Mitschrieb zu Nichtlineare σ-Modelle und Supersymmetrie:

Dr. Lang

Vorlesung Sommersemester 2005

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 30. Oktober 2006

Mitschrieb der Vorlesung Nichtlineare σ-Modelle und Supersymmetrie
von Herrn Dr. Lang im Sommersemester 2005
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einleitung

1.1.1 σ-Modell (Lineares σ-Modell)

Schwinger: 1957, Gell-Mann und Levy: 1960, starke Wechselwirkung, Stromalgebra
Die Pionen $\pi^{\pm}$, π^0 bilden ein Isospintriplett und die Nukleonen ein Isospindublett. Die Symmetrie, welche den Isospin beschreibt, ist die SU(2). Mit effektiven (phänomenologischen) Wirkungen beschrieb man Prozesse, welche eigentlich nicht bekannt waren.

$$m_\pi \sim 140\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\ \left(1\,\mathrm{GeV} = 10^9\,\mathrm{eV} \Leftrightarrow 0,2\,\mathrm{fm} = 0,2\cdot 10^{-15}\,\mathrm{m \ nach\ Heisenberg}\right)$$

$$m_\mathrm{p} \approx 938\,\mathrm{MeV} \approx 1\,\mathrm{GeV}$$

Bei der Pion-Nukleon-Streuung treten Resonanzen auf. Eine wichtige Resonanz ist $m_\varrho \approx 700\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$. Die Symmetrie, welche dieser Theorie zu Grunde lag, war die $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$-Symmetrie. Man spricht hierbei auch von der chiralen Symmetrie. Dabei handelt es sich um Lie-Gruppen. Wegen der Bedingung $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ gibt es drei reelle Parameter. Alle Matrizen der Gruppe SU(2) lassen sich darstellen wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \text{ mit } \overline{\alpha} \equiv \alpha^* \text{ und } |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

Die Gruppenstruktur „lebt“ auf der Oberfläche einer vierdimensionalen Kugel, also auf einer dreidimensionalen Hyperfläche.

$$\mathrm{SU}(2)\underset{\simeq}{\mathrm{lokal}}\mathrm{SO}(3)$$

Eine Gruppe SU(n) besitzt n^2-1 und eine Gruppe SO(n) $\frac{n(n-1)}{2}$ Generatoren. Die Gruppe $\mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ besitzt folglich sechs reelle Parameter. Diese Gruppe hat mit der Drehgruppe in vier Dimensionen, also SO(4) zu tun. Die Matrizen der Gruppe SO(4) wirken auf vierdimensionale Vektoren (Quartette) der Form:

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

$$\Sigma(x) = \sigma(x)\mathbf{1}_2 + \frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{\pi}(x)$$

x sei Element des Minkowski-Raums in vier Dimensionen, den wir mit M_4 bezeichnen wollen. Wir verwenden die Metrik (1, -1, -1, -1). Das Multiplett transformiert linear unter SO(4). Die Transformation für ein typisches Isospin-Triplett lautet:

$$\phi_i' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}\right)\phi_i$$

Wir gehen nun aus von folgender Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_a\phi_I\partial^a\phi_I - \frac{m^2}{2}\phi_I^2 - \frac{\lambda}{4!}(\phi_I^2)^2 + \ldots \text{ mit } \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$$

Die ϕ sind bosonische Felder mit Spin 0. Würde man höhere Terme hinzunehmen, so wäre die Quantenfeldtheorie, die man damit betreibt, nicht renormierbar (nicht renormierbare Kopplungen). Die Wirkung erhält man durch Integration über vier Dimensionen:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L} \text{ wobei } [S] = 0 \text{ wegen } \hbar = c = 1$$

Man müsste bei höheren Termen Kopplungen mit negativen Dimensionen einführen. Man führte nun unter dem Begriff sanfte Brechung einen weiteren Term ein, nämlich $\mathcal{L} = c\sigma(x)$. Dieser Term ist isospininvariant, jedoch nicht invariant unter SU(2) $\otimes$ SU(2). Die Pionen sind unter Paritätstransformationen pseudoskalare Teilchen.
Stromalgebra: PCAC (partially conserved **axial** current)

$$\partial_a \vec{A}^a(x) \sim F_\pi m_\pi \vec{\pi}(x)$$

Geht die Pionmasse gegen Null, so ist der Axialstrom erhalten und man hat wieder die SU(2)$\otimes$ SU(2)-Symmetrie. F_π ist die Zerfallskonstante des Pions, nach $\pi \mapsto \mu\overline{\nu}_\mu$. Man bezeichnet solche Zerfälle als semileptonisch, weil teilweise stark und schwach wechselwirkende Teilchen vorkommen.

$$G_{\pi N} = \frac{2m_N g_A}{F_\pi}$$

g_A ist die Kopplungskonstante des schwachen β-Zerfalls $\mathrm{n} \mapsto \mathrm{p} + \mathrm{e} + \overline{\nu}_\mathrm{e}$. F_π liegt bei etwa 184 MeV, g_A bei 1,257 und $G_{\pi N}$ bei etwa 13,5 (links 12,7). Man kann zeigen, dass die Theorie renormierbar ist. Aber es war nicht klar, dass keine neuen chiralen Symmetriebrechungsterme in höheren Ordnungen eingeführt wurden. Dies ist im nachhinein der Grund, warum man von der sanften Brechung spricht. Der Beweis wurde von B. W. Lee (1969) und Callan, Symanzik (1970) erbracht (Ward-Takashi-Identitäten).
Nambu (1960) und Nambu-Jona-Lasinio haben sich mit dem linearen σ-Modell beschäftigt und festgestellt, dass spontan gebrochene Symmetrien auftauchen. Goldstone hat 1960 die Goldstone-Felder eingeführt, $\vec{\pi}$ als Goldstone-Boson der spontanen Symmetriebrechung von SU(2) $\otimes$ SU(2) auf SU(2)-Isospinraum.

Beispiel: Stab, „Mexikanerhutpotential“ (spontane Symmetriebrechung):

Nimmt man einen bestimmten Punkt des Minimums, so ist die Symmetrie spontan gebrochen. Eine spontane Brechung von kontinuierlichen Symmetrien führt zu flachen Richtungen im Potential. (GoldstoneEtal) Dieses Tal entspricht einer masselosen Anregung. Die Symmetrie U(1) (Drehsymmetrie) ist hier spontan gebrochen; es gibt keine Restsymmetrie. SU(2) $\otimes$ SU(2) brechen spontan. Die Symmetrie wird heruntergebrochen auf SU(2)-Symmetrie (Isospin).

$$\phi_I^0 = (0, 0, 0, \sigma)^\mathsf{T}$$

Es bleiben dann noch drei reelle Parameter die sogenannten Goldstone-Richtungen. Ist G eine kompakte Lie-Gruppe, die spontan gebrochen wird zur neuen Lie-Gruppe $H < G$, so ist die Zahl der Goldstonebosonen dim$G$ − dim$H$.
Ab 1960 überlegt man sich, ob eine Theorie, welche die Quarks miteinbezieht, SU(2) $\otimes$ SU(2)-Symmetrie hat (Gell-Mann, 8-facher Weg, Zweig). Diese Theorie ist die Quantenchromodynamik QCD (nach Gell-Mann, H. Fritzsch, Leutwyler (1973)). Man konnte die starke Wechselwirkung mit Quarks u, d (s) (c, s, t) beschreiben. Ist die chirale Symmetrie sanft gebrochen?
Von der Phänomenologie war es nötig, dass σ im Vektor $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_2, \sigma)^\mathsf{T}$ zu beseitigen (auch $g_A = 1$). Dies leistet das nichtlineare σ-Modell. Die Lagrange-Funktion soll immer noch die SU(2) $\otimes$ SU(2)-Symmetrie aufweisen. Man kompaktifiziert die ϕ_I-Werte auf S^3: $\phi_I^2 = 1$ (vierdimensionale Kugeloberfläche). Dies ist beispielsweise möglich durch die stereographische Projektion:

$$S^3 \mapsto \overline{\mathbb{R}^3},\ (S^2 \mapsto \overline{\mathbb{C}})$$

Dadurch sieht die Lagrange-Funktion folgendermaßen aus:

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^4x\, D_a\vec{\pi} D^a\vec{\pi},\ (D_a\vec{\pi}) = \frac{\partial_a\vec{\pi}(x)}{1 + \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{F_\pi^2}}$$

$$\mathcal{L}_\pi = \int \mathrm{d}^4x\ (\partial_a\vec{\pi}\partial^a\vec{\pi} + \partial_a\vec{\pi} + \partial^a\vec{\pi} + \ldots)$$

Der springende Punkt sind die Goldstonefelder $\vec{\pi}$ mit $\partial_a\vec{\pi}$. Goldstonefelder auf (Rechts-)Nebenklassen G/H

1.2 Lineares σ-Modell

Dieses wird beschrieben durch eine LAGRANGEdichte der Form:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_a\phi_I\partial^a\phi_I - \frac{m^2}{2}\phi_I^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi_I^2)^2 + \dots$$

Die zugehörige LIE-Gruppe ist SU(2) $\otimes$ SU(2) $\underset{\text{lokal}}{\simeq}$ SO(4). x^0 und x^i mit $i = 1, 2, 3$ sind Element vom MINKOWSKI-Raum M_4 mit der Metrik $\eta_{ab} \stackrel{\wedge}{=} (1, -1, -1, -1)$, wobei $I = i$, 4 und $i = 1, 2, 3$. Höhere Terme führen zu einer nichtrenormierbaren Theorie und werden deshalb weggelassen. Es ist $\phi_I \stackrel{\wedge}{=} (\pi_I, \sigma)$. Durch Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^4$ wollte man das σ loswerden, da dies in der phänomenologischen Theorie nicht begründet werden konnte. Man packt die Werte der Felder auf eine Kugeloberfläche im vierdimensionalen Raum (siehe Blatt 1, Aufgabe 2, stereographische Projektion $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$). Außerdem wird $\phi_I^2 = 1$ gefordert. Die Pion-Felder $\vec{\pi}$ werden nichtlinear transformiert bezüglich der chiralen Symmetrie SU(2) $\otimes$ SU(2), aber bezüglich der Isospinuntergruppe SU(2) transformiert es immer noch linear. Man spricht von „Realisierung". In dieser Parametrisierung findet man:

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \partial_a\vec{\pi}\partial^a\vec{\pi} \mapsto S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, D_a\vec{\pi}D^a\vec{\pi} \text{ mit } D_a = \frac{\partial_a\vec{\pi}(x)}{1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F_\pi}}$$

D_a ist die kovariante Ableitung bezüglich der SU(2) $\otimes$ SU(2). Diese Theorie ist nicht renormierbar.Es gibt auch andere Parametrisierungen. Allgemeiner: G (kompakte, einfach zusammenhängende LIE-Gruppe) sei eine Transformationsgruppe. Die Darstellungen sind im allgemeinen nichtlinear, aber so, dass $H < G$ linear dargestellt wird. COLEMAN, WESS, ZUMINO, CALLAN haben dies in den späten 60er Jahren studiert (CWZ, CCWZ). Es sei G/H, dann nennt man gH, wobei g eine feste Zahl $\in G$ ist, eine Rechtsnebenklasse (in der Mathematik jedoch Linksnebenklasse). Ein bestimmter Vakuumerwartungswert bricht beispielsweise die U(1)-Symmetrie des „Mexikanerhutpotentials".

1.3 Nichtlineares σ-Modell

Es gibt eine Abbildung der $x^a \in M_4$ (Raum-Zeit) durch eine Abbildung ϕ_i mit $i = 1, \dots, n$ auf eine Mannigfaltigkeit M_n. Die GOLDSTONEfelder (G/H: dim G - dim H, $3 + 3 - 3 = 3$ Pionen) ϕ^i mit $i = 1, \dots, n$ sind reelle Skalarfelder (Spin 0).

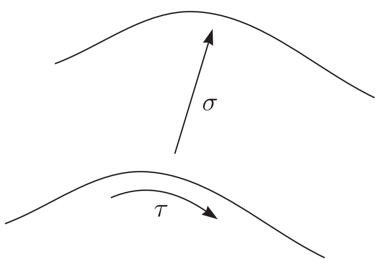
$$S[\phi] = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \partial_a\phi^i\partial^a\phi^j g_{ij}(\phi)$$

Die ϕ_i leben im Raum M_n und die Ableitungen im entsprechenden Tangentialraum. g_{ij} ist eine symmetrische Metrik. $S[\phi]$ ist invariant unter einer allgemeinen Koordinatentransformation $\phi'^i = \phi'^i(\phi)$ (nach K. MEETZ, 1968).

Anderes Beispiel: Stringtheorie

Die zugehörige LAGRANGEfunktion für den bosonischen Teil lautet:

$$\frac{1}{4\pi\alpha'}\int \mathrm{d}^2\xi\, \sqrt{h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu(3)\partial_\beta X^\nu(3)G_{\mu\nu}(X)$$



$\xi^\alpha = (\sigma.\tau)$ mit $\alpha = 1, 2$ bilden eine zweidimensionale Weltfläche (world sheet). X^μ sind die Zielfunktionen; diese leben im Targetraum.

$$\int \mathrm{d}^2\xi\, \sqrt{h}\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu(3)\partial_\beta X^\nu(3)B_{\mu\nu}(X)$$

Es gibt also auch hier die σ-Struktur, wenn man den Raum auffasst als RIEMANN-Mannigfaltigkeit.

1.3.1 Andere Parametrisierung

Wir werden Strukturen der Form

$$U(x) = \exp\left(\mathrm{i}\phi^i(x)T_i\right)$$

verwenden, wobei die ϕ^i GOLDSTONE-Felder seien. Dabei handelt es sich um ein LIE-Algebra-wertiges $U(x)$. $[T_i, T_j] = \mathrm{i}C_{ij}^h T_k$, wobei $T_i^\dagger = T_i$ und die C_{ij}^h sogenannte Strukturkonstanten sind, bilden die LIE-Algebra. Die unter der Transformation

$$U'(\phi) = g_R U(\phi) g_L^{-1} \text{ mit } g_R \in \mathrm{SU}(2)_R \text{ und } g_L^{-1} \in SU(2)_L$$

invariante Wirkung sieht folgendermaßen aus:

$$S[U] = \frac{F_\pi^2}{16} \int \mathrm{d}^4x \, \mathrm{Sp}(\partial_a U \partial^a U^{-1})$$

Dies ist eine andere Form, wie man σ-Modelle aufschreiben kann (eichtheorieartig). Die Nichtlinearität kommt durch die Nebenbedingung $\det U = 1$.

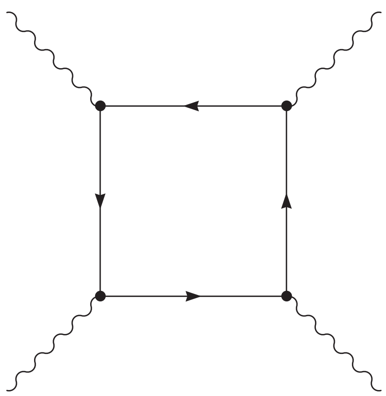
1.3.2 Effektive Lagrangefunktion (Phänomenologische Lagrangefunktion)

Man schaut die nichtlineare LAGRANGEfunktion in niedrigster Ordnung Störungstheorie an. Man spricht von der Baumgraphennäherung (Tree-Näherung). In dieser Näherung betrachtet man FEYNMAN-Diagramme ohne Schleifen. Man erhält daraus Resultate der Stromalgebra für niederenergetische π-Streuung. Weinberg (1979): Nimm alle Symmetrien (LORENTZ, chirale Symmetrie) und schreibe die LAGRANGEdichte auf:

$$\mathcal{L} = \frac{D_a\vec{\pi}D^a\vec{\pi}}{1 - \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{2}} + \text{höhere Ordnungen } (D_a\vec{\pi}D^a\vec{\pi})$$

Man macht dann eine Entwicklung in $\frac{E}{\Lambda}$, wobei Λ die Skala ist, bei der eine fundamentale Theorie gültig wird. In der chiralen Symmetrie nimmt man $\Lambda = W\varrho \approx 700\,\mathrm{MeV}$ an. Die nichtlinearen σ-Modelle sorgen für sich selbst. Führende Ordnung für Niederenergie: Treenäherung. (Die π-Amplituden sind reell, was die Unitarität verletzt.) Man führt die **chirale Störungstheorie** ein, um die Unitarität zu verbessern. GASSER und LEUTWYLER (1984), MEISSNER (1995) und ECKER (1994) haben auf diesem Gebiet wichtiges geleistet.
Ein frühes Beispiel zur Quantenelektrodynamik ist die Photonstreuung mit $E < m_\mathrm{e} < \Lambda$.

$$\mathcal{L}_{\mathit{eff}} = \mathcal{L}_{\text{HEISENBERG}-\text{EULER}} = \frac{2\alpha^2}{45m_\mathrm{e}^4}\left[\left(\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)^2 + Z\vec{E}\cdot\vec{B}\right] + \dots$$



Kapitel 2

Chirale Symmetrie und nichtlineare Darstellungen

2.1 SU(2) ⊗ SU(2) und π-N-System

Die SU(2) ⊗ SU(2) ist eine approximative Symmetrie der starken Wechselwirkung [beispielsweise Quantenchromodynamik: u-, d-Quarks (leichter): $\frac{m_\mathrm{u}}{m_\mathrm{s}} \approx 0,03$, $\frac{m_\mathrm{d}}{m_\mathrm{s}} \approx 0,05$]. Die zugehörige LAGRANGEdichte hat folgende Struktur:

$\mathcal{L} = \mathrm{i}\overline{u}\gamma^a D_a u + \mathrm{i}\overline{d}\gamma^a D_a d + \ldots$

Dies ist ein Teil der QCD-LAGRANGEfunktion ohne Massenterme und ohne Berücksichtigung des s-Quarks. γ^a sind die DIRAC-Matrizen, für die die CLIFFORD-Algebra C_4 gilt: $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$, wobei $\eta \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ und $a = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. $D_a u$ ist die kovariante Ableitung bezüglich der SU(3)-Farbsymmetrie. $q_{\underline{\alpha},A}$ mit $q \in \{u, d, \ldots\}$, $A \in \{1, 2, 3\}$ ist ein SU(3)-Triplett, wobei der Index A für die Farbe steht. $D_a u$ die außerdem die kovariante Ableitung bezüglich der Eichtheorie (Eichvektorfelder (Gluonen)). $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x^a}$ ist die Viererableitung im MINKOWSKI-Raum.
Wir betrachten nun das Dublett N und folgende Transformation:

$N = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$, $N' = \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1}_4 + \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right] N$ mit $\gamma^5 = -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

τ sind die PAULI-Matrizen, für die gilt:

$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\frac{\tau^k}{2}$ mit $\left(\frac{\tau^i}{2}\right)^\dagger = \frac{\tau^i}{2}$

$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon^{123} = +1$

$\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ sind reelle Parameter (6=3+3), die von x unabhängig sind (ungeeicht!). Die τ^i erfüllen analog zu den γ-Matrizen eine CLIFFORD-Algebra, nämlich $\left\{\tau^i, \tau^j\right\} = 2\delta^{ij}\mathbf{1}_2$ (C_3), außerdem ist deren Spur Null.
Wir wählen nun eine spezielle Darstellung der DIRAC-C_4, so dass die γ^5 Matrix diagonal wird. Man bezeichnet diese Darstellung als WEYL-Darstellung:

$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^a \\ \overline{\sigma}^a & 0 \end{pmatrix}$ mit $\sigma^a \stackrel{\triangle}{=} (\sigma^0 = \mathbf{1}_2,\ \sigma^i = \tau^i)$, $\overline{\sigma}^a \stackrel{\triangle}{=} (\overline{\sigma}^0 = \mathbf{1}_2,\ \overline{\sigma}^i = -\tau^i)$; $\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$, $(\gamma^5)^2 = \mathbf{1}$

$\left[\underline{\alpha} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),\ \underline{\alpha} \stackrel{\triangle}{=} (\alpha, \dot{\alpha} \uparrow),\ (\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}},\ (\overline{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\beta},\ q_{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \chi^{(q)}_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}}_{(q)} \end{pmatrix}\right]$

$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbf{Z}_2 = \{\mathbf{1}_2, -\mathbf{1}_2\} \simeq L_+^\uparrow = \mathrm{SO}(1, 3) \uparrow$

Dies ist die eingeschränkte LORENTZ-Gruppe (= eigentliche und orthochrone). $\overline{q}$ bedeutet $q^\dagger A$, wobei A eine Matrix ist, die zwischen den verschiedenen Darstellungen vermittelt: $A\gamma^a A^{-1} = (\gamma^a)^\dagger$. Wir werden für A die Matrix γ^0 verwenden.

$\overline{q} \stackrel{\triangle}{=} (\chi^{(q)\alpha}, \overline{\psi}^{(q)}{}_{\alpha})$, $\chi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\chi_\beta$, $\varepsilon^{12} = \pm 1$

$\mathrm{SU}(2)/\mathbf{Z}_2 \simeq \mathrm{SO}(3)$

Beachte die BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel:

$\exp(A)\exp(B) = \exp\left[A + B - \frac{\mathrm{i}}{2}[A,B] + \dots\right]$

$\mathcal{L}_N = \mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\partial_a N + \dots$ mit $m_{\mathrm{N}} = 0$

Welche Symmetrie besitzt diese LAGRANGEdichte? Dazu betrachten wir:

$$\overline{N}' = N'^\dagger A = N^\dagger \exp\left[-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} + \vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}(\gamma^5)^\dagger\right)\right] A = \overline{N}\left(A^{-1}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} + \vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}(\gamma^5)^\dagger\right)\right] A\right) =$$
$$= \overline{N}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} - \vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right]$$

Dies folgt aus $A\gamma^5A^{-1} = -(\gamma^5)^\dagger$ und $A^{-1}(\gamma^5)^\dagger A = -\gamma^5$, was als Übung gezeigt werden kann.

$$\mathrm{i}\overline{N}'\gamma^a\partial_a N' = \mathrm{i}\overline{N}\exp\left[-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} - \vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right]\gamma^a\exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} + \vec{\beta}\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right] = \mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\partial_a N$$

Dies folgt aus $\{\gamma^5, \gamma^a\} = 0$, was man als Übung beweisen kann. Damit ist $\mathcal{L}_N$ invariant unter dieser Transformation.

Bemerkung:

Die LAGRANGEdichte ist außerdem invariant unter der U(1)-Transformation $N' = \exp(\mathrm{i}\varphi)N$, wobei φ reell ist (kontinuierliche Symmetrie). Dies führt nach dem NOETHER-Theorem auf die Baryonenzahl B als erhaltene Ladung.

$N' = \exp(\mathrm{i}\alpha\gamma^5)N$ mit reellem α ist das axiale U(1)-Problem in der QCD (Anomalien, klassische Lösung von Eichtheorie: Instantonen).

2.1.1 Trennung in Links-Rechts-Spinorteile

Die Trennung in Links-Rechts-Spinorteile ist möglich mittels der Projektoren $\Pi_\pm = \frac{1\pm\gamma^5}{2}$. Es gilt $\Pi_+^2 = \Pi_+$, $\Pi_-^2 = \Pi_-$, $\Pi_+\Pi_- = 0 = \Pi_-\Pi_+$.

$\psi_L = \Pi_+\psi$, $\psi_R = \Pi_-\psi$, $\psi_L = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix}$

($\psi'_\alpha = M_\alpha{}^\beta\psi_\beta$ mit $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$)

$\psi_R = \begin{pmatrix}0 \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}$, $\overline{\chi}'_{\dot\alpha} = M_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\overline{\chi}_{\dot\beta}$, $\overline{\chi}^{\dot\alpha} = \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\chi}_{\dot\beta}$

Wir zerlegen jetzt die Viererspinoren in Rechts- und Links-Spinoren: $\psi = \psi_R + \psi_L$. Als Übung kann gezeigt werden, dass $\overline{\psi_L} = \psi_L^\dagger A = \overline{\psi}\Pi_-$ und dass $\overline{\psi_R} = \overline{\psi}\Pi_+$.

$\mathcal{L}_N = \mathrm{i}\left(\overline{N_L}\gamma^a\partial_a N_L + \overline{N_R}\gamma^a\partial_a N_R\right)$ da $\overline{\psi_R}\gamma^a\psi_L \equiv 0 \equiv \overline{\psi_L}\gamma^a\psi_R$

$$N'_L = \Pi_+N' = \Pi_+\exp\left[\mathrm{i}\left((\vec{\alpha}+\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_+ + (\vec{\alpha}-\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_-\right)\right]N = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_+\right)N_L$$

$$N'_R = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_-\right)N_R$$

Als Übung kann gezeigt werden:

$$\overline{N'_L} = \overline{N'}\Pi_- = \overline{N}\exp\left(-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_-\right)\Pi_- = \overline{N_L}\exp\left(-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_-\right)$$

$$\overline{N'_R} = \overline{N_R}\exp\left(-\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_+\right)$$

Darüber hinaus führen wir folgende Operatoren ein:

$\vec{Q}_+ = \frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_+$, $\vec{Q}_- = \frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_-$

$[Q_+^i, Q_+^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q_+^k$ (su(2)-LIE-Algebra)

$[Q_-^i, Q_-^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q_-^k$ (su(2)-LIE-Algebra)

$[Q_+^i, Q_-^j] = 0$ (su(2) $\oplus$ su(2)-LIE-Algebra)

2.2 Lie-Algebra

Eine Algebra A wirkt auf einem Vektorraum $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Definiert wird ein Produkt $\circ$ folgendermaßen:

$A \times A \mapsto A$ mit $(a, b) \mapsto a \circ b \equiv ab$

Das Produkt ist bilinear:

i.) $(a + b)c = ac + bc$

ii.) $a(b + c) = ab + ac$

iii.) $(\lambda a)(\mu b) = (\lambda\mu)(ab)$

Eine Lie-Algebra ist nichtkommutativ und rechtsassoziativ. Es ist eine Algebra mit $\circ : \mapsto [\bullet, \bullet]$ (bilinear).

i.) $[a, a] = 0$

ii.) $\sum [a, [b, c]] = 0$ (Jacobi-Identität)

Hieraus ergibt sich $[a, b] = -[b, a]$. Falls A mit einer Verknüpfung $\circ : [\bullet, \bullet]$ existiert, wobei $[a, b] := ab - ba$, so spricht man von einer Lie-Algebra. Für $[a, b] \neq 0$ ist der Assoziator $[a, [b, c]] - [[a, b], c]$ nach der Jacobi-Identität $\neq 0$.

