Mitschrift zur Vorlesung: Supersymmetrie I

Dr. habil. Lang

Vorlesung Wintersemester 2005/2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 31. August 2008

Mitschrift der Vorlesung Supersymmetrie I
von Herrn Dr. habil. Lang im Wintersemester 2005/2006
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Supersymmetrische Quantenmechanik $(D = 1 + 0)$

D setzt sich zusammen aus einer Zeitdimension und 0 Raumdimensionen. q arbeitet auf dem Raum der Zeitdimension: $q = q(t)$. (φ: $x \in M_4$ (Weltfläche) $\mapsto \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (Zielraum) bezeichnet man als Skalarfeld.)

1.1 Harmonischer Bose-Oszillator

m sei die Masse und κ die Federkonstante des Oszillators.

$$\mathcal{H}_B = \hbar\omega_B H_B \text{ mit } H_B = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = N_B + \frac{1}{2} \text{ und } \omega_B^2 = \frac{\kappa}{m}\,. \tag{1.1}$$

Die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sind gegeben durch:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + \mathrm{i}p) \text{ und } a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - \mathrm{i}p) \text{ wobei } [a, a^\dagger] = \mathbb{1}\,. \tag{1.2}$$

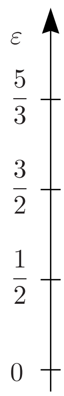
N_B lässt sich damit schreiben als $N_B = a^\dagger a$. $\{|n\rangle\}_0^\infty$ sei eine vollständige Orthonormalbasis. Die Wirkung von a und $a^\dagger$ auf Zustände dieser Basis ist gegeben durch:

$$a|0\rangle = 0 \text{ und } |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle\,. \tag{1.3}$$

Weiterhin gilt:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \text{ bzw. } a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \text{ mit } n = 1, 2, \ldots \text{ bzw. } n = 0\,1, 2, \ldots\,. \tag{1.4}$$

Es gilt die Eigenwertgleichung $H_B|n\rangle = n|n\rangle$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $n_B \equiv n$, $[H_B, N_B] = 0$ und $\varepsilon = E/\hbar\omega_B$.



1.1.1 Vielteilchensysteme

Wir betrachten nun N Vielteilchensysteme. Das Partitionsproblem definiert eine Zahl ν durch $\nu = \varepsilon - N/2$, wobei ε die Gesamtenergie ist. In diesem Zusammenhang kann man eine Partitionsfunktion definieren:

$$P_N(\nu) = \sum_{r=1}^{N} p(\nu, r)\,. \tag{1.5}$$

Die Variable r beschreibt die Anzahl der Oszillatoren, die angesprochen werden. $p(\nu, r)$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, durch die sich ν als Summe aus r Summanden darstellen lässt.

$$Z_N = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_N(\nu) \exp\left(-\left(\nu + \frac{N}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{kT}\right), \tag{1.6}$$

ist die Zustandssumme.

1.1.2 Bose-Einstein-Kondensation

Es gibt bei Bosonen keine Einschränkung in der Besetzung der einzelnen Energiezustände. Experimentell wurde dies unabhängig von drei Gruppen nachgewiesen (Nobelpreis für Physik 2001):

1) MIT: Ketterle (mit Natriumgas)
2) University of Colorado in Boulder: Wieman und Cornell (mit Rubidium und Cäsium)
3) Rice University in Houston: Hulet (mit ^{7}Li)

Damit die Teilchen ihre Identität verlieren (Identitätskrise), muss $\lambda_T \geq 1/n^{\frac{1}{3}}$ gelten. Man bezeichnet λ_T als thermische Wellenlänge des Gases.

$$\lambda_T = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \approx \frac{h}{\sqrt{3mk_BT}} \text{ da } E \approx \frac{3}{2}k_BT\,, \tag{1.7}$$

mit

$$n \approx 10^{14}\,\text{cm}^3,\ T \sim \mu\text{K (Laserkühlung, Verdampfungskühlung)}\,. \tag{1.8}$$

Suprafluüssigkeit ^{4}He, Supraleitung (Cooper-Paare), suprafluides ^{3}He (Paare dieser Fermionen) (Leggett, Nobelpreis für Physik 2003)

1.1.3 Fermi-„Oszillator“ (2-Zustandssystem)

Hier muss der Antikommutator verwendet werden, also $\{d, d^\dagger\} = \mathbb{1}$, wobei $\{A, B\} = AB + BA$. Außerdem sei $\{d, d\} = 0$ und $\{d^\dagger, d^\dagger\} = 0$ (also $d^2 = 0 = {d^\dagger}^2$). Dies wird uns zur Fermi-Dirac-Statistik (und dem Paulischen Ausschließungsprinzip) führen [zu Pauli und Jordan siehe: Physik Journal 1 (2002), Seiten 71 - 74]. Was hier analog zu q und p beim Boseoszillator ist, werden wir erst später kennenlernen (Pseudomechanik). Das hat mit einer neuen Art von antikommutierenden Variablen, nämlich den sogenannten Grassmann-Variablen zu tun. Wir verwenden die C_2-Clifford-Algebra mit $\mathbb{1}$, d, $d^\dagger$, $[d, d^\dagger]$ (keine höheren Produkte). In dieser Algebra kann man die Rollen von d und $d^\dagger$ vertauschen. Deshalb ist es Konvention, welchen Operator man verwendet, um das Vakuum zu definieren. In unserer Notation hier entscheiden wir uns für d, also gilt $d|0\rangle = 0$ und $N_F = d^\dagger d$. Weiterhin kann man nachprüfen, dass

$$[N_F, d] = (d^\dagger d - dd^\dagger)d = 0 - (\mathbb{1} - d^\dagger d)d = -d\,, \tag{1.9}$$

und $[N_F, d^\dagger] = d^\dagger$ gilt. (Außerdem gilt $\{N_F, d\} = d$ und $\{N_F, d^\dagger\} = d^\dagger$.)

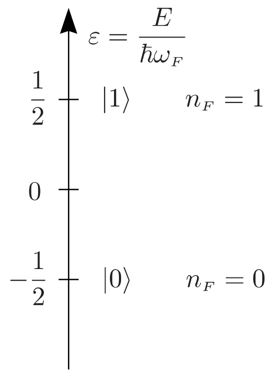
$$N_F(\mathbb{1} - N_F) = d^\dagger d d d^\dagger = 0\,, \tag{1.10}$$

wegen $N_F^2 = N_F$. Damit besitzt N_F nur die Eigenwerte $n_F \in \{0, 1\}$. Also kann ein Niveau nur mit zwei Zuständen besetzt werden (Paulisches Ausschließungsprinzip).

$$d^\dagger|0\rangle = |1\rangle,\ d^\dagger d|1\rangle = 1 \cdot |1\rangle \text{ und } d^\dagger d|0\rangle = 0\,. \tag{1.11}$$

Achtung: Zustände mit $n_F = 0$ bezeichnet man später als bosonische Zustände. Schreiben wir nun den Hamiltonoperator auf:

$$\mathcal{H}_F = \omega_F \hbar H_F \text{ mit } H_F = \frac{1}{2}[d, d^\dagger] = N_F - \frac{1}{2}\mathbb{1}\,. \tag{1.12}$$



Analogie zum Spin-1/2-System:

$$\mathcal{H}_{1/2} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = 2\mu_B B\frac{\sigma^3}{2} \text{ mit } \vec{\mu} = g\mu_{\mathrm{el}}\frac{\vec{S}}{\hbar} = -2\mu_B\frac{\vec{S}}{\hbar} \text{ und } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_{\mathrm{e}}}\,. \tag{1.13}$$

Wir verwenden die zweidimensionale Darstellung von C_3 (mittels der Pauli-Matrizen):

$$\sigma^\pm = \sigma^1 \pm \mathrm{i}\sigma^2 \text{ mit } \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Für die Pauli-Matrizen gilt $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}\mathbb{1}_2$. Außerdem erfüllen sie die Lie-Algebra su(2):

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2} \text{ mit } \varepsilon^{123} = 1\,. \tag{1.15}$$

Damit lässt sich erkennen, dass für die $\sigma^\pm$ folgendes gilt:

$$\left\{\frac{\sigma^+}{2}, \frac{\sigma^-}{2}\right\} = \mathbb{1}_2\,. \tag{1.16}$$

Die Anzahl der Generatoren ist gleich drei, was der Dimension der Algebra entspricht. Konvention:

$$d = \frac{\sigma^-}{2},\ d^\dagger = \frac{\sigma^+}{2} \text{ mit } \frac{\sigma^-}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

und

$$N_F = d^\dagger d = \frac{\sigma^+}{2}\frac{\sigma^-}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbb{1} - N_F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

1.2 Superoszillator (SUSY-Oszillator, harmonischer Fall)

Kombiniere den Bose-Oszillator (H_B, N_B, ω_B) mit dem Zwei-Zustandssystem (H_F, N_F, ω_F), so dass $\omega = \omega_B = \omega_F$. Die Operatoren der verschiedenen Systeme vertauschen miteinander; beispielsweise gilt $[a, d^-] = 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \hbar\omega H \text{ mit } H &= H_B \otimes \mathbb{1}_F + \mathbb{1}_B \otimes H_F = \left(N_B + \frac{1}{2}\mathbb{1}_B\right)\otimes\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_B\otimes\left(N_F - \frac{1}{2}\mathbb{1}_F\right) = \\ &= N_B\otimes\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_B\otimes N_F\,.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Die Grundzustände werden also kompensiert. Mit der (2×2)-Darstellung vom Fermi-Teil hat man:

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{1} + a^\dagger a & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^\dagger & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Wir erkennen, dass H diagonal ist und außerdem faktorisiert. Es gilt darüber hinaus $[H, \mathbb{1}\otimes N_F] = 0$ bzw. $[H, N_B \otimes \mathbb{1}] = 0$. Damit sind $n_F \in \{0, 1\}$ bzw. $n_B \equiv n$ gute Quantenzahlen.

$$\varepsilon|n_F\rangle = |\varepsilon - n_F\rangle \otimes |n_F\rangle = |n_B\rangle\otimes|n_F\rangle\,, \quad \text{da } \varepsilon = n_B + n_F\,. \tag{1.21}$$

$$\begin{array}{r|ll}
 & \varepsilon = E/\hbar\omega \quad H|\varepsilon, n_F\rangle = \varepsilon|\varepsilon, n_F\rangle & \\
3 & |3,0\rangle = |3\rangle \otimes |0\rangle & |3,1\rangle = |2\rangle \otimes |1\rangle \\
2 & |2,0\rangle = |2\rangle \otimes |0\rangle & |2,1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \\
1 & |1,0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle & |1,1\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle \\
0 & |0,0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle & \\
 & n_F = 0 & n_F = 1
\end{array}$$

- Die Grundzustandsenergie verschwindet.
- Der Grundzustand bei $\varepsilon = 0$ besitzt keinen Partner.
- Zustände mit $\varepsilon > 0$ treten als Paare auf.

Paare gleicher Energie legen eine Symmetrie nahe. $n_F = 0$ bezeichnen wir nun im folgenden als bosonische Zustände und Zustände mit $n_F = 1$ als fermionische Zustände. Vermutung: Symmetrie bei $\varepsilon > 0$. Die n_F-Zahlen ändern sich um ± 1.

$$Q|\varepsilon, 1\rangle \sim |\varepsilon, 0\rangle \text{ für } \varepsilon = 1, 2, \ldots . \tag{1.22}$$

$$Q \sim a^\dagger \otimes d,\; Q^+ \sim a \otimes d^\dagger . \tag{1.23}$$

Wir schreiben also $Q = ca^\dagger \otimes d$ und $Q^+ = c^* a \otimes d^\dagger$ mit $c, c^* \in \mathbb{C}$. Als Übung kann man zeigen, dass $Q^+|0,0\rangle = 0$, $Q^+|\varepsilon,0\rangle = c^*\sqrt{\varepsilon}|\varepsilon,1\rangle$ mit $\varepsilon = 1, 2, \ldots$. Außerdem kann man $Q^+|\varepsilon,1\rangle = 0$, $Q|\varepsilon,0\rangle = 0$ für $\varepsilon = 0, 1, \ldots$ und $Q|\varepsilon,1\rangle = c\sqrt{\varepsilon}|\varepsilon,0\rangle$ für $\varepsilon = 1, 2, \ldots$ nachweisen. Beispielsweise gilt:

$$a \otimes d^\dagger|\varepsilon,0\rangle = a \otimes d^\dagger|n\rangle \otimes |0\rangle = \sqrt{\varepsilon}|\varepsilon - 1\rangle \otimes |1\rangle = \sqrt{\varepsilon}|\varepsilon,1\rangle . \tag{1.24}$$

Der Grundzustand (Zustand minimaler Energie) liegt bei $\varepsilon = 0$. Er ist Q-, Q^+-„invariant“, was $Q|0,0\rangle = 0 = Q^+|0,0\rangle$ bedeutet. Man sagt auch, dass der Grundzustand „symmetrisch“ bezüglich der Q und Q^+ ist. Es gilt dann auch $\exp(-Q)|0,0\rangle = |0,0\rangle$, was wir später benötigen werden.
Der Statistikoperator (Klein-Operator) ist definiert durch $(-1)^{N_F} = \exp(\mathrm{i}\pi N_F)$. Es gilt hier $N_F^2 = N_F$ (Projektor) mit $n_F \in \{0,1\}$, womit sich $\exp(\mathrm{i}\pi N_F) = \mathbb{1} - 2N_F$ ergibt. Wichtig ist für uns außerdem $W_P = -(-1)^{N_F}$ (Witten-Parität). W_P besitzt die Eigenschaften $W_P^\dagger = W_P$, $W_P^2 = \mathbb{1}$ und $[W_P, H] = 0$. Aus $W_P^2 = \mathbb{1}$ folgt, dass W_P die Eigenwerte $w = \pm 1$ besitzt, nämlich $w = -1$ für $n_F = 0$ und $w = +1$ für $n_F = 1$. (Eigentlich ist $W_P = \mathbb{1} \otimes (-(-1)^{N_F})$.) Darüber hinaus benötigen wir Operatoren O, die statistikändernd (fermionischer Operator, $\mathcal{F}$-Typ) bzw. statistikerhaltend (bosonischer Operator, $\mathcal{B}$-Typ) wirken und für die $\{W_P, O\} = 0$ bzw. $[W_P, O] = 0$ gilt. Als Übung kann man folgendes zeigen:

$$W_P\mathcal{B}|n_F = 0, (w = -1)\rangle = -|w = -1\rangle' \text{ und } \mathcal{B}W_P|n_F = 0, (w = -1)\rangle = -|w = -1\rangle' . \tag{1.25}$$

Darüber hinaus gilt:

$$\mathcal{B}|\text{bosonischer Zustand}\rangle = |\text{bosonischer Zustand}\rangle' , \tag{1.26}$$

$$\mathcal{F}|\text{bosonischer Zustand}\rangle = |\text{fermionischer Zustand}\rangle , \tag{1.27}$$

$$\mathcal{B}|\text{fermionischer Zustand}\rangle = |\text{fermionischer Zustand}\rangle' , \tag{1.28}$$

und

$$\mathcal{F}|\text{fermionischer Zustand}\rangle = |\text{bosonischer Zustand}\rangle . \tag{1.29}$$

Wir interessieren uns nun für den Antikommutator von Q und Q^+, wobei wir $[a,d] = 0 = [a,d^\dagger] = [a^\dagger,d] = [a^\dagger,d^\dagger]$ beachten (wobei die $\otimes$-Zeichen hier unterdrückt sind):

$$\begin{aligned}\{Q,Q^+\} &= |c|^2(a^\dagger d a d^\dagger + a d^\dagger a^\dagger d) = |c|^2(a^\dagger a d d^\dagger + a a^\dagger d^\dagger d) = |c|^2(a^\dagger a(\mathbb{1} - d^\dagger d) + (\mathbb{1} + a^\dagger a)d^\dagger d) = \\ &= |c|^2(a^\dagger a + d^\dagger d) = |c|^2(N_B \otimes \mathbb{1}_F + \mathbb{1}_B \otimes N_F) = |c|^2 H .\end{aligned} \tag{1.30}$$

Als Übung kann man $[Q, Q^+]$ berechnen. Man wird dann schnell feststellen, dass dies nicht zum Ziel führt! Wir wollen nun noch Regeln aufschreiben, wie man mit direkten Produkten rechnet. Sei $(A \otimes B)_{ik,lm} = A_{il} B_{km}$. Dann gilt:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD\,, \tag{1.31}$$

$$[A \otimes B, C \otimes D] = \frac{1}{2}[A, C] \otimes \{B, D\} + \frac{1}{2}\{A, C\} \otimes [B, D]\,, \tag{1.32}$$

$$\{A \otimes B, C \otimes D\} = \frac{1}{2}\{A, C\} \otimes \{B, D\} + \frac{1}{2}[A, C] \otimes [B, D]\,. \tag{1.33}$$

Für die Operatoren Q, Q^+ und W_P gilt weiterhin $\{Q, Q\} = 0$, $\{Q^+, Q^+\} = 0$, $[H, Q] = 0 = [H, Q^+]$, $\{W_P, Q\} = 0$ und $[W_P, H] = 0$, $\{Q, Q^+\} = 2H$. Die Algebra, die man hier verwendet, bezeichnet man auch als $N = 2$ supersymmetrische Algebra (Super-Lie-Algebra). $N = 2$ deshalb, weil man zwei hermitesche fermionische Generatoren zur Verfügung hat:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + \mathrm{i}Q_2) \text{ und } Q^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - \mathrm{i}Q_2)\,, \tag{1.34}$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + Q^+) = Q_1^+ \text{ und } Q_2 = \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(Q - Q^+) = Q_2^+\,. \tag{1.35}$$

In der $N = 1$, $D = 1 + 0$-Supersymmetrie hat man $Q = Q^+$ bzw. $2Q^2 = H$. $\mathcal{H}_P$ (Pauli) beschreibt nichtrelativistische geladene Teilchen (e, m) im Magnetfeld $\vec{B}$.

$$\mathcal{H}_P = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{B} \cdot \vec{\sigma};\; Q = \frac{1}{\sqrt{4m}}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) \cdot \vec{\sigma} \text{ mit } g = 2\,. \tag{1.36}$$

So lässt sich dieses Modell mit $N = 1$-Supersymmetrie beschreiben. $N = 2$-Supersymmetrie hat man im zweidimensionalen Modell mit $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$.
Betrachten wir folgendes Beispiel für eine assoziative (nicht kommutative) graduierte Algebra vom Z_2-Typ:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in M_{p,q}(\mathbb{C}) : \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{\text{Grad } 0} \text{ und } \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Grad } 1}\,. \tag{1.37}$$

Der Block A sei eine $p \times p$-Matrix und der Block D eine $q \times q$-Matrix.

1.3 $D = 1$, $N = 2$-Supersymmetrie (Supersymmetrische Quantenmechanik)

1.3.1 Eigenschaften

Hier gilt $\{Q, Q^+\} = -2H$, $[Q, H] = 0 = [Q^+, H]$ und $Q^2 = 0 = {Q^+}^2$.

a) Neben dem Kommutator [,] wird auch der Antikommutator $\{,\}$ verwendet (nach P. Jordan).

In einer Z_2-graduierten Algebra ($0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$) gibt es zwei Typen von Generatoren, nämlich solche vom $\mathcal{B}$- und vom $\mathcal{F}$-Typ. Objekte in $V = V_0 \oplus V_1$ ($\mathbb{C}$-, $\mathbb{R}$-Vektorraum, nur $\vec{\sigma}$ gemeinsam) bezeichnet man als homogene Elemente mit $\mathrm{Grad}(v_0) = 0$ (gerade), wenn sie in V_0 liegen bzw. $\mathrm{Grad}(v_1) = 1$ (ungerade), wenn sie in V_1 enthalten sind. Produkte in einer graduierten Algebra sind distributiv.

$$v_0 v_0' = v_0'',\; v_0 v_1 = v_1'',\; v_1 v_0 = v_1'',\; v_1 v_1' = v_0'' \tag{1.38}$$

Die Grade von homogenen Elementen werden beim Multiplizieren mod 2 addiert. Die Multiplikation ist außerdem assoziativ (Z_2-graduierte Algebra).

Eine Lie-Algebra ist ein Vektorraum mit einer Verknüpfung [,] (Lieklammer), wobei folgende Eigenschaften gelten:

a) $[v, w] = -[w, v]$.

b) $\circlearrowright\!\!\!\!\sum [v, [w, u]] = 0$. (zyklische Summe)

Im Fall einer Algebra definieren wir $[A, B] := AB - BA$. Betrachten wir nun die Z_2-graduierte Lie-Algebra $L = L_0 \oplus L_1$ und führen eine Super-Lieklammer ein:

i) $[A, B\} = (-1)^{ab}[B, A\}$.
A und B sind homogene Elemente mit $\mathrm{Grad}(A) = a \in \{0, 1\}$ bzw. $\mathrm{Grad}(B) = b \in \{0, 1\}$.

ii) $\sum [[A, B], C] := [[A, B\}, C\} + (-1)^{a(b+c)}[[B, C\}, A\} + (-1)^{c(a+b)}[[C, A\}, B\} = 0$. (Vorzeichen je nach Vertauschungen relativ zum ersten Term)
Hier gilt $[A, B\} := AB - (-1)^{ab}BA$ (verallgemeinerter Kommutator).

b) „$Q = \sqrt{H}$“, „$H \geq 0$“

$$H = \frac{1}{2}\{Q, Q^+\},\ \langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|QQ^+|\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle\psi|Q^+Q|\psi\rangle = \frac{1}{2} \parallel |Q^+\psi\rangle \parallel^2 + \frac{1}{2} \parallel |Q\psi\rangle \parallel^2 = 0\,. \tag{1.39}$$

$$\Leftrightarrow Q^+|\psi\rangle = 0 = Q|\psi\rangle\,. \tag{1.40}$$

c) Parameterverringerung ($\omega_B = \omega = \omega_F$)

d) Energieentartung: Mitglieder eines supersymmetrischen Multipletts haben dieselbe Energie. Q und Q^+ vertauscht mit H. ($\varepsilon > 0$-Zustände sind gepaart.)

e) Grundzustandsenergien kompensieren sich (wegen $N_B + 1/2$, $N_F - 1/2$).

f) Gruppenmultiplikationsgesetz:
P_a erzeugt in M_4 eine Translation, also $\exp(\mathrm{i}c^a(\mathrm{i}\partial_a))f(x) = f(x - c)$. Wir führen Grassmann-Variablen ein, nämlich ξ für Q und $\overline{\xi} = \xi^*$ für Q^+. ξ und $\overline{\xi}$ sind antikommutierend; es gilt also $\{\xi, \overline{\xi}\} = 0$ und $\xi^2 = 0 = \overline{\xi}^2$. Sie vertauschen jedoch mit H und gewöhnlichen Zahlen. Mit $\xi Q = -Q\xi$ und $\xi H = H\xi$ ergibt sich:

$$\xi\{Q, Q^+\}\overline{\xi} = \xi(2H)\overline{\xi} = 2\xi\overline{\xi}H = 3QQ^+\overline{\xi} + \xi Q^+Q\overline{\xi} = 3QQ^+\overline{\xi} - Q^+\overline{\xi}\xi Q = [\xi Q, Q^+\overline{\xi}]\,. \tag{1.41}$$

Aus $\{Q, Q\} = 0$ ergibt sich $[\xi Q, \xi' Q] = 0$. Weiterhin gilt $[Q^+\overline{\xi}, Q^+\overline{\xi}'] = 0$, $[cH, \xi Q] = 0 = [cH, Q^+\overline{\xi}]$.

$$g(\xi, \overline{\xi}, c) = \exp(\mathrm{i}(\xi Q + Q^+\overline{\xi} + cH))\,. \tag{1.42}$$

Auf dem zweiten Übungsblatt untersuchen wir, ob $g(\xi, \overline{\xi}, c)g(\xi', \overline{\xi}', c') = g(\xi'', \overline{\xi}'', c'')$ gilt. (ξ und $\overline{\xi}$ sind hierbei a-Zahlen (antikommutierend) und c ist eine c-Zahl (kommutierend).) Die Behauptung ist folgende:

$$\xi'' = \xi + \xi',\ \overline{\xi}'' = \overline{\xi} + \overline{\xi}' \text{ und } c'' = c + c' + \mathrm{i}(\xi\overline{\xi}' - \xi'\overline{\xi}) = c + c' - 2\mathrm{Im}(\xi\overline{\xi}') \tag{1.43}$$

c'' ist auch wieder eine c-Zahl. Beim komplex Konjugieren wird die Reihenfolge umgedreht.

1.3.2 Bemerkung: Grassmannalgebra

i) Zunächst wollen wir eine endlichdimensionale ($N < \infty$) Algebra $\mathbb{C}\mathcal{G}_N$ bzw. $\mathbb{R}\mathcal{G}_N$ betrachten. Die Algebra wird erzeugt von linear unabhängigen Vektorraumelementen ($\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$) ζ^i für $i = 1, \ldots, N$.

$$\zeta^i\zeta^j + \zeta^j\zeta^i = 0 \text{ und } (\zeta^i)^2 = 0 \text{ wobei } i \text{ fest und } 1 \in \mathbb{C} \text{ dabei}\,. \tag{1.44}$$

Wir benötigen 2^N unabhängige Produkte, nämlich 1, ζ^i, $\zeta^i\zeta^j$ für $i < j$, $\zeta^{i_1}\zeta^{i_2}\zeta^{i_3}$ für $i_1 < i_2 < i_3, \ldots,$ $\zeta^{i_1}\ldots\zeta^{i_N}$ für $i_1 < \ldots < i_N$. Ein beliebiges Element ξ wird dann erzeugt mittels:

$$\xi = \alpha 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} \alpha_{k_1,\ldots,i_k}\zeta^{i_1}\ldots\zeta^{i_k} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{C}\,. \tag{1.45}$$

Die Multiplikation ist assoziativ und hat die 1 als neutrales Element: $1\zeta^i = \zeta^i 1 = \zeta^i$. Z_2-Graduierung: $V = V_0 \oplus V_1$

- $\xi \in V_0$: k gerade, gerades Element in $\mathcal{G}_N$: $\mathcal{G}_N^0$
- $\xi \in V_1$: k ungerade, ungerades Element in $\mathcal{G}_N$: $\mathcal{G}_N^1$

Die ξ sind homogene Elemente mit definiertem Grad, wobei gilt $\mathrm{Grad}(\xi_1\xi_2) = (\mathrm{Grad}(\xi_1) + \mathrm{Grad}(\xi_2))\mathrm{mod}2$. Homogene Elemente sind verallgemeinert „kommutativ", nämlich $\xi_1\xi_2 = (-1)^{\mathrm{Grad}(\xi_1)\mathrm{Grad}(\xi_2)}\xi_2\xi_1$. Ein Beispiel für eine $N = 1$-Grassmannalgebra $\mathbb{R}\mathcal{G}_{N=1}$ sind die sogenannten Study-Zahlen (1900) $z = x1 + y\epsilon$ mit $\epsilon^2 = 0$ und x, $y \in \mathbb{R}$.

ii) Nun kommen wir zur unendlich dimensionalen ($N \mapsto \infty$) Grassmann-Algebra $\mathbb{C}\mathcal{G}$ bzw. $\mathbb{R}\mathcal{G}_N$.

$$\zeta^i\zeta^j + \zeta^j\zeta^i = 0 \text{ für } i = 1, \ldots \infty \text{ und } j = 1, \ldots, \infty\,, \tag{1.46}$$

$$\mathcal{Z} = \alpha 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\zeta^{i_1}\ldots\zeta^{i_k}\,. \tag{1.47}$$

$\mathcal{Z}$ bezeichnet man auch als **Superzahl**. Eine Superzahl $\mathcal{Z}$ lässt sich zerlegen, nämlich $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_c + \mathcal{Z}_a$, wobei $\mathcal{Z}_c$ eine c-Zahl mit geradem k und $\mathcal{Z}_a$ eine a-Zahl mit ungeradem k ist. ($\mathbb{C}_a = \mathbb{C}\mathcal{G}^0$, $\mathbb{C}\mathcal{G}^1 = \mathbb{C}_a$) Für a- und c-Zahlen gilt $\mathbb{C}_c\mathbb{C}_c = \mathbb{C}_c$, $\mathbb{C}_c\mathbb{C}_a = \mathbb{C}_a$, $\mathbb{C}_a\mathbb{C}_c = \mathbb{C}_a$ und $\mathbb{C}_a\mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}_c$. $\mathbb{C}_c$ ist eine Unteralgebra; $\mathbb{C}_a$ ist ein Unterraum, jedoch keine Unteralgebra. Eine andere Zerlegung ist $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_L + \mathcal{Z}_S$, wobei $\mathcal{Z}_L = 1\alpha$ mit $k = 0$ und $\mathcal{Z}_S$ mit $k \geq 1$ (Rest). (Hierbei steht das Subskript „L" für Leib und das Subskript „S" für Seele.)

Was uns jetzt interessiert, ist eine „$*$"-Operation. Diese führt man ein, indem die Koeffizienten α, $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ komplex konjugiert werden und beim „Sternen" die Reihenfolge umgekehrt wird. Hierbei gilt außerdem $(\zeta^i)^* = \zeta^i$.

$$\mathcal{Z}^* = \alpha^*1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\frac{1}{k!}\alpha^*_{i_1,\ldots,i_k}\zeta^{i_k}\ldots\zeta^{i_1} \text{ wobei } \zeta^{i_k}\ldots\zeta^{i_1} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\zeta^{i_1}\ldots\zeta^{i_k}\,. \tag{1.48}$$

Die Menge der reellen Superzahlen in $\mathbb{C}_c$ bezeichnen wir mit $\mathbb{R}_c$. „Kleine" Superzahlen (infinitesimale Transformationen):

$$\parallel \mathcal{Z} \parallel^2 = |Z_L|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k}|\alpha_{i_1\ldots i_k}|^2 \text{ mit } \parallel \zeta^i \parallel = 1\,. \tag{1.49}$$

Bryce de Witt hat den Begriff des „superlinearen Raumes" eingeführt. Die Idee dahinter ist die „skalare Multiplikation" der Superzahlen $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, … (kein Körper!). $\mathcal{Z}^{-1}$ ist nur definiert, falls $\mathcal{Z}_L \neq 0$:

$$\mathcal{Z}^{-1} = \mathcal{Z}_L^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\mathcal{Z}_L^{-1}\mathcal{Z}_S\right)^k\,. \tag{1.50}$$

Wir definieren nun Links- und Rechtsmultiplikation auf einem Raum $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1$ mit $\vec{X} \in \mathcal{L}$, $\vec{X}_0 \in \mathcal{L}_0$ und $\vec{X}_1 \in \mathcal{L}_1$. Elemente in $\mathcal{L}_0$ haben Grad 0 und Elemente in $\mathcal{L}_1$ Grad 1. Hierbei gilt nun:

$$(\widehat{\alpha}\vec{X})\widehat{\beta} = \widehat{\alpha}(\vec{X}\widehat{\beta}),\ \widehat{\alpha}\vec{X}_0 = \vec{X}_0\widehat{\alpha},\ \widehat{\alpha}_a\vec{X}_1 = -\vec{X}_1\widehat{\alpha}_a\,, \tag{1.51}$$

$$\widehat{\alpha}\vec{X} = (-1)^{\mathrm{Grad}(\widehat{\alpha})\mathrm{Grad}(\vec{X})}\vec{X}\widehat{\alpha}\,. \tag{1.52}$$

Dies ist natürlich nur dann definiert, wenn die Grade definiert sind. Kommen wir nun noch zur „$*$"-Operation, welche folgende Eigenschaften aufweist:

$$(\vec{X} + \vec{Y})^* = \vec{X}^* + \vec{Y}^* \text{ und } (\widehat{\alpha}\vec{X})^* = \vec{X}^*\widehat{\alpha}^*\,. \tag{1.53}$$

g) Exakte und spontan gebrochene Supersymmetrie

i) Exakter Supersymmetriemodus (Weyl-Wigner-Modus)

Der Grundzustand sei der Zustand mit minimaler Energie. (In unseren bisherigen supersymmetrischen Modellen gilt $\varepsilon \geq 0$.) $|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle$ ist symmetrisch. Wir definieren:

$$\boxed{Q|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle = 0 = Q^+|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle\,.} \tag{1.54}$$

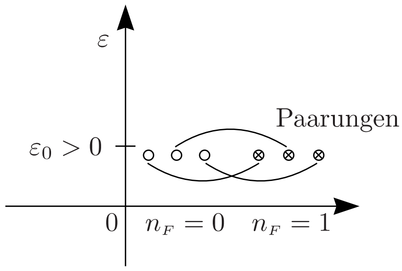
Hieraus ergibt sich dann:

$$0 = (QQ^+ + Q^+Q)|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle = 2H|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle = 2\varepsilon_0|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle\,. \tag{1.55}$$

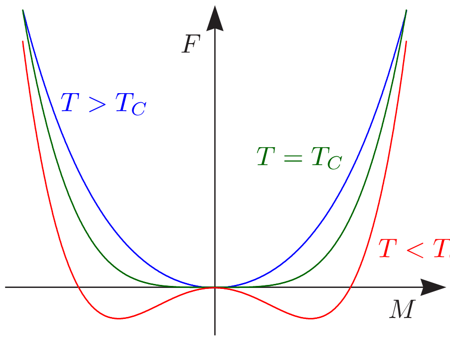
Damit folgt $\varepsilon_0 = 0$ für den Grundzustand $|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle$ (wie beim freien Superoszillator). Hiermit gibt es auch keinen Superpartner zu $|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle$ bei $\varepsilon_0 = 0$ (Singulett). Für den Singulett-Zustand $|0,0\rangle$ gilt $n_{\scriptscriptstyle F} = 0$; diesen hatten wir als „bosonisch“ bezeichnet. Gibt es umgekehrt einen Zustand bei $\varepsilon_0 = 0$, so gilt:

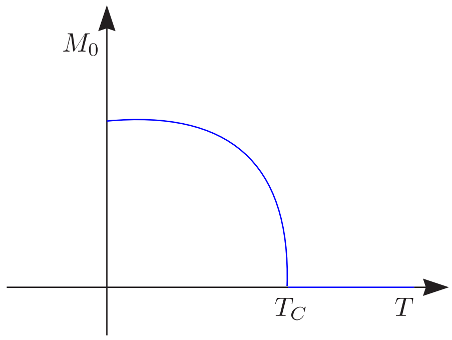
$$H|\psi_0\rangle = 0 \xrightarrow[\text{wie „}H \geq 0\text{“}]{} Q|\psi_0\rangle = 0 = Q^+|\psi_0\rangle\,. \tag{1.56}$$

Die Supersymmetrie ist exakt im Wigner-Weyl-Modus genau dann, wenn mindestens ein Zustand mit $\varepsilon_0 = 0$ existiert, welcher automatisch der Grundzustand $|\psi_0\rangle$ ist. Falls es keinen Zustand bei $\varepsilon = 0$ gibt, folgt, dass die Supersymmetrie nicht exakt (sondern gebrochen) ist.



– (Spontan) gebrochene Supersymmetrie (Nambu-Goldstone ($\sim$ 1960))
Das wichtige an diesem Modus ist, dass der Grundzustand nicht symmetrisch ist. Es gilt also $Q|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle \neq 0$. Auch gilt dies für die hermiteschen Operatoren Q_1 und Q_2, nämlich beispielsweise $Q_1|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle \neq 0$. (Für kontinuierliche Symmetrien gilt das sogenannte Goldstone-Theorem: Es gibt masselose Feldanregungen. Spontane Symmetriebrechung tritt auch bei Ferromagneten auf (Phasenübergänge 2.Ordnung).)





Die $|\psi_{\mathrm{GZ}}\rangle$ treten immer paarweise auf ($\varepsilon_0 > 0$, $n_{\scriptscriptstyle F} = 1$, $n_{\scriptscriptstyle F} = 0$).

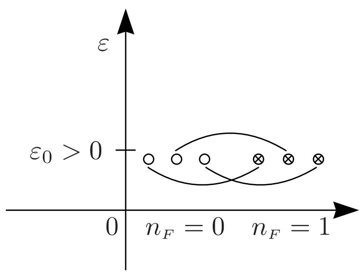
$$W_P = -(-1)^{N_F}\,, \quad w_p \in \begin{cases} +1 & \text{für} \quad n_F = 1\,, \quad (\mathcal{F}) \\ -1 & \text{für} \quad n_F = 0\,, \quad (\mathcal{B}) \end{cases} \,. \tag{1.57}$$

Außerdem definieren wir die Wittenzahl $\omega = n_{\mathcal{F}}(\varepsilon = 0) - n_{\mathcal{B}}(\varepsilon = 0)$. Die Zahl sagt uns etwas über die Exaktheit der Supersymmetrie. Ist $\omega \neq 0$, so ist die Supersymmetrie nach obigem Satz exakt. Für $\omega = 0$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

α) $n_{\mathcal{B}}(\varepsilon = 0) = n_{\mathcal{F}}(\varepsilon = 0) \neq 0 \Rightarrow$ Supersymmetrie ist exakt (nach Satz)

β) $n_{\mathcal{B}}(\varepsilon = 0) = 0 = n_{\mathcal{F}}(\varepsilon = 0) \Rightarrow$ Supersymmetrie ist gebrochen (Nambu-Goldstone-Modus)

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(W_P) &:= \sum_{\text{Zustände } \varepsilon} \left(\langle\varepsilon,0|W_P|\varepsilon,0\rangle + \langle\varepsilon,1|W_P|\varepsilon,1\rangle\right) = \sum_{\text{Zustände } \varepsilon} \left(-n_{\mathcal{B}}(\varepsilon) + n_{\mathcal{F}}(\varepsilon)\right) \overset{\substack{\text{Paarung}\\ \text{bei } \varepsilon>0}}{=} \\ &= n_{\mathcal{F}}(\varepsilon = 0) - n_{\mathcal{B}}(\varepsilon = 0) = \omega\,. \end{aligned} \tag{1.58}$$



1.3.3 Superraumdarstellung von $D=1+0$, $N=2$-Supersymmetrie

Dabei handelt es sich um eine Methode, um supersymmetrische **Wirkungen** zu finden. (Lagrangedichten sind nur bis auf Divergenzterme invariant.)

$$g(\xi,\overline{\xi},c)g(\xi',\overline{\xi}',c')=g(\xi'',\overline{\xi}'',c'')\,. \tag{1.59}$$

Jetzt versuchen wir Q, Q^+ und H auf einem erweiterten „Raum" t (reell, steht für Generator H), θ (Q) und $\overline{\theta}=\theta^*$ (Q^+) darzustellen. Man bezeichnet diesen Raum dann als Superraum. Entsprechend zu den hermiteschen Q_1 und Q_2 kann man auch θ_1 und θ_2, die beide reell sind, einführen. Als Abkürzung werden wir im folgenden $z=(t,\theta,\overline{\theta})$ verwenden. Mittels einer Taylorentwicklung kann man zeigen, dass folgendes gilt:

$$\exp\left(\mathrm{i}c\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\right)f(t)\equiv\exp(\mathrm{i}c\widehat{H})=f(t-c)\,. \tag{1.60}$$

Formal schreibt man einen $N=2$, $D=1$-Superraum als $\mathbb{R}^{1,2}=\mathbb{R}^1_c\times\mathbb{R}^2_a$. Ableitungen werden wir folgendermaßen definieren:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\theta=1,\ \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\theta=0,\ \frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\theta}=0 \text{ und } \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\overline{\theta}=-1\,. \tag{1.61}$$

θ und $\overline{\theta}$ werden als unabhängig voneinander betrachtet (analog zu den z und $\overline{z}$ bei den komplexen Zahlen). Die Ableitungen bezüglich θ und $\overline{\theta}$ werden als antikommutierend betrachtet. Beispielsweise gilt:

$$1=1^*=\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\theta\right)^*=\overline{\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^*=-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^*\overline{\theta}=-\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\overline{\theta} \text{ wobei } \overline{\theta}=\theta^*\,. \tag{1.62}$$

(Wir möchten immer nur mit Ableitungen arbeiten, die nach rechts wirken. Beim „Sternen" die Reihenfolge umkehren!) Je nach Statistik definieren wir die Produktregel durch:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(AB)=\left(\frac{\partial}{\partial\theta}A\right)B+(-1)^aA\left(\frac{\partial}{\partial\theta}B\right)\,. \tag{1.63}$$

Auf dem dritten Aufgabenblatt betrachten wir:

$$f(\theta)=A+\theta\psi \text{ mit } f:\mathcal{G}_a\to\mathcal{G}_c,\theta\mapsto f(\theta) \text{ und } A\in\mathcal{G}_c;\ \theta,\ \psi\in\mathcal{G}_a;\ \theta\psi\in\mathcal{G}_c\,, \tag{1.64}$$

$$g(\theta)=\psi+\theta A \text{ mit } g:\mathcal{G}_a\to\mathcal{G}_a,\theta\mapsto g(\theta)\,. \tag{1.65}$$

Superfelder: $\phi(z)=\phi(t,\theta,\overline{\theta})$ ($\mathbb{R}^{1/2}\mapsto\mathcal{G}_c$ oder $\mathcal{G}_a$)

$$\mathbb{R}_c\ni t=t_L+t_S \text{ mit } t_L\in\mathbb{R},\ f(t):\mathbb{R}_c\mapsto\mathcal{G}_c \text{ aus } \widetilde{f}:\left\{\begin{array}{l}\mathbb{C}\to\mathbb{C}(\mathbb{R})\\ t\mapsto f(t)\end{array}\right.\,. \tag{1.66}$$

Man erklärt $f(t_L+t_S)$ durch eine Taylorreihe

$$f(t_L+t_S)=\widetilde{f}(t_L)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\widetilde{f}^{(n)}(t_L)\cdot(t_S)^n\,, \tag{1.67}$$

wobei man annimmt, dass $(t_S)^n=0$, wenn n groß genug ist.

$$\phi(t,\theta,\overline{\theta})=f(t)+\theta\psi(t)+\overline{\chi}(t)\overline{\theta}+\theta\overline{\theta}g(t)+\dots\,, \tag{1.68}$$

mit Graden der Komponenten je nach Grad von ϕ.

a) Darstellung auf Superraum ($N=2$, $D=1+0$)

$$\widehat{H}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},\ \widehat{Q}=\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathrm{i}\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right) \text{ und } \widehat{Q}^+=\mathrm{i}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}-\mathrm{i}\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\,. \tag{1.69}$$

Wir überprüfen nun, ob diese Definitionen sinnvoll sind:

$$\widehat{Q}\widehat{Q}^+=-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\mathrm{i}\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\mathrm{i}\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\,, \tag{1.70}$$

$$\widehat{Q}^{+}\widehat{Q} = -\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}} - \mathrm{i}\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathrm{i}\overline{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right) . \tag{1.71}$$

Rechnet man dies aus, so ergibt sich:

$$\{\widehat{Q}, \widehat{Q}^{+}\} = 2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} = 2\widehat{H} , \tag{1.72}$$

$$\{Q, Q\} = 0 \text{ und } \{Q^{+}, Q^{+}\} = 0 . \tag{1.73}$$

b) Superfelder

Wir verwenden die Bezeichnung $\phi(z) = \phi(t, \theta, \overline{\theta})$, wobei ϕ folgende Eigenschaften besitzen soll:

i) ϕ soll einen definierten Grad besitzen.

ii) ϕ soll sich nach θ und $\overline{\theta}$ entwickeln lassen.

$$\phi(z) = f(t) + \theta\psi(t) + \overline{\chi}(t)\overline{\theta} + \theta\overline{\theta}g(t) \tag{1.74}$$

ϕ kann ein komplexes oder reelles Superfeld sein.

iii) $\phi'(z') = \phi(z)$ mit $t' = t'(t, \theta, \overline{\theta})$, $\theta' = \theta'(t, \theta, \overline{\theta})$ und $\overline{\theta}' = \overline{\theta}'(t, \theta, \overline{\theta})$ als Umrechungsvorschrift. „Infinitesimale“ Transformationen werden beschrieben durch $\delta\phi = \phi'(z) - \phi(z)$ (Formvariation).

Im folgenden bezeichnen wir ein quantisiertes ϕ als Φ. Eine endliche Transformation wird beschrieben durch $\Phi(t', \theta', \overline{\theta}') = \exp(\mathrm{i}G)\Phi(t, \theta, \overline{\theta})\exp(-\mathrm{i}G) = \Phi + \mathrm{i}[G, \Phi] + \ldots$ mit $G(\xi, \overline{\xi}, c) = \xi Q + Q^{+}\overline{\xi} + cH$. Auf Blatt 3 in Aufgaben 6, 7 zeigen wir, dass $\mathrm{i}[G, \Phi] = \Delta\Phi = \Phi(z') - \Phi(z)$ gilt.

$$\widehat{\delta}\Phi := \Phi'(z') - \Phi(z) = 0 = \delta\Phi + \Delta\Phi \text{ (in erster Ordnung)} , \tag{1.75}$$

$$\delta\Phi = -\Delta\Phi = -\mathrm{i}[G(\xi, \overline{\xi}, c), \Phi] = \mathrm{i}\varepsilon\widehat{G}(\xi, \overline{\xi}, c)\Phi(z) = -\left[(c + \mathrm{i}(\xi\overline{\theta} - \theta\overline{\xi}))\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial\theta} - \overline{\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}}\right]\Phi(z) . \tag{1.76}$$

Es gilt $z' = z'(z) = z + w$, $\Delta\Phi = -\delta\Phi$, $t' = t + c + \mathrm{i}(\xi\overline{\theta} - \theta\overline{\xi})$, $\theta' = \theta + \xi$ und $\overline{\theta}' = \overline{\theta} + \overline{\xi}$. (Bemerkung: Durch Integration kann gezeigt werden, dass die endlichen Transformationen ebenso aussehen.) Unquantisiert:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{1,2} \to \mathcal{G}_c,\, \mathcal{G}_a \\ z \mapsto \phi(z) \end{cases} . \tag{1.77}$$

c) Komponentenfeldtransformationen:

Aus $\phi(z) = f(t) + \theta\psi(t) + \overline{\chi}(t)\overline{\theta} + \theta\overline{\theta}g(t)$ ergibt sich einerseits (δ ist eine Grad-0-Operation)

$$\delta\phi = \delta f + \theta\delta\psi(t) + \delta\overline{\chi}\overline{\theta} + \theta\overline{\theta}\delta g \text{ mit } \delta f = f'(t) - f(t)\text{etc.} \tag{1.78}$$

und andererseits $\delta\phi = \mathrm{i}\widehat{G}(\xi, \overline{\xi}, c)\phi(z)$. Durch Koeffizientenvergleich mit θ und $\overline{\theta}$ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\delta f = -(c\dot{f} + \xi\psi + \overline{\chi}\overline{\xi}),\ \delta\psi = -(c\dot{\psi} + \overline{\xi}(g - \mathrm{i}\dot{f})) \text{ und } \delta\overline{\chi} = -(c\dot{\overline{\chi}} + (\mathrm{i}\dot{f} + g)\xi) \tag{1.79}$$

,

$$\delta g = -(c\dot{g} - \mathrm{i}\xi\dot{\psi} + \mathrm{i}\dot{\overline{\chi}}\overline{\xi}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(cg - \mathrm{i}\xi\psi + \mathrm{i}\overline{\chi}\overline{\xi}) . \tag{1.80}$$

Man kann dies deswegen so schreiben, weil die Parameter c, ξ und $\overline{\xi}$ nicht von t abhängen (ungeeichte Supersymmetrie). Die Felder bilden ein Supersymmetrie-Multiplett, wobei $g(t)$, $f(t)$ denselben Grad und ψ, $\overline{\chi}$ den komplementären Grad besitzen.

Um die Theorie des Superoszillators zu formulieren, verwenden wir ein Superfeld $\phi^* = \phi$ vom Grad 0, $q(t) = q^*(t)$, $g \equiv F = F^*$ und $\overline{\chi} = \overline{\psi} = \psi^*$. (Dies ist ein (2—2)-Multiplett.) Die Frage ist, ob diese Einschränkung mit den obigen Transformationen verträglich ist. Übung:

$$\phi(z) = \phi^*(z) = q(t) + \theta\psi(t) + \overline{\psi}\,\overline{\theta} + \theta\overline{\theta}F(t) \text{ und } \delta q = -(c\dot{q} + \xi\psi + \overline{\psi}\,\overline{\xi},\ \delta\psi = -(c\dot{\psi} + \overline{\xi}(F - \mathrm{i}q^*)) , \tag{1.81}$$

$$\delta F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(cF - \mathrm{i}\xi\psi + \mathrm{i}\overline{\psi}\,\overline{\xi})) . \tag{1.82}$$

Später werden wir t in $t_L \in \mathbb{R}$, wie auch $q(t) \mapsto q(t_L)$ überführen, um eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu erhalten. Dasselbe müssen wir für die $\psi(t)$ machen. $\psi(t_L)$ bleibt uns erhalten.

d) Regeln zur Kombination von Superfeldern

i) Superfelder ϕ_1 und ϕ_2 können addiert werden, wenn der Grad der einzelnen Felder derselbe ist.

ii) Superfelder können sowohl mit Superzahlen als auch mit c- und a-Zahlen multipliziert werden.

iii) Man kann Produkte ϕ^n von Superfeldern bilden, wobei $\delta\phi^n = n\phi^{n-1}\delta\phi$ nur für Superfelder vom Grad 0 gilt.

iv) Die Ableitung $(\partial/\partial t)\phi$ eines Superfeldes ist wieder ein Superfeld. Dies kommt daher, weil keine explizite Zeitabhängigkeit in der Transformation steckt. $(\partial/\partial\theta)\phi$ ist jedoch kein Superfeld, da θ explizit in der Transformation auftaucht. (Man bezeichnet die Ableitung dann als nicht kovariant.)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, \widehat{Q}\right] = 0 = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \widehat{Q}^\dagger\right], \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}, \widehat{H}\right] = 0\,. \tag{1.83}$$

v) Mit ϕ ist auch ϕ^* wieder ein Superfeld.

e) Supersymmetrie-kovariante Ableitungen

Wir stellen die Forderungen $\{D, \widehat{Q}^+\} = 0 = \{D, \widehat{Q}\}$, $\{\overline{D}, \widehat{Q}\} = 0 = \{\overline{D}, \widehat{Q}^+\}$ und $[D, \widehat{H}] = 0 = [\overline{D}, \widehat{H}]$ an unsere kovarianten Ableitungen. Dies gilt für ∂_t, also ist dies eine kovariante Ableitung. Es ist jedoch

$$\{\partial_\theta, \widehat{Q}^+\} = \{\partial_\theta, \mathrm{i}(\partial_{\overline{\theta}} - \mathrm{i}\theta\partial_t)\} = \partial_t\,. \tag{1.84}$$

Deshalb versuchen wir den Ansatz $D = \partial_\theta + \varepsilon\overline{\theta}\partial_t$ mit $\varepsilon \in \mathbb{C}$ als kovariante Ableitung.

$$\{\varepsilon\overline{\theta}\partial_t, \widehat{Q}^+\} = \varepsilon\mathrm{i}\partial_{\overline{\theta}}(\overline{\theta}\partial_t) = -\mathrm{i}\varepsilon\partial_t \Rightarrow \varepsilon = -\mathrm{i}\,. \tag{1.85}$$

Damit ergibt sich $D = \partial_\theta - \mathrm{i}\overline{\theta}\partial_t$ als kovariante Ableitung. Analog ergibt sich $\overline{D} = \partial_{\overline{\theta}} + \mathrm{i}\theta\partial_t$. Die Algebra dieser kovarianten Ableitungen ist $D^2 = 0 = \overline{D}^2$ und $\{D, \overline{D}\} = 2\mathrm{i}\partial_t$ (analog zu $\{\widehat{Q}, \widehat{Q}^+\} = 2\widehat{H} = 2\mathrm{i}\partial_t$). Als Übung kann man $(Df)^*$ sowie $(\{D, \overline{D}\}f)^*$ mit $f = f^*$ berechnen.

1.4 Anharmonischer Superoszillator, $D = 1 + 0$, $N = 2$

1.4.1 SUSY-invariante Wirkungen im Superraum

Was wir benötigen, ist ein dimensionsloses $q(t)$ (mit $L \equiv \sqrt{\hbar/m\omega_B}$), Impulse $p(t)$ und eine dimensionslose Zeit, nämlich $t = \widehat{t}\omega_B$. Die Lagrangefunktion ausgedrückt in diesen Größen lautet $L(t) = (1/2)\dot{q}^2 - (1/2)q^2$, wobei der kinetische Term durch $(1/2)\dot{q}^2$ und der potentielle durch $(1/2)q^2$ gegeben ist. Die dimensionslose Wirkung ist gegeben durch:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t) \tag{1.86}$$

Dies soll nun supersymmetrisiert werden. Wir suchen also ein Superfeld $\phi(t, \theta, \overline{\theta})$ mit t, θ, $\overline{\theta} \in \mathcal{Z}$, wobei wir uns zunächst mit einem reellen Superfeld (kovariante Einschränkung, verträglich mit Supersymmetrie) begnügen, also $\phi(t, \theta, \overline{\theta}) = \phi^*(t, \theta, \overline{\theta})$. Für ein Superfeld vom Grad 0 machen wir folgenden Ansatz:

$$\phi(z) = q(t) + \theta\psi(t) + \overline{\psi}(t)\overline{\theta} + \theta\overline{\theta}F \text{ mit } q = q^*,\ \overline{\psi} = \psi^* \text{ und } F = F^*\,. \tag{1.87}$$

Die Idee ist nun, ein reelles Superfeld $L(z)$ vom Grad 0 (also bosonisch) einzuführen in Analogie zur reellen Lagrangefunktion. Wir wählen die höchste Komponente – was symbolisiert wird durch $L(t) = L(z)|_{\theta\overline{\theta}}$ – weil diese unter SUSY in eine totale Raum-Zeitableitung transformiert. Dies ist hinreichend, um eine supersymmetrische Wirkung zu finden.

$$\delta L(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(c, \xi, \overline{\xi}; \text{Komponentenfelder}))\,. \tag{1.88}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(z)|_{\theta\overline{\theta}}\,. \tag{1.89}$$

Im Prinzip muss man noch die t-Variable reell machen: $t \mapsto t_L \in \mathbb{R}$. Im t-Integral tragen Seelenanteile nicht bei.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \delta L(t) = -[f(c, \xi, \overline{\xi}, \text{Komponentenfelder})]^{t_2} t_{t_1}\,. \tag{1.90}$$

Für das Wirkungsprinzip spielen jedoch die Randterme keine Rolle. Aus $\delta S = 0$ ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen. Man versucht nun, die Zeitableitung geschickt ins Spiel zu bringen, dadurch dass man die kovariante Ableitung untersucht (Grad 1):

$$D\phi = (\partial_\theta - \mathrm{i}\overline{\theta}\partial_t)\phi = \psi(t) + \overline{\theta}(F - \mathrm{i}\dot{q}) + \theta\overline{\theta}(\mathrm{i}\dot{\psi})\,. \tag{1.91}$$

(Als Übung kann man die supersymmetrie-verträgliche Einschränkung $D\phi = 0$ untersuchen. Aus $\phi = \phi^*$ folgt $\phi(z) = \text{const.}$, also das triviale Untermultiplett.)

$$\overline{D}\phi = \overline{\psi}(t) + (F + \mathrm{i}\dot{q})\theta + \theta\overline{\theta}(-\mathrm{i}\dot{\overline{\psi}})\,. \tag{1.92}$$

Man erhält nun den sogenannten superkinetischen Anteil der Lagrangefunktion:

$$L_{\text{s.kin}}(z) = \frac{1}{2}\overline{D}\phi D\phi = \ldots + \frac{1}{2}\theta\overline{\theta}\left(\overline{\psi}\mathrm{i}\dot{\psi} - \mathrm{i}\dot{\overline{\psi}}\psi + |F + \mathrm{i}\dot{q}|^2\right)\,, \tag{1.93}$$

$$L_{\text{s.kin}}(z)|_{\theta\overline{\theta}} = L_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 + \mathrm{i}\overline{\psi}\dot{\psi} - \mathrm{i}\dot{\overline{\psi}}\psi + F^2\right)\,. \tag{1.94}$$

Dies ist eine supersymmetrische Verallgemeinerung des kinetischen Terms des Oszillators. Später werden wir zu reellem t übergehen. Es kommt keine t-Ableitung von F vor (SUSY via Superfeldern, linearer Differentialoperator). Kommen wir nun zum potentiellen Anteil. Dieses wird beschrieben durch ein Polynom $W(\phi)$ der Form $W(\phi) = \lambda\phi + (m/2)\phi^2 + \ldots$. Was wir nicht verwenden wollen, sind negative Potenzen von ϕ, wie beispielsweise ϕ^{-1}. Weil dieses Potential im Superraum lebt, bezeichnet man es auch als Superpotential.

$$L_{\text{s.pot}}(t) = W(\phi)|_{\theta\overline{\theta}}\,, \tag{1.95}$$

$$W(\phi)|_{\theta\overline{\theta}} = -\partial_{\overline{\theta}}\partial_\theta W(\phi)|_{\theta=0=\overline{\theta}} = -\partial_{\overline{\theta}}\left[(\partial_\theta\phi)W'(\phi)\right]\Big| = -(\partial_{\overline{\theta}}\partial_\theta\phi)W'(\phi)\Big| + (\partial\theta\phi)(\partial_{\overline{\theta}}\phi)W''(\phi)\Big|\,. \tag{1.96}$$

Dies pickt uns die F-Komponente heraus. (Der Strich bedeutet, dass wir die niederste θ-, $\overline{\theta}$-Komponente wählen. Die höchste Komponente transformiert unter SUSY wie eine totale Raum-Zeitableitung.)

$$W(\phi)|_{\theta\overline{\theta}} = (-\partial_{\overline{\theta}}\partial_\theta\phi)|W'(\phi)| + \partial_\theta\phi|\partial_{\overline{\theta}}\phi|W''(\phi)| = FW'(q) + \psi\overline{\psi}W''(q)\,. \tag{1.97}$$

Damit hat der anharmonische Superoszillator folgende Lagrangefunktion:

$$\boxed{L(z) = \frac{1}{2}\overline{D}\phi D\phi + W(\phi)\,,} \tag{1.98}$$

$$\boxed{L(t) = L(z)|_{\theta\overline{\theta}} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 + \mathrm{i}\overline{\psi}\dot{\psi} - \mathrm{i}\dot{\overline{\psi}}\psi + F^2\right) + FW'(q) - \overline{\psi}\psi W''(q)\,.} \tag{1.99}$$

Berechnen wir nun die Euler-Lagrange-Gleichungen zunächst für F. Aus $\frac{\partial L}{\partial F} = 0$ ergibt sich $F = -W'(q)$. Dies ist jedoch keine Bewegungsgleichung für F, da keine Zeitableitung enthalten ist. Man bezeichnet solch ein Feld – in diesem Falle F – als Hilfsfeld. Die Gleichung $F = -W'(q)$ ist eine algebraische Gleichung, die mit der Zeitentwicklung des Systems nichts zu tun hat. Aus diesem Grund kann man das Hilfsfeld F eliminieren. Daraus ergibt sich ein neues L, indem man Teile der algebraischen Euler-Lagrange-Gleichung verwendet:

$$L_{\textit{partiell on-shell}}(t) = \frac{1}{2}(W'(q))^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 + \mathrm{i}\overline{\psi}\dot{\psi} - \mathrm{i}\dot{\overline{\psi}}\psi\right) - \overline{\psi}\psi W''(q)\,. \tag{1.100}$$

1) Achtung! Bewegungsgleichung nicht in Wirkung (Lagrangefunktion) einsetzen.

2) Nicht W, sondern W' ist wichtig, weil W in der Lagrangefunktion selbst nicht auftaucht. Deshalb bezeichnet man $W' \equiv \Phi$ manchmal als SUSY-Potential.

3) Das Potential ist $V(q) = 1/2(W'(q))^2 \geq 0$ (analog zu „$H \geq 0$“). (Es werden alle Terme zusammengefasst in denen weder Zeitableitungen noch Grassmann-Variablen vorkommen.) Dies ist die Verallgemeinerung von $(1/2)q^2$; der Fall $W'(q) = q$ entspricht dem harmonischen Fall.

Auf Blatt 4, in Aufgabe 9, leiten wir die Euler-Lagrange-Gleichungen für q, ψ und $\overline{\psi}$ her. Es stellt sich die Frage, was aus den SUSY-Transformationen wurde, nachdem F eliminiert wurde. Supersymmetrie mit $F \mapsto -W'(q)$ ist im allgemeinen eine nichtlineare, modellabhängige Supersymmetrie. In den Übungen testen wir außerdem $[\delta_2, \delta_1]\varphi = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\varphi$ mit $\varphi = \{q, \psi, \overline{\psi}\}$ (SUSY, aber eventuell mit Bewegungsgleichung). Darüber hinaus werden wir auf Blatt 4 in Aufgabe 9 die Konsistenz überprüfen, also $\delta(F + W'(q)) = 0$.

i) Blatt 4, Aufgabe 9: $\delta L_{\textit{partiell on-shell}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\xi v + \overline{v}\overline{\xi})$ (nichtlineare SUSY-Transformation) mit $v = v(q, \psi, \overline{\psi})$ und $\overline{v} = \overline{v}(q, \psi, \overline{\psi})$.

ii) $\psi(t)$ und $\overline{\psi}(t)$ sind vom Grad 1 (Grassmann) und q ist vom Grad 0.

Auf Blatt 5, in Aufgabe 10, soll man die Bewegungsgleichung für ψ, $\overline{\psi}$ lösen. Dies macht man durch Parametrisierung nach Grad 1 (η, $\overline{\eta}$, ...), also beispielsweise $\psi = a(t)\eta + b(t)\overline{\eta}$ und entsprechend $\overline{\psi} = a^*(t)\overline{\eta} + b^*(t)\overline{\eta}$. Wir werden feststellen, dass $a(t)$ und $b(t)$ auch oszillieren, daher der Name Superoszillator.

1.4.2 Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen

Wir betrachten $L_{\textit{partiell on-shell}} = L(q, \dot{q}, \psi, \dot{\psi}, \overline{\psi}, \dot{\overline{\psi}})$ mit $\overline{\psi} = \psi^*$. Wir führen eine beliebige Formvariation durch:

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \delta\psi\frac{\partial L}{\partial \psi} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\psi\right)\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} + \text{k.K.} = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \left(\delta\psi\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} + \text{k.k.}\right)\right) + \delta q\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right) + \left(\delta\psi\left[\frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right] + \text{k.K.}\right),\end{aligned} \tag{1.101}$$

$$S_{\text{partiellon-shell}} = S[q, \psi, \overline{\psi}]\,. \tag{1.102}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man nun, indem man $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = \delta\psi(t_1) = \delta\psi(t_2) = \delta\overline{\psi}(t_1) = \delta\overline{\psi}(t_2) = 0$ setzt.

$$0 = \delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\delta L \Rightarrow \boxed{L_q = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \text{ und } L_\psi := \frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} = 0 = L_{\overline{\psi}} := (L_\psi)^*\,.} \tag{1.103}$$

Die totale Zeitableitung fällt heraus.

1.5 Noetherladungen und Supersymmetrie

1.5.1 Superoszillator

Wir gehen aus von folgender Lagrangefunktion:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}F^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\psi}\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\psi) + W'(q)F - \overline{\psi}\psi W''(q)\,. \tag{1.104}$$

Die Wirkung S ist invariant bezüglich Supersymmetrie mit der Einschränkung, dass Randterme mit Funktionen zu Zeiten t_1 und t_2 auftreten können. Diese Randterme spielen jedoch für das Wirkungsprinzip keine Rolle. Aus der Invarianz der Wirkung folgen nach dem Noethertheorem erhaltene Ladungen (bzw. Ströme, wenn Raumdimensionen dabei sind). Wir starten nun mit L in der Form $L = L(q, \dot{q}, \psi, \dot{\psi}, \overline{\psi}, \dot{\overline{\psi}}, F)$.

i) Einerseits (wie bei den Euler-Lagrange-Gleichungen) verwenden wir **beliebige** Variationen δq, $\delta\psi$, $\delta\overline{\psi}$ und δF.

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta_q L_q + \delta\psi\overline{L_\psi} + L_{\overline{\psi}}\delta\overline{\psi} + \delta F L_F + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} + \delta\psi\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\psi}}}\delta\overline{\psi}\right) \text{ mit} \\ L_q &\equiv \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}},\ \overline{L_\psi} \equiv \frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}},\ L_\psi \equiv \frac{\partial L}{\partial\overline{\psi}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\psi}}} \text{ und } L_F = \frac{\partial L}{\partial F}\,.\end{aligned} \tag{1.105}$$

Es treten hier keine $\dot{F}$-Ableitungen auf. Unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen gilt:

$$\delta L \simeq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) \text{ mit } v(t) = \delta q\frac{\partial L}{\partial\dot{q}} + \left(\delta\psi\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}} + \text{k.K.}\right) \text{ (bis auf konstante Terme)}\,. \tag{1.106}$$

ii) Andererseits wollen wir nun verwenden, dass wir bezüglich Supersymmetrie (kontinuierlichen Transformationen) bis auf die festen Randterme eine symmetrische Wirkung haben. L transformiert bezüglich Supersymmetrie in eine reine Zeitableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

$$\delta L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w(t) \,. \tag{1.107}$$

In Teil i.) verwenden wir nun Supersymmetrievariationen und erhalten aus i) und ii)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(w(t) - v(t)) \simeq 0 \text{ mit } \widetilde{Q}(t) = w(t) - v(t) \text{ als Ladung.} \tag{1.108}$$

Betrachte nur ξ- (nicht $\overline{\xi}$-)Transformationen: $\delta q = -\xi\psi$, $\delta\psi = 0$ und $\delta\overline{\psi} = -(\mathrm{i}\dot{q} + F)\xi$. (Ebenso kommen in δF Terme vor, die von ξ abhängen. F interessiert uns jetzt jedoch nicht.)

$$v(t) = -\xi\psi\dot{q} + \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\psi\right) \cdot (-\mathrm{i}\dot{q} - F)\,\xi + \text{k.K.} = -\xi\left(\frac{3}{2}\psi\dot{q} - \frac{\mathrm{i}}{2}\psi F\right) + \text{k.K.} - c\left(\dot{q}^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\psi}\overline{\psi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi\dot{\overline{\psi}}\right) \,. \tag{1.109}$$

Zur Berechnung von $w(t)$ kann man verwenden, dass δL wie die $\theta\overline{\theta}$-Komponente des Superfeldes $L(z)$, berechnet mit F_L, transformiert.

$$L(t) = L(z)|_{\theta\overline{\theta}},\ L(z) = \frac{1}{2}\overline{D}\phi D\phi + W(\phi) \,. \tag{1.110}$$

Wir betrachten nun Komponententransformationen, hier für ein reelles Superfeld $L(z)$:

$$\delta L(t) \stackrel{\wedge}{=} \delta F_L = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\mathrm{i}\xi\psi_L + \mathrm{i}\overline{\psi}_L\overline{\xi} + cF_L\right] \text{ mit } F_L = L(t) \,. \tag{1.111}$$

Jetzt berechnen wir also:

$$\begin{aligned} \psi_L = \partial_\theta L(z)| &= \frac{1}{2}\partial_\theta(\overline{D}\phi)\Big| D\phi| - \frac{1}{2}\overline{D}\phi\Big|\partial_\theta D\phi\Big| + \partial_\theta\phi|W'(\phi)| = \\ &= \frac{1}{2}\partial_\theta\left(\partial_{\overline{\theta}} + \mathrm{i}\theta\partial_t\right)\phi\Big|\psi - 0 + \psi W'(q) = \frac{1}{2}(F + \mathrm{i}\dot{q})\psi + W'(q)\psi = \left(\frac{1}{2}(F + \mathrm{i}\dot{q}) + W'(q)\right)\psi \,. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Also gilt

$$w(t) = (\mathrm{i}\xi\psi_L + \text{k.K.}) - cL(t) = \xi\left(\frac{\mathrm{i}}{2}(F + \mathrm{i}\dot{q}) + \mathrm{i}W'(q)\right)\psi + \text{k.K.} - cL(t) \,. \tag{1.113}$$

Aus $\xi Q + \overline{Q}\,\overline{\xi} + cH \equiv w(t) - v(t)$ mit $\overline{Q} = Q^*$ lesen wir Q, $\overline{Q}$ und H ab:

$$\boxed{Q(t) = \frac{\mathrm{i}}{2}(F + \mathrm{i}\dot{q})\psi + \mathrm{i}W'(q)\psi + \frac{3}{2}\psi\dot{q} - \frac{\mathrm{i}}{2}\psi F = (\dot{q} + \mathrm{i}W'(q))\psi \,.} \tag{1.114}$$

Man kann nun mittels der Eulergleichungen

$$\boxed{0 = L_q = W''(q)F - \overline{\psi}\psi W''' - \ddot{q},\ 0 = L_{\overline{\psi}} = -\mathrm{i}\dot{\psi} + \psi W'' \text{ und } 0 = L_F = F + W'(q) \,,} \tag{1.115}$$

überprüfen, dass $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)Q \simeq 0$ gilt. In der Übung werden wir außerdem $\overline{Q}$ und H berechnen:

$$\boxed{\overline{Q}(t) = \overline{\psi}(\dot{q} - \mathrm{i}W'(q)) \text{ und } H = -L + \dot{q}^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\psi}\overline{\psi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi\dot{\overline{\psi}} \,.} \tag{1.116}$$

Mit $p \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}$ kann H dann noch auf folgende Form gebracht werden:

$$\boxed{H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}F^2 - W'(q)F + \overline{\psi}\psi W''(q) \,.} \tag{1.117}$$

Hier kommen – wie man sieht – keine Ausdrücke mit $\dot{\psi}$ und $\dot{\overline{\psi}}$ vor. Auch kann man mittels der Eulergleichungen wieder nachrechnen, dass $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)H(t) = 0$ gilt. Die Idee ist nun, dass diese Noetherladungen die $N = 2$, $D = 1$-Supersymmetrie produzieren. Hierzu machen wir Gebrauch von den verallgemeinerten Poissonklammern (Super-Poissonklammern). (Damit werden wir $\mathrm{i}\{Q, \overline{Q}\}_{\mathrm{PK}} = 2H$ erhalten.) An dieser Stelle lohnt es sich, eventuell in Landau-Lifschitz Band 1 zu schauen. Der Zugang verläuft über verallgemeinerte Impulse und Legendre-Transformationen. Wir führen also den Hamiltonformalismus am Beispiel der bisher verwendeten Lagrangefunktion L durch (Superklassische Mechanik):

a) Bei Verwendung von obigem L (mit F).

$$p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (= \dot{q}),\; p_F := \frac{\partial L}{\partial \dot{F}} = 0,\; \overline{\pi} := \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi} \text{ und } \pi = (\overline{\pi})^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{\psi}}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\psi\,. \tag{1.118}$$

Man erkennt, dass die $\pi, \overline{\pi}$ keine unabhängigen Impulse sind; sie hängen von den Koordinaten ψ und $\overline{\psi}$ ab. Dies führt zu einer Einschränkung des Phasenraums (eingeschränkte Hamilton-Mechanik – constrained systems) [6]. Man spricht in diesen Zusammenhängen auch von erster Klasse Einschränkung bzw. zweiter Klasse Einschränkung. Man muss dann neue Poissonklammern definieren, so dass diese Einschränkungen kompatibel unter Zeitentwicklung sind. Um die Einschränkung $\mathrm{d}F = 0$ zu vermeiden, betrachten wir L mit eliminiertem F-Feld. Bei der Rechnung werden $\mathrm{d}\pi$ und $\mathrm{d}\overline{\psi}$ als abhängig von $\mathrm{d}\overline{\psi}$ und $\mathrm{d}\psi$ betrachtet.

$$L = L(q, \dot{q}, \psi, \dot{\psi}, \overline{\psi}, \dot{\overline{\psi}})\,, \tag{1.119}$$

$$\mathrm{d}L = \mathrm{d}q\frac{\partial L}{\partial q} + \mathrm{d}\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \mathrm{d}\psi\frac{\partial L}{\partial \psi} + \mathrm{d}\dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \text{k.K.}\,. \tag{1.120}$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen und den konjugierten Impulsen erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}L &= \mathrm{d}q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \mathrm{d}\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \left(\mathrm{d}\psi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \mathrm{d}\dot{\psi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} + \text{k.K.}\right) = \\
&= \mathrm{d}q\,\dot{p} + \mathrm{d}\dot{q}\,p + \left(\mathrm{d}\psi\,\dot{\overline{\pi}} + \mathrm{d}\dot{\psi}\,\overline{\pi}\right) + \text{k.K.} = \\
&= \mathrm{d}(\dot{q}p + (\dot{\psi}\overline{\pi} + \text{k.K.})) - \dot{q}\,\mathrm{d}p - (\dot{\psi}\,\mathrm{d}\overline{\pi} + \text{k.k.}) + \mathrm{d}q\,\dot{p} + (\mathrm{d}\psi\,\dot{\overline{\pi}} + \text{k.K.})\,.
\end{aligned} \tag{1.121}$$

$$\mathrm{d}(\dot{q}p + \dot{\psi}\overline{\pi} - \dot{\overline{\psi}}\pi - L) \simeq \mathrm{d}q(-\dot{p}) + \mathrm{d}p\dot{q} + \mathrm{d}\psi(-\dot{\overline{\pi}}) + \mathrm{d}\overline{\pi}(-\dot{\psi}) + \mathrm{d}\overline{\psi}(\dot{\pi}) + \mathrm{d}\pi(\dot{\overline{\psi}})\,. \tag{1.122}$$

Jetzt ersetzen wir $\mathrm{d}\overline{\pi}$ bzw. $\mathrm{d}\pi$ durch $(-\mathrm{i}/2)\mathrm{d}\overline{\psi}$ bzw. $(\mathrm{i}/2)\mathrm{d}\psi$, analog für $\dot{\pi}$ und $\dot{\overline{\pi}}$.

$$\mathrm{d}H \simeq \mathrm{d}q\,(-\dot{p}) + \mathrm{d}p\,\dot{q} + \mathrm{i}\,\mathrm{d}\psi\dot{\overline{\psi}} + \mathrm{d}\overline{\psi}(\mathrm{i}\dot{\psi}) \text{ mit } H = \dot{q}p + \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\psi}\overline{\psi} + \text{k.K.}\right) - L_{\textit{partiell on-shell}}\,. \tag{1.123}$$

Führen wir die Legendre-Transformation durch:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p},\; \frac{\partial H}{\partial \psi} = \mathrm{i}\dot{\overline{\psi}},\; \frac{\partial H}{\partial \overline{\psi}} = -\mathrm{i}\dot{\psi} \text{ und } \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}\,, \tag{1.124}$$

$$\begin{aligned}
H &= H(p, q, \psi, \overline{\psi}) = p^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\psi}\overline{\psi} - \frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\overline{\psi}}\psi - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(W'(q))^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}\dot{\psi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\overline{\psi}}\psi + \overline{\psi}\psi W''(q) = \\
&= \frac{1}{2}p^2 + (W'(q))^2 + W''(q)\overline{\psi}\psi \text{ mit } (W'(q))^2 = V(q)\,.
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Dieses H finden wir auch als Noether-Ladung, falls wir von $L_{\textit{partiell on-shell}}$ ausgehen.

c) Super-Poissonklammern:

Wir werden dies auf dem sechsten Übungsblatt in Aufgabe 13 näher behandeln. Sei $f = f(p, q, \psi, \overline{\psi}, t)$ und $g = g(p, q, \psi, \overline{\psi}, t)$ mit homogenem Grad. Die Poissonklammer für den eingeschränkten Phasenraum wollen wir als $\{H, f\}_{\mathrm{PK|}}$ bezeichnen. Behauptung:

$$\{g, f\}_{\mathrm{PK|}} = \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{i}(-1)^{\mathrm{Grad}(g)}\left(\frac{\partial g}{\partial \overline{\psi}}\frac{\partial f}{\partial \psi} + \frac{\partial g}{\partial \psi}\frac{\partial f}{\partial \overline{\psi}}\right)\,. \tag{1.126}$$

i) $\{g, f\}_{\mathrm{PK|}} = -(-1)^{\mathrm{Grad}(f)\cdot\mathrm{Grad}(g)}\{f, g\}_{\mathrm{PK|}}\,,$

ii) Jacobi-Identität mit Graduierung.

Man kann dies auch in Matrixform schreiben:

$$\{g, f\}_{\mathrm{PK}|} = \mathcal{J}_g^{AB} \partial_A g \partial_B f \text{ mit } \partial_A \equiv \frac{\partial}{\partial x^A},\ x^A = (q, p, \psi, \overline{\psi}) \text{ und}$$

$$\mathcal{J}^{AB}_{\mathrm{Grad}(g)} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & (-1)^{\mathrm{Grad}(g)} I \end{pmatrix}, \quad \text{mit } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } I = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.127}$$

Auf dem sechsten Blatt, in Aufgabe 13, sollen die Poissonklammern im Modell ohne F-Feld $H = H(p, q, \psi, \overline{\psi})$ berechnet werden. Wir werden dabei sehen, dass folgendes gilt:

$$\{p, q\}_{\mathrm{PK}|} = 1 \text{ und } \{\psi, \overline{\psi}\}_{\mathrm{PK}|} = \mathrm{i}\,, \tag{1.128}$$

$$\{\pi\,(\overline{\psi}), \overline{\psi}\}_{\mathrm{PK}|} = -\frac{1}{2}\,. \tag{1.129}$$

Normalerweise erwartet man $\{\pi, \overline{\psi}\} = -1$; hier im eingeschränkten Phasenraum ist dies jedoch nicht der Fall.

d) Quantisierungsvorschrift:

Wir ersetzen $\{p, q\}_{\mathrm{PK}|} = 1$ durch $\mathrm{i}[p, q] = \mathbb{1}$ und $\{\overline{\psi}, \psi\}_{\mathrm{PK}|} = \{\psi, \overline{\psi}\}_{\mathrm{PK}|} = \mathrm{i}$ durch $\mathrm{i}\{\psi, \psi^+\} = \mathrm{i}\mathbb{1}$. Außerdem werden wir $\{A, B\}_{\mathrm{PK}|}$ nach $\mathrm{i}[A, B\}$ übersetzen (externe Ordnungsvorschriften).

1.6 Anharmonischer Superoszillator (Quantisierte Version, Witten-Modell)

1.6.1 Harmonischer Superoszillator und Verallgemeinerung

Wir hatten H definiert als $H = 1/2\{Q, Q^+\}$ mit $Q = ca^\dagger \otimes d = ca^\dagger d$ und $Q^+ = c^* a \otimes d^\dagger = c^* a d^\dagger$, wobei $[a, a^\dagger] = 1$ und $\{d, d^\dagger\} = 1$.

$$H_{\mathrm{harm}} = N_B \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes N_F \text{ mit } N_B = a^\dagger a,\ N_F = d^\dagger d \text{ wobei } d = \frac{\sigma^-}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ d^\dagger = \frac{\sigma^+}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.130}$$

Wir hatten die diagonale und fakorisierte Version:

$$H_{\mathrm{harm}} = \begin{pmatrix} aa^\dagger & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{pmatrix}. \tag{1.131}$$

Wie kann man dies alles verallgemeinern? Im Fermisektor ist mit einem Freiheitsgrad leider nichts zu machen ($(dd^\dagger)^2 = d\{d^\dagger, d\}d^\dagger = dd^\dagger$), jedoch im Bosesektor. Man verwendet nun neue Operatoren, nämlich $\mathbf{Q} = (p + \mathrm{i}\Phi(q)) \otimes d$. Der p-Teil wird nicht geändert, um weiterhin nur zweite Zeitableitungen im Lagrangeformalismus zu haben. Treffen wir die Wahl $c = \mathrm{i}\sqrt{2}$, so schreibt man dies um:

$$\mathbf{Q} = \sqrt{2}\mathrm{i} A^\dagger(a, a^\dagger) \otimes d\,. \tag{1.132}$$

$A^\dagger(a, a^\dagger)$ ist ein Ausdruck, der a und $a^\dagger$ enthält. Darüberhinaus definiert man

$$\mathbf{Q}^+ = (p - \mathrm{i}\Phi(q)) \otimes d^\dagger = -\sqrt{2}\mathrm{i} A(a, a^\dagger) \otimes d^\dagger \text{ mit } A^\dagger(a, a^\dagger) = (A(a, a^\dagger))^\dagger\,. \tag{1.133}$$

$\Phi(q) = \Phi^\dagger(q)$ nennt man SUSY-Potential und im harmonischen Fall gilt $\Phi(q) = q$. (Auf Blatt 5, in Aufgabe 11, werden wir sehen, dass $\Phi(q) = W'(q)$ gilt.) Es ist möglich, die d und $d^\dagger$ durch 2×2-Matrizen darzustellen, womit wir folgendes ausrechnen können:

$$H = \frac{1}{2}\{\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^\dagger\} = A^\dagger A d d^\dagger + A A^\dagger d^\dagger d = A^\dagger A(\mathbb{1} - N_F) + AA^\dagger N_F \equiv \begin{pmatrix} AA^\dagger & 0 \\ 0 & A^\dagger A \end{pmatrix} =:$$

$$=: \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \text{ mit } N_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.134}$$

$$H_\pm(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V_\pm(q)\,, \tag{1.135}$$

und mit $[p, \Phi(q)] = -\mathrm{i}\Phi'(q)$ erhalten wir $V_\pm(q) := 1/2(\Phi^2(q) \pm \Phi'(q))$. Früher hatten wir im unquantisierten Fall $V(q) = 1/2(W'(q))^2$ ausgerechnet.
Jetzt ist $N_B = a^\dagger a$ nicht mehr interessant. N_F vertauscht mit H.

1.6.2 Das Witten-Modell als quantisierte Form des Supermechanikmodells

Wir hatten in der Supermechanik (ohne F-Feld)

$$H(p,q,\psi,\overline{\psi}) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(W'(q))^2 + W''(q)\overline{\psi}\psi\,, \tag{1.136}$$

gefunden und gehen über von $q \mapsto \mathbf{q}$, $p \mapsto \mathbf{p}$, $\psi \mapsto \boldsymbol{\psi}$ und $\overline{\psi} \mapsto \boldsymbol{\psi}^+$. Wenn wir $\boldsymbol{\psi}$ mit d und $\boldsymbol{\psi}^+$ mit $d^\dagger$ identifizieren, so werden wir feststellen, dass es sich **nicht** um das Witten-Modell mit $W'(q) \mapsto W'(\mathbf{q}) = \Phi(\mathbf{q})$ handelt. Wenn wir aber vor der Quantisierung die symmetrische Ordnung (Weylordnung) $W''(q)\overline{\psi}\psi = W''(q)\frac{1}{2}(\overline{\psi}\psi - \psi\overline{\psi})$ durchführen, dann wird Übereinstimmung mit dem Witten-Modell erreicht.

Kapitel 2

Supersymmetrie in vier Dimensionen, Minkowski-Raum

2.1 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ und $L_+^\uparrow$

$L_+^\uparrow$ ist die eingeschränkte Lorentzgruppe (eigentlich, orthochron).

$$L_+^\uparrow \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/Z_2 \text{ mit } Z_2 = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2\} \tag{2.1}$$

1) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Elemente der Gruppe werden durch $n \times n$-Matrizen mit Elementen $\in \mathbb{C}$ dargestellt. Wir wollen die Menge dieser Matrizen als $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ bezeichnen.

Es gilt immer die Darstellungseigenschaft $G \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, $g \mapsto D(g)$, so dass $D(g_2 \circ g_1) = D(g_2) \cdot D(g_1)$ ist. Elemente der Matrizen wollen wir schreiben als ${M_\alpha}^\beta$ mit α, $\beta \in \{1, \ldots, n\}$, wobei ${M_\alpha}^\beta \in \mathbb{C}$ ist. Da die Matrizen invertierbar sind, bilden auch die Matrizen $M^{\intercal,-1}$ eine Darstellung. (Die transponierten Matrizen ${(M^\intercal)^\beta}_\alpha$ selbst bilden keine Darstellung, sondern erst ${(M^{\intercal,-1})^\beta}_\alpha$.) In den Übungen werden wir zeigen, dass $M^{\intercal,-1} = M^{-1,\intercal}$ gilt. Die komplex konjugierte Matrix M^* ist mit M eine Darstellung, weil $(M_1 M_2)^* = M_1^* M_2^*$. Analog dazu erfüllen auch die Matrizen $M^{*,\intercal,-1} = M^{+,-1}$ die Darstellungseigenschaften. Diese besitzen die Indexstruktur ${(M^*)_{\dot\alpha}}^{\dot\beta}$. (Dies ist Konvention. Man kann auch ${(M^*)^{\dot\alpha}}_{\dot\beta}$ verwenden. Dies werden wir hier jedoch nicht tun.) Die Indexstruktur der Matrix $M^{+,-1}$ ist ${(M^{+,-1})^{\dot\beta}}_{\dot\alpha}$. Mit den genannten vier Typen wollen wir im folgenden weiterarbeiten. Spinoren ψ und χ werden wir folgendermaßen transformieren:

$$\psi'_\alpha = {M_\alpha}^\beta \psi_\beta = \psi_\beta {(M^\intercal)^\beta}_\alpha \text{ und } \chi'^\alpha = {(M^{\intercal,-1})^\alpha}_\beta \chi^\beta = \chi^\beta {(M^{-1})_\beta}^\alpha \,. \tag{2.2}$$

Komplexe Spinoren werden transformiert wie im folgenden erklärt:

$$\overline{\psi}'_{\dot\alpha} = {(M^*)_{\dot\alpha}}^{\dot\beta} \overline{\psi}_{\dot\beta} = \overline{\psi}_{\dot\beta} {(M^+)^{\dot\beta}}_{\dot\alpha} \text{ und } \overline{\chi}'^{\dot\alpha} = {(M^{+,-1})^{\dot\alpha}}_{\dot\beta} \overline{\chi}^{\dot\beta} = \overline{\chi}^{\dot\beta} {(M^{*,-1})_{\dot\beta}}^{\dot\alpha} \,. \tag{2.3}$$

Unter dieser Gruppe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ können wir nun bilineare Invarianten bilden:

$$\psi'_\alpha \chi'^\alpha = \psi M^\intercal M^{\intercal,-1} \chi = \psi_\alpha \chi^\alpha \,. \tag{2.4}$$

Analog funktioniert dies für:

$$\overline{\psi}'_{\dot\alpha} \overline{\chi}'^{\dot\alpha} = \overline{\psi}_{\dot\alpha} \overline{\chi}^{\dot\alpha} \,. \tag{2.5}$$

Die Punktnotation geht auf B.L. van der Waerden zurück [7, 8, 9]. Weitere Referenzen sind [10] (zur Spinor-Gymnastik), [11] und [12].

Wir betrachten nun den Spezialfall der invertierbaren komplexen 2×2-Matrizen mit $\det(M) = 1$ ($\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$) mit den Indizes α, $\beta \in \{1, 2\}$ und $\dot\alpha$, $\dot\beta \in \{\dot1, \dot2\}$. Die Bedingung $\det(M) = +1$ kann man in der Form $\varepsilon_{\alpha\beta} {M_\gamma}^\alpha {M_\delta}^\beta = \varepsilon_{\gamma\delta}$ schreiben, wobei $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$ mit $\varepsilon_{12} := +1$ der total antisymmetrische ε-Tensor in zwei Dimensionen ist. In Matrixnotation lautet dies:

$$M \underline{\varepsilon} M^\intercal = \underline{\varepsilon} \,, \quad \text{mit } \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \,. \tag{2.6}$$

Durch Multiplikation von rechts mit $M^{\intercal,-1}$ finden wir heraus, dass $\overline{\varepsilon}M\underline{\varepsilon} = M^{\intercal,-1}$ gilt. Das ε-Symbol mit oberen Indizes ist definiert über $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}$.

$$\overline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.7}$$

Das heißt, beide Darstellungen M und $M^{\intercal,-1}$ sind äquivalent. Mittels des numerisch invarianten ε-Tensors können wir Indizes der ψ und χ hoch- und hinunterschieben:

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta \text{ oder } \chi^\beta = \varepsilon^{\beta\alpha}\psi_\alpha . \tag{2.8}$$

Numerisch invariant bedeutet

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} \text{ mit } \varepsilon'_{\alpha\beta} = M_\alpha{}^\gamma M_\beta{}^\delta \varepsilon_{\gamma\delta} \stackrel{!}{=} \varepsilon_{\alpha\beta} , \tag{2.9}$$

was als Übung gezeigt werden kann. Analog funktioniert dies für die Matrizen $M^* \simeq M^{*,\intercal,-1} = M^{+,-1}$. Dazu müssen wir ein $\underline{\varepsilon}^*$ mit der Indexstruktur $\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$, $\varepsilon_{\dot1\dot2} = 1$ analog zu $\underline{\varepsilon}$ definieren. Hierbei gilt dann $\overline{\varepsilon}^*\underline{\varepsilon}^* = \mathbb{1}_2$. Damit können wir die Indizes der komplexen Spinoren hoch- und hinunterziehen:

$$\overline{\psi}_{\dot\alpha} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\chi}^{\dot\beta} \text{ und } \overline{\chi}^{\dot\beta} = \varepsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\overline{\psi}_{\dot\alpha} . \tag{2.10}$$

Auf Blatt 7, Aufgabe 14, bringen wir im Fall der SU(2) M und M^* miteinander in Relation. Zusatzanmerkung für Supersymmetrie: Die Komponenten der Vektoren ψ, $\overline{\psi}$, χ, $\overline{\chi}$ sind a-Zahlen. Hierbei gelten die folgenden Regeln:

$$\psi_\alpha\chi^\alpha = -\psi^\alpha\chi_\alpha = \chi_\alpha\psi^\alpha \text{ und } \psi\chi \equiv \psi^\alpha\chi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha \equiv \chi\psi , \tag{2.11}$$

$$\overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha} \equiv \overline{\psi}\overline{\chi} = \overline{\chi}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} \equiv \overline{\chi}\overline{\psi} . \tag{2.12}$$

Die Transformation für Tensoren $V_{\alpha_1,\dots,\alpha_n;\dot\beta_1,\dots,\dot\beta_m}$ beliebiger Stufe läuft analog wie beispielsweise

$$V'_{\alpha,\dot\beta} = M_\alpha{}^\beta (M^*)_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma} V_{\beta\dot\gamma} . \tag{2.13}$$

2) SL(2,$\mathbb{C}$) und Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$

Wir betrachten die Pauli-Matrizen σ^i für $i = 1, 2, 3$ und die Einheitsmatrix in zwei Dimensionen, also $\sigma^0 = \mathbb{1}_2$. $\sigma^a \stackrel{\wedge}{=} (\sigma^0 = \mathbb{1}_2, \sigma^i)$ bildet eine Basis für komplexe 2×2-Matrizen.

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{i}\underline{\varepsilon},\ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{2.14}$$

$$p = \frac{1}{2}p_a\sigma^a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_0 + p_3 & p_1 - \mathrm{i}p_2 \\ p_1 + \mathrm{i}p_2 & p_0 - p_3 \end{pmatrix} . \tag{2.15}$$

Die Pauli-Matrizen genügen der Clifford-Algebra C_3 mit $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}\mathbb{1}_2$. Außerdem erfüllen sie die Lie-Algebra su(2), nämlich

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2} , \tag{2.16}$$

mit den Strukturkonstanten ε^{ijk}, wobei $\varepsilon^{123} = +1$. (Quaternionen: $\sigma^0 = \mathbb{1}_2 = E$, $\mathrm{i}\sigma^3 = I$, $-\mathrm{i}\sigma^2 = J$, $-\mathrm{i}\sigma^1 = K$) Falls $p_a = p_a^*$ gilt, ist p hermitesch ($p^+ = p$). Jede hermitesche 2×2-Matrix lässt sich dann darstellen als $p = 1/2p_a\sigma^a$ mit reellen p_a. Die Transformation von p ist gegeben durch $p' = MpM^+$, wobei $p'^+ = p'$ gilt, falls p hermitesch ist. p ist von der Indexstruktur $p_{\alpha\dot\beta}$. Damit erhält auch σ^a diese Struktur.

$$p_{\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}p_a(\sigma^a)_{\dot\alpha\dot\beta} . \tag{2.17}$$

Nach dem Determinanten-Multiplikationssatz und mit $\det(M) = 1$ (wegen SL(2,$\mathbb{C}$)) gilt:

$$\begin{aligned} 4\det(p') = |\det(M)|^2 \cdot 4\det(p) = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = p_a\eta^{ab}p_b = p^a p_a = p_a p^a = \\ = p'_a\eta^{ab}p'_b \text{ mit } \eta^{ab} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Es gilt also $p^a := \eta^{ab} p_b$. Das bedeutet $p'_a = \Lambda_a{}^b p_b$, wobei $\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta$ ($\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$). Darüber hinaus ist $(\det(\Lambda))^2 = 1$, also $\det(\Lambda) = \pm 1$. (Für die SO(1,3) gilt $\det(\Lambda) = +1$.) $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ induziert via $p' = MpM^+$ eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in \mathrm{O}(1,3)$. Gesucht ist nun $\Lambda = \Lambda(M)$:

$$\frac{1}{2} p_b (M\sigma^b M^+) = MpM^+ = p' = \frac{1}{2} p'_a \sigma^a = \frac{1}{2} (\Lambda_a{}^b p_b) \sigma^a \Rightarrow \boxed{(M\sigma^b M^+)_{\alpha\dot\beta} = \Lambda_a{}^b \sigma^a_{\alpha\dot\beta} \,.} \tag{2.19}$$

Die Inversion funktioniert folgendermaßen:

$$(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta} (\overline{\sigma}^b)^{\dot\beta\gamma} = \delta_\alpha{}^\gamma \eta^{ab} \,, \tag{2.20}$$

mit

$$(\overline{\sigma}^a)^{\dot\beta\gamma} \triangleq (\overline{\sigma}^0 = \mathbb{1}_2, \overline{\sigma}^i = -\sigma^i) \,, \tag{2.21}$$

was als Übung gezeigt werden kann.

i) $\mathrm{Sp}(\sigma^a \overline{\sigma}^b) = 2\eta^{ab}$. Aus (2.19) folgt

$$\Lambda_a{}^b = \frac{1}{2} \mathrm{Sp}(M\sigma^b M^+ \overline{\sigma}_a) \,, \tag{2.22}$$

mit $\overline{\sigma}_a = \eta_{ac} \sigma^c$, wobei $\eta^{ab} \eta_{bc} = \delta^a{}_c$.
So bildet man Matrizen M, $-M$ von SL(2, $\mathbb{C}$) auf $\Lambda \in O(1,3)$ ab.

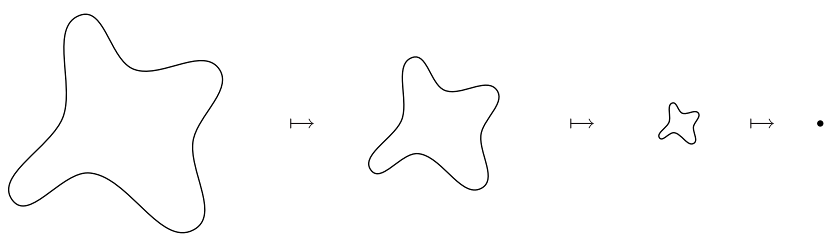
   a) $\Lambda(M) = \Lambda(-M)$
   b) $\Lambda(M)$ ist eine stetige Funktion der M Elemente.

ii) $(\sigma^c)_{\alpha\dot\beta} (\overline{\sigma}_c)^{\dot\gamma\delta} = 2\delta_\alpha{}^\delta \delta_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma}$
Als Übung kann man zeigen, dass aus $M_3 = M_2 M_1$ folgt, dass $\Lambda_3 = \Lambda_2 \Lambda_1$ (Darstellungseigenschaft).

$\Lambda(M)$ ist nicht surjektiv. Der Parameterraum von SL(2, $\mathbb{C}$) wird von sechs reellen Größen gebildet. Er ist ein topologischer Raum (hier Topologie von $\mathbb{R}^6$ mit euklidischer Metrik); die Bildung von Produkten und Inversen funktioniert stetig. (g bzw. h in Umgebung zu g' und h', dann gh bzw. h^{-1} in Umgebung von $g'h'$ bzw. h'^{-1}). Mit der Stetigkeit kann man einen sogenannten „Zusammenhang“ erklären. Es ist möglich, Zusammenhangskomponenten zu definieren: In jeder Komponente erhält man jedes Element durch stetige Deformation zu jedem anderen.

Matrixgruppen G mit topologischen Parameterräumen sind Liegruppen; das heißt, gh und h^{-1} sind reell und analytisch als Funktion der Parameter $g = g(\mathbf{a})$, $h = h(\mathbf{b})$. (r ist die Ordnung von G; der Parameterraum ist der $\mathbb{R}^r$.) Generell ist der Parameterraum einer Lie-Gruppe ein lokal euklidischer Raum mit der Eigenschaft $g(\mathbf{a})g(\mathbf{b}) = g(\phi(\mathbf{a},\mathbf{b}))$ mit $\phi(\vec{a},\vec{b})$, die sich in eine Taylorreihe in $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ entwickeln lassen. Betrachten wir als Beispiel Drehungen in drei Dimensionen. Diese werden durch die Generatoren der SO(3) beschrieben; der Parameterraum ist dreidimensional, da man drei Winkel $\varphi \triangleq (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ benötigt, um eine Drehung durchzuführen mit φ als Drehrichtung und $|\varphi| \in [0,\pi]$ als Drehwinkel. Der Parameterraum der SO(3) ist also eine Kugel mit Radius π, wobei die Diametralpunkte auf der Kugeloberfläche zu identifizieren sind, da eine Drehung um φ mit Winkel π identisch mit einer Drehung um $-\varphi$ mit Winkel π ist. Dieser Parameterraum ist ein relativ kompliziertes Objekt.

Später werden wir zeigen, dass der Parameterraum von SL(2, $\mathbb{C}$) einfach zusammenhängend ist. Die Eigenschaft „einfach zusammenhängend“ bedeutet, dass im Parameterraum ein geschlossener Pfad durch stetige Deformation auf einen Punkt (trvialen Pfad) zusammengezogen werden kann. Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als 0-homotop. Gegeben sei ein Pfad $g(t)$, der von einem Parameter $t \in [0,1]$ abhängt. Die Kurve soll geschlossen sein: $g(0) = g(1)$. Eine Schar solcher Kurven $g(t,s)$ wird parametrisiert mittels eines Parameters s mit $s \in [0,1]$, $g(t,0) = g(t)$ und $g(t,1) = g(0) = g(1)$ (triviale Kurve).



Wir betