}$$

Insofern hat man zumindest eine Chance, die durch Photonrauschen vorgegebenen physikalischen Grenzen zu erreichen.