Kapitel 3

Chirale Symmetrie und nichtlineare Darstellung

3.1 SU(2) $\otimes$ SU(2) und π-Nukleon-System

3.1.1 Nukleon-System

Betrachten wir ein N-System:

$$N = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} : N' = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right) N$$

$$\overline{N}' = \overline{N} \exp\left(-\mathrm{i}\left[\vec{\alpha} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1} - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right]\right)$$

Kommen wir zum Links-Rechts-Projektor, der in der Weyl-Darstellung gegeben ist durch:

$$\Pi_\pm = \frac{1 \pm \gamma^5}{2}$$

$$N_L' = \Pi_+ N' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})\right) N_L \text{ und } N_R' = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}}{2}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})\right) N_R$$

$$\overline{N_L'} = \overline{N_L} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\vec{\alpha} + \vec{\beta}}{2} \cdot \vec{\tau}\Pi_-\right) \text{ und } \overline{N_R'} = \overline{N_R} \exp\left(-\frac{\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2} \cdot \vec{\tau}\Pi_+\right)$$

$$\vec{Q}_\pm = \frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_\pm \text{ mit } [Q^i_\pm, Q^j_\pm] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q^k_\pm,\ [Q^i_+, Q^j_-] = 0$$

Dies ist eine SU(2) $\oplus$ SU(2) Lie-Algebra. Für die Betrachtung des Isospins setzen wir $\vec{\beta} = 0$:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_+ + \vec{Q}_- = \frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1}_4,\ \vec{Q}^5 = \vec{Q}_+ - \vec{Q}_- = \frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5$$

$[Q^i, Q^j] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q^k$ (Isospin SU(2))
$[Q^i, Q^{5j}] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q^{5k}$
$[Q^{5i}, Q^{5j}] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}Q^k$

Man bezeichnet $Q_+ \leftrightarrow Q_-$, $Q^i \mapsto Q^i$ und $Q^{5i} \mapsto -Q^{5i}$ als äußeren Automorphismus (Parität).
Sei G eine kompakte Lie-Gruppe und H eine Untergruppe:

$$[T^i, T^j] = \mathrm{i}c^{ijk}T^k \text{ mit } i = 1, \ldots, \dim H$$

Es gilt $c^{ija} = 0$, außerdem sind die Strukturkonstanten antisymmetrisch, womit auch beispielsweise $c^{iaj} = 0$. Für X^a mit $a = 1, \ldots; \dim G - \dim H$ gilt $[T^i, X^a] = \mathrm{i}c^{iab}X^b$. Cartan-Zerlegung:

$$[X^a, X^b] = \mathrm{i}c^{abi}T^i + \mathrm{i}c^{abc}X^c$$

Der zweite Term ist hier gleich Null, falls $c^{abc} = 0$ ist. Man spricht in diesem Falle von einem symmetrischen (oder auch homogenen) Raum. Dies hat mit der Struktur (Rechts)Coset (Rechtsnebenklasse) G/H zu tun. (Blatt 3, Aufgabe 7: Zusammenhang mit SO(4), so(4)-LIEalgebra) $L^{I,J}$ mit $I = 1, \ldots, 4$ und $J = 1, \ldots, 4$.

$L^{i,j} = \lambda\varepsilon^{ijk}Q^k$, $L^{4,j} = \mu Q^{5,j}$

$\left[L^{IJ}, L^{KL}\right] = \mathrm{i}\left[\delta^{IK}L^{JL} + \delta^{JL}L^{IK} - \delta^{JK}L^{IL} - \delta^{IL}L^{JK}\right]$

Kommen wir nochmal zum NOETHERtheorem zurück. Lässt eine kontinuierliche Transformation $\mathcal{L}$ invariant, dann resultieren hieraus erhaltene Ströme ($\partial_a j^a \simeq 0$ (EULER-LAGRANGE-Gleichung). Betrachten wir eine infinitesimale Transformation:

$\delta N = \mathrm{i}\vec{\alpha} \cdot \dfrac{\vec{\tau}}{2} N$ und $\delta_5 N = \mathrm{i}\vec{\beta} \cdot \dfrac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5 N$

Variiert man die LAGRANGEdichte $\mathcal{L} = \mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\partial_a N$, so folgt:

$\delta\mathcal{L} = \mathrm{i}(\delta\overline{N})\gamma^a\partial_a N + \mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\partial_a(\delta N)$

δN ist eine Symmetrietransformation $= \partial_a w^a$ (hier Null). Man kann dies auch schreiben als:

$\partial\mathcal{L} = \partial_a v^a +$ zusätzliche Terme

Die zusätzlichen Terme verschwinden, wenn man die EULER-LAGRANGE-Gleichungen verwendet. Es ist $\partial_a(w^a - v^a) \simeq 0$. Man kann diese Variation auch umschreiben:

$\delta\mathcal{L} = \mathrm{i}\delta\overline{N}(\gamma^a\partial_a\overline{N}) - \mathrm{i}(\partial_a\overline{N}\gamma^a)\delta\overline{N} + \mathrm{i}\partial_a(\overline{N}\gamma^a\delta N)$

Mit den EULER-LAGRANGE-Gleichungen $\mathrm{i}\gamma^a\partial_a N = 0$ und $-\mathrm{i}\partial_a\overline{N}\gamma^a = 0$ ergibt sich:

$\delta\mathcal{L} \simeq \partial_a(\mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\delta N)$, $\delta\mathcal{L} = 0$

$0 \simeq \partial_a\left(\mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\mathrm{i}\vec{\alpha} \cdot \dfrac{\vec{\tau}}{2}N\right)$

$0 \simeq \partial_a\left(\mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\mathrm{i}\vec{\beta} \cdot \dfrac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5 N\right)$

$\vec{V}^a = c_V\overline{N}\gamma^a\dfrac{\vec{\tau}}{2}N \qquad \vec{Q} = \displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\vec{V}^0$

$\vec{A}^a = c_A\overline{N}\gamma^a\gamma^5\dfrac{\vec{\tau}}{2}N \qquad \vec{Q}^5 = \displaystyle\int \mathrm{d}^3x\,\vec{A}^0$

(LIE-Algebra via POISSONklammern)

3.1.2 Massenterme der u-,d-Quarks (N)

$\mathcal{L}_M = -m_u\overline{u}u(x) - m_d\overline{d}d$

$\mathcal{L} + \mathcal{L}_M$ ist nicht $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$-invariant. Durch diese Massenterme wird die Symmetrie also gebrochen. $\mathcal{L}_N = m_N\overline{N}N$, $\mathcal{L}_M = -m(\overline{u}u + \overline{d}d)$ ist noch Isospin-invariant, aber nicht bezüglich γ^5-Transformationen ($\vec{\beta}$). Man muss sich Gründe überlegen, weshalb auch der Isospin nicht spontan gebrochen (nur unter Transformationen mit γ^5) sein soll. Die Vermutung ist, dass zusammengesetzte Teilchen nicht masselos sein können, wenn die Konstituenten Masse haben (WEINBERG, DREHILL: 1981). Unter Isospintransformationen sind Massen der Konstituenten q erlaubt. (Im Gegensatz dazu liefern γ^5-Transformationen den Grund, warum Teilchen masselos sein sollen.) Aus obiger Vermutung folgt, dass der Isospin nicht spontan gebrochen ist. Falls dies doch der Fall wäre, gäbe es zusammengesetzte GOLDSTONE-Felder mit Masse Null. In der QCD (Eichtheorierahmen): WITTEN-VAFA (1984) Wir studieren nun die auf den Isospin SU(2) spontan gebrochene Symmetrie $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$.

3.1.3 Nichtlinear dargestelltes Pion-System

Das SO(4)-Modell wird linear dargestellt durch $\Phi_I(x)$ mit $I = 1, \ldots, 4$ und $x \in M_4$. Betrachten wir nun SO(4)-Drehungen:

$\Phi_I = {R_I}^J \Phi_J$ mit $RR^\intercal = \mathbf{1} = R^\intercal R$ und $\det R = 1$

Die ${R_I}^J$ sind von x unabhängig. Man spricht auch von nicht geeichten/starren Transformationen. Die LAGRANGEfunktion, die invariant ist, lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_a \Phi^I \partial^a \Phi_I - \frac{m^2}{2}\Phi^I \phi_I - \frac{\lambda}{4}(\Phi^I \Phi_I)^2$$

Aus Gründen der Renormierbarkeit (keine Kopplungskonstanten mit negativer Dimension) fügt man keine höheren Terme hinzu (+sanfte Brechung $\mathcal{L}_\sigma = c\phi_4$). Für $m^2 < 0$ tritt eine spontane Symmetriebrechung im Potential auf, das von konstanten ϕ_I abhängt.

$\phi_4'(x) = -\langle \phi_4 \rangle + \phi_4(x) : \langle \phi_4' \rangle = 0$

Bei GOLDSTONEfeldern gibt es ein Tal mit $m = 0$ (flaches Potential). Es gibt drei reelle Feldrichtungen (für BOSEfelder mit Spin 0), welche einer gebrochenen Symmetrie entsprechen: $(3+3) - 3 = \dim G - \dim H = 3$.

$\phi_I(x) = {R_I}^4(x)\sigma(x)$ für jedes $x \in M_4$

Aufgrund von $R^\intercal R = \mathbf{1}$ ($R^\intercal \delta R = \delta^{\cdots}$) stehen die ${R_I}^4$ für drei Freiheitsgrade und σ für einen. Da die Start-LAGRANGEfunktion nur unter starren ${R_I}^J$ invariant ist, muss die neue umgeschriebene LAGRANGEfunktion verschwinden, wenn die GOLDSTONEfelder konstant gesetzt werden ($\mathcal{L} \sim (\partial_a \pi)^2$). Wie GOLDSTONEfelder als x abhängiger Parameter: x-unabhängig: starrer Fall

$\phi^I \phi_I = (R^\intercal(x)\delta^{\cdots})^{4J} {R_J}^4(x)\sigma^2(x) = \sigma^2(x)$

$\sigma(x)$ ist damit SO(4)-invariant für alle $x \in M_4$.

$$\frac{\phi^I}{\sigma}\frac{\phi_I}{\sigma} = 1,\ S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

Als Übung kann gezeigt werden:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_a \sigma \partial^a \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_a (R^\intercal(x)\delta^{\cdots})^{4I}\partial_a {R_I}^4(x) - \frac{m^2}{2}\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\sigma^4$$

Per **stereographische Projektion** führen wir andere Variablen ein: $S^3 \leftrightarrow \overline{\mathbb{R}^3}$. Aus Aufgabe 2 auf dem ersten Übungsblatt wissen wir:

$\chi_i = \lambda \cdot \zeta_i$ mit $i = 1, 2, 3$

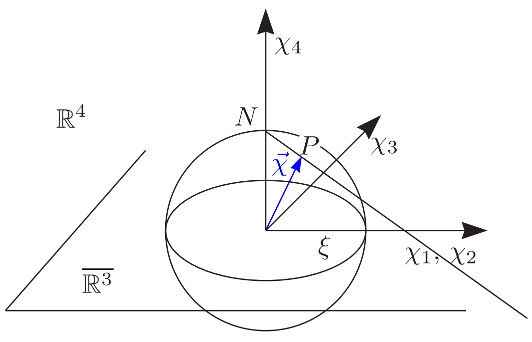
$\vec{\chi} = \vec{\chi}_N + \lambda(\vec{\zeta} - \vec{\chi}_N)$

Mit $\chi_4 = 1 + \lambda(0-1) = 1 - \lambda$ folgt:

$$\chi_i = \frac{2\zeta_i}{1 + \vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}} \text{ mit } i = 1, 2, 3 \text{ und } \frac{\phi_4}{\sigma} = \chi_4 = \frac{-1 + \vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}{1 + \vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}$$

Dies gilt für alle $\chi \in M_4$.

Herleitung:



Wir führen die stereographische Projektion der Hyperkugeloberfläche S^3 durch. Dazu parametrisieren wir die Gerade vom Nordpol der Kugel ausgehend durch:

$$g : \vec{x} = \chi_N + t(\zeta - \chi_N) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese Gerade schneidet die Kugel im Punkt $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4)^\intercal$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ -1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2 - \chi_3^2} \end{pmatrix}$$

Hieraus erhalten wir $1 - \lambda = \chi_4$ und damit $\lambda = 1 - \chi_4$. Daraus ergibt sich:

$$\zeta_1 = \frac{\chi_1}{1 - \chi_4}, \ \zeta_2 = \frac{\chi_2}{1 - \chi_4}, \ \zeta_3 = \frac{\chi_3}{1 - \chi_4}$$

Außerdem muss

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \chi_4^2 = 1 \Rightarrow (1 - \chi_4)^2 \cdot (\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2) + \chi_4^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\chi_4 = \frac{\vec{\zeta}^2 - 1}{\vec{\zeta}^2 + 1}}$$

gelten und damit folgt schließlich:

$$\boxed{\vec{\chi} = \frac{2\vec{\zeta}}{\vec{\zeta}^2 + 1} \text{ und } \chi_4 = \frac{\vec{\zeta}^2 - 1}{\vec{\zeta}^2 + 1}}$$

3.1.4 Nichtlineares Pion-System

Die hier relevante Darstellung ist die SO(4):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_a \phi^I \partial^a \phi_I - \frac{m^2}{2}\phi^I \phi_I - \frac{\lambda}{4}(\phi^I \phi_I)^2 \text{ mit } \phi_I(x) = {R_I}^4(x)\sigma(x)$$

Die Länge von ϕ im Minkowski-Raum ist gegeben durch $\phi^I \phi_I(x) = \sigma^2(x)$; $\sigma(x)$ ist SO(4)-invariant.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_0 \sigma \partial^0 \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial_a R^{I,4} \partial^a {R_I}^4 - \frac{m^2}{2}\sigma^2(x) - \frac{\lambda}{4}\sigma^4(x)$$

Das Potential eines konstanten Feldes ist gegeben durch:

$$V(\sigma) = \frac{m^2}{2}\sigma^2(x) + \frac{\lambda}{4}\sigma^4(x)$$

Für $m^2 < 0$ ergibt sich $\sigma^0 = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}$, was zur spontanen Symmetriebrechung führt. Für alle $x \in M_4$ ist S^3 der Targetraum; es handelt sich dabei um eine Sattelfläche. Durch stereographische Projektion vollzieht man den Übergang $S^3 \leftrightarrow \overline{\mathbb{R}}^3$, wobei die Koordinaten $\in S^3$ mit $R^4(\chi_i, \chi_4)$ bezeichnet. Im $\overline{\mathbb{R}}^3$ verwenden wir die Bezeichnung $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ für die Koordinaten. Die Formeln der stereographischen Projektion lauten, wobei die ϕ_i auf σ normiert sind:

$$\chi_4 = \frac{\phi_4}{\sigma} = \frac{-1 + \vec{\zeta} \cdot \vec{\zeta}}{1 + \vec{\zeta} \cdot \vec{\zeta}} \text{ und } \chi_i = \frac{\phi_i}{\sigma} = \frac{2}{1 + \vec{\zeta} \cdot \vec{\zeta}}\zeta_i \text{ mit } {R_4}^4 \equiv \frac{\phi_4}{\sigma}, \ {R_i}^4 \equiv \frac{\phi_i}{\sigma}$$

Die Umkehrung der Transformation lautet:

$$\zeta_i = \frac{1}{1 - \frac{\phi_4}{\sigma}} \frac{\phi_i}{\sigma} = \frac{1}{1 - \chi_4} \frac{\phi_i}{\sigma}$$

Wir drücken $\mathcal{L}$ durch die ζ_i aus:

$$\partial_a {R_i}^4 \delta^{ij} \partial^a {R_j}^4 + \partial_a {R_4}^4 \partial^a {R_4}^4 \text{ mit } \partial_a {R_i}^4 = \partial_a \chi_i = \frac{2}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}} \partial_a \zeta_i \left[{\delta_i}^j - 2\frac{\zeta_i \zeta^j}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}} \right],\ \partial_a {R_4}^4 = \frac{4}{(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})^2} \zeta^i \partial_a \zeta_i$$

Man erhält dann (siehe Blatt 4, Aufgabe 8):

$$\frac{4}{(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})^2} \partial_a \zeta_j K^{jl}(\vec{\zeta}) \partial^a \zeta_l + \frac{4^2}{(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})^4} \partial_a \zeta_i \zeta^i \zeta^j \partial^a \zeta_j \text{ mit } K^{jl} = \delta^{jl} - 4\frac{\zeta^l \zeta^j}{(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})^2}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_a \sigma \partial^a \sigma + 2\sigma^2(x) \underbrace{\partial_a \zeta_j \frac{\delta^{jl}}{(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})^2} \partial^a \zeta_l}_{D_a \zeta_i D^a \zeta^i} - V(\sigma(x)) \text{ mit } (D_a \zeta)_i := \frac{\partial_a \zeta_i}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}$$

Herleitung:

Die stereographische Projektion haben wir schon durchgeführt. Unter Ausnutzung der Kettenregel ergibt sich nun:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} \chi_I = \frac{\partial \chi_I}{\partial \zeta_j} \frac{\partial \zeta_j}{\partial x^a}$$

Wir berechnen also die folgenden Ableitungen:

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_j} = \frac{(1+\vec{\zeta}^2)\cdot 2\delta_{ij} - 2\zeta_i \cdot 2\zeta_j}{(1+\vec{\zeta}^2)^2} = \frac{2(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{ij} - 4\zeta_i\zeta_j}{(1+\vec{\zeta}^2)}$$

$$\frac{\partial \chi_4}{\partial \zeta_j} = \frac{(1+\vec{\zeta}^2)2\zeta_j - (\vec{\zeta}^2 - 1)\cdot 2\zeta_j}{(1+\vec{\zeta}^2)^2} = \frac{4\zeta_j}{(1+\vec{\zeta}^2)^2}$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_l} &= \frac{\Big[2(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{ik} - 4\zeta_i\zeta_k\Big]\cdot\Big[2(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{il} - 4\zeta_i\zeta_l\Big]}{(1+\vec{\zeta}^2)^4} = \\ &= \frac{4(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{ik}\delta_{il} - 8(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{ik}\zeta_i\zeta_l - 8(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{il}\zeta_i\zeta_k + 16\zeta_i^2\zeta_l\zeta_k}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \chi_4}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \chi_4}{\partial \zeta_l} = \frac{16\zeta_k\zeta_l}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}$$

Nun können wir schlussendlich den entscheidenden Ausdruck berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \chi_I}{\partial x^a}\frac{\partial \chi_i}{\partial x_a} &= \frac{\partial \chi_I}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{\partial \chi_I}{\partial \zeta_l}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x^a} = \sum_{k,l}\left(\left[\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{\partial \chi_i}{\partial \zeta_l}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a}\right] + \frac{\partial \chi_4}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{\partial \chi_4}{\partial \zeta_l}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a}\right) = \\ &= \sum_{k,l}\left[\sum_i\left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{4(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{ik}\delta_{il} - 8(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{ik}\zeta_i\zeta_l - 8(1+\vec{\zeta}^2)\delta_{il}\zeta_i\zeta_k + 16\zeta_i^2\zeta_l\zeta_k}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{16\zeta_k\zeta_l}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a}\right] = \\ &= \sum_i\left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^a}\frac{4}{(1+\vec{\zeta}^2)^2}\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_a} - \sum_{k,l}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{16\zeta_k\zeta_l}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a} - \sum_{k,l}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{16\vec{\zeta}^2\zeta_k\zeta_l}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k,l}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{16\vec{\zeta}^2\zeta_k\zeta_l}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a} + \frac{\partial \zeta_k}{\partial x^a}\frac{16\zeta_k\zeta_l}{(1+\vec{\zeta}^2)^4}\frac{\partial \zeta_l}{\partial x_a}\right] = \sum_i\frac{\partial \zeta_i}{\partial x^a}\frac{4}{(1+\vec{\zeta}^2)^2}\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_a} = \boxed{\partial_a \zeta_i \frac{4}{(1+\vec{\zeta}^2)^2}\partial^a \partial \zeta_i}\end{aligned}$$

Es gilt $L_\zeta \mapsto 0$ für $\partial_a \vec{\zeta} = 0$. Effektive LAGRANGEdichten: Entwicklung (Störungstheorie) nach $\frac{E}{\Lambda}$ (chirale Störungstheorie)

Behauptung:

$\mathcal{L}$ ist SO(4)-invariant, nichtlinear dargestellt. $\sigma(x)$ ist invariant.

$\underset{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\mathrm{SU}(2)} \oplus \underset{\overline{\alpha}-\overline{\beta}}{\mathrm{SU}(2)}$

Die infinitesimale Transformation $\delta\zeta_i \overset{\text{Isospin}}{=}$ i(Darstellung $\zeta)_i$ wirkt auf der adjungierten Darstellung SU(2): ${(T_i^{adj})_j}^k = \mathrm{i}{\varepsilon_{ij}}^k$. (siehe Blatt 3, Aufgabe 3). Eine infinitesimale Transformation mit einem Vektor sieht folgendermaßen aus: $\delta\zeta_j(x) = -(\vec{\alpha} \times \vec{\zeta}(x))_j$; dies ist eine lineare Transformation.

$\underset{(1,\overline{1})}{\mathrm{SU}(2)} \otimes \underset{\left(\frac{1}{2},\frac{\overline{1}}{2}\right)}{\mathrm{SU}(2)}$

1 transformiert unter der Darstellung SU(2) und $\overline{1}$ unter der komplex konjugierten Darstellung SU(2). Die Transformation ist gegeben durch $\psi'_\alpha = {U_\alpha}^\beta \psi_\beta$ wobei $U \in$ SU(2). (Irreduzible Darstellung von SU(2): $\psi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ (Tensorcharakter)) Die Indexstruktur der ϕ_I sieht folgendermaßen aus:

$${\phi_\alpha}^{\alpha'} = {U_\alpha}^\beta {\phi_\beta}^{\beta'} {(V^{-1})_{\beta'}}^{\alpha'},\ \psi'^\alpha = {(U^{\mathsf{T},-1})^\alpha}_\beta \psi^\beta = \psi^\beta {(U^{-1})_\beta}^\alpha$$

Die Matrizen U werden mittels der Generatoren τ konstruiert:

$$U = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\right) = 1 + \mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2},\ V = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\right),\ V^{-1} = 1 - \mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}$$

$${\phi_\alpha}^{\dot{\alpha}} = {\left(\phi_4 \mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\right)_\alpha}^{\dot{\alpha}},\ {\phi'_\alpha}^{\dot{\alpha}} = {\left(\phi'_4 \mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\phi}'\cdot\vec{\tau}\right)_\alpha}^{\dot{\alpha}}$$

ϕ_I ist ein SO(4)-Vektor. Für die Determinante von ϕ folgt:

$$\det\phi = \det\begin{pmatrix} \phi_4 + \mathrm{i}\phi_3 & \mathrm{i}\phi_1 + \phi_2 \\ \mathrm{i}\phi_1 - \phi_2 & \phi_4 - \mathrm{i}\phi_3 \end{pmatrix} = \phi_4^2 + \phi_3^2 + (\phi_1^2 + \phi_2^2) = \phi^I \phi_I = \det\phi'$$

In Aufgabe 9b.) auf Blatt 4 wird gezeigt, dass sich die ϕ_I folgendermaßen transformieren:

$$\delta\frac{\vec{\phi}}{\sigma} = \vec{\beta}\frac{\phi_4}{\sigma} - \vec{\alpha} \times \frac{\vec{\phi}}{\sigma},\ \delta\frac{\phi_4}{\sigma} = -\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\phi}}{\sigma}$$

Herleitung:

Für betrachten infinitesimale Transformationen durch, vernachlässigen also quadratische und höhere Terme:

$$U = \mathbf{1} + \mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_3+\beta_3) & \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_1+\beta_1 - \mathrm{i}(\alpha_2+\beta_2)) \\ \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_1+\beta_1+\mathrm{i}(\alpha_2+\beta_2)) & 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_3+\beta_3) \end{pmatrix}$$

$$V^{-1} = \mathbf{1} - \mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_3-\beta_3) & -\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_1-\beta_1 - \mathrm{i}(\alpha_2-\beta_2)) \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_1-\beta_1+\mathrm{i}(\alpha_2-\beta_2)) & 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}(\alpha_3-\beta_3) \end{pmatrix}$$

Wir gehen aus von der Matrix $\Phi := \phi_4 \mathbf{1}_2 + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}$:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_4 & 0 \\ 0 & \phi_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\phi_1 \\ \mathrm{i}\phi_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi_2 \\ -\phi_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{i}\phi_3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\phi_3 \end{pmatrix}$$

Führen wir jetzt die Transformation der Matrix $\Phi' = U\Phi V^{-1}$ durch – wobei wir nur lineare Terme berücksichtigen – so folgt:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi = \Phi' - \Phi &= \left(\mathbf{1}_2 + \mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\Phi\left(\mathbf{1}_2 - \mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\right) = -\mathrm{i}\Phi(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2} + \mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\frac{\vec{\tau}}{2}\Phi + O(\vec{\alpha}^2, \vec{\beta}^2, \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) = \\
&= -\mathrm{i}\Phi\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + \mathrm{i}\Phi\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2} + \mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\Phi + \mathrm{i}\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\Phi = \mathrm{i}\vec{\alpha}\left[\frac{\vec{\tau}}{2}, \Phi\right] + \mathrm{i}\vec{\beta}\left\{\frac{\vec{\tau}}{2}, \Phi\right\} = \\
&= \mathrm{i}\vec{\alpha}\left[\frac{\vec{\tau}}{2}, \mathbf{1}_2\phi_4 + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\right] + \mathrm{i}\vec{\beta}\left\{\frac{\vec{\tau}}{2}, \mathbf{1}_2\phi_4 + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\right\} = \\
&= \mathrm{i}\phi_4\vec{\alpha}\left[\frac{\vec{\tau}}{2}, \mathbf{1}_2\right] - \vec{\alpha}\left[\frac{\vec{\tau}}{2}, \vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\right] + \mathrm{i}\phi_4\vec{\beta}\left\{\frac{\vec{\tau}}{2}, \mathbf{1}_2\right\} - \vec{\beta}\left\{\frac{\vec{\tau}}{2}, \vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\right\}
\end{aligned}$$

Die jeweiligen Kommutatoren und Antikommutatoren wollen wir nun auswerten. Allgemein gilt für PAULI-Matrizen $[\tau_i, \tau_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\tau_k$ und $\{\tau_i, \tau_j\} = \mathbf{1}_2\delta_{ij}$. Der erste Kommutator ergibt Null, da natürlich jede Matrix mit der Einheitsmatrix $\mathbf{1}_2$ vertauscht. Den zweiten Kommutator berechnen wir folgendermaßen, wobei wir die Summationen explizit hinschreiben:

$$\vec{\alpha}\left[\frac{\vec{\tau}}{2}, \vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\right] = \frac{1}{2}\sum_{i,j}[\alpha_i\tau_i, \phi_j\tau_j] = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\alpha_i\phi_j[\tau_i,\tau_j] = \sum_{i,j}\alpha_i\phi_j\cdot\sum_k \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\tau_k = \mathrm{i}\sum_k(\vec{\phi}\times\vec{\alpha})_k\cdot\tau_k = \mathrm{i}(\vec{\alpha}\times\vec{\phi})\cdot\vec{\tau}$$

Der erste Antikommutator ist natürlich $\vec{\tau}\mathbf{1}_2 = \vec{\tau}$. Für den zweiten Antikommutator gilt:

$$\sum_{i,j}\beta_i\{\tau_i, \phi_j\tau_j\} = \sum_{i,j}\beta_i\phi_j\{\tau_i,\tau_j\} = \sum_{i,j}\beta_i\phi_j\delta_{ij}\mathbf{1}_2 = \sum_i \beta_i\phi_i = \vec{\beta}\cdot\vec{\phi}$$

Es ergibt sich also:

$$\delta\Phi = -\mathrm{i}(\vec{\alpha}\times\vec{\phi})\cdot\vec{\tau} + \mathrm{i}\phi_4\vec{\tau}\cdot\vec{\beta} - \vec{\beta}\cdot\vec{\phi} = \boxed{-\vec{\beta}\cdot\vec{\phi}\mathbf{1}_2 + \mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\left(-(\vec{\alpha}\times\vec{\phi}) + \phi_4\vec{\beta}\right)}$$

Damit lassen sich durch Vergleich mit $\Phi = \phi_4\mathbf{1}_2 + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}$ die infinitesimalen Transformationen der Felder $\vec{\phi}$ und ϕ_4 ablesen:

$$\boxed{\delta\phi_4 = -\vec{\beta}\cdot\vec{\phi}\mathbf{1}_2 \text{ und } \delta\vec{\phi} = -(\vec{\alpha}\times\vec{\phi}) + \phi_4\vec{\beta}}$$

Man erhält dann:

$$\zeta_i = \frac{1}{1-\frac{\phi_4}{\sigma}}\frac{\phi_i(x)}{\sigma};\ \frac{\phi_i}{\sigma} = \frac{2}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\zeta_i,\ \frac{\phi_4}{\sigma} = \frac{-1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}$$

Auf Blatt 4 in Aufgabe 10 soll gezeigt werden:

$$\delta\zeta_i = -(\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta})\zeta_i + \frac{1}{2}(-1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})\beta_i - (\vec{\alpha}\times\vec{\zeta})_i$$

$$\delta\vec{\zeta} = -(\vec{\beta}\times\vec{\zeta})\times\vec{\zeta} - \frac{1}{2}(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})\vec{\beta} - \vec{\alpha}\times\vec{\zeta}$$

Herleitung:

Es gelten folgende Zusammenhänge zwischen $(\vec{\chi}, \chi_4)$ und $\vec{\zeta}$:

$$\vec{\chi} = \frac{2\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2} \text{ und } \chi_4 = \frac{\vec{\zeta}^2-1}{\vec{\zeta}^2+1}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir dann die infinitesimale Transformation der ζ_i:

$$\zeta_i = \frac{1}{2}(1+\vec{\zeta}^2)\chi_i \Rightarrow \delta\zeta_i = \frac{-\chi_i}{(1-\chi_4)^2}\delta\chi_4 + \frac{1}{1-\chi_4}\delta\chi_i$$

Nun müssen wir noch alle χ_I eliminieren. Es gilt nun:

$$\delta\chi_4 = -\vec{\beta}\cdot\vec{\chi} = -\frac{2\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta}}{(1+\vec{\zeta}^2)}$$

$$\delta\chi_i = \beta_i\frac{\vec{\zeta}^2-1}{\vec{\zeta}^2+1} - \left(\vec{\alpha}\times\frac{2\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right)_i$$

Damit resultiert nun:

$$\delta\chi_i = \frac{1+\vec{\zeta}^2}{2}\beta_i\frac{\vec{\zeta}^2-1}{\vec{\zeta}^2+1} - \left(\frac{1}{2}(1+\vec{\zeta}^2)\vec{\alpha}\times\frac{2\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}^2}\right)_i = \frac{1}{2}(\vec{\zeta}^2-1)\beta_i - (\vec{\alpha}\times\vec{\zeta})_i$$

$$-\frac{\chi_i}{(1-\chi_4)^2}\delta\chi_4 = \frac{1}{2}(1+\vec{\zeta}^2)\zeta_i\cdot 2\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta}\frac{1}{1+\vec{\zeta}^2} = -\zeta_i(\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta})$$

$$\boxed{\delta\zeta_i = -\zeta_i(\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta}) + \frac{1}{2}(\vec{\zeta}^2 - 1)\beta_i - (\vec{\alpha}\times\vec{\zeta})_i}$$

Allgemein können wir dies unter Ausnutzung der Identität $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ noch auf Vektorschreibweise verallgemeinern:

$$\delta\vec{\zeta} = -\vec{\zeta}(\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta}) + \frac{1}{2}(\vec{\zeta}^2 - 1)\vec{\beta} - \vec{\alpha}\times\vec{\zeta} = \vec{\beta}(\vec{\zeta}^2) - \vec{\zeta}(\vec{\beta}\cdot\vec{\zeta}) - \frac{1}{2}(\vec{\zeta}^2+1)\vec{\beta} - \vec{\alpha}\times\vec{\zeta} =$$

$$= \vec{\zeta}\times(\vec{\beta}\times\vec{\zeta}) - \frac{1}{2}(\vec{\zeta}^2+1)\vec{\beta} - \vec{\alpha}\times\vec{\zeta} = \boxed{-(\vec{\beta}\times\vec{\zeta})\times\vec{\zeta} - \frac{1}{2}(\vec{\zeta}^2+1)\vec{\beta} - \vec{\alpha}\times\vec{\zeta}}$$

Der erste Term (mit $\vec{\alpha}(x) = \vec{\beta}\times\vec{\zeta}$) sieht auch wie eine spezielle feldabhängige Isospintransformation. Sie ist nichtlinear bezüglich $\vec{\beta}$, aber linear bezüglich $\vec{\alpha}$ (Isospin, γ^5-Transformation).

$$\delta(\overrightarrow{D_a\zeta})_i \stackrel{!}{=} -(\vec{\alpha}(x)\times\overrightarrow{D_a\zeta})_i - (\vec{\alpha}\times\overleftarrow{D_a\zeta})_i$$

Der Zähler transformiert so wie die Ableitung vom Zähler; damit ist $\overleftarrow{D_a\zeta}$ die kovariante Ableitung bezüglich $\vec{\alpha}$. $\overleftarrow{D_a\zeta}$ transformiert auch kovariant bezüglich der Isospintransformation mit $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(x) = \vec{\beta}\times\vec{\zeta}(x)$. Deshalb weiß man sofort, dass $\delta\mathcal{L} = 0$, weil $\zeta^i\zeta_i$ isospininvariant (auch unter geeichter Isospintransformation) ist. $D_a\zeta^i D^a\zeta_i$ ist invariant unter $\vec{\alpha}$-$\vec{\beta}$-Transformationen $\vec{\alpha}(x) = \vec{\beta}\times\vec{\zeta}(x)$.

$$\sigma(x) \mapsto \sigma^0 = \frac{|m|}{\sqrt{\lambda}} \text{ mit } m^2 < 0,\ \lambda > 0$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$\mathcal{L} = 2\frac{|m|^2}{\lambda}\overrightarrow{D_a\zeta}\,\overrightarrow{D^a\zeta} = \frac{F_\pi^2}{2}\frac{\partial_a\vec{\zeta}\cdot\partial^a\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}} = \frac{1}{2}\frac{\partial_a(F_\pi\vec{\zeta})\cdot\partial^a(F_\pi\vec{\zeta})}{1+\frac{F_\pi\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}F_\pi}{F_\pi^2}} \text{ mit } F_\pi^2 = 4\frac{|m|^2}{\lambda},\ [F_\pi] = 1$$

Mit $\vec{\pi} = F_\pi\vec{\zeta}$ und $[\vec{\pi}] = 1$ können wir schreiben:

$$\boxed{L_\pi = \frac{1}{2}\frac{\partial_a\vec{\pi}\cdot\partial^a\vec{\pi}}{1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F_\pi^2}}}$$

Stereographische Projektion: Parametrisierung, chirale Störungstheorie: $(\overrightarrow{D_a\zeta}\cdot\overrightarrow{D^a\zeta})^2$

3.1.5 Yukawa-Kopplung, Pion-Nukleon-System in nichtlinearer Version

$$N_L(x) = \begin{pmatrix} u_L(x) \\ d_L(x) \end{pmatrix};\ \overline{N_R} = (\overline{u_R}, \overline{d_R}) \qquad N_L\,(1,0),\ \overline{N_R}(0,\overline{1})$$

Die Transformationsmatrizen sind gegeben durch:

$$U = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right) \text{ und } V^{-1} = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)$$

Die Matrix $\Phi = \phi_4\mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}$ transformiert nach $\Phi' = U\Phi V^{-1}$.

$N_R' = VN_R$, $\overline{N_R}' = \overline{N_R}(V^{-1})$, $\mathcal{L}_N = \overline{N}\Phi N$

$\lambda^\alpha = (U^{\mathsf{T},-1})^\alpha{}_\beta\chi^\beta = \chi^\beta(U^{-1})_\beta{}^\alpha$

N setzt sich zusammen aus $N_L + N_R$. Für die Transformation von N_R hatten wir herausgefunden:

$$N_R' = \left(\frac{1+\gamma^5}{2}N\right)' = (\Pi_+N)' = VN_R \text{ und } \overline{N_R'} = \overline{N_R}V^{-1} \text{ mit } \overline{N_R}(0,\overline{1})$$

Analog gilt für die Transformationen von N_L:

$$N_L' = UN_L \text{ und } \overline{N_L'} = \overline{N_L}U^{-1} \text{ mit } N_L(1,0)$$

Der Ausdruck $\overline{N_L}\Phi N_R$ ist eine Invariante. Entsprechend transformiert Φ^+:

$(\Phi^+)_{\alpha'}{}^{\beta} = (\mathbf{1}\phi_4 - \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau})_{\alpha'}{}^{\beta}$

Das Transformationsverhalten dieses Objekts ist also $\Phi'^+ = V\Phi^+U^{-1}$. Weiterhin ist also $\overline{N_R}\Phi^+N_L$ eine Invariante unter SU(2) ⊗ SU(2). Schlussendlich packen wir all dies zusammen in eine Kopplung:

$$\mathcal{L}_{\Phi N} = g\left(\overline{N_L}\Phi N_R + \overline{N_R}\Phi^+ N_L\right) = g\left(\overline{N}N\phi_4 + \mathrm{i}\overline{N}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}\gamma^5 N\right)$$

g ist die Yukawa-Kopplungskonstante mit $[g] = 0$. Für infinitesimale Transformationen δN, $\delta\Phi$, … (siehe Blatt 5, Aufgabe 11) ergibt sich:

$$\delta N_L = \mathrm{i}\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})N_L,\ \delta\Phi = \mathrm{i}\vec{\alpha}\left[\frac{\tau}{2},\Phi\right] + \mathrm{i}\vec{\beta}\left\{\frac{\tau}{2},\Phi\right\}$$

Wir schreiben dies auf σ und ${R_I}^4$ um, wobei wir bedenken, dass $\sigma(x)$ SO(4)-invariant ist.

$$\frac{1}{\sigma(x)}\Phi = \frac{1}{\sigma}\phi_4\mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\frac{\vec{\phi}}{\sigma} \text{ mit } \chi_4 = \frac{1}{\sigma}\phi_4 \text{ und } \vec{\chi} = \frac{\vec{\phi}}{\sigma}$$

Mittels der stereographischen Projektion lässt sich dies also schreiben als:

$$\frac{-1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\frac{2\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}$$

Mit Blatt 5, Aufgabe 12 folgt:

$$\frac{1}{\sigma}\Phi = -\frac{1}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\right)^2$$

Dies funktioniert analog mit $\frac{\phi^+}{\sigma}$, wobei $\vec{\zeta}\mapsto -\vec{\zeta}$. Wir kommen damit zu folgender Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Phi N} \mapsto \mathcal{L}_{\sigma,\zeta,N} = -g\sigma(x)\Bigg(&\frac{\overline{N_L}}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\frac{N_R}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}+\\ &+\frac{\overline{N_R}}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\frac{N_L}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\Bigg)\end{aligned}$$

Nun definieren wir unser Feld N folgendermaßen um:

$$\widetilde{N}_L := \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)N_L \text{ und } \overline{\widetilde{N}_L} := \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\overline{N_L}\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)$$

$$\widetilde{N}_R := \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)N_R \text{ und } \overline{\widetilde{N}_R} := \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\overline{N_R}\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)$$

Man spricht hierbei auch von der kanonischen Feldumdefinition (siehe unter anderem Borchas-Klassen). Damit lautet unsere neue Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = -g\sigma(x)\left(\overline{\widetilde{N}_L}\widetilde{N}_R + \overline{\widetilde{N}_R}\widetilde{N}_L\right) = -g\sigma(x)\overline{\widetilde{N}}\widetilde{N}$$

Umgeschriebener kinetischer Term der Nukleonen:

$$\mathcal{L}_{kin,N} = \mathrm{i}\overline{N}\gamma^a\partial_a N = \mathrm{i}\left(\overline{N_L}\gamma^a\partial_a N_L + \overline{N_R}\gamma^a\partial_a N_R\right)$$

Als Übung kann gezeigt werden, dass $\mathcal{L}^+ \simeq \mathcal{L}$ modulo einer Raum-Zeit-Ableitung ∂_a. Des weiteren benötigen wir die Umkehrtransformationen:

$$N_L = \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\widetilde{N}_L \text{ und } N_R = \frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\widetilde{N}_R$$

Die Umdefinition wird auf Blatt 5 in Aufgabe 12 behandelt. Die Ableitung $\partial_a N_L$ ergibt drei Terme:

➢ 1.Term:

$$\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}_L}\frac{1}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\gamma^a\left[\frac{\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\partial_a-\frac{\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\frac{\vec{\zeta}\cdot\partial_a\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}-\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}\cdot\partial_a\vec{\zeta}}{\sqrt{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}}\right]\widetilde{N}_L$$

Mit $\left(\mathbf{1}+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)\left(\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta}\right)=\left(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}\right)\mathbf{1}$ ergibt sich hieraus:

$$\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}_L}\left[\gamma^a\partial_a\mathbf{1}-\gamma^a\frac{\vec{\zeta}\cdot\partial_a\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\mathbf{1}-\mathrm{i}\frac{(1+\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\vec{\zeta})\vec{\tau}\cdot\partial_a\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\right]\widetilde{N}_L$$

Wir verwenden nun die Notation $\gamma^a\partial_a=\partial\!\!\!/$:

$$\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}_L}\left[\mathbf{1}\partial\!\!\!/-\frac{\vec{\zeta}\cdot\partial\!\!\!/\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\mathbf{1}-\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}\cdot\partial\!\!\!/\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}+\frac{\zeta^i\partial\!\!\!/\zeta^j}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\left(\delta_{ij}+\mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\tau^k\right)\right]\widetilde{N}_L=$$

$$=\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}_L}\left[\mathbf{1}\partial\!\!\!/-\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}\cdot\partial\!\!\!/\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}+\mathrm{i}\frac{\vec{\zeta}\times\partial\!\!\!/\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\cdot\vec{\tau}\right]\widetilde{N}_L$$

➢ 2.Term:

Analog ergibt sich der zweite Term:

$$\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}_R}\left[\partial\!\!\!/\mathbf{1}+\mathrm{i}\frac{\vec{\tau}\partial\!\!\!/\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}+\mathrm{i}\frac{\vec{\zeta}\times\partial\!\!\!/\vec{\zeta}}{1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta}}\cdot\vec{\tau}\right]\widetilde{N}_R$$

$$\mathcal{L}_{kin}=\mathrm{i}\overline{N}\partial\!\!\!/N=\boxed{\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}}\left[\partial\!\!\!/\mathbf{1}-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\partial\!\!\!/\vec{\zeta}\cdot\gamma^5+\mathrm{i}\left(\vec{\zeta}\times\partial\!\!\!/\vec{\zeta}\right)\cdot\vec{\tau}\right]\widetilde{N}}$$

Uns interessiert die Invarianz des Ausdrucks unter bestimmten Transformationen. Wir führen dazu eine infinitesimale Transformation der $\widetilde{N}$-Felder durch (siehe Blatt 5, Aufgabe 13):

$$\underset{\vec{\alpha}}{\delta}\widetilde{N}=\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\widetilde{N};\ \underset{\vec{\beta}}{\delta}N=\mathrm{i}\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5N,\ \underset{\vec{\beta}}{\delta}\vec{\zeta}=-(\vec{\beta}\times\vec{\zeta})\times\vec{\zeta}-\frac{1}{2}(1+\vec{\zeta}\cdot\vec{\zeta})\vec{\beta}$$

$$\delta\widetilde{N}=\mathrm{i}\vec{\alpha}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\widetilde{N}\text{ mit }\vec{\alpha}(x)=\vec{\beta}\times\vec{\zeta}(x)$$

Weiterhin definieren wir die kovariante Ableitung auf das Nukleonfeld $\widetilde{N}$:

$$D\!\!\!\!/\,\widetilde{N}\equiv\gamma^aD_a\widetilde{N}:=\left(\mathbf{1}\partial\!\!\!/+\mathrm{i}(\vec{\zeta}\times\overrightarrow{D\!\!\!\!/\,\zeta})\cdot\vec{\tau}\right)\widetilde{N}\text{ mit der Variation }\delta(D\!\!\!\!/\,\widetilde{N})=\left(\mathrm{i}\alpha\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}+\mathrm{i}\vec{\alpha}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)D\!\!\!\!/\,\widetilde{N}$$

Damit können wir schreiben:

$$\mathcal{L}_{kin,neu}+\mathcal{L}_{\pi N,neu}=\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}}\left[D\!\!\!\!/-\mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{D\!\!\!\!/\,\zeta}\gamma^5+\mathrm{i}g\sigma(x)\right]\widetilde{N}$$

Zum Schluss definieren wir $\sigma(x)$ und $\vec{\zeta}$ durch

$$\boxed{\sigma^0=\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}=\frac{1}{2}F\text{ mit }m^2<0\text{ und }\vec{\pi}=F\vec{\zeta}}$$

und erhalten so:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\pi\widetilde{N}}=\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}}\left[D\!\!\!\!/+\mathrm{i}m_{\widetilde{N}}+\frac{\mathrm{i}}{F}\gamma^5\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{D\!\!\!\!/\,\pi}\right]\widetilde{N}\text{ mit }m_{\widetilde{N}}=g\frac{|m|}{\sqrt{\lambda}}}$$

Der dritte Summand ist für sich invariant, daher kann g_A frei gewählt werden. Im linearen σ-Modell ist $g_A=1$.

$$\mathcal{L}_{\pi\widetilde{N}}=\mathrm{i}\overline{\widetilde{N}}\left(D\!\!\!\!/+\mathrm{i}m_{\widetilde{N}}+\mathrm{i}\frac{g_A}{F}\gamma^5\vec{\tau}\cdot\overrightarrow{D\!\!\!\!/\,\pi}\right)\widetilde{N}+\frac{1}{2}\overrightarrow{D_a\pi}\,\overrightarrow{D^a\pi}\text{ mit }\overrightarrow{D_a\pi}=\frac{\partial_a\vec{\pi}}{1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}}$$

$$D\!\!\!\!/\,\widetilde{N}=\left(\partial\!\!\!/\mathbf{1}+\frac{\mathrm{i}}{F^2}\left(\vec{\pi}\times\overrightarrow{D\!\!\!\!/\,\pi}\right)\cdot\vec{\tau}\right)\widetilde{N}$$

Auf dem Übungsblatt 6 wird gezeigt, dass sich der g_A-Term ergibt aus:

$$\frac{1}{2}\left(\phi\partial_a\phi^+-(\partial_a\phi)\phi^+\right)\text{ und analog }\frac{1}{2}\left(\phi^+\partial_a\phi-\partial_a\phi^+\phi\right)$$

$$g'\mathrm{i}\overline{N_L}\gamma^a\frac{1}{2}\left(\phi\partial_a\phi^+-(\partial_a\phi)\phi^+\right)N_L$$

3.2 Sanfte Pion-Phänomenologie

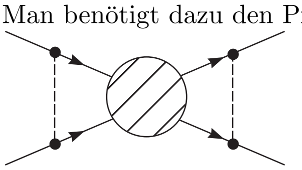
Bei der effektiven LAGRANGEfunktion gibt es eine LORENTZsymmetrie: SU(2) $\otimes$ SU(2) $\mapsto$ SU(2) Isospin (nichtlinear)
Es ist Störungstheorie mit allgemeinem $\mathcal{L}(\pi, \widetilde{N})$ durchzuführen, obwohl diese jedoch nicht renormierbar ist. Man macht dann eine Entwicklung in $Q^2/\Lambda^2 \ll 1$ mit einer Skala $\Lambda = \Lambda_{QCD} \approx m_\rho = 770\,\mathrm{MeV}$ (nach WEINBERG (1979), HONERKAMP-ECKER ($\approx$ (1974)). Wir wollen zeigen, dass die führende Ordnung von den Baumgraphen (BORN-Approximation) herrührt. Beispielsweise produzieren dann Schleifen höhere Terme. In jeder Ordnung treten nur **endlich** viele zunächst freie Parameter auf (Renormierungsbedingung).

3.2.1 Pion-System ohne Nukleon

Wir betrachten nur das Pion-System ohne Nukleon und studieren, welches Potenzverhalten in Q^2 vorliegt. Dazu betrachten wir:

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_a\pi} \cdot \overrightarrow{D^a\pi} - \frac{C_4}{4}(\overrightarrow{D_a\pi} \cdot \overrightarrow{D^a\pi})^2 - \frac{C_4'}{4}(\overrightarrow{D_a\pi} \cdot \overrightarrow{D_b\pi}) \cdot (\overrightarrow{D^a\pi} \cdot \overrightarrow{D^b\pi}) \text{ mit } [C_4] = -4 \text{ und } \overrightarrow{D_a\pi} = \frac{\partial_a\vec{\pi}}{1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}}$$

Man benötigt dazu den Propagator (Zweipunktfunktion) des Pions:



Dieser ist gegeben durch:

$$-\mathrm{i}\frac{\delta_{ij}}{-p^2 - \mathrm{i}\varepsilon}$$

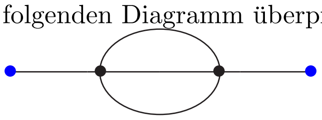
Allgemein gilt für einen Propagator:

$$\langle 0|(\pi_i(x)\pi_j(y))|0\rangle = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}p\,\exp(\mathrm{i}p(x-y))\widetilde{D}(p) = -\mathrm{i}D_i(x-y)$$

Wir zählen die Impulspotenzen (Power-Counting) innerhalb eines FEYNMAN-Diagramms:

$$\nu = 4L - 2I + \sum V_k d_k$$

L ist hierbei die Anzahl der Schleifen, I die Anzahl der inneren Linien und V_k die Anzahl der Vertizes mit den Ableitungen. Für die Anzahl der Schleifen (Loops) gilt die EULER-Formel $L = I - V + 1$, wie man am folgenden Diagramm überprüfen kann:



$$L = 2 = \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right\} + 1$$

Mit $-2I = -2V + 2 - 2L$ ergibt sich damit:

$$\nu = \sum_k V_k(d_k - 2) + 2L + 2$$

Mit $d_k \geq 2$, $L \geq 0$ folgt $\nu \geq 2$. $\nu = 2$ ist die führende Ordnung $(Q/\Lambda)^2$ und rührt von $L = 0$ (Baumgraphen-Näherung) her. Wenn wir die führende Ordnung wissen wollen, müssen wir also den Term $\mathcal{L}_\pi = \mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_a\pi}\overrightarrow{D^a\pi}$. Die effektive LAGRANGEfunktion sorgt für sich selbst (keine Stromalgebra).

3.2.2 Anpassung von $F/2 = \sigma^0$ (Radius von S^3, $\vec{\pi} = F\vec{\zeta}$)

Für den schwachen Pion-Zerfall ($\pi^+ \mapsto \mu^+ + \nu_\mu$) spielen die Matrixelemente des Axialstroms $\vec{A}_a$ (zu $\vec{\beta}$, γ^5-Transformation) eine Rolle. Pionen sind Pseudoskalare mit intrinsischer Parität $\eta_\pi = -1$, was man durch Betrachtungen der Reaktion $\pi^- + \mathrm{d} \mapsto 2\mathrm{n}$ erhält (1951).

$$\langle 0|A_i^a(x)|\pi_j(p)\rangle = \delta_{ij}\frac{F_\pi}{2}(\mathrm{i}p_\pi^a)\frac{\exp(-\mathrm{i}px)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_\pi^0}}$$

Dies definiert $F_\pi/2$. Zu berechnen ist nun $\vec{A}_a(x)$. Der NOETHER-Strom zur $\vec{\beta}$-Transformation (Blatt 6, Aufgabe 16) ist gegeben durch:

$$\underset{\beta}{\delta}\vec{\pi} = -(\vec{\beta}\cdot\vec{\pi})\frac{\vec{\pi}}{F} + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)F\vec{\beta}$$

Für $\mathcal{L}_{\pi,2}$ erhalten wir:

$$\vec{\beta}\cdot\vec{A}^a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_a\pi_i)}\underset{\beta}{\delta}\pi_i = \frac{\partial^a\pi^i}{\left(1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)^2}\left[-(\vec{\beta}\cdot\vec{\pi})\frac{\pi_i}{F} + \frac{1}{2}\left(-1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)F\beta_i\right] =$$

$$= -\vec{\beta}\cdot\left(\frac{F}{2}\partial^a\vec{\pi}\frac{1-\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}}{\left(1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)^2} + \frac{\vec{\pi}}{F}\frac{\vec{\pi}\cdot\partial^a\vec{\pi}}{\left(1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)^2}\right)$$

$$\pi_i(x) = \int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2q_0}}\exp(-\mathrm{i}qx)a^-(\vec{q})$$

Damit ergibt sich das Matrixelement:

$$\langle 0|A_i^a(x)|\pi_j(p)\rangle_{(**)} = \frac{F}{2}\delta_{ij}\frac{\exp(-\mathrm{i}px)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}}(\mathrm{i}p^a)$$

$$\langle 0|\pi_i(x)|\pi_j(p)\rangle = \langle 0|[\pi_i^-(x)a_j^+(\vec{p})]|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}}\exp(-\mathrm{i}px)\delta_{ij},\ [a_i^-(\vec{q}), a_j^+(\vec{p})] = \delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{p})$$

$$\vec{Q}^5 = \int\mathrm{d}^3x\,\vec{A}_0(x)\text{ wobei }[Q^5,Q^5]\sim Q_\pi\text{ fest}$$

Das Vorzeichen ist frei in $\vec{A}^a$. Aus dem Pion-Zerfall aus $(**)$ erhält man:

$$\mathcal{L}\sim\frac{G_F\cos\theta}{\sqrt{2}}A_+^aJ_a + \text{h.k. mit } G_W = G_F\cos\theta$$

In führender Ordnung kann man die Kopplungskonstante des Pion-Zerfalls identifizieren mit F.

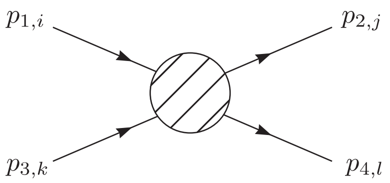
$$\Gamma(\pi\mapsto\mu\nu) = G_W^2\frac{F_\pi^2m_\mu^2(m_\pi^2-m_\mu^2)}{16\pi m_\pi^2}\approx(2,6\cdot 10^{-8}\,\mathrm{s})^{-1}$$

Weiterhin gilt:

$$G_W\approx 1,15\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{GeV}}^2\text{ und }F_\pi = 184\,\mathrm{MeV}$$

Oft gibt man $F_\pi/2\approx 92\,\mathrm{MeV}$ an.

3.2.3 Pion-Pion-Streuamplitude in $\nu = 2$



Die führende Ordnung von $\mathcal{L}_{\pi,2}$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\pi,2} = \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{\partial_a\pi}\overrightarrow{\partial^a\pi}}{\left(1+\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)^2}$$

An dieser Stelle verwenden wir die Entwicklung:

$$\frac{1}{(1-x)^\nu} = \sum_{n=0}^{\infty}\nu^{\overline{n}}\frac{x^n}{n!}\text{ mit }\nu^{\overline{n}} = \nu(\nu+1)\dots(\nu+n-1)\text{ (POCHHAMMER)}$$

Weiterhin gilt $n^{\overline{n}} = n(n+1)\ldots = n!$.

$$\mathcal{L}_{\pi,2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\partial_a\pi}\overrightarrow{\partial^a\pi}\left[1 - 2\left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right) + 3\left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)^2 + \dots\right]$$

$$(\text{out}; q_1, \dots, q_n | p_1, \dots, p_n; \text{in}) \xrightarrow[\text{Lehmann, Symanzik, Zimmermann (1955)}]{} \tau(x_1, \dots, x_n) = (0|T(\Phi(x_1) \dots \Phi(x_n))|0)$$

Dies ist die GREENsche Funktion zur n-Punkt-Funktion.

$$f_p(x) = \frac{\exp(-\mathrm{i}px)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p^0}} \left(p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \right)$$

$$(\text{out}, q_1, \dots, q_m | p_1, \dots, p_n; \text{in}) = \mathrm{i}^{m+n} \int_{i=1} \mathrm{d}^m y_i \int_{j=1} \mathrm{d}^n x_j \, f^*_{q_i}(x_i) \, \vec{K}_{y_i} \tau(y_1, \dots, y_m, x_1, \dots, x_n)$$

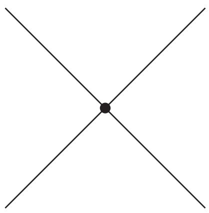
Störungstheorie: GELL-MANN-Formel (ohne Vakuumblasen):

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp(\mathrm{i}S_{int}(\phi))|0\rangle = \langle 0|T \exp(\mathrm{i}S_{int}(\phi))|0\rangle$$

Wir wollen den Ausdruck $\langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle$ via WICK-Theorem berechnen:

$$\phi(x_1) \dots \phi(x_2) = -\mathrm{i}D(x_1 - x_2) = \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$$

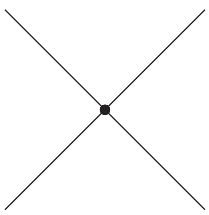
$$\tau(x_{1,i}; x_{2,j}; x_{3,k}; x_{4,l})$$



$$: \ \mathrm{i} \left(-\frac{1}{F^2} \right) \int \mathrm{d}^4 x \, \partial_a \pi_n \partial^a \pi_n \pi_m(x) \pi_m(x)$$

$$\mathrm{i} \left(-\frac{1}{F^2} \right) \langle 0|T\pi_i(x_1) \dots \pi_l(x_2) \left(\int \mathrm{d}^4 x \, \partial_a \vec{\pi} \partial^a \vec{\pi} \, \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \right) |0\rangle = \sum 4 \, \text{Kontraktionen} \, \pi_i(x) \pi_j(y) =$$
$$= -\mathrm{i}D(x-y)\delta_{ij}$$

Auf Blatt 6 in Aufgabe 17 berechnen wir:



$$: \ \mathrm{i}(2\pi)^4 \delta(p_1 - p_2 + p_3 + p_4) \frac{1}{(2\pi)^6 4 \sqrt{p_1^0 \dots p_4^0}}$$

$$\langle \text{out}; p_{3,k}, p_{4,l} | p_{1,i}, p_{2,j} | \text{in} \rangle = \mathrm{i}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \cdot \frac{1}{\prod_{k=1}^{4} \sqrt{2p_k^0} (2\pi)^{\frac{3}{2}}} M_{i,j,k,l}(s,t,u)$$

$$M_{i,j,k,l}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \delta_{ij}\delta_{kl} A(s,t,u) + \delta_{ik}\delta_{jl} A(t,s,u) + \delta_{il}\delta_{jk} A(u,t,s) \text{ mit } A(s,t,u) = A(s,u,t)$$

Man spricht hierbei von sogenannten „Crossing-Relationen“. Verwendet wurden die MANDELSTAM-Variablen $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ und $u = (p_1 - p_4)^2$. In unserem Falle gilt $s + t + u = 0$, da wir die Masse des Pions nicht berücksichtigt haben. In führender Ordnung berechnet man $A(s,u,t) = \frac{4}{F^2} s$ (siehe Blatt 6, Aufgabe 17). Man soll das L_{eff} ernst nehmen als Grundlage einer Störungstheorie in Q^2/Λ^2. Dies ist das Programm der chiralen Störungstheorie (χ-paritation-theory). Die weitere Idee ist nun, dass man die nächsten Terme der Entwicklung berücksichtigt. Dies läuft unter dem Schlagwort NLO (next to leading order). Dazu betrachten wir die Anzahl der Potenzen in p für zusammenhängende Diagramme:

$$\nu = \sum_k (d_k - 2) + 2L + 2$$

Es wird also über die Anzahl k der Vertizes summiert; d_k ist die Anzahl der Ableitungen am jeweiligen Vertex und L ist die Anzahl der Loops. (Unsere Standard-LAGRANGEfunktion hat zwei Ableitungen.) $\nu = 2$ bezeichnet die führende Ordnung ($L = 0$, $d_k = 2$); sie wird als Tree-Näherung bezeichnet. Die nächste Ordnung ist $\nu = 4$. Dazu verwendet man das alte L_π (mit $d_k = 2$) und nimmt eine zusätzliche Schleife ($L = 1$) mit.

$$L_\pi = \frac{1}{2} \overrightarrow{D_a \pi} \cdot \overrightarrow{D^a \pi}$$

Typische Terme höherer Ordnung in L_{eff} sind beispielsweise:

$$-c_4(\overrightarrow{D_a\pi} \cdot \overrightarrow{D^a\pi})^2 - c_4'(\overrightarrow{D_a\pi} \cdot \overrightarrow{D_b\pi})(\overrightarrow{D^a\pi} \cdot \overrightarrow{D^b\pi})$$

Man kann deshalb auch die neue Funktion $L_{c_4,c_4'}$ (mit $d_k = 4$, einem Vertex und $L = 0$) mitnehmen. Diagramme mit $L = 1$ sind:

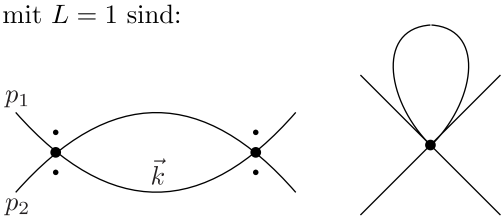
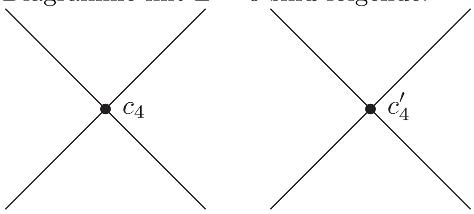


Diagramme mit $L = 0$ sind folgende:



Die jeweiligen Ableitungen werden manchmal durch Punkte gekennzeichnet. Die letzten beiden Beiträge ($A(s,t,u)$) berechnen wir auf Blatt 6 in Aufgabe 18:

$$\frac{1}{F^4}\left(\frac{1}{2}\hat{c}_4 s^2 + \frac{\hat{c}_4'}{4}(t^2+u^2)\right)$$

Die obigen Diagramme mit den Schleifen sind UV-divergent und eventuell auch IR-divergent. IR-Divergenzen lassen sich jedoch durch Einführung einer Pionmasse beseitigen. Der Cut-Off ist $\Lambda \simeq \Lambda_{QCD}$. Äußere Impulse sorgen dafür, dass die Beiträge logarithmisch divergent sind. Die Divergenzen werden noch schlimmer (bis zu Λ^4), wenn die Impulse innen sitzen.

$$\int \frac{\mathrm{d}^4\mathrm{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+\mathrm{i}\varepsilon)(k^2+\mathrm{i}\varepsilon)} \sim \ln\Lambda^2$$

Weitere Beiträge sind:

$$\frac{s^2\ln(s)}{F^4} + \frac{1}{F^4}(s^2+t^2+u^2)\ln\left(\frac{s}{\mu^2}\right)$$

Eine Verbesserung ergibt sich natürlich, wenn man weitere Ordnungen mitnimmt.

3.2.4 Masse der Pionen

Pionen werden durch Goldstone-Felder beschrieben; diese sind von Haus aus masselos. Wir betrachten das Goldstone-Theorem bei gestörter Symmetrie. Wir führen also noch einen isospinstörenden Term hinzu und überlegen uns, was dann passiert.
Bisher waren π Goldstonebosonen, also masselos. Experimentell bestimmt man jedoch $m_\pi \approx 140\,\mathrm{MeV}$. Im linearen (SO(4))-$\sigma$-Modell führt man aus der Quantenchromodynamik motiviert folgende Terme ein:

$$\mathcal{L}_m = -m_\mathrm{u}\overline{u}u - m_\mathrm{d}\overline{d}d$$

$\overline{u}$, u, $\overline{d}$ und d sind Dirac-Spinoren. Solche Massenterme brechen die γ^5-Symmetrie. Sind die Massen m_u und m_d außerdem verschieden, so wird auch die Isospinsymmetrie gebrochen. Der Ausdruck

$$N = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} : \, m\overline{N}N$$

ist nämlich noch isospininvariant. Die Symmetriebrechung ist hier explizit (und nicht spontan). Unsere Frage ist nun, wie man die Pionmasse m_π aus m_u und m_d erhält. Brechungen: Komponenten von SO(4)-Vektoren

$$\phi_4^{(+)} = \frac{1}{2}(\overline{u}u + \overline{d}d) = \frac{1}{2}\overline{N}N$$

$$\phi_3^{(-)} = \frac{1}{2}\overline{N}\tau^3 N = \frac{1}{2}(\overline{u}u - \overline{d}d)$$

(Dieser Vierervektor hat jedoch nichts mit der zuvor betrachteten Matrix Φ zu tun.) Mit diesen neuen Objekten kann man die LAGRANGEfunktion wie folgt umschreiben:

$$\mathcal{L}_m = -(m_\mathrm{u} + m_\mathrm{d})\Phi_4^{(+)} - (m_\mathrm{u} - m_\mathrm{d})\Phi_3^{(-)}$$

Betrachten wir außerdem folgende $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$-Matrix:

$$\Phi^{(+)} = \frac{1}{2}\overline{N}N\mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\tau}\left(\mathrm{i}\overline{N}\gamma^5\frac{\vec{\tau}}{2}N\right)$$

$$\Phi^{(-)} = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\overline{N}\gamma^5 N)\mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\tau}\cdot\left(\overline{N}\frac{\vec{\tau}}{2}N\right)$$

Der Ausdruck $\mathrm{i}\overline{N}\gamma^5 N$ ist hermitesch und damit reell. Aus Aufgabe 9b auf Blatt 4 wissen wir, wie diese Objekte transformieren:

$$\delta\phi_3^{(-)} = \beta_3\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{N}\gamma^5 N\right) - \left(\vec{\alpha}\times\left(\overline{N}\frac{\vec{\tau}}{2}N\right)\right)_3 \quad \text{mit } \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{N}\gamma^5 N = \phi_4^{(-)} \text{ und } \overline{N}\frac{\vec{\tau}}{2}N = \vec{\phi}^{(-)}$$

$$\delta\phi_4^{(+)} = -\vec{\beta}\cdot\vec{\phi}^{(+)} = -\vec{\beta}\left(\mathrm{i}\overline{N}\gamma^5\frac{\vec{\tau}}{2}N\right)$$

3.2.5 Einschub: Goldstone-Theorem bei kleinen Störungen der Symmetrie, die spontan gebrochen wird

Dies findet man im WEINBERG II, 19.3.

$$V(\phi) = V_0(\phi) + V_1(\phi)$$

V_0 ist symmetrisch bezüglich Generatoren einer kontinuierlich kompakten LIE-Algebra.

$$\delta V_0|_{\phi=\text{LORENTZ-Felder}} = 0$$

ϕ transformiert unter Darstellungen der Gruppe. $\delta\phi_n$ ist bekannt.

$$0 = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_n}\delta\phi_n = \frac{\partial V_0(\phi)}{\partial\phi_n}\mathrm{i}(\alpha\cdot T)_n{}^m\phi_m \tag{1}$$

Dies ist der Ausdruck dafür, dass das Potential eine Symmetrie aufweist. Jetzt kommt eine „kleine“ Störung V_1 hinzu. Das Minimum von $V_0(\phi)$ sei $\overset{0}{\phi}$. Um nachzuschauen, ob es sich um ein relatives Minimum handelt, betrachtet man die HESSE-Matrix:

$$\left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} \geq 0 \text{ (also positiv semidefinit)}$$

Wir suchen also stationäre Punkte von V, die gegeben sind durch

$$\boxed{\left.\frac{\partial V}{\partial\phi_n}\right|_{\bar{\phi}=\overset{0}{\phi}+\overset{1}{\phi}} = 0 \text{ und } \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\bar{\phi}} \geq 0}$$

und machen eine Entwicklung:

$$0 = \left.\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}}(\overset{1}{\phi})_m = \underbrace{\left.\frac{\partial V_0}{\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}}}_{=0} + \left.\frac{\partial V_1}{\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} + \underbrace{\left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_m\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}}}_{=(M_0^2(\overset{0}{\phi}))_{mn}}(\overset{1}{\phi})_m$$

$$\boxed{M_0^2(\overset{0}{\phi})\overset{1}{\phi}_m + \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} = 0} \tag{2}$$

$$\overset{1}{\phi}_m M_{mn}^2(\overset{0}{\phi}) + \left.\frac{\partial V_1}{\partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} = 0 \tag{3}$$

Wir differenzieren (1) nach ϕ_m, wobei V_0 symmetrisch ist:

$$0 = \frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_m \partial\phi_n} \mathrm{i}(\alpha \cdot T)_n{}^k \phi_k + \frac{\partial V_0}{\partial \phi_n} \mathrm{i}(\alpha \cdot T)_n{}^m \tag{4}$$

Ausgewertet bei $\overset{0}{\phi}$:

$$0 = \left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial\phi_m \partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} (\mathrm{i}\alpha T)_n{}^k \overset{0}{\phi}_k \Rightarrow \boxed{0 = (M_0^2(\overset{0}{\phi}))_{mn} (\delta\phi_n)^0} \tag{5}$$

Ohne V_1 ist dies das Goldstone-Theorem. M_0^2 hat Eigenwerte 0 in Feldrichtungen am Minimum von V_0, die nicht invariant unter der betrachteten Symmetrie sind. (Goldstone-Nambu-Modus). (Die triviale Lösung liegt bei $\delta\overset{0}{\phi} = \vec{o}$: Wigner-Weyl-Modus der Symmetrie). Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten 0 sind die Goldstone-Feldrichtungen. Beispielsweise gibt es bei SO(4) $\mapsto$ SO(3) drei „gebrochene" Generatoren. Es gibt also drei GOLDstonetäler, in denen die Masse verschwindet. Wir multiplizieren nun Gleichung (3) mit $\delta\overset{0}{\phi}_n = \mathrm{i}(\alpha \cdot T)_n{}^m \overset{0}{\phi}_m$:

$$\overset{1}{\phi}_m \underbrace{(M_0^2(\overset{0}{\phi}))_{mn} \delta\overset{0}{\phi}_n}_{\text{Goldstone}} + \left.\frac{\partial V_1}{\partial \phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} \delta\overset{0}{\phi}_n = 0$$

Die nichttrivialen Lösungen für $\delta\overset{0}{\phi}_n$ sind die Goldstone-Richtungen (Masse 0).

$$\boxed{(\mathrm{i}T_r)_n{}^m \overset{0}{\phi}_m \left.\frac{\partial V_1}{\partial \phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} = 0} \text{ („Ausrichtung des Vakuums")} \tag{6}$$

Betrachten wir nun die Massen^2-Matrix für die „Pseudo"-Goldstonefelder. Man nimmt nur die „gebrochenen" Generatoren T_r:

$$\left.\frac{\partial^3 V_0}{\partial\phi_l \partial\phi_m \partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} \overset{1}{\phi}_l \underbrace{(\underset{r}{\delta\overset{0}{\phi}})_n}_{\mathrm{i}T_r\overset{0}{\phi}} (\underset{s}{\delta\overset{0}{\phi}})_m = - \left.\frac{\partial V_1}{\partial \phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} (T_r T_s \overset{0}{\phi})_n$$

Mit Aufgabe 19 von Blatt 7 erhält man dann:

$$\boxed{\frac{F^2}{4} M_{rs}^2 = \left.\frac{\partial V_1(\phi)}{\partial\phi_m \partial\phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} \underset{r}{\delta\overset{0}{\phi}}_m \underset{s}{\delta\overset{0}{\phi}}_n - \left.\frac{\partial V_1}{\partial \phi_n}\right|_{\overset{0}{\phi}} (T_r T_s \overset{0}{\phi})_n}$$

Die Idee für Pionen ist folgende:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= -m_{\mathrm{u}} \overline{u} u - m_{\mathrm{d}} \overline{d} d = -(m_{\mathrm{u}} + m_{\mathrm{d}}) = -(m_{\mathrm{u}} + m_{\mathrm{d}}) \Phi_4^{(+)} - (m_{\mathrm{u}} - m_{\mathrm{d}}) \Phi_3^{(-)} \\ &\text{mit } u_4 = m_{\mathrm{u}} + m_{\mathrm{d}} \text{ und } u_3 = m_{\mathrm{u}} - m_{\mathrm{d}}\end{aligned}$$

$$\Phi^{(+)} = \frac{1}{2} \overline{N} N \mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\tau} \left(\mathrm{i}\overline{N} \gamma^5 \frac{\vec{\tau}}{2} N \right)$$

$$\Phi^{(-)} = \frac{\mathrm{i}}{2} \overline{N} \gamma^5 N \mathbf{1} + \mathrm{i}\vec{\tau} \left(\overline{N} \frac{\vec{\tau}}{2} N \right)$$

Um SU(2)$_{Isospin}$, um Parität, $\vec{\alpha}$-Transformation: $\overset{0}{\phi}{}_4^{(+)}$ ist frei, $\overset{0}{\phi}_i = 0$ und $\overset{0}{\phi}{}_I^{(-)} = 0$. Damit rechnen wir nun die Pionmassen aus:

$$\left(\frac{F}{2}\right)^2 M_{rs}^2 = -u_4 (T_r T_s \overset{0}{\phi}{}^{(+)})_4 - \underbrace{u_3 (T_r T_s \overset{0}{\phi}{}^{(-)})_3}_{=0} = u_4 \delta_{rs} \overset{0}{\phi}{}_4^{(+)}$$

Um dies zu erhalten muss zweimal obige Transformation durchgeführt werden. Hieraus ergibt sich nun:

$$\boxed{m_\pi^2 = \frac{4}{F^2} u_4 \overset{0}{\phi}{}_4^{(+)}}$$

Im nichtlinearen Modell für die Pionen gilt:

$$\phi_4 = \sigma \frac{-1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}}{1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}} \text{ mit } \sigma \mapsto \overset{0}{\sigma} = \frac{F}{2}$$

$$\mathcal{L}_m = -V_1 = -(m_\mathrm{u} + m_\mathrm{d})\phi_4^{(+)} + \dots$$

Im nichtlinearen Modell kann man kein Objekt der Form $\phi_3^{(-)}$ finden, weshalb ein solches hier nicht auftaucht. Wir schreiben nun ϕ_4 folgendermaßen um:

$$\frac{-1+x}{1+x} = -1 + \frac{2x}{1+x}$$

Die Konstante -1 vergessen wir hier, da sie für die Lagrange-Funktion nicht wichtig ist.

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m_\pi^2}{2} \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}}$$

Als Übung kann man zeigen, dass man aus $\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_m$ die Masse für $\vec{\pi}$ erhält. Mittels des Noethertheorems erhält man die Gleichung für den Axialstrom:

$$\vec{\beta}\cdot\partial_a \vec{A}^a = \vec{\beta} m_\pi^2 \cdot \vec{\pi} \frac{F}{2} \frac{1}{1 + \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}} \Rightarrow \langle 0 | \partial_a A_i^a(x) | \pi_j(p) \rangle = \frac{F}{2} m_\pi^2 \frac{\exp(-\mathrm{i} p_\pi x)}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p_I^0}}$$

$$-\mathrm{i}\widetilde{D}_c(k) = \frac{-\mathrm{i}}{m_\pi^2 - k^2 - \mathrm{i}\varepsilon} \text{ wobei } m_\pi \approx 140\,\frac{\mathrm{MeV}}{c^2}$$

Wir erhalten nun eine neue Potenzzählregel für ν:

$$\nu = \sum_{\text{Vertizes } k} (d_k + 2m_k - 2) + 2L - 2$$

d_k ist die Anzahl der Ableitungen am Vertex k und

$$m_k = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mathcal{L}_m\text{-Vertex} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Auf Blatt 6 in Aufgabe 17 berechnen wir für $M_{ijkl}(s,t,u)$ die führenden Terme für $\nu = 2$.

$\mathcal{L}_\pi$	$L = 0$, $d_k = 2$, $m_k = 0$, **ein** Vertex
$\mathcal{L}_m$	$d_k = 0$, $m_k = 1$, $L = 0$, $\frac{m_\pi^2}{2}$, $\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}$ $\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}$

$$A(s,t,u) = \frac{4}{F^2}(s - m_\pi^2)$$

3.2.6 Pion-Nukleon-System

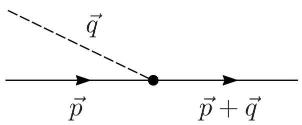
$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\pi N} = \mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{\pi\mathrm{N}},\, \mathcal{L}_m$$

$$\mathcal{L}_{\pi\mathrm{N}} = \mathrm{i}\overline{\widetilde{N}} \left(\not{D} + \mathrm{i} m_{\scriptscriptstyle N} + \mathrm{i}\frac{g_{\scriptscriptstyle A}}{F}\gamma^5 \vec{\tau}\overrightarrow{\not{D}\pi} \right) \widetilde{N},\ \not{D}\widetilde{N} = \left(\not{\partial}\mathbf{1} + \frac{\mathrm{i}}{F^2} \left(\vec{\pi} \times \overrightarrow{D\pi} \right) \cdot \vec{\pi} \right) \widetilde{N}$$

$$\langle 0 | T \widetilde{N}_{\alpha,\underline{\alpha}}(x) \overline{N}_\beta{}^{\underline{\beta}}(y) | 0 \rangle \Big|_{FT x-y|p} = -\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta} \widetilde{S}^c{}_{\underline{t}}{}^{\underline{\beta}}(p)$$

Aus $\mathcal{L}_2 = \mathrm{i}\overline{\widetilde{N}}(\not{\partial} + \mathrm{i} m_{\scriptscriptstyle N}\mathbf{1})\widetilde{N}$ erhält man:

$$-\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta} \frac{(-\not{p} + m_{\widetilde{N}}\mathbf{1})_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}}{m_{\widetilde{N}}^2 - p^2 - \mathrm{i}\varepsilon}$$



Das Nukleon absorbiert sanfte Pionen.

Werden Nukleonen nicht sanft absorbiert, so gilt $m_N \sim \Lambda_{QCD}$. Der Propagator für $p+q$ lautet für kleine q folgendermaßen:

$$\frac{-\not{p} + m_{\widetilde{N}}\mathbf{1}}{2p\cdot q} \text{ mit } p^2 = m_N^2$$

Innere Nukleonlinien liefern einen Beitrag $\frac{1}{Q}$. Die neue ν-Abzählregel für zusammenhängende Diagramme mit der Loopzahl L ergibt sich aus $\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{\pi\mathrm{N}} + \mathcal{L}_m$:

$$\nu = 4L - 2\left(I_\pi + \frac{1}{2}I_{\widetilde{N}}\right) + \sum_{\text{Vertizes } k}(d_k + 2m_k)$$

d_k sind wieder die Zahl der Ableitungen am Vertex.

$$-2(I_\pi + I_\mathrm{N}) = -2V - 2 - 2L$$

Die $\widetilde{N}$-Linienbilanz, wobei n_k die Zahl der $\widetilde{N}$-Linien am Vertex k ist, lautet:

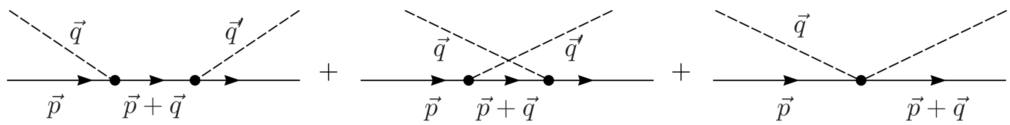
$$2I_N + E_N = \sum_{\text{Vertizes } k} n_k$$

Damit erhalten wir:

$$\nu = -2\sum_{\text{Vertizes } k} 1 + 2 - 2L + \frac{1}{2}\left(\sum_{\text{Vertizes } k} n_k\right) - \frac{E_N}{2}, \quad \boxed{\nu = 2L + \sum_{\text{Vertizes k}} \underbrace{\left(d_k + 2m_k - 2 + \frac{n_k}{2}\right)}_{\geq 0} - \frac{E_{\widetilde{N}}}{2} + 2}$$

- ➢ $n_k = 0$: ≥ 0
- ➢ $n_k \neq 0$: $n_k \geq 2$, $m_k = 0$

Die führende Ordnung $\nu = 2 - \frac{E_N}{2}$ ergibt sich aus $L = 0$ und $d_k + 2m_k - 2 + \frac{n_k}{2} = 0$. Betrachten wir nun als Beispiel die Pion-Nukleon-Streuung für $v = 0$, wobei wir in der Baumgraphen-Näherung folgende Diagramme betrachten:



(a) (b) (c)

Die Diagramme (a) und (b) haben ein Verhalten $\sim \frac{m_N}{m_\pi}$; die führende Ordnung wird durch das Diagramm (c) beschrieben.

3.2.7 Anpassung von g_A an das g_A vom β-Zerfall

Die erste Möglichkeit ist, neue Beiträge des Axialstroms $\vec{A}^a$ von $\overline{\widetilde{N}}$, π, $\widetilde{N}$ zu berechnen. Für den β-Zerfall braucht man das Matrixelement $\langle p|A_+^a(x)|n\rangle$, wobei $A_+^a = A_1 + \mathrm{i}A_2$.

$$\langle p|A_+^a(x)|n\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\exp(-\mathrm{i}qx)\overline{u_\mathrm{p}}(\gamma^a\gamma^5 f(q^2) + \gamma^5 q^a g(q^2) + \mathrm{i}[\gamma^a,\gamma^b]\gamma^5 g_B h(q^2))u_n \text{ mit } p_\mathrm{n} + q = p_\mathrm{p}$$

siehe in $\mathcal{L}_\pi + \mathcal{L}_{\pi\mathrm{N}} + \mathcal{L}_m$ in $A_i^a(x)$ Terme $\sim \overline{\widetilde{N}}$, N keine Pionen

$$\underset{\beta}{\delta}\widetilde{N} = -\vec{\alpha}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}N \text{ mit } \vec{\alpha}(x) = \vec{\beta}\times\vec{\pi} \quad \left(\text{und } \delta N = -\vec{\beta}\gamma^5\frac{\vec{\tau}}{2}N\right)$$

$$\delta\mathcal{L} = \delta\overline{\widetilde{N}}\not{\partial}\widetilde{N} + \overline{\widetilde{N}}\not{\partial}\delta\widetilde{N} = \partial_a\left[\overline{\widetilde{N}}\gamma^a\delta\widetilde{N}\right] + \text{Restliche Terme für Bewegungsgleichung von } \widetilde{N}$$

Dieser Term liefert Beiträge für den Axialstrom. Vom g_A-Term:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{g_A}{F}\overline{\widetilde{N}}\gamma^5\gamma^a\vec{\tau}\partial_a\delta\vec{\pi}\widetilde{N} + \ldots = \partial_a\left[\ldots\underset{\beta}{\delta}\pi\right] + \text{Terme der Bewegungsgleichung für } \delta\widetilde{N}$$

$$\underset{\beta}{\delta}\pi_i = -\vec{\beta}\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\pi}}{F^2}\right)F\beta_i$$

$$\beta_i A_i^a(x)|_{Beitrag} = -g_A \beta_i \frac{1}{2} \overline{\widetilde{N}} \gamma^5 \gamma^a \tau_i \widetilde{N} \Rightarrow A_+^a|_{Beitrag} = g_A \overline{\widetilde{N}} \gamma^a \gamma^5 \tau^+ \widetilde{N} \text{ mit } g_A = f(0) \text{ und } \tau^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Art der Berechnung ist aus $\mathcal{L}_{g_A}$. Durch partielle Integration erhält man aus der Nukleonbewegungsgleichung:

$$-\mathrm{i} G_{\pi\mathrm{N}} \overline{\widetilde{N}} \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \widetilde{N} = -\mathrm{i} m_N \frac{g_A}{\frac{F}{2}} \overline{\widetilde{N}} \gamma^5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \widetilde{N}$$

3.3 Nichtlineare σ-Modelle und Riemann-Mannigfaltigkeit

SU(2) $\otimes$ SU(2) allgemeine Parametrisierung der nichtlinear transformierten π^i-Felder
Bisher haben wir die spezielle Parametrisierung $S^3 \leftrightarrow \overline{\mathbb{R}}^3$ verwendet. Weinberg (1968): Weinberg-Funktion frei $f(T^i) \equiv f(\vec{\pi} \cdot \vec{\pi})$ zu tun mit $\underset{\vec{\alpha}}{\delta} \pi^i$ linear. $\underset{\vec{\beta}}{\delta} \pi^i$ Ansatz
Die Transformationen sehen jetzt im allgemeinen Fall folgendermaßen aus:

$$\delta \pi^i = \beta_j \delta^j \pi^i : \delta^j T^i = -\frac{F}{2} \left[f(\pi^2) \delta^{ij} + g(\pi^2) \pi^i \pi^j \right] \text{ mit } g(\pi^2) = \left(\frac{2}{F} \right)^2 \frac{1 + 2 \left(\frac{F}{2} \right)^2 f'(\pi^2) f(\pi^2)}{f(\pi^2) - 2\pi^2 f'(\pi^2)}$$

Dies gilt mit $F \mapsto F_\pi \sim 184\,\mathrm{MeV}$. $\delta^j \pi^i$ ist die Variation ohne Parameter β. Übung: stereographische Projektion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \overrightarrow{D_a \pi} \cdot \overrightarrow{D^a \pi} \text{ mit } (D_a \pi)^i = d^i; \ \vec{\pi} \partial_a \pi^j = \left(d_1(\pi^2) \delta_j^i + d_2(\pi^2) \pi^i \pi_i \right) \partial_a \pi^i$$

$$d_1(\pi^2) = \frac{1}{\sqrt{f^2(\pi^2) + \left(\frac{2}{F} \right)^2 T^2}}; \ d_2(\pi^2) = -d_1^2(\pi^2) \left(2f'(\pi^2) + \left(\frac{2}{F} \right)^2 \frac{1}{f(\pi^2) + \frac{1}{d_1(\pi^2)}} \right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_a \pi^i g_{ij} (\vec{\pi} \partial^a \pi^j \text{ mit } g_{ij}(\vec{\pi}) = \delta_{ij} d_1^2(\pi^2) + 4 d_1^4(\pi^2) \left(\pi^2 f'^2(\pi^2) - f f' - \frac{1}{F^2} \right) \pi_i \pi_j$$

K. Meetz hat im Jahre 1969 dies als Riemanngeometrie in drei Dimensionen aufgefasst mit den π^i als Koordinaten und der Metrik $g_{ij}(\vec{\pi})$. Symmetrietransformationen auf M_3:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(\vec{\pi}) \,\mathrm{d}\pi^i \,\mathrm{d}\pi^j \text{ mit } g_{ij} = \frac{1}{4} \frac{\partial \zeta^I}{\partial \pi^i} \delta_{IJ} \frac{\partial \chi^J}{\partial \zeta^j} \qquad (S^3 \in \mathbb{R}^4)$$

Mit $\pi^i = F\zeta^i$, $\phi^I = \frac{F}{2} \chi^I = \sigma \chi^I$ gilt:

$$g_{ij}(\vec{\pi}) = \frac{\partial \phi^I}{\partial \pi^i} \delta_{IJ} \frac{\partial \phi^J}{\partial \pi^j}$$

3.3.1 Riemannraum

Wir betrachten eine allgemeine Koordinatentransformation (Diffeomorphismus) $\pi'^i = \pi'^i(\vec{\pi})$. Die infinitesimale Transformation sei gegeben durch $\pi'^i = \pi^i - \zeta^i(\vec{\pi})$.

$$\mathrm{d}\pi'^i = \mathrm{d}\pi^j \frac{\partial \pi'^i}{\partial \pi^j}, \ A'^i(\vec{\pi}') = A^j(\vec{\pi}) \frac{\partial \pi'^j}{\partial \pi^j}, \ B_i'(\vec{\pi}') = \frac{\partial \pi^j}{\partial \pi'^i} B_j(\vec{\pi}) \text{ (wie } \partial_i)$$

Wir berechnen die Formvariation $\delta A = A'^i(\vec{\pi}) - A^i(\vec{\pi})$ mittels der angegebenen Beziehungen:

$$\delta A^i = \zeta^p \partial_p A^i - A^j \partial_j \zeta^i \text{ und } \delta B_i = \zeta^p \partial_p B_i + \partial_i \zeta^j B_j = \mathcal{L}_\zeta B_i$$

Ein Allgemeiner Tensor transformiert sich folgendermaßen:

$$T_{i_1,\ldots,i_n}{}^{j_1,\ldots,j_m}(\vec{\pi}) : T_i'{}^j(\vec{\pi}') = \frac{\partial \pi^k}{\partial \pi'^i} \frac{\partial \pi'^j}{\partial \pi^l} T_k{}^l(\vec{\pi})$$

$$\delta T_i{}^j = \zeta^k \partial_k T_i{}^j + \partial_i \zeta^k T_k{}^j - T_i{}^l \partial_l \zeta^j$$

Insbesondere gilt für die Metrik:

$$g_{ij}'(\vec{\pi}') = \frac{\partial \pi^k}{\partial \pi'^i} \frac{\partial \pi^l}{\partial \pi'^j} g_{ij}(\vec{\pi}), \ \delta g_{ij} = \zeta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \zeta^l g_{lj} + \partial^j \zeta^l g_{il} = \mathcal{L}_\xi g_{ij}$$

Man bezeichnet $\mathcal{L}_\zeta$ aus als LIE-Ableitung. Die inverse Metrik ist definiert durch $g^{ij}(\vec{\pi})g_{jk}(\vec{\pi}) = \delta^i{}_j$. Im normalen RIEMANNraum ist diese positiv definit. Mit $g := \det(g_{ij})$ gilt $\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij}$. Was auch interessant ist:

$$\delta(\sqrt{g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{g} g_{ij} \delta g^{ij}$$

Die kovariante Ableitung auf A^i ist definiert durch $D_j A^i = \partial_j A^i + \Gamma_{jl}{}^i A^l$. Sie erfüllt die Produktregel, also $D_i(AB) = (D_i A)B + A(D_i B)$. $(D_i A^j(\vec{\pi}'))'$ transformiert wie ein Tensor (LEVI-CIVITA-Konnektion im torsionsfreien Fall). Im torsionsfreien Fall gilt $\Gamma_{lj}{}^i = \Gamma_{jl}{}^i$.

$D_p g_{ij} = 0$ mit $D_i B_j = \partial_i B_j - \Gamma_{ij}{}^l B_l$

$$\Gamma'_{ij}{}^k(\vec{\pi}') = (\text{Tensorteil})_{ij}{}^k + \underbrace{I_{ij}{}^k(\vec{\pi})}_{\substack{\text{inhomogener}\\ \text{Term}}} \; ; \; I_{ij}{}^k = \frac{\partial \pi'^k}{\partial \pi^l} \frac{\partial^2 \pi^l}{\partial \pi'^i \partial \pi'^j} = -\frac{\partial \pi^l}{\partial \pi'^i} \frac{\partial \pi^m}{\partial \pi'^j} \frac{\partial^2 \pi'^k}{\partial \pi^l \partial \pi^m}$$

$\Gamma_{ij}{}^k = 1/2 g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$ sind die sogenannten CHRISTOFFELsymbole. Sie beschreiben die innere Geometrie einer Fläche bzw. Mannigfaltigkeit.

$\delta\Gamma_{ij}{}^k = (\text{Tensorteil})_{ij}{}^k + \partial_i \partial_j \zeta^k$ und $\Gamma_{ij}{}^k = \Gamma_{ij}{}^k - \Gamma_{ji}{}^k = 0$

Dies ist der Torsionstensor. Für den Krümmungstensor gilt $[D_m, D_n]B_n = R_{mnk}{}^l B_l$. Als Übung kann gezeigt werden:

$$\begin{aligned} R_{mnk}{}^l &= \partial_n \Gamma_{mk}{}^l - \partial_m \Gamma_{nk}{}^l + \Gamma_{mk}{}^p \Gamma_{np}{}^l - \Gamma_{nk}{}^p \Gamma_{mp}{}^l = \\ &+ = \frac{1}{2} g^{lp} \left(-\partial_m \partial_k g_{pn} + \partial_m \partial_p g_{nk} - \partial_n \partial_p g_{mk} + \partial_n \partial_k g_{pm}\right) + \left(\Gamma_{mk}{}^p \Gamma_{np}{}^l - \Gamma_{nk}{}^p \Gamma_{mp}{}^l\right) \end{aligned}$$

Es gilt die JACOBI-Identität:

$$\sum_{p,m,n} [D_p, [D_m, D_n]] B_l = 0$$

Außerdem gelten die BIANCHI-Identitäten:

$$\sum_{p,m,n} D_p R_{mnk}{}^l = 0; \; \sum_{p,m,n} R_{nmp}{}^l = 0$$

Als Übung kann gezeigt werden, dass folgendes gilt:

$$R_{mnkp} = g_{pl} R_{mnk}{}^l \qquad \big(kp: \; \varphi = g_{ij}\zeta^i\zeta^j; \; [D_m, D_n]\varphi = 0\big)$$

Die Anzahl der Freiheitsgrade ist $\frac{1}{12}(D^2 - 1) \cdot d^2$. Im Falle von $d = 3$ folgen sechs Freiheitsgrade. Auch dies kann als Übung gezeigt werden.

$R_{mn} = R_{mpn}{}^p$, $R = R_{mn} g^{mn}$

S^3 ist ein Raum konstanter Krümmung.

$R_{mnpq}(\vec{\pi}) = C(g_{mp} g_{nq} - g_{np} g_{mq})$; $R \sim 6C$

Auf dem Übungsblatt 8 berechnen wir den Krümmungstensor für eine S^3 mit $\Phi^I \Phi_I = (F/2)^2$ (stereographische Projektion).

Herleitung:

Die Metrik ist gegeben durch:

$$g_{ij}(\vec{\pi}) = \frac{\delta_{ij}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2 + 1\right]^2}$$

Wir wollen nun den Krümmungstensor bezüglich dieser Metrik berechnen. Dazu bestimmen wir zuerst die CHRISTOFFEL-Symbole.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ab}{}^{c} &= \frac{1}{2} g^{c\epsilon}(\partial_a g_{\epsilon b} - \partial_\epsilon g_{ba} + \partial_b g_{a\epsilon}) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2 + 1\right]^2 \delta^{c\epsilon}\left[\partial_a\left(\frac{1}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\right)\delta_{\epsilon b} - \partial_\epsilon\left(\frac{1}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\right)\delta_{ba} + \partial_b\left(\frac{1}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\right)\delta_{b\epsilon}\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2 + 1\right]^2 \delta^{c\epsilon} \cdot \frac{2\cdot\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]\cdot\frac{2}{F^2}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^4} \cdot \left(\pi^a\delta_{\epsilon b} - \pi^\epsilon\delta_{ba} + \pi^b\delta_{a\epsilon}\right) = \\
&= -\frac{\frac{2}{F^2}}{\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1}\left(\pi^a\delta^c{}_b - \pi^c\delta_{ba} + \pi^b\delta_a{}^c\right)
\end{aligned}$$

Jetzt benötigen wir noch die partielle Ableitung der $\Gamma_{ab}{}^{c}$:

$$\partial_a\Gamma_{ab}{}^{c} = \frac{\frac{4}{F^2}\pi^d}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(\pi^a\delta^c{}_b - \pi^c\delta_{ba} + \pi^b\delta_a{}^c\right) - \frac{\frac{2}{F^2}}{\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1}\left(\delta^{ad}\delta^c{}_b - \delta^{cd}\delta_{ba} + \delta^{bd}\delta_a{}^c\right)$$

Wir berechnen damit den Krümmungstensor nach $R_{ijk}{}^{r} = (\partial_j\Gamma_{ik}{}^{r} - \partial_i\Gamma_{jk}{}^{r}) + (\Gamma_{ik}{}^{p}\Gamma_{jp}{}^{r} - \Gamma_{jk}{}^{p}\Gamma_{ip}{}^{r})$.

$$\begin{aligned}
\partial_j\Gamma_{ik}{}^{r} - \partial_i\Gamma_{jk}{}^{r} &= \frac{\frac{4}{F^2}\pi^j}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(\pi^i\delta^r{}_k - \pi^r\delta_{ki} + \pi^k\delta_i{}^r\right) - \frac{\frac{2}{F^2}}{\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1}\left(\delta^{ij}\delta^r{}_k - \delta^{rj}\delta_{ki} + \delta^{kj}\delta_i{}^r\right) + \\
&+ \frac{\frac{4}{F^4}\pi^i}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(-\pi^j\delta^r{}_k + \pi^r\delta_{kj} - \pi^k\delta_j{}^r\right) - \frac{\frac{2}{F^2}}{\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1}\left(-\delta^{ji}\delta^r{}_k + \delta^{ri}\delta_{kj} - \delta^{ki}\delta_j{}^r\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}{}^{p}\Gamma_{jp}{}^{r} &= \frac{\frac{4}{F^2}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(\pi^i\delta^p{}_k - \pi^p\delta_{ki} + \pi^k\delta_i{}^p\right)\cdot\left(\pi^j\delta^r{}_p - \pi^r\delta_{pj} + \pi^p\delta_j{}^r\right) = \\
&= \frac{\frac{4}{F^4}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(\pi^i\pi^j\delta^r{}_k - \pi^i\pi^r\delta_{kj} + \pi^i\pi^p\delta^p{}_k\delta_j{}^r - \pi^p\pi^j\delta_{ki}\delta^r{}_p + \pi^p\pi^r\delta_{ki}\delta_{pj} - \pi^p\pi^p\delta_{ki}\delta_j{}^r + \right. \\
&\left. + \pi^k\pi^j\delta_i{}^r - \pi^k\pi^r\delta_{ij} + \pi^k\pi^p\delta_i{}^p\delta_j{}^r\right) = \\
&= \frac{\frac{4}{F^4}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(\pi^i\pi^j\delta^r{}_k - \pi^i\pi^r\delta_{kj} + \pi^k\pi^j\delta_i{}^r - \pi^k\pi^r\delta_{ij} + 2\pi^i\pi^k\delta_j{}^r - \vec{\pi}^2\delta_{ki}\delta_j{}^r\right)
\end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\Gamma_{jk}{}^{p}\Gamma_{ip}{}^{r} = \frac{\frac{4}{F^4}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^2}\left(\pi^j\pi^i\delta^r{}_k - \pi^j\pi^r\delta_{ki} + \pi^k\pi^i\delta_j{}^r - \pi^k\pi^r\delta_{ji} + 2\pi^j\pi^k\delta_i{}^r - \vec{\pi}^2\delta_{kj}\delta_i{}^r\right)$$

Durch Addition dieser Ausdrücke erhalten wir $R_{ijk}{}^{r}$. Den letzten Index r ziehen wir mittels der Metrik g_{lr} nach unten:

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} = g_{lr}R_{ijk}{}^{r} &= \frac{\frac{4}{F^4}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^4}\left(-\vec{\pi}^2\delta_{ki}\delta_{jl} + \vec{\pi}^2\delta_{kj}\delta_{il}\right) - \frac{\frac{4}{F^4}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^3}\left(F^2\cdot(\delta_{kj}\delta_{il} - \delta_{ki}\delta_{jl})\right) = \\
&= \frac{\frac{4}{F^4}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^4}\left(-\vec{\pi}^2\delta_{ki}\delta_{jl} + \vec{\pi}^2\delta_{kj}\delta_{il} - \vec{\pi}^2\delta_{kj}\delta_{il} + \vec{\pi}^2\delta_{ki}\delta_{jl} + F^2\delta_{kj}\delta_{il} - F^2\delta_{ki}\delta_{jl}\right) = \\
&= -\frac{\frac{4}{F^2}}{\left[\left(\frac{\vec{\pi}}{F}\right)^2+1\right]^4}\left(\delta_{ki}\delta_{jl} - \delta_{kj}\delta_{il}\right) = \boxed{-\frac{4}{F^2}\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right)}
\end{aligned}$$

Die Gleichung zur Bestimmung von Geodätischen (Geodätengleichung) lautet folgendermaßen:

$$\delta \int \mathrm{d}s = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\pi^k}{\mathrm{d}s^2} + {\Gamma_{ij}}^k \frac{\mathrm{d}\pi^i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\pi^j}{\mathrm{d}s} = 0$$

Speziell für $g_{ij} = \delta_{ij}$ gilt ${\Gamma_{ij}}^k = 0$. Lokal (Rechtsnebenklasse) hat der Raum eine euklidische Metrik $g_{ij} = \delta_{ij}$. Im $\vec{\pi}$-Fall gilt $\pi'^i(\vec{\pi}) = \phi(\vec{\pi}\cdot\vec{\pi})\pi^i$. Dies ist so, wenn man verlangt, dass der Isospin unter Transformationen intakt bleibt.

3.3.2 Symmetriegruppen und Killingvektorfelder

Im Falle S^2 gilt:

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{2}{(1+\bar{z}z)^2}$$

Im Raum mit Ursprung: SO(4)-Gruppe mit Transformation auf M_3: $\overline{\pi}^i = \pi^i - \zeta^i(\vec{\pi})$. (Isometrie) Wir gehen aus von einer allgemeinen Koordinatentransformation $(\mathrm{d}s^2)' = \mathrm{d}s^2$ mit $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\pi^i g_{ij}(\vec{\pi}\mathrm{d}\pi^j$ und $\pi'^i = \pi^i - \zeta^i(\vec{\pi})$. Der metrische Tensor transformiert folgendermaßen:

$$\delta g_{ij} = g'_{ij}(\vec{\pi}) - g_{ij}(\vec{\pi}) = \zeta^k\partial_k g_{ij} + \partial_i\zeta^l g_{lj} + \partial_j\zeta^l g_{il} = \mathcal{L}_\zeta g_{ij} = D_i\zeta_j + D_j\zeta_i \text{ mit } \zeta_j = g_{ji}\zeta^i$$

Schauen wir uns Symmetrietransformationen auf der LIE-Gruppe M_3 an: $\overline{\pi}^i = \pi^i - \zeta^i(\vec{\pi})$. $\zeta^i(\vec{\pi})$ sind die infinitesimalen Symmetrietransformationen. Falls dies mit der Metrik verträglich ist, spricht man von Isometrie. Man stellt dann folgende Bedingung an die Metrik und ζ^i.

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}(\vec{\pi})\,\mathrm{d}\pi^i\,\mathrm{d}\pi^j \stackrel{!}{=} g_{ij}(\vec{\overline{\pi}})\,\mathrm{d}\overline{\pi}^i\,\mathrm{d}\overline{\pi}^j = g_{ij}(\vec{\overline{\pi}})\frac{\mathrm{d}\overline{\pi}^i}{\mathrm{d}\pi^k}\frac{\mathrm{d}\overline{\pi}^j}{\mathrm{d}\pi^l}\,\mathrm{d}\pi^k\,\mathrm{d}\pi^l$$

$$g_{ij}(\vec{\pi}) = g_{kl}(\vec{\overline{\pi}})\frac{\partial\overline{\pi}^k}{\partial\pi^i}\frac{\partial\overline{\pi}^l}{\partial\pi^j}$$

Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel in zwei Dimensionen, nämlich ein Skalarfeld φ mit $\varphi'(x'_1, x'_2)|_{x'_i(x)} = \varphi(x_1, x_2)$. Man kann als Übung zu Hause nachrechnen, wie sich das Feld $\varphi(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2$ unter Drehungen $\vec{x}' = R\vec{x}$ verhält. Da dieses Feld nicht drehsymmetrisch ist, ist es nicht invariant unter diesen Transformationen im Gegensatz zu drehsymmetrischen Feldern:

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 = \varphi(x'_1, x'_2) \underset{\text{Skalar}}{=} \varphi'(x'_1, x'_2)$$

Dies bedeutet, dass die Formvariation unter dieser Symmetrietransformation verschwindet: $\delta\varphi = 0$, eben aufgrund der Tatsache, dass φ drehsymmetrisch ist und sich wie ein Skalar transformiert.

$$g_{ij}(\vec{\pi}) = \overline{g}_{kl}(\vec{\overline{\pi}})\frac{\partial\overline{\pi}^k}{\partial\pi^i}\frac{\partial\overline{\pi}^l}{\partial\pi^j} \Rightarrow \delta g_{kl} = 0 = \mathcal{L}_\zeta g_{kl}$$

Als Übung kann gezeigt werden, dass dies aus einer Transformation mit infinitesimalen $\zeta^i(x)$ folgt. Man hat also eine Isometrie. Beispiel: Für den euklidischen Raum M_3 erhält man für $g_{ij}(\vec{\pi}) = \delta_{ij}$: $\partial_j\zeta_i + \partial_i\zeta_j = 0$, $\zeta^j = c^j + \omega^{ji}\pi^i$. π-Fall:

$$g_{ij}(\vec{\pi}) = \frac{\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{1}{F^2}\pi^k\delta_{kl}\pi^l\right)^2}$$

Dies ist die Metrik der stereographischen Projektion. Die Übung besteht darin, zu zeigen, dass SU(2) $\otimes$ SU(2) eine Isometrie ist bezüglich der Transformationen $\underset{\alpha}{\zeta} = -\underset{\alpha}{\delta}$ und $\underset{\beta}{\zeta} = -\underset{\beta}{\delta}$ ist, dass also $\mathcal{L}_\zeta g_{ij}(\vec{\pi}) = 0$ gilt.

$$\underset{\alpha}{\delta}\pi^i = -\varepsilon^{ijk}\pi^j\alpha^k = \pi'^i(x) - \pi^i(x)$$

Wenn man die allgemeinen Koordinatentransformationen spezialisiert auf obige Transformationen, so kommt man darauf, dass $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_a\pi^i g_{ij}(\vec{\pi})\partial^a\pi^j$ invariant unter SU(2) $\otimes$ SU(2)-Transformationen $\zeta \mapsto \zeta_{\vec{\alpha},\vec{\beta}}$ ist, wobei

$$(\partial_a\pi^i)' = \frac{\partial\overline{\pi}^i}{\partial\pi^j}(\partial_a\pi^j)$$

Auf Übungsblatt 8 zeigen wir, dass $R_{ijkl} = b(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})$ ist für obige Metrik. Man erhält $R = 6b$, es handelt sich also um einen Raum mit konstanter Krümmung. Auf Blatt 9 vergleichen wir dies mit $\vec{\alpha}$-, $\vec{\beta}$-Transformationen:

$$\underset{\vec{\alpha},\vec{\beta}}{\delta}\pi = \pi'(x) - \pi(x),\ \widetilde{g}_{ij}(x) = g_{ij}(\vec{\pi}(x)) \text{ wobei } \underset{\vec{\alpha},\vec{\beta}}{\delta}\widetilde{g}_{ij}(x) \neq 0 \text{ für die nichtlinearen } \vec{\beta}\text{-Transformationen}$$

Allgemeine π-Koordinaten: $\pi^i = \pi^i(\vec{\pi}')$; das neue π'^i soll auch Isovektor sein. Man schaut Transformationen der Form $\pi^i = \pi'^i\phi(\vec{\pi}'\cdot\vec{\pi}')$ und berechnet die neue Metrik g'_{ij}:

$$g'_{ij}(\vec{\pi}') = \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{\pi}'\cdot\vec{\pi}'}{F^2}\phi^2(\vec{\pi}'^2)\right)^2}\left[\delta_{ij}\phi^2(\vec{\pi}'^2) + 4\pi'_i\pi'_j\phi'(\vec{\pi}'^2)\cdot\left(1 + \vec{\pi}'\cdot\vec{\pi}'\phi'(\vec{\pi}'^2)\right)\right] \text{ mit } \pi'_i = \pi_i = \delta_{ij}\pi^j$$

Übung: Vergleiche WEINBERG-g_{ij} mit gestrichenen Variablen.

$$d_1^2(\vec{\pi}'^2) = \frac{\phi^2}{\left(1 + \frac{\vec{\pi}'\cdot\vec{\pi}'}{F^2}\phi^2\right)^2}$$

3.4 Nichtlineares σ-Modell auf G/H

Wir betrachten $G = \mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$ und $H = \mathrm{SU}(2)|_{\text{Isospin}}$. Die Verallgemeinerung für eine kompakte Gruppe G, $H < G$ (spontane Symmetriebrechung) wurde von S.COLEMAN, J.WESS, B.ZUMINO und CALLAN (CHU, 1968) behandelt (Standardform der GOLDSTONEfelder (kovariante Ableitungen)). Aus den Invarianten bezüglich H folgenden Invarianten bezüglich G mit nichtlinearer Transformation der GOLDSTONEfelder. $\widetilde{N}$ transformiert mit $\vec{alpha}(x) = \vec{\beta}\times\vec{\pi}(x)$ als Dublett, $\overrightarrow{D_a\pi}$ transformiert als Triplett. Wir betrachten nun Felder im MINKOWSKIraum, nämlich $\psi_n(x)$ (Skalarfelder π, Spinorfelder N, ...). G ist eine kompakte LIE-Gruppe. Wichtig für uns sind lineare Transformationen, die zu einer spontanen Symmetriebrechung $G \mapsto H$ führen. Dies ist fur Vektoren und Spinoren gleich Null und x-unabhängig. POINCARE wird nicht spontan gebrochen. Für $h \in H$ ist $h\overset{0}{\psi} = 0$. Neue Feldvariablen werden angepasst an die spontane Symmetriebrechung $\psi(x) = \gamma(x)\widetilde{\psi}(x)$, wobei die GOLDSTONEmoden eliminiert sind. Wir erinnern uns daran, dass $\widetilde{\psi} = (0,0,0,\sigma)^\intercal$ gilt. H war die Drehung in ψ-Richtung: $\phi_I = {R_I}^4(x)\sigma(x)$.
Wir verwenden für die ψ reelle Felder (Darstellungen von G). Da G eine kompakte LIE-Gruppe ist, bedeutet dies, dass die Darstellungen unitär sind, also $\exp(\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{T})$, wobei die T_p für $p = 1, \ldots, \dim G$ die Generatoren der kompakten LIE-Gruppe sind. Wenn wir nur reelle Darstellungen anschauen, sind diese orthogonal. Die GOLDSTONErichtungen erhalten wir durch Lösung der Gleichung $(\mathrm{i}T_p\overset{0}{\psi})_n \neq 0$. (Für Spinoren ist dies trivial.) In Matrixnotation ist dies $\widetilde{\psi}^\intercal(x)\mathrm{i}T_p\overset{0}{\psi} = 0$ für $p = 1, \ldots, \dim G$. Zu zeigen ist, dass $\gamma(x)$ existiert ($g \in G$, von x unabhängig): $V_{\psi(x)}(g) = \psi^\intercal(x)g\overset{0}{\psi}$ mit festem x ist stetig und beschränkt, da G kompakt ist. Damit hat dies ein Maximum bei $g = \gamma$, welches von x abhängt, also $g = \gamma(x)$. Wir berechnen dazu die Variation und setzen diese gleich null, wobei wir wissen müssen, dass

$$g^{-1}\delta g = \exp(-V)\delta\exp(V) = \left[(1 - \exp(-\mathcal{L}_V))\frac{1}{\mathcal{L}_V}\right]\cdot\delta V \text{ mit } \mathcal{L}_V X = [V, X] = \mathrm{ad}_V(x)$$

$\delta g = \mathrm{i}g\vec{\varepsilon}\cdot\vec{T}$ mit einem komplizierten Ausdruck ε

ist, was für kompakte LIE-Gruppen gilt. Dies kann als Übung gezeigt werden.

$$0 = \delta V_\psi(g)|_{g=\gamma(x)} = \mathrm{i}\vec{\varepsilon}\psi^\intercal(x)\gamma(x)\vec{T}\overset{0}{\psi} = \mathrm{i}\vec{\varepsilon}(\gamma(x)^\intercal\psi)^\intercal\vec{T}\overset{0}{\psi}$$

Für beliebige ε muss also $(\gamma(x)^\intercal\psi)^\intercal T_p\overset{0}{\psi} = 0$ gelten mit $(\gamma(x)^\intercal\psi)^\intercal = \widetilde{\psi}$ und $\gamma(x)^\intercal = \gamma(x)^{-1}$.
Fehler:

$$g'_{ij}(\vec{\pi}') = \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{\pi}'\cdot\vec{\pi}'}{F^2}\phi^2(\vec{\pi}')\right)^2}\left[\delta_{ij}\phi^2(\vec{\pi}'^2) + 4\pi'_i\pi'_j\phi'(\vec{\pi}'^2)\left(\phi(\vec{\pi}'^2) + \vec{\pi}'\cdot\vec{\pi}'\phi'\right)\right]$$

3.5 Nichtlineare σ-Modelle auf G/H-Nebenklassen

1.) Es gibt eine Parametrisierung von $\gamma(x)$. G sei halbeinfach und kompakt: $\psi_n(x) = \gamma(x)\widetilde{\psi}_n(x)$.

$\widetilde{\psi}(x)^\intercal \mathrm{i} T_p \overset{0}{\psi} = 0$ mit $p = 1 \ldots \dim G$

2.) $\gamma(x)$ ist nicht eindeutig:

$V_{\psi(x)}(g) = \psi^\intercal(x) g \overset{0}{\psi}$ weil $h \in H$, $h\overset{0}{\psi} = \overset{0}{\psi}$

$V_{\psi(x)}(g) = V_{\psi(x)}(gh)$

Mit g auch gh

γ ist ein stationärer Punkt und $g = \gamma(x)h$ ist auch ein stationärer Punkt.

$\widetilde{\psi}(x) = (\gamma(x)h)^{-1}\psi(x) = h^{-1}\gamma^{-1}(x)\psi(x)$

(Im $\mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)$-Fall: $(0,0,0,\sigma)$, $H = \mathrm{SO}(3)$)

Gesucht ist nun eine Parametrisierung von G/H. Wir verwenden die **Standardparametrisierung** für dieses Problem (Cartan-Zerlegung). Die Generatoren von G sind T_p für $p = 1, \ldots, \dim G$. Für $H < G$ sind es die Generatoren T_i für $i = 1, \ldots, \dim H$. Die restlichen Generatoren (die man auch als Coset oder Nebenklassengeneratoren) bezeichnet sind X_r für $r = 1, \ldots, \dim G - \dim H$. Die Lie-Algebra von H ist gegeben durch $[T_i, T_j] = \mathrm{i}c_{ijk}T_k$, wobei die Strukturkonstanten c_{ijk} total antisymmetrisch sind. (Aus $c_{ijr} = 0$ folgt $c_{irj} = 0$.) Weiterhin gilt $[T_i, X_r] = \mathrm{i}c_{irs}X_s$ und $[X_r, X_s] = \mathrm{i}c_{rst}X_t + \mathrm{i}c_{rsj}T_j$. Falls c_{rst} gibt es einen äußeren Isomorphismus $T_i \mapsto T_i$, $X_r \mapsto -X_r$ (symmetrischer Raum). Die Parametrisierung der Gruppenelemente ist gegeben durch $g = (\exp(\mathrm{i}\xi^r X_r))(\exp(\mathrm{i}\theta^j T_j)$. Da $\gamma(x)$ nur modulo Rechtsmultiplikation mit $h \in H$ ist, gilt:

$G/H = \{g|gh\}$

Vertreter von jeder gH ist $\gamma(x) = \exp(\mathrm{i}\xi^r(x)X_r)$ mit $x \in M_4$. $\xi^r(x)$ sind dimensionslose Goldstonefelder mit $\dim G - \dim H$, reelle Lorentz-Skalarfelder.

$\partial_a\psi_n(x) = \gamma(x)\left(\partial_a\widetilde{\psi} + \gamma^{-1}(x)\partial_a\gamma(x)\widetilde{\psi}\right)$

$\psi(x)$ sind reelle Felder und $\gamma(x)$ ist eine orthogonale Matrixdarstellung. Es treten nur die Kombinationen $\gamma^{-1}(x)\partial_a\gamma(x)$ in $\mathcal{L}$ auf. Es gibt damit immer eine Abbildung auf Goldstonefelder $\xi^r(x)$. $\gamma(x)$ fliegt aus $\mathcal{L}$ raus.

$\gamma^{-1}(x)\partial_a\gamma(x) = \mathrm{i}D_a \quad r(x)X_r + \mathrm{i}E_a{}^j(x)T_j$

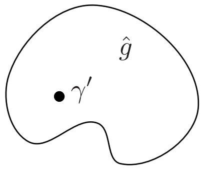
$D_a{}^r(x) = D^r{}_s(\xi(x))(\partial_a\xi^s(x)) \equiv (D_a\xi)^r$

$E_a{}^j(x) = E^j{}_s(\xi(x))(\partial_a\xi^s(x)) \equiv (E_a\xi)^j$

$G^{-1}\delta g = \mathrm{i}\varepsilon^p T_p$ (siehe Blatt 10, Aufgabe 25)

3.) $\xi^r(x)$-, $\widetilde{\psi}_n(x)$-Transformationen:

Wir beginnen mit einer linearen Transformation bezüglich G, nämlich $\psi' = g\psi = g\gamma(\xi(x))\widetilde{\psi}(x)$, wobei g bzw. $\gamma(\xi(x))$ orthogonale Matrixdarstellungen sind. $g\gamma(\xi(x)) \equiv \hat{g} \in G$: $\hat{g}$ in genau einer H-Rechtsnebenklasse mit Vertreter $\gamma'(x) = \gamma(\xi'(x))$ (ξ'-Transformation von ξ bezüglich G).



$$\boxed{g\gamma(\xi(x)) = \gamma(\xi'(x))h(\xi(x), g)} \tag{1}$$

$$\psi'(x) \overset{\text{linear}}{=} \gamma(\xi'(x))\widetilde{\psi}'(x) = \gamma(\xi'(x))h(\xi(x), g)\widetilde{\psi} : \boxed{\widetilde{\psi}'(x) = h(\xi(x), g)\widetilde{\psi}(x)} \tag{2}$$

$\widetilde{\psi}$-Felder im allgemeinen transformieren unter H. (Im π-Beispiel ist $\widetilde{\psi} = \sigma$ invariant unter H.)

4.) Wir betrachten nun speziell $g = h \in H$:

ξ^r und $\widetilde{\psi}_n$ werden linear dargestellt. Behauptung: $\xi'^r(x) = D^r{}_s(h)\xi^r$ und $\widetilde{\psi}'_n = h_n{}^m\widetilde{\psi}_m$ mit $hX_sh^{-1} = D_s{}^r(h)X_r$ (siehe Blatt 10, Aufgabe 30a). $h_n{}^m$ ist hierbei von ξ unabhängig.

$$D_s{}^r(h) \stackrel{!}{=} \left[\exp\left(\mathrm{i}\kappa\theta^j T_j^{adj}\right)\right]_r{}^r$$

Bemerkung:

➢ Teil ①:

$$\xi:\ h\gamma(\xi)h^{-1} = h\exp(\mathrm{i}\xi^r X_r)h^{-1} = \exp(\mathrm{i}\xi^r(hX_rh^{-1})) \underset{(3)}{=} \exp(\mathrm{i}\xi^r D_r{}^s(h)X_s) =$$

$$h\gamma(\xi) = \gamma(\xi')h(\xi,h),\ h\gamma(\xi)h^{-1} = \gamma(\xi')h(\xi,h)h^{-1} = \gamma(\xi')\mathbf{1}$$

➢ Teil ②:

$$\widetilde{\psi}:\ h(\xi(x),h) = h,\ \widetilde{\psi}' = h\widetilde{\psi}$$

Die Darstellung auf H ist linear, sowohl was die GOLDSTONEfelder $\xi^r(x)$ als auch $\widetilde{\psi}$ angeht.

5.) Wir konstruieren ein invariantes $\mathcal{L}$: Transformation von $D_a{}^r(\xi(x))$, $E_a{}^j(\xi(x))$

Mit $(*)$ und $(**)$ folgt:

$$\gamma(\xi(x)) = g^{-1}\gamma(\xi'(x))h(\xi(x),g)$$

$$\gamma^{-1}(\xi(x))\partial_a\gamma(\xi(x)) = \gamma^{-1}(\xi(x))g^{-1}\partial_a(\gamma(\xi')h(\xi,g)) = (g\gamma(x))^{-1}\partial_a(\ldots)$$

Siehe:

$$\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_a\gamma(\xi'(x)) = \mathrm{i}D_a{}^r(x)X_r + \mathrm{i}E'_a{}^j(x)T_j = h^{-1}(\xi,g)\gamma^{-1}(\xi')\partial_a\gamma(\xi')h(\xi,g) + h^{-1}(\xi,g)\partial_a h(\xi,g)$$

Wir berechnen folgenden Ausdruck:

$$\gamma^{-1}(\xi'(x))\partial_a\gamma(\xi'(x)) = h(\xi,g)\left[\gamma^{-1}(\xi)\partial_a\gamma(\xi)\right]h^{-1}(\xi,g) - (\partial_a h(\xi,g))h^{-1}(\xi,g)$$

$$(\partial_a h)h^{-1} = \mathrm{i}(\partial_a\theta^i)\left[\frac{1}{\mathrm{i}\kappa\theta\cdot T^{adj}}\left(\exp(\mathrm{i}\kappa\theta^j T_j) - 1\right)\right]_i{}^j T_j$$

$$(\partial_a h(\xi,g))h^{-1}(\xi,g) = (\partial_a\xi^r(x))\frac{\partial h(\xi,g)}{\partial\xi^r}h^{-1}(\xi,g) = \mathcal{H}_r{}^j(\xi(x),g)T_j(\partial_a\xi^r(x))$$

$$\mathrm{i}E'^j_a(x)T_j = h(\xi,g)\left(\mathrm{i}E_a{}^jT_j\right)h^{-1}(\xi,g) - (\partial_a h(\xi,g))h^{-1}(\xi,g)$$

Wir benötigen Objekte der folgenden Form:

$$h(\xi,g)T_jh^{-1}(\xi,g) = \mathcal{E}_j{}^i(h(\xi,g))T_i$$

$$h(\xi,g)D_a{}^r(x)X_rh^{-1}(\xi,g) = D_a{}^r(x)$$

Auf Blatt 10 in Aufgabe 30b.) zeigen wir $hX_rh = \mathcal{D}_r{}^s(h)X_r$. Damit erhalten wir folgendes Resultat:

$$D'_a{}^s(x) = D_a{}^r(x)\mathcal{D}_r{}^s(h(\xi(x),g)) = (\mathcal{D}^T(h(\xi,g)))^s{}_rD_a{}^r(x)$$

$$E'_a{}^j(x) = E_a{}^i\mathcal{E}_j{}^i(j(\xi,g)) - \mathcal{H}_r{}^j(\xi(x),g)\partial_a\xi^r(x)$$

i.) $g\gamma(\xi(x)) = \gamma(\xi'(x))h(\xi(x),g)$ mit $g \in G$ und $G/H = \{gH|g \in G\}$

ii.) $\widetilde{\psi}'(x) = h(\xi(x),g)\widetilde{\psi}$

$$\gamma^{-1}\partial_a\gamma = \mathrm{i}D_a{}^r(x)X_r + \mathrm{i}E_a{}^j(x)T_j$$

iii.) Ein Spezialfall ist $g = h \in H$. Dazu betrachten wir die lineare Darstellung:

$$\xi'^r(x) = \mathcal{D}^r{}_s(h)\xi^s(x);\ hX_sh^{-1} = \mathcal{D}_s{}^r(h)X_r$$

Es gilt $\widetilde{\psi}'_n = h_n{}^m\widetilde{\psi}_m$, wobei $h_n{}^m$ von ξ unabhängig ist.

5.) Weg zu $\mathcal{L}$: Transformation der ${D_a}^r(\xi(x))$, ${E_a}^j(\xi(x))$

Unter $g \in G$ haben wir folgende Transformation:

$${D'_a}^r(\xi(x)) = \mathcal{D}^\intercal(h(\xi(x),g))^r{}_s {D_a}^s(\xi(x))$$

$$\mathrm{i}{E'_a}^j(\xi(x))T_j = h(\xi(x)g)(\mathrm{i}{E_a}^jT_j)h^{-1}(\xi(x),g) - (\partial_a h(\xi(x),g))h^{-1}(\xi(x),g)$$

$${E'_a}^j(\xi(x)) = {E_a}^i{\mathcal{E}_i}^i(h(\xi,g)) - {\mathcal{H}_r}^j(\xi(x),g)\partial_a\xi^r(x)$$

$$hT_ih^{-1} = {\mathcal{E}_i}^j(h)T_j$$

$$(\partial_a h(\xi,g))h^{-1}(\xi,g) = \mathrm{i}{\mathcal{H}_r}^j(\xi,g)T_j\partial_a\xi^r(x)$$

6.) Kovariante Ableitungen auf ξ und $\widetilde{\psi}$:

Aus diesen Größen stellt sich heraus, dass der Entwicklungskoeffizient ${D_a}^r$ der Coset-Generatoren die kovariante Ableitung auf die ξ-Felder ist und ${E_a}^j$ die kovariante Ableitung auf $\widetilde{\xi}$.

$${D_a}^r(\xi(x)) = D^r{}_s(\xi(x))\partial_a\xi^s(x) \equiv (D_a\xi)^r$$

Früher hatten wir für SU(2) $\otimes$ SU(2) folgende kovariante Ableitung (siehe Blatt 8, Aufgabe 21):

$$(D_a\xi)^i = \partial_a\xi^j\left[D_1(\xi^2)\delta^i{}_j + d_2(\xi^2)\xi^i\xi_j\right]$$

${D_a}^r(x)$ transformiert unter $g \in G$ wie die kovariante Ableitung auf ξ. Gemeint ist unter H:

$\xi'^r = \mathcal{D}^\intercal(h)\xi,\ h \mapsto h(\xi(x),g)$ („Eichung“)

(Achtung mit dem Begriff kovariante Ableitung (transformiert wie die entsprechenden Felder, auf die sie wirkt)) ${D_a}^r(x)$ transformiert wie die $\widetilde{\psi}_n$-Felder nur in anderer Darstellung von H.

$\widetilde{\psi}' = h(\xi(x),g)\widetilde{\psi}$ (Darstellung auf $\widetilde{\psi}_n$)

Daher galten die alten Transformationen $\vec{\alpha} \mapsto \vec{\alpha}(x) = \vec{\beta} \times \vec{\xi}(x)$.

$$\delta(\overrightarrow{D_a\pi}) = -\vec{\alpha}(x) \times \overrightarrow{D_a\pi},\ \delta\widetilde{N} = \mathrm{i}\alpha(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\widetilde{N}$$

Wenn man weiß, wie die Größen unter Isospin transformieren, dann kann man mittels der Eichung das Transformationsverhalten unter der ganzen Gruppe erhalten. Wir interessieren uns nun für die kovariante Ableitung auf $\widetilde{\psi}$. Diese erhält man aus der inhomogenen Transformation von ${E_a}^j(\xi(x))$:

$$\partial_a\widetilde{\psi}' = h(\xi(x)),g)\left[\partial_a\widetilde{\psi} + h^{-1}(\xi(x),g)(\partial_a h(\xi(x),g)\widetilde{\psi})\right]$$

Kompensiere $(\partial_a h)\widetilde{\psi}$ über $D_a\widetilde{\psi}(x) := \partial_a\widetilde{\psi} + \mathrm{i}({E_a}^j(x)T_j)\widetilde{\psi}(x)$, wobei T_j die Generatoren der Darstellung von H auf $\widetilde{\psi}$ sind. Damit erhält man eine kovariante Ableitung genau nach Definition:

$$(D_a\widetilde{\psi})' = h(\xi(x),g)(D_a\widetilde{\psi})$$

Dies wollen wir beweisen (mit ii.)):

$$\begin{aligned}(D_a\widetilde{\psi})' &= h(\xi(x),g)(\partial_a\widetilde{\psi} + h^{-1}(\xi(x),g)(\partial_a h(\xi(x),g))\widetilde{\psi}) + h(\mathrm{i}{E_a}^jT_jh^{-1})h\widetilde{\psi} - (\partial_a h)h^{-1}(h\widetilde{\psi}) = \\ &= h(\xi(x),g)(D_a\widetilde{\psi})\end{aligned}$$

Im SU(2) $\otimes$ SU(2)-Fall lautete die kovariante Ableitung auf $\widetilde{N}$ folgendermaßen:

$$D_a\widetilde{N} = \partial_a\widetilde{N} + \mathrm{i}(\xi(x)\times\overrightarrow{D_a\xi})\cdot\vec{\tau}\widetilde{N}$$

In diesem Fall gilt ${E_a}^j = (\xi(x)\times\overrightarrow{D_a\xi})^j$. Dies erhält man aus der Zerlegung $\gamma^{-1}\partial_a\gamma \sim E^jT_j$.

7.) Lagrangedichte $\mathcal{L}$

Durch die Standardparametrisierungsmethode zu G/H erhalten wir die invariante Lagrangedichte bezüglich G linear dargestellt auf $H \subset G$. Man baut aus den H-invarianten Größen $\widetilde{\psi}_n(x)$, $(D_a\widetilde{\psi})_n$ und ${D_a}^r(x) \equiv (\overrightarrow{D_a\xi})^r$ eine H-invariante Lagrangefunktion. Dann ist $\mathcal{L}$ über $h \mapsto h(\xi(x),g)$ invariant unter G.

- Auf Renormierung wird hier keinen Wert gelegt (Philosophie der „effektiven LAGRANGEfunktion“). Je nach Modell muss man sich die Skala Λ überlegen. Man macht dann eine Entwicklung in $\frac{Q}{\Lambda}$, um Regeln aufzustellen, wie die führenden Beiträge aussehen.
- Beispielsweise können wir analog zu früher Mehrfachableitungen $D_a(D_b\widetilde{\psi})$ konstruieren. Objekte dieser Form transformieren analog, nämlich $(D_a(D_b\widetilde{\psi}))' = h(\xi(x), g)(D_a(D_b\widetilde{\psi}))$.
- Wir können auch folgende Objekte betrachten:

  $$(D_b(\overrightarrow{D_a\xi}))^r = \partial_b(\overrightarrow{D_a\xi})^r + \mathrm{i}(-\mathrm{i}c_j{}^r{}_s E_b{}^j(x)\overrightarrow{D_a\xi}^s)$$

  Ersetzte T_j bei $E_a{}^j$ auf $\widetilde{\psi}$ durch $-\mathrm{i}c_{jrs}$:

  $$(D_b(\overrightarrow{D_a\xi}))'^r = \mathcal{D}^\mathsf{T}(h(\xi), g)^r{}_s(D_b(\overrightarrow{D_a\xi}))^s$$
- Analog zu Eichtheorien führt man Korrekturen $E_a{}^j(x)$ ein.

  $$[D_b, D_a]\widetilde{\psi} =: R_{ba}{}^j(x)(\mathrm{i}T_j)_n{}^m\widetilde{\psi}_m \text{ mit } R_{ba}{}^j = \partial_a E_b{}^j - \partial_b E_a{}^j - c_{ikj}E_a{}^i E_b{}^k$$
- $D_a{}^s(x)$ und $E_a{}^j(x)$ kann man einmal für G und H berechnen. Dies ist unabhängig zur Darstellung. Man muss nur wissen, auf welche Untergruppe heruntergebrochen wird. ($\gamma^{-1}\partial_a\gamma$ mit $\gamma = \exp(\mathrm{i}\xi(x)X)$)

In den Arbeiten von CWZ (1969) gibt es ein Linearisierungstheorem, mit dem man feststellen kann, ob eine Transformation nichtlinear ist. (Das Signal für echte „nichtlineare“ Transformationen ist, dass der Nullpunkt verschoben wird.) Das Theorem lautet: Ist $H \subset G$, $T_h O = O$ für $T \in H$, so existieren Koordinaten y mit einer Umgebung von O: $T_h y = D(h)y$.

8.) Spezialfall **chirale** Symmetrien (Automorphismus $T \mapsto T$, $X \mapsto -X$, „Parität“)

Wir betrachten $\widetilde{\psi} = \widetilde{N}$, X_i und T_i mit $i = 1, 2, 3$. Außerdem benötigen wir:

$$\gamma(\xi(x)) = \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{\xi}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right]$$

γ sind die Vertreter von SU(2)$=$ H-Rechtsnebenklassen. Das Transformationsgesetz lautet in $\widetilde{N}$-Darstellung folgendermaßen: $g\gamma(\xi(x)) = \gamma(\xi'(x))h(\xi(x), g)$.

$$g = \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1}_4 + \vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right] \in \mathrm{SU}(2)\otimes\mathrm{SU}(2)$$

$$\exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{\beta}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5 + \vec{\alpha}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1}\right)\right]\exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right) = \exp\left[\mathrm{i}\left(\vec{\xi}'(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\gamma^5\right)\right]\exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\mathbf{1}\right) \text{ mit } \vec{\theta} = \vec{\theta}(\vec{\xi}; \vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

$$\widetilde{N}'(x) = h(\xi(x), g) = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\widetilde{N}\right)$$

Auf Blatt 11 zeigen wir:

$$\gamma^{-1}\partial_a\gamma = \mathrm{i}D_{aj}(x)\frac{\tau_j}{2}\gamma^5 + \mathrm{i}E_{aj}(x)\frac{\tau_j}{2}\mathbf{1}_4$$

Mit einem Trick können wir $\gamma(x)$ schreiben als:

$$\gamma(x) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\xi}(x)}{|\vec{\xi}(x)|}\cdot\vec{\tau}\gamma^5\right)\frac{|\vec{\xi}|}{2} = \cos\left(\frac{|\vec{\xi}|}{2}\right)\mathbf{1}_2\mathbf{1}_4 + \mathrm{i}\frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}\vec{\tau}\gamma^5\cdot\sin\left(\frac{|\vec{\xi}|}{2}\right)$$

In der Exponentialfunktion steht die Darstellung von i auf dem 2×4-Raum. Im chiralen Fall gilt auch:

$$\mathcal{L} = \frac{F^2}{4}\mathrm{Sp}(\partial_a U\partial^a U)$$

Wir benutzen hierbei die entkoppelte Version von su(2) $\otimes$ su(2): Q_i^+, Q_j^- und den Projektoren:

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 \pm \gamma^5) \text{ wobei } \vec{Q}_L \equiv \vec{Q}^+ = \Pi_+\frac{\vec{\tau}}{2} \text{ und } \vec{Q}_R \equiv \vec{Q}^- = \Pi_-\frac{\vec{\tau}}{2}$$

Wir erinnern uns an:

$N_L = \Pi_+ N$ und $N_R = \Pi_- N$ mit $N_L' = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right) N_L$ und $N_R' = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right) N_R$

$$\exp\left[\mathrm{i}\left((\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_+ + (\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\Pi_-\right)\right]\exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}(\Pi_+ - \Pi_-)\right) = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}(\Pi_+ - \Pi_-)\right)\times$$
$$\times\exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}(\Pi_+ + \Pi_-)\right)$$

Hierbei gilt $\Pi_+ - \Pi_- = \gamma^5$, $\Pi_+ + \Pi_- = \mathbf{1}_4$ und $\Pi_+\Pi_- = 0$.

$$\Pi_+ : \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\xi}\cdot\vec{\tau}}{2}\right) = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}'(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right) \qquad (*_1)$$

$$\Pi_- : \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\vec{\xi}\cdot\vec{\tau}}{2}\right) = \exp\left(-\mathrm{i}\vec{\xi}'(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right) \qquad (*_2)$$

Die Berechnung von $(*_1)(*_2)^{-1}$ ergibt:

$$\left[\exp\left(\mathrm{i}\vec{\alpha}_L\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\right]\left[\exp\left(-\mathrm{i}\vec{\xi}(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\vec{\alpha}_R\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\right] = \exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}'(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\mathrm{i}\vec{\theta}(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)\exp\left(\mathrm{i}\vec{\xi}'(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\right)$$

$$\Phi'(x) := \exp\left(2\mathrm{i}\vec{\xi}'(x)\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right) = U\Phi(x)V^{-1} \text{ mit } U = U_L = \exp\left(\mathrm{i}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right) \equiv U_\alpha{}^\beta$$
$$\text{und } V^{-1} = \exp\left(-\mathrm{i}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot\frac{\vec{\tau}}{2}\right) \equiv (V^{-1})_{\beta'}{}^{\alpha'} \text{ wobei } \Phi = \phi_4\mathbf{1}_2 + \mathrm{i}\vec{\phi}\cdot\vec{\tau}$$

Kommen wir am Schluss noch zur trigonometrischen Parametrisierung:

$$\phi_4 = \cos(|\vec{\xi}|) \text{ und } \vec{\phi} := \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}\sin(|\vec{\xi}|) \text{ mit } |\vec{\xi}| = \sqrt{\vec{\xi}\cdot\vec{\xi}}$$

Dies rechen wir auf dem zwölften Übungsblatt aus.

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\frac{F^2}{2}\mathrm{Sp}(\partial_a\phi\partial^a\phi^+)$$

Kapitel 4

Nichtlineare σ-Modelle im Rahmen von Supersymmetrie

4.1 Einleitung

- Spontane Brechung von Supersymmetrie und nichtlineare Darstellung (hier vermutlich nicht)
  - Goldstone-Felder $\Rightarrow$ Fermion
  - nichtlineare Transformation ψ

  Der Startpunkt für Supersymmetrie bildeten Volkov und Akulov (1972), als sie Goldstonefelder für Neutrino postulierten.
- Spontane Symmetriebrechung $G \mapsto H$ (Goldstonebosonen (Lorentzskalarfelder mit Spin 0))
  - Lineare Darstellung von Supersymmetrie, supersymmetrischer Partner zu Goldstoneboson mit Spin 1/2
  - $D = 4$ Poincare-Supersymmetrie
  - Quasi-Goldstonefelder
  - Lorentzskalarfelder als komplexe Skalarfelder: chirale Spinorfelder (Multipletts)

Wir gehen aus von der supersymmetrisch-kovarianten Ableitung: $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\phi(z) = 0$ mit $z = (x^\alpha, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$. Diese Definition erinnert an die Cauchy-Riemann-Bedingung für holomorphe Funktionen, nämlich $\partial_z f(z,\overline{z}) = 0$ ($\phi(x) = \phi(z)|_{\theta=0=\overline{\theta}}$). Die Felder ϕ_i und die entsprechenden komplex konjugierten Felder $\overline{\phi}_i$ sind voneinander unabhängig; sie transformieren auch voneinander unabhängig (chirale Spinorfelder). Man führt eine komplexe Erweiterung der Lie-Gruppen durch: $G \mapsto G^c$, $G/H \mapsto G^c/H^c$ mit $\hat{H} \subset H^c$. Eine typische Lagrangefunktion sieht folgendermaßen aus:

$$\mathcal{L}(\phi,\overline{\phi}) = \partial_a\phi^i\partial^a\overline{\phi}^{\overline{j}} g_{i\overline{j}}(\phi,\overline{\phi}) \text{ wobei } g_{ij} = 0,\ g_{\overline{i}\overline{j}} = 0$$

g_{ij} und $g_{\overline{i}\overline{j}}$ sind die Metriken von hermiteschen Mannigfaltigkeiten. Zusätzliche Bedingungen führen auf sogenannte Kähler-Mannigfaltigkeiten. Betrachten wir komplexe/fastkomplexe Mannigfaltigkeiten:

$$z'^\alpha = f^\alpha(z) \text{ und } \overline{z}'^{\dot{\alpha}} = \overline{f}^{\dot{\alpha}}(\overline{z}) \text{ mit } x^i = (\mathrm{Re}(z^\alpha), \mathrm{Im}(z^\alpha)) \text{ mit } i = 1, \ldots, 2n \text{ und } \alpha = 1, \ldots, n$$

$$i:\ I^i,\ {I^j}_k = -{\delta^i}_k \text{ für jedes } x$$

Für komplexe Mannigfaltigkeiten hat die Integrabilitätsbedingung die Form ${N^i}_{jk} = -{N^i}_{kj} =$ Ableitung auf $I = 0$. (Man spricht von der Nijenhuis-Torsion.) Für eine hermitesche Mannigfaltigkeit gilt $\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\overline{\beta}}\,\mathrm{d}z^\alpha\,\mathrm{d}\overline{z}^\beta$ mit $g_{\alpha\beta} = 0 = g_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

$$g_{ij} = g_{kl}{I^k}_i{I^l}_j \text{ mit } I_{ij} = g_{ik}{I^k}_j = -I_{ji}$$

$$\Omega = \frac{1}{2}I_{ij}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$$

Fall Ω geschlossen ($\mathrm{d}\Omega = 0$) ist, haben wir eine KÄHLER-Mannigfaltigkeit.

$D_j I^i{}_j = 0$, $g_{\alpha\overline{\beta}} = \partial_\alpha \partial_{\overline{\beta}} K(z, \overline{z})$ (KÄHLERpotential)

z und $\overline{z}$ werden als voneinander unabhängig betrachtet, ebenso wie die partiellen Ableitungen $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ und $\partial_{\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$.

$K'(z, \overline{z}) = K(z, \overline{z}) + F(z) + \overline{F}(\overline{z})$

Dies wird uns auf folgende Wirkung S für $D = 4$ und $N = 1$ führen:

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\overline{\theta} K(\phi^i, \overline{\phi}^j) + \left(\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^2\theta\, W(\phi) + \text{hermitesch konjugiert} \right)$$

$K(\phi^i, \overline{\phi}^j)$ ist das KÄHLERpotential und $W(\phi)$ das Superpotential.

4.2 Poincare-Supersymmetrie

Wir betrachten die einfache Supersymmetrie ($N = 1$) in vier Dimensionen ($D = 4$).

4.2.1 Lorentzgruppe

Das Symbol für die LORENTZgruppe ist $O(1, 3)$, wobei die 1 für das Pluszeichen und die 3 für die drei Minuszeichen in der Metrik stehen. Die Transformationen sehen folgendermaßen aus:

$p'_a = \Lambda_a{}^b p_b$, $\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta'$ mit $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$

$$\det \Lambda = \pm 1;\ (\Lambda_0{}^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda_i{}^0)^2 \geq 1$$

$L_+^\uparrow = \mathrm{SO}(1, 3) \uparrow$ bezeichnet man als eingeschränkte LORENTZgruppe. Diese ist nicht einfach zusammenhängend. Dies bedeutet, dass man die Fundamentalkurve, die sich auf eindimensionale Strukturen bezieht, nicht stetig deformieren kann ($\Pi_1(G) \neq 1$). Die eingeschränkte LORENTZgruppe $L_+^\uparrow$ kann man schreiben als $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/Z_2$, wobei $Z_2 = \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$ ist (vergleiche mit $\mathrm{SO}(3) \simeq \mathrm{SU}(2)/Z_2$). $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ wird abgebildet wird abgebildet auf $\Lambda \in L_+^\uparrow$, $M, -M \mapsto \Lambda$.

$$p = \frac{1}{2} p_a \sigma^a \text{ mit } \sigma^a = (\sigma^0 = \mathbf{1}, \sigma^i = \tau^i)$$

τ^i sind die PAULImatrizen (LIE-Algebra SU(2), C_3). Im folgenden sei p_a reell; wir schauen uns also die reelle eingeschränkte LORENTZgruppe $L_+^\uparrow$ an. Es ist also $p^+ = p$, $p = p_{\alpha\dot{\beta}}$. In der SL(2,$\mathbb{C}$) haben wir die Spinoren ψ_α, $\chi_{\dot{\alpha}}$ mit $\varepsilon^{\alpha\beta}$, wobei $\varepsilon^{12} = -1$ ist. Weiterhin haben wir $\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ mit $\varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = -1$, $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma$, $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\gamma}}$. Wir betrachten nun auf $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ irreduzible Tensoren $T_{\alpha_1 \ldots \alpha_n, \dot{\beta}_1 \ldots \dot{\beta}_m}$. Wir schauen uns nun Transformationen an, welche die Hermizität nicht ändern: $p' = MpM^+$, $p'^+ = p'$ mit $M_\alpha{}^\beta \in SL(2, \mathbb{C})$ Bei diesen Transformationen gilt $\det p' = \det p$, $4 \det p = p_a p^a$. Für LORENTZtransformationen gilt $\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta$ mit $\det \Lambda = +1$. Brechung von $\Lambda = \Lambda(M)$:

$$\sigma^a{}_{\alpha\dot{\beta}} (\overline{\sigma}^b)^{\dot{\beta}\gamma} \text{ mit } \overline{\sigma}^a = (\overline{\sigma}^0 = \mathbf{1}, \overline{\sigma}^i = -\sigma^i) = (\overline{\sigma}^a)^{\dot{\beta}\gamma}$$

Für die Spur dieses Objekts gilt $\mathrm{Sp}(\sigma^a \overline{\sigma}^b) = 2\eta^{ab}$ (1).

$$p' = \frac{1}{2} p'_a \sigma^a = \frac{1}{2} (\Lambda_a{}^b p_b) \sigma^a,\ (M \sigma^b M^+)_{\alpha\dot{\beta}} = \Lambda_a{}^b \sigma^a{}_{\alpha\dot{\beta}}$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit $(\overline{\sigma}^b)^{\dot{\beta}\alpha}$ und bildet die Spur, so gilt:

$$\boxed{\Lambda_a{}^b = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(M \sigma^b M^+ \overline{\sigma}_a)}$$

Dies ist eine stetige Funktion von M, wobei ja M und $-M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ und $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Die Abbildung von M, $-M$ auf Λ ist außerdem surjektiv. Wir stellen nun die Beziehungen zusammen, welche für uns wichtig sein werden:

$$(\sigma^c)_{\alpha\dot{\beta}} (\overline{\sigma}_c)^{\dot{\gamma}\delta} = 2 \delta_\alpha{}^\delta \delta_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\gamma}} \tag{2}$$

$(\varepsilon\overline{\sigma}^a)_{\dot{\alpha}}{}^{\beta} = (\varepsilon\sigma^a)^{\beta}{}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\overline{\sigma}^a)^{\dot{\gamma}\beta}$ (3)

$(\sigma^a)^+ = \sigma^a$, $(\sigma^a{}_{\alpha\beta})^* = \sigma^a{}_{\beta\dot{\alpha}}$ (4)

$\frac{\mathrm{i}}{2}(\sigma^a\overline{\sigma}^b - \sigma^b\overline{\sigma}^a)_{\alpha}{}^{\beta} = (\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta}$ und $\frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\sigma}^a\sigma^b - \overline{\sigma}^b\sigma^a)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = (\overline{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$ (5)

$\frac{1}{2}(\sigma^a\overline{\sigma}^b + \sigma^b\overline{\sigma}^a)_{\alpha}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}\eta^{ab}$ und $\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^a\sigma^b + \overline{\sigma}^b\sigma^a)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\eta^{ab}$ (6)

$((\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta})^* = (\overline{\sigma}^{ab})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}$ (7)

$-\frac{1}{2}(\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\beta}$ ist eine Darstellung der LORENTZgruppe M^{ab} ebenso wie $-\frac{1}{2}(\overline{\sigma}^{ab})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}$.

$$[M^{ab}, M^{cd}] = \mathrm{i}(\eta^{ac}M^{bd} + \eta^{bd}M^{ac}) - \mathrm{i}(\eta^{bc}M^{ad} + \eta^{ad}M^{bc})$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) : \ \psi_\beta \left(\frac{1}{2}, 0\right), \ \chi_{\dot{\beta}} \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Es gibt außerdem eine Regel, welche mit der Dualität zu tun hat. Wir benutzen den vierdimensionalen antisymmetrischen Tensor ε^{abcd} mit $\varepsilon^{0123} = 1$ und $\varepsilon_{0123} = -1$. Dann ist der duale Tensor definiert durch $\widetilde{T}^{ab} = \alpha\varepsilon^{abcd}T_{cd}$. Das α bestimmt man auch der Forderung $\widetilde{\widetilde{T}}_{ab} = T_{ab}$. Es gilt nun:

$$\widetilde{\sigma}^{ab} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd} = \sigma^{ab}$$

Damit ist σ^{ab} ein selbstdualer antisymmetrischer Tensor 2.Stufe. Weiterhin ist:

$$\widetilde{\overline{\sigma}}^{ab} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{abcd}\overline{\sigma}_{cd} = -\overline{\sigma}^{ab}$$

Man bezeichnet $\overline{\sigma}^{ab}$ als antiselbstdualen antisymmetrischen Tensor 2.Stufe. Es bleiben also drei Freiheitsgrade übrig, da diese Beziehungen gelten. Darüber hinaus gilt:

$$(\sigma^{ab}\varepsilon)_{\alpha\beta} = (\sigma^{ab})_{\alpha}{}^{\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta} = (\sigma^{ab}\varepsilon)_{\beta\alpha} \text{ und } (\varepsilon\overline{\sigma}^{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = (\varepsilon\overline{\sigma}^{ab})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$$

Die beiden Matrizen sind symmetrisch bezüglich der Indizes α, β bzw. $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$. ($\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ ist analog zu $\varepsilon_{\alpha\beta}$ definiert.) Man verwendet dies bei:

$$V_{\alpha\beta} = \underset{(0,0)}{V}\varepsilon_{\alpha\beta} + \underset{(\frac{2}{2},0)}{V_{\smile{\alpha\beta}}} \text{ und } V_{\smile{\alpha\beta}} = (\sigma^{ab}\varepsilon)_{\smile{\alpha\beta}}V_{\underline{\alpha\beta}}$$

Spinornotation:

$$\underset{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\alpha\dot{\beta}}}{p} = \frac{1}{2}(\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}}p_a \text{ und die Umkehrung } p_a = (\overline{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\beta}p_{\beta\dot{\alpha}}$$

Wir vergessen damit die σ^{ab}-Matrizen und schreiben nur noch die Spinorindizes.

$$(\overset{cd}{\sigma}\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}} = -\mathrm{i}(\sigma^b)_{\alpha\dot{\beta}}\left[\eta^{ca}\delta^d_b - \eta^{da}\delta^c_b - \mathrm{i}\varepsilon^{cda}{}_b\right]$$

$$(\sigma^a\overline{\sigma}^{cd})_{\alpha\dot{\beta}} = \mathrm{i}(\sigma^b)_{\alpha\dot{\beta}}\left[\eta^{ac}\delta^d_b - \eta^{ad}\delta^c_b + \mathrm{i}\varepsilon^{acd}{}_b\right]$$

4.3 Vier-Komponentennotation

In vier Dimensionen gilt $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\phi_4$. Die γ-Matrizen sind gegeben durch:

$$(\gamma^a)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^a)_{\alpha\dot{\beta}} \\ (\overline{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\beta} & 0 \end{pmatrix} \text{ mit der Indexstruktur } \underline{\alpha}\downarrow \hat{=} (\alpha\downarrow, \dot{\alpha}\uparrow) \text{ und } \underline{\beta}\uparrow \hat{=} (\beta\uparrow, \dot{\beta}\downarrow)$$

Dies ist eine spezielle Darstellung der CLIFFORD-Algebra, die man WEYL-Darstellung der C_4 nennt. Wenn man von der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ her kommt, is es sinnvoll, diese Darstellung zu nehmen, weil die Viererspinoren in zweikomponentige Spinoren zerlegt werden. Außerdem verwenden wir folgende Notation:

$$\gamma^5 := -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \text{ und } \Pi_\pm = \frac{\mathbf{1}_4 \pm \gamma^5}{2} \text{ mit } \psi_L = \Pi_+\psi,\ \psi_R = \Pi_-\psi$$

$(\psi_L)_{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(\psi_R)_{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$

ψ_α und $\overline{\chi}^{\dot\alpha}$ sind sogenannte WEYLspinoren. Im Gegensatz dazu ist ein DIRAC-Spinor gegeben durch:

$$\psi_{\underline{\alpha}}(x) = \begin{pmatrix} \psi_\alpha(x) \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) \end{pmatrix} = (\psi_L)_{\underline{\alpha}} + (\psi_R)_{\underline{\alpha}}$$

Dieser besitzt $2 \cdot 4$ reelle Freiheitsgrade für alle x. Der zu ψ adjungierte Spinor ist gegeben durch $\overline{\psi} := (\chi^\alpha, \overline{\psi}_{\dot\alpha}) = \psi^\dagger A$, wobei $A\gamma^a A^{-1} = (\gamma^a)^\dagger$ gilt. Die Matrix A besitzt die Indexstruktur $A^{\underline{\dot\beta}\underline{\alpha}}$ mit $\underline{\dot\beta} \uparrow \mathrel{\hat=} (\dot\beta \uparrow, \beta \downarrow)$. (Oft verwendet man die Matrix γ^0.) Eine Invariante unter $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist gegeben durch $\overline{\psi}\psi = \chi^\alpha \psi_\alpha + \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}$. Es gibt 16 unabhängige Größen in der CLIFFORD-Algebra, nämlich $\mathbf{1}_4$ (1), γ^a (4), $\gamma^a\gamma^b$ (6), $\gamma^a\gamma^b\gamma^c$ (4) und $\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d$ (1). (Die Zahlen in Klammern bezeichnen, wie viele solche Objekte es gibt.)

$$\overline{\psi} O \psi \text{ mit } O = \left(\mathbf{1}_4, \gamma^5\gamma^a, \gamma^5\gamma^a, \frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^a, \gamma^b]\right)$$

Als Übung kann man zeigen, dass folgendes gilt:

$$\chi\sigma^{ab}\psi - \overline{\psi}\overline{\sigma}^{ab}\overline{\chi} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\varepsilon^{ab}{}_{cd}(\chi\sigma^{ad}\psi + \overline{\psi}\overline{\sigma}^{cd}\overline{\chi})$$

Betrachten wir nun den ladungskonjugierten Spinor zu ψ:

$$\psi^C_{\underline{\alpha}}(x) = \begin{pmatrix} \chi_\alpha(x) \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha}(x) \end{pmatrix} = C\overline{\psi}^\mathsf{T} \text{ mit } C_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \end{pmatrix}$$

Der MAJORANA-Spinor ist gegeben durch $\psi^C = \psi$. Hier gilt $\psi_\alpha \equiv \chi_\alpha$, $\overline{\psi}^{\dot\alpha} \equiv \overline{\chi}^{\dot\alpha}$.

$$\psi_M(x) = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

Dieser besitzt $2\cdot 2 = 4$ reelle Freiheitsgrade. Wir wissen, dass für einen DIRAC-Spinor gilt: $\overline{\psi}\gamma^a\psi = \chi\sigma^a\overline{\chi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^a\psi$. Für einen MAJORANA-Spinor gilt entsprechend $\overline{\psi}\gamma^a\psi = \psi\sigma^a\overline{\psi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^a\psi$. Falls die ψ_α-Komponenten auch mit den $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$-Komponenten antivertauschen, gilt:

$$\psi^\alpha\sigma^a_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta} = -\overline{\psi}^{\dot\beta}(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta} = -(\overline{\psi}_{\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma})(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta}(\varepsilon^{\alpha\delta}\psi_\delta) = -\overline{\psi}_{\dot\gamma}(-\varepsilon^{\delta\alpha}(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma})\psi_\delta = -\overline{\psi}_{\dot\gamma}(-(\varepsilon\sigma^a\varepsilon)^{\delta\dot\gamma})\psi_\delta$$

Mittels $-(\varepsilon\overline{\sigma}^a)_{\dot\alpha}{}^\beta\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma} = (\varepsilon\sigma^a)^\beta{}_{\dot\alpha}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}$ folgt: $-\overline{\psi}_{\dot\gamma}(-(\varepsilon\sigma^a\varepsilon)^{\delta\dot\gamma})\psi_\delta = (\overline{\sigma}^a)^{\dot\gamma\delta}$. Für MAJORANA-Spinoren gilt $\overline{\psi}_M\gamma^a\psi_M = 0$. Für antikommutierende Spinorkomponenten gilt $\psi\sigma^{ab}\psi = 0 = \overline{\psi}\overline{\sigma}^{ab}\psi$. Anmerkung: Für MAJORANA-Spinoren ψ_M funktionieren keine Phasentransformationen $\psi' = \exp(\mathrm{i}\alpha)\psi$. Es sind jedoch γ^5-Transformationen der Form $\psi'_M = \exp(\mathrm{i}\alpha\gamma^5)\psi_M$ möglich.

4.4 Poincare-Supersymmetrie für $N = 1$ und $D = 4$

Wir wählen bosonische Generatoren $\mathcal{B}$ und eine LIE-Algebra mit dem Kommutator $[,]$ der Form $[\mathcal{B}, \mathcal{B}'] = \mathcal{B}$ als LIE-Klammer. Neben den bosonischen Generatoren nutzen wir auch fermionische Generatoren $\mathcal{F}$, welche Antikommutatorrelationen der Form $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\} = \mathcal{B}$ erfüllen sollen. Der Antikommutator besitzt also wieder eine BOSEstruktur. Wenn man einen bosonischen mit einem fermionischen Generator zusammenpackt benutzt man den Kommutator $[\mathcal{B}, \mathcal{F}] = \mathcal{F}'$. Die $\mathcal{B}$ sind vom Grad 0 ($\in L_0$) und die $\mathcal{F}$ vom Grad 1 ($\in L_1$). Falls die Grade definiert sind, gilt für $AB \in L_0 \oplus L_1$, dass $\mathrm{Grad}(AB) = (\mathrm{Grad}(A) + \mathrm{Grad}(B))(\mod 2)$ ist. (Man bezeichnet dies als $\mathbb{Z}_2$-Graduierung und spricht auch von einer Super-LIE-Algebra, $\mathbb{Z}_2$-graduierte LIE-Algebra.) Falls A, B wieder einen definierten Grad haben, schreiben wir $[A, B\} := AB - (-1)^{ba}BA$ (verallgemeinerter Kommutator), wobei $b \equiv \mathrm{Grad}(B)$, $a \equiv \mathrm{Grad}(A)$ gilt mit $a = 0$, falls A ein $\mathcal{B}$-Typ ist und 1, falls A ein $\mathcal{F}$-Typ ist. Als Übung kann man zeigen, dass $[A, B\} = -(-1)^{ba}[B, A\}$ gilt. Der verallgemeinerte Kommutator erfüllt die verallgemeinerte JACOBI-Identität:

$$\circlearrowleft\!\!\!\!\!\!\sum [[A, B\}, C\} \equiv [[A, B\}, C\} + (-1)^{a(b+c)}[[B, C\}, A\} + (-1)^{(a+b)c}[[C, A\}, B\} \equiv 0$$

Die JACOBI-Identität ist nach Definition trivial erfüllt, falls A, B und C definierte Grade haben. Man verwendet nun Q_α, $\overline{Q}^{\dot\alpha}$ mit $Q_{\underline{\alpha}} = (Q_\alpha, \overline{Q}^{\dot\alpha})^\mathsf{T}$ als Generatoren. Diese Generatoren erfüllen der Antikommutatorrelation $\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha} = 2\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}P_a$ mit $P_a = (P_0 = H = P^0, -\vec{P})$. Außerdem gilt $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 = \{\overline{Q}^{\dot\alpha}, \overline{Q}^{\dot\beta}\}$

und $[P_a, Q_a] = 0 = [P_a, \overline{Q}_{\dot\alpha}]$. Diese erfüllen die JACOBI-Identität, was man als Übung nachrechnen kann. Die Massendimensionen sind $[P_a] = 1$ und $[Q] = \frac{1}{2} = [\overline{Q}]$. SU(2,ℂ)-Spinorstruktur:

$$[M_{ab}, Q_\alpha] = \left(\frac{\sigma_{ab}}{2}\right)_\alpha^{\ \beta}, \ [M_{ab}, \overline{Q}^{\dot\alpha}] = \left(\frac{\overline{\sigma}_{ab}}{2}\right)^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta} \overline{Q}^{\dot\beta}$$

Zunächst können wir noch eine zusätzliche U(1)-Symmetrie, nämlich die sogenannte R-Symmetrie, fordern:

$[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha$ und $[R, \overline{Q}_{\dot\alpha}] = \overline{Q}_{\dot\alpha}$

In der Vierernotation lautet dies folgendermaßen:

$\{Q_{\underline{\alpha}}, Q^{\underline{\beta}}\} = 2\gamma^a{}_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} P_a$

Falls wir R-Symmetrie fordern, gilt $[R, Q_{\underline{\alpha}}] = \gamma^5{}_{\underline{\alpha}}{}^{\beta} Q_{\underline{\beta}}$. Folgende Eigenschaften sind evident:

a.) $H_0 = P_0 \geq 0$

$(1\dot1): \ 2(P_0 + P_3) = Q_1\overline{Q}_{\dot1} + \overline{Q}_{\dot1}Q_1$

$(2\dot2): \ 2(P_0 - P_3) = -Q_2\overline{Q}_{\dot2} - \overline{Q}_{\dot2}Q_2$

Daraus ergibt sich dann:

$$4P_0 = 4H = \sum_{\alpha=1}^{2} \left[Q_\alpha\overline{Q}_{\dot\alpha} + \overline{Q}_{\dot\alpha}Q_\alpha\right]$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2} |\overline{Q}_{\dot\alpha}|\psi\rangle|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} |Q_\alpha|\psi\rangle|^2\right)$$

Für $E = 0$ gilt $Q|\psi_0\rangle = 0 = \overline{Q}|\psi_0\rangle$. Wir sehen, dass es sich um einen positiv semidefiniten HILBERTraum handelt.

b.) Antikommutierende Parameter: $\xi^\alpha Q_\alpha$, $\overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{\xi}^{\dot\alpha}$, $c^a P_a$, wobei c^a reell ist

$g(\xi_1, \overline{\xi}_1, c_1) = \exp(\mathrm{i}G(\xi, \overline{\xi}, c))$, $g(\xi_1, \overline{\xi}_1, c_1)g(\xi_2, \overline{\xi}_2, c_2) = g(\xi_3, \overline{\xi}_3, c_3)$

Mit der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel gilt:

$$\xi^\alpha\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\}\overline{\xi}^{\dot\beta} = 2\xi^\alpha(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}P_a$$

Für die linke Seite gilt mit $\xi^\alpha Q_\alpha = -\xi_\alpha Q^\alpha$, $Q^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}Q_\beta$, $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma$ und $\xi_\beta = \varepsilon_{\beta\alpha}\xi^\alpha$:

$$\xi^\alpha\{Q_\alpha\overline{Q}_{\dot\beta}\}\overline{\xi}^{\dot\beta} = [\xi^\alpha Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}] = -\overline{Q}_{\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\xi^\alpha Q_\alpha$$

Wenn man $\xi^\alpha Q_\alpha$ hermitesch konjugiert, gilt:

$$(\xi^\alpha Q_\alpha)^\dagger = (Q_\alpha)^\dagger(\xi^\alpha)^\dagger = \overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{\xi}^{\dot\alpha}$$

Translation in antikommutierenden Variablen:

$\xi_{3,\alpha} = \xi_{1,\alpha} + \xi_{2,\alpha}$, $\overline{\xi}_3{}^{\dot\alpha} = \overline{\xi}_1{}^{\dot\alpha} + \overline{\xi}_2{}^{\dot\alpha}$

$c_3^a = c_1^a + c_2^a + \mathrm{i}\xi_1\sigma^a\overline{\xi}_2 - \mathrm{i}\xi_2\sigma^a\overline{\xi}_1$

Dies sollte als Übung nachgerechnet werden. Es ist $c \in \mathbb{R}$; die beiden letzten Objekte sind jedoch keine Zahlen im normalen Sinn mehr. Man spricht dann von C-Zahlen (kommutierende Zahlen). (Durch komplex Konjugieren gehen diese beiden Objekte ineinander über.)

c.) Superraum $(x^a, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}) \equiv z$

Die x^a sind C-Zahlen und θ^α, $\theta_{\dot\alpha}$ sind A-Zahlen. θ^α und $\theta_{\dot\alpha}$ gehen auch wieder durch komplexe Konjugation ineinander über. Darstellungen auf z-Raum:

$$\hat{P}_a = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^a} \equiv \mathrm{i}\partial_a, \ \hat{Q}_\alpha = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \mathrm{i}(\sigma^a\overline{\theta})_\alpha\frac{\partial}{\partial x^a}\right) \text{ und } \hat{\overline{Q}}^{\dot\alpha} = \mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} + \mathrm{i}(\overline{\sigma}^a\theta)^{\dot\alpha}\partial_a\right)$$

$$\partial_a\theta^\beta \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha{}^\beta, \ \overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}$$

$$(\partial_a\theta^\beta)^\dagger = (\delta_\alpha{}^\beta)^\dagger = \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \text{ und } (\partial_a\theta^\beta)^\dagger = -\overline{\theta}^{\dot\beta}\overleftarrow{\overline{\partial}}_{\dot\alpha} = -\partial_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta}$$

d.) Superfelder $\Phi(z)$

i.) Grad Φ_I

$$\text{Grad}\Phi_i = \begin{cases} 0 & \text{Bosonisches Feld, falls } i \neq j \text{ gerade} \\ 1 & \text{Fermionisches Feld, falls } i \neq j \text{ ungerade} \end{cases}$$

ii.) Entwicklung in θ^α, $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$

$$\Phi_I(z) = C_I(x) + \theta^\alpha \psi_{I,\alpha}(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\chi}_I{}^{\dot\alpha} + \theta^\alpha\theta_\alpha M_I(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} N_I(x) + (\theta^\alpha\sigma^a\overline{\theta}_{\dot\alpha})V_{I,a}(z) +$$
$$+ (\theta^\alpha\theta_\alpha)(\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\mu}_I^{\dot\alpha}(x)) + (\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha})(\theta^\alpha\lambda_{I,\alpha}(x)) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} D_I(x)$$

$I = (0,0)16/16$

Dies ist aber noch kein Superfeld. Ein Superfeld ist dadurch ausgezeichnet, dass es folgendermaßen transformiert:

$\delta\Phi = \Phi'_I(z) - \Phi_I(z) = \mathrm{i}(\xi\hat{Q} + \hat{\overline{Q}}\overline{\xi} + c^a\hat{P}_a)\Phi_I(z)$ (lineare Darstellung (Differentialoperator))

$\delta\Phi_I = \delta C_I + \theta^\alpha\delta\psi_{I,\alpha} + \ldots + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}$

$\delta D_I \equiv C'_I(x) - C(x)$ etc.

C_I transformiert folgendermaßen:

$\delta C_I = -c^a\partial_a C_I + \xi^{\dot\alpha}\psi_{I,\dot\alpha}(x) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}_I{}^{\dot\alpha}(x)$

Der springende Punkt ist nun:

$$\partial D_I = -\partial_a\left[c^a D_I - \frac{\mathrm{i}}{2}\xi\sigma^a\overline{\mu}_I - \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^a\lambda_I(x)\right]$$

Diese Tatsache wird nun später verwendet, wenn man versucht, supersymmetrische Wirkungen aufzubauen, die invariant sind.

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}(x)$$

$\mathcal{L}(z)$ enthält Produkte von Superfeldern und kovarianten Ableitungen.

$$-\frac{1}{4}\partial^a\partial_a(\theta^\beta\theta_\beta) \overset{!}{=} 1$$

$$-\frac{1}{4}\overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha}(\overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\theta}^{\dot\beta}) = 1$$

$$\mathcal{L} = \left(-\frac{1}{4}\partial^a\partial_a\right)\left(-\frac{1}{4}\overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha}\right)\mathcal{L}(z)$$

e.) Supersymmetriekovariante Ableitungen

$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ ist kovariant; dies bedeutet, dass $[\partial_a, \hat{Q}] = 0 = [\partial_a, \hat{\overline{Q}}]$. $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ ist kovariant bezüglich $\hat{P}_\alpha$, $\hat{Q}_\alpha$, was bedeutet, dass $\{\partial_\alpha, \hat{Q}_\beta\} = 0$ ist. Man kann als Übung nachrechnen, dass für $D_\alpha = \partial_\alpha - \mathrm{i}(\sigma^a\overline{\theta})_\alpha\partial_a$ gilt: $\{D_\alpha, \hat{\overline{Q}}^{\dot\beta}\} = 0$.

$[\varrho^\alpha D_\alpha, \hat{\overline{Q}}_{\dot\beta}, \overline{\xi}^{\dot\alpha}] = 0$

$\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + \mathrm{i}(\theta\sigma^a)_{\dot\alpha}\partial_a$

$\{D_\alpha, D_{\dot\alpha}\} = 2\mathrm{i}\sigma^a_{\alpha\dot\alpha}\partial_a$, $\{D_\alpha, D_\beta\} = 0 = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\}$

Die Struktur der kovarianten Ableitungen ist damit gegeben durch:

$D_\alpha = \partial_\alpha - \mathrm{i}_\alpha(\sigma^a\overline{\theta})\partial_a$

$\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + \mathrm{i}(\theta\sigma^a)_{\dot\alpha}\partial_a$

Die D erfüllen eine Algebra, die genauso aussieht wie die Supersymmetrie-Algebra bezüglich der Darstellung mit den Q, nämlich $\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\} = 2\mathrm{i}(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\partial_a$. Eine Kombination von mehr als drei D_α bzw. $\overline{D}_{\dot\alpha}$ verschwindet: $D_\alpha D_\beta D_\gamma \equiv 0 \equiv \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\beta}\overline{D}_{\dot\gamma}$. Schauen wir uns einige wichtige Regeln an:

i.) $[D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}] = 4\mathrm{i}_\alpha(\sigma^a\overline{D})\partial_a$

$[\overline{D}_{\dot\alpha}, D_\alpha D^\alpha] = -4\mathrm{i}(D\sigma^a)_{\dot\alpha}\partial_a$

ii.) $\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}\} = -2\overline{D}_{\dot\alpha}D_\alpha\overline{D}^{\dot\alpha}$

$\{\overline{D}_{\dot\alpha}, D_\alpha D^\alpha\} = -2D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}D_\alpha$

iii.) $[D^\alpha D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}] = 4\mathrm{i}D^\alpha\sigma^a\overline{D}_{\dot\alpha}\partial_a - 4\mathrm{i}(\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^a D^\alpha)\partial_a = 8\mathrm{i}D^\alpha\sigma^a\overline{D}_{\dot\alpha}\partial_a + 16\Box = -8\mathrm{i}\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^a D^\alpha\partial_a - 16\Box$ mit $\Box \equiv \partial^a\partial_a$

iv.) $\{D^\alpha D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}\} = 2D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}D_\alpha - 16\Box$

v.) $D^\alpha\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}D_\alpha = \overline{D}_{\dot\alpha}D^\alpha D_\alpha\overline{D}^{\dot\alpha}$

f.) Chirale Superfelder

Man betrachtet Supersymmetrie-kovariante Einschränkungen an $\Phi(z)$. Die einfachste mit Supersymmetrie verträgliche Einschränkung ist, dass man $\Phi(t)$ reell wählt: $\Phi(z) = \Phi^*(z) = \overline{\Phi}(z)$. Dies funktioniert aufgrund des Transformationsgesetzes $\delta\Phi = \mathrm{i}\hat{G}(\xi, \overline{\xi}, c)\Phi$, was eine reelle Transformation ist, da $\hat{G}$ selbst komplex ist. $\Phi(z)$ bezeichnet man dann als reelles Superfeld. Dies findet Verwendung, wenn man Vektorfelder supersymmetrisieren will. Man spricht dann manchmal von Vektor-Superfeldern. Eine andere Einschränkung ist $\partial_a\Phi = 0$. Dieser Fall ist jedoch nicht interessant, da dann Φ nicht mehr von x abhängt: $\Phi = \Phi(\theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha})$. Eine interessantere Einschränkung ist $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0$ (chirales Superfeld). Wir wollen nun die Lösung dieser Gleichung bestimmen. Dazu macht man eine geeignete Variablentransformation im Superraum, so dass $\overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}\varphi(x^{(1),a}, \theta^{(1),\alpha}, \overline{\theta}^{(1)}_{\dot\alpha}) = 0$ gilt, wobei $\varphi(x^{(1),\alpha}, \theta^{(1),\alpha}, \overline{\theta}^{(1)}_{\dot\alpha}) = \Phi(z(z^{(1)}))$ gilt. Diese Gleichung wird erfüllt von $\varphi = \varphi(x^{(1)}, \theta^{(1)})$, welches nicht mehr von $\overline{\theta}^{(1)}$ abhängt. Man kann nun für die neuen Variablen einen Ansatz hinschreiben:

$$x^{(1),a} = x^a - \mathrm{i}\theta^\alpha\sigma^a\overline{\theta}_{\dot\alpha} \equiv g^a \text{ und } \theta^{(1),\alpha} = \theta^\alpha \text{ und } \overline{\theta}^{(1)}_{\dot\alpha} = \overline{\theta}^{\dot\alpha}$$

Man geht also in den komplexen Superraum über. Wir müssen nun mittels der Kettenregel die Ableitungen umrechnen:

$$\overline{\partial}_{\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} = \frac{\partial x^{(1),b}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{(1),b}} + \frac{\partial\theta^{(1),\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial\theta^{(1),\beta}} + \frac{\partial\overline{\theta}^{(1)}_{\dot\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{(1)}_{\dot\beta}}$$

Analog folgt $\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$ und $\frac{\partial}{\partial x^a}$. Man erhält dann $\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}$ und somit – wie schon oben erwähnt – eine Funktion φ, die nicht mehr von $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ abhängt, nämlich der Form

$$\Phi(z) = \varphi(x^a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}, \theta^\alpha) \text{ wobei } \varphi(y, \theta) = A(y) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(y)\theta^\beta\theta_\beta F(y)$$

Wir machen eine Taylor-Entwicklung:

$$\Phi(t) = A(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) + \theta^\alpha\theta_\alpha F(x) - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}\partial_a A(x) - \frac{\mathrm{i}}{2!}\theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\theta\sigma^b\overline{\theta})\partial_a\partial_b A(x) -$$
$$+ \mathrm{i}(\theta\sigma^a\overline{\theta})\theta_\alpha\sqrt{2}\partial_a\psi_\alpha$$

Beiträge höherer Ordnung verschwinden, weil dann mehr als drei θ bzw. $\overline{\theta}$ nebeneinander stehen. Man kann den fünften Summanden weiter umformen:

$$\overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} = \lambda\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}$$

$$\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\alpha} = \lambda\cdot 2\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} = -\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{2!}\theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\theta\sigma^b\overline{\theta}) = \frac{1}{2!}(\theta\sigma^a\overline{\sigma}^b\theta)\left(-\frac{1}{2}\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\right)\partial_a\partial_b A =$$
$$= (\theta^\alpha\theta_\alpha)\left(-\frac{1}{4}(\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha})\right)\eta^{ab}\partial_a\partial_b A \text{ mit } \eta^{ab}\partial_a\partial_b = \Box$$

Man erhält also:

$$\Phi(z) = A(x) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha(x) + \theta^\alpha\theta_\alpha F(x) + \text{chirale Ergänzung}$$

Die chirale Ergänzung lautet:

$$(\theta\sigma^a\overline{\theta})(-\mathrm{i}\partial_a A) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}\sigma^a\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2}\partial_a\psi\right) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\left(-\frac{1}{4}\Box A\right) \text{ (chirales Multiplett 4/4)}$$

Analog erhält man das antichirale Superfeld aus der Gleichung $D_\alpha\psi(z) = 0$. Hier verwendet man die Transformationen:

$$x^{(2),a} = x^a + \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta} \text{ und } \theta^{(2),\alpha} = \theta^\alpha \text{ und } \overline{\theta}^{(2)}_{\dot\alpha} = \overline{\theta}^{\dot\alpha}$$

Damit geht D_α über in $\partial^{(2)}_\alpha$ und wir erhalten:

$$\psi(z) = B(x + \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x^{(2)}) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}G(x)$$

Man muss nun wieder die Entwicklung durchführen:

$$\psi(z) = B(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}G(x) + \text{antichirale Ergänzung}$$

Betrachten wir nun speziell Φ, $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0$, $D_\alpha\overline{\Phi} = 0$. Dann sieht $\Phi(z)$ wie oben aus und $\overline{\Phi}(z)$ lautet:

$$\overline{\Phi}(z) = A^*(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\psi}^{\dot\alpha} + \theta^\alpha\theta_\alpha F^* + \ldots \text{ (antichiral)}$$

Wir haben also die Felder A, A^*, ψ_α, $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ (Majorana-Spinor), F und F^*. Auf dem zwölften Übungsblatt zeigen wir, dass ein reelles chirales Superfeld konstant ist: $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0$, $\Phi = \Phi^*$. Wir betrachten nun das Transformationsverhalten unter ξ, $\overline{\xi}$:

$$\delta A = -\xi^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) \text{ und } \delta\psi_\alpha = -\xi_\alpha\sqrt{2}F + \sqrt{2}\mathrm{i}_\alpha(\sigma^a\overline{\xi})\partial_a A \text{ und } \delta F = \partial_a(\mathrm{i}\sqrt{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^a\psi(x))$$

Die F-Komponente von einem chiralen Superfeld transformiert mit der Raum-Zeit-Ableitung ∂_a. Produkte von chiralen Superfeldern sind chiral und Produkte von antichiralen Superfeldern antichiral.

g.) Wess-Zumino-Modell (1974)

Mit diesem Modell wurde die Supersymmetrie eingeleitet. Wir gehen aus von einer Supersymmetrie-invarianten Wirkung für ein **komplexes** Skalarfeld. Das komplexe Skalarfeld haben zuerst Pauli und Weisskopf im Jahre 1934 behandelt. Was wir benötigen, ist ein kinetischer Term $\mathcal{L}(x) = \partial_a A^*\partial^a A$. Dies ist die Struktur des kinetischen Terms eines komplexen Skalarfelds. (Mittels der Transformation $1/\sqrt{2}(\mathcal{A} + \mathrm{i}\mathcal{B})$, wobei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ reelle Felder sind, kann man den kinetischen Term auf reelle Felder umschreiben.) Der Trick, um supersymmetrische Wirkungen S zu erhalten, ist nun:

$$\mathcal{L}(z)|_{D,\theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}} : \mathcal{L}$$

Für die Dimensionen gilt $[\mathcal{L}] = 4$, $[\theta^\alpha\theta_\alpha] = -1$ und $[\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}] = -1$. Skalare Felder besitzen die Dimension 1. Gilt $[\Phi] = d$, $[A] = d$, so folgt $[\psi] = d + \frac{1}{2}$ und $[F] = d + 1$. Falls $\Phi| = \Phi|_{\theta^\alpha=0=\overline{\theta}_{\dot\alpha}} = A$, hat das Superfeld Φ die Dimension 1. Gilt $F = \phi|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} = A$, so folgt $[\Phi] = 0$.

$$\mathcal{L}_{kin}(z) = \lambda\overline{\Phi}\Phi,\ \mathcal{L}(x) = \lambda\overline{\Phi}\Phi|_{\theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}}$$

$$\overline{\Phi} = A^* + \sqrt{2}\overline{\psi}\overline{\theta}_{\dot\alpha} + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}F^* + \theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\partial_a A^*) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_a\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\theta\right) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\left(-\frac{1}{4}\Box A^*\right)$$

$$\Phi = A + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi + \theta^\alpha\theta_\alpha F + \theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\partial_a A) + \theta^\alpha\theta_\alpha\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\overline{\theta}\overline{\sigma}^a\partial_a\psi\right) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\left(-\frac{1}{4}\Box A\right)$$

$$\begin{aligned}\overline{\Phi}\Phi|_D &= A^*\left(-\frac{1}{4}\Box\right)A + \left(-\frac{1}{4}\Box A^*\right)A + \frac{1}{2}(-1)^2\partial_a A^*\partial^a A + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\partial_a\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_a\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\psi + F^*F = \\ &= \partial_a A^*\partial^a A + \frac{3}{2}\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\partial_a\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_a\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\psi + F^*F + \underbrace{\partial_b\left[-\frac{1}{4}A^*\partial^b A - \frac{1}{4}(\partial^b A^*)A\right]}_{\text{weg in } S} = \mathcal{L}_{kin}(x) + \partial_a(\ldots)\end{aligned}$$

Dies ist die supersymmetrische Version des kinetischen Terms eines Skalarfelds. Woher kommt das Potential $V(A^*A)$? Superpotential:

$$W(\phi) = \lambda\Phi + \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3!}\Phi^3 + \ldots$$

Wenn nur die Φ vorkommen, ist $W(\Phi)$ chiral, da $\overline{D}_{\dot\alpha} W(\Phi) = 0$ ist. Daraus folgt $\overline{W(\Phi)} = \overline{W}(\overline{\Phi})$ und $D_\alpha \overline{W}(\overline{\Phi}) = 0$.

$$\mathcal{L}_{pot}(x) = W(\Phi)|_{F,\theta^\alpha\theta_\alpha} + \overline{W}(\overline{\Phi})|_{F^*,\overline{\theta\theta}}$$

$$\mathcal{L}_{s,pot}(z) = \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} W(\Phi) + \theta^\alpha\theta_\alpha \overline{W}(\overline{\Phi})$$

Das Superpotential $W(\Phi)$ hat die Dimension 3 und $\mathcal{L}$ damit die Dimension 2. Die Komponentenversion hat folgende Form:

$$W(\phi)|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} = -\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha W(\phi) \text{ mit } \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$$

Als Übung kann man zeigen, dass $-\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha\theta^\beta\theta_\beta = 1$ ist. Damit ergibt sich weiter für das Superpotential:

$$\begin{aligned} W(\phi)|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} &= -\frac{1}{4}\partial^\alpha\left[\partial_\alpha\phi W'(\phi)\right]|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} = -\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha\phi W'(\phi) - \frac{1}{4}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi W''(\phi)|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} = \\ &= -\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha\phi|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} W'(\phi)|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} - \frac{1}{4}\partial^\alpha\phi|_{\theta^\alpha\theta_\alpha}\partial_\alpha\phi|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} W''(\phi)|_{\theta^\alpha\theta_\alpha} = \\ &= FW'(A) - \frac{1}{4}\sqrt{2}\psi^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha W''(A) \end{aligned}$$

Damit lautet der potentielle Teil der Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{pot}(x) = F(x)W'(A) - \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha W''(A) + F^*(x)\overline{W}'(A^*) - \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha}\overline{W}''(A^*)$$

Die Wess-Zumino-Lagrangedichte setzt sich aus dem kinetischen und potentiellen Anteil zusammen:

$$\mathcal{L}_{WZ} = \mathcal{L}_{s,kin} + \mathcal{L}_{s,pot} \text{ mit } \mathcal{L}_{WZ}(z) = \overline{\phi}(z)\phi(z) + \overline{\theta}^{\dot\alpha}\theta_{\dot\alpha} W(\phi) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{W}(\overline{\phi})$$

Die Wirkung ergibt sich aus:

$$S_{WZ} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}_{WZ}(z)|_{\theta^\alpha\theta_\alpha\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}} = \underbrace{\int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{4}\partial_\alpha\partial^\alpha\right)\left(-\frac{1}{4}\overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha}\right)}_{\int \mathrm{d}z'''} \mathcal{L}_{WZ}(z) = \mathcal{L}_{kin}(x) + \mathcal{L}_{pot}(x)$$

Dies ist das einfachste supersymmetrische Modell. Wir wollen nun die Hilfsfelder F und F^* eliminieren. Dazu betrachten wir die (off-shell) Eulergleichungen:

$$F^* : F = -\overline{W}'(A^*) \text{ und für } F : F^* = -W'(A)$$

Dabei handelt es sich um gewöhnliche algebraische Gleichungen und nicht um Bewegungsgleichungen, da sie ja keine Ableitungen enthalten. F und F^* wird nun mit Teilchen der Euler-Lagrange-Gleichungen eliminiert:

$$\mathcal{L}_{WZ}^{partial\ onshell}(x) = \partial^\alpha A^*\partial_\alpha A + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Psi}\partial^\alpha\partial_\alpha\Psi - \frac{1}{2}\Psi\Psi W''(A) - \frac{1}{2}\overline{\Psi\Psi W}''(A^*) - \overline{W}'(A^*)W'(A)$$

Also folgt der Potentialterm (ohne Ψ und Ableitungen):

$$V(A^*, A) = |W'(A)|^2 \geq 0$$

Er enthält also nur die Ableitung des Potentials. (In der Supersymmetrie sind Transformationen ohne F im allgemeinen nichtlinear.) Die restlichen Bewegungsgleichungen lauten nun:

$$A^* : 0 = -\Box A - \frac{1}{2}\overline{\Psi\Psi W}'''(A^* - W'(A)\overline{W}''(A^*)$$

$$\Psi^\alpha : \mathrm{i}\sigma^a\partial_a\overline{\Psi} - \Psi_\alpha W''(A) = 0 \text{ analog für } A,\ \overline{\Psi}_{\dot\alpha}$$

c.) Nichtlineare σ-Modelle supersymmetrisch:

Wir gehen über von π^i (mit $i = 1, 2, 3$) zu A^i und $(A^*)^{\underline{i}}$ mit $i = 1, \ldots, n$ und $\underline{i} = 1, \ldots, n$. Im reellen verdoppelt sich die Dimension der Mannigfaltigkeit (M_{2n}).

$$\mathcal{L}_\pi = \partial_a\pi^i g_{ij}(\vec{\pi}^2)\partial^a\pi^j \overset{?}{\to} S_{WZ} = \int \mathrm{d}z\, \left(\overline{\Phi}^i\delta_{ij}\Phi^j + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}W'(\Phi^i) + \theta^\alpha\theta_\alpha\overline{W}(\overline{\Phi}^i)\right)$$

Wir sind nun auf der Suche nach:

$\mathcal{L} = \partial_a \overline{A}^{\underline{j}} = g_{\underline{j}i}(\overline{A}, A)\partial^a A^j$ mit $g_{i\underline{j}}(\overline{A}, A) = g_{i\underline{j}}(\overline{A}, A)$ und $g_{ij} = 0 = g_{\underline{ij}}$

$g_{i\underline{j}}$ ist damit eine sogenannte hermitesche Metrik (siehe Aufgabenblatt 2).

$$S_K = \int \mathrm{d}^8 z\, K(\overline{\Phi}, \Phi) \equiv \int \mathrm{d}z\, K(\overline{\Phi}, \Phi)$$

Φ sind chirale Superfelder mit $\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi^i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Die $\overline{\Phi}^{\underline{j}} = (\Phi^j)^*$ sind antichirale Superfelder wegen $D_\alpha \overline{\Phi}^{\underline{j}} = 0$. Wir verwenden nun, dass K eine reelle Funktion ist, dass also $K = K^*$ gilt.

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{4}\partial_\alpha \partial^\alpha\right)\left(-\frac{1}{4}\overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\partial}_{\dot\alpha}\right) K = \int \mathrm{d}^4 x\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} D^\alpha D_\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha} + \frac{1}{16}\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha} D^\alpha D_\alpha\right) K(\overline{\Phi}, \Phi) = \\
&= \int \mathrm{d}^4 x\, \frac{1}{32}(D^\alpha D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}) K(\overline{\Phi}, \Phi) = \int \mathrm{d}^4 x\, \frac{1}{16} D^\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha} D_\alpha K(\overline{\Phi}, \Phi) = \\
&= \int \mathrm{d}^4 x\, \frac{1}{16}\overline{D}_{\dot\alpha} D^\alpha D_\alpha \overline{D}^{\dot\alpha} K(\overline{\Phi}, \Phi)
\end{aligned}$$

Es gilt $\overline{D}^{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\alpha} D_\alpha \Phi^i = 0$, weil $[\overline{D}^{\dot\alpha}\overline{D}_{\dot\alpha}, D_\alpha]\Phi^i \sim \overline{D}\partial_\alpha \Phi = 0$ nach Gleichung i). Dies hat den Effekt, dass zum Schluss **nicht** $K_{\underline{i}}$ auftaucht, sondern $K_i = \frac{\partial}{\partial A^i} K(A^*, A)$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_K(x) &= \frac{1}{16} D^\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha} D_\alpha K(\overline{\Phi}, \Phi) = \\
&= K_{\underline{j}i}(A^*, A)\left[\partial_a A^{\underline{j}}\partial^a A^i - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_a \Psi^i(x)\sigma^a \overline{\Psi}^{\underline{j}} + \frac{\mathrm{i}}{2}\Psi^i \sigma^a \partial_a \overline{\Psi}^{\underline{j}} + (F^*)^{\underline{j}} F^i\right]_{kin} + \\
&\quad + \frac{1}{2} K_{\underline{jk}i}(A^*, A)\left[-F^k \overline{\Psi}^j_{\dot\alpha}\overline{\Psi}^{\underline{k},\dot\alpha} + \mathrm{i}\Psi^i \sigma^a \overline{\Psi}^{\underline{k}}\partial_a A^{\star,j}\right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} K_{jk\underline{i}}(A^*, A)\left[-F^{\star,\underline{i}}\Psi^{j,\alpha}\Psi^k_\alpha + \mathrm{i}\overline{\Psi}^{\underline{i}}\overline{\sigma}^a \Psi^k \partial_a A^j(x)\right] + \frac{1}{4} K_{li\underline{kj}}(A^*, A)\left(\Psi^{l\alpha}\Psi^i_\alpha\right)\left(\overline{\Psi}^{\underline{k}}_{\dot\alpha}\overline{\Psi}^{\underline{j},\dot\alpha}\right)
\end{aligned}$$

$$g_{i\underline{j}}(A^*, A) = g_{\underline{j}i}(A^*, A) = \frac{\partial^2 K(A^*, A)}{\partial A^{\star,\underline{j}}\partial A^i}$$

$K(A^*, A) = K^*(A^*, A)$ ist das Kählerpotential. Die Kählerbedingung lautet:

$$\partial_k g_{i\underline{j}} - \partial_i g_{k\underline{j}} = 0 = \overline{\partial}_{\underline{k}} g_{i\underline{j}} - \overline{\partial}_{\underline{j}} g_{i\underline{k}} \xrightarrow{\text{lokal}} g_{i\underline{j}} = \partial_i \partial_{\underline{j}} K(\overline{\Phi}, \Phi)$$

Kähler-2-Form:

$\Omega = \frac{\mathrm{i}}{2} g_{i\underline{j}}\, \mathrm{d}A^i \wedge \mathrm{d}A^{\star,\underline{j}}$ mit $\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\partial_k g_{i\underline{j}}\, \mathrm{d}A^k \wedge \mathrm{d}A^i \wedge \mathrm{d}A^{\star,\underline{j}} + \partial_k g_{i\underline{j}}\, \mathrm{d}A^{\star,\underline{k}} \wedge \mathrm{d}A^i \wedge \mathrm{d}A^{\star,\underline{j}}\right)$

Lokal kann man die hermitesche Metrik mittels des Kählerpotentials ausdrücken.

$\mathrm{d}\Omega \stackrel{!}{=} 0$ (geschlossene 2-Form)

Eliminiere $F^{\star,\underline{i}}$ und F^i in $S = S_K + S_{Potential}$. Die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen lauten:

$$F^{\star,j} :\ K_{\underline{j}i} F^i - \frac{1}{2} K_{ik\underline{j}}(A^*, A)\psi^{i,\alpha}\psi^k{}_\alpha + \overline{W}_{\underline{j}}(A^*) = 0$$

$$F^j :\ K_{j\underline{i}} F^{\star,\underline{i}} - \frac{1}{2} K_{\underline{ikj}}(A^*, A)\overline{\psi}^{\underline{j}}{}_\alpha \overline{\psi}^{\underline{k},\dot\alpha} + W_j(A) = 0$$

$$\mathcal{L}_{pot} = F^i W_i(A) - \frac{1}{2}\psi^{i,\alpha}\psi^j{}_\alpha W_{ij}(A) + \text{h.k.}$$

$K_{\underline{j}i}$ ist nichtsingulär: $K^{i\underline{j}} K_{\underline{j}k} = \delta^i_k$, $K^{\underline{i}j} K_{j\underline{k}} = \delta^{\underline{i}}_{\underline{k}}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{partial\ onshell} = {} & \partial_a A^{\star,\underline{j}} - K_{\underline{j}i}(A^*, A)\partial^a A^i + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi^i \sigma^a \partial_a \psi^{\underline{j}} K_{\underline{j}i} + \frac{\mathrm{i}}{2} K_{jk\underline{i}}(\overline{\psi}^{\underline{i}}\overline{\sigma}^a \psi^k)\partial_a A^j + \\
& + \frac{\mathrm{i}}{2} K_{\underline{jk}i}(\psi^i \sigma^a \overline{\psi}^{\underline{k}})\partial_a A^{\star,\underline{j}} + \frac{\mathrm{i}}{4} K_{li\underline{jk}}(\psi^l \psi^i)(\overline{\psi}^{\underline{j}}\overline{\psi}^{\underline{k}}) - \frac{1}{2}(\psi^j \psi^i) W_{ij}(A) + \\
& - \frac{1}{2}\overline{\psi}^{\underline{i}}\overline{\psi}^{\underline{j}}\overline{W}_{\underline{ij}}(A^*) - F^{\star,j}(A^*, A, \overline{\psi\psi}) K_{\underline{j}i} F^i(A^*, A, \psi\psi)
\end{aligned}$$

Das Potential ist schließlich gegeben durch:

$$V(A^*, A) = F^{\star,j}(A^*, A, 0) K_{\underline{j}i}(A^*, A) F^i(A^*, A, 0) \geq 0$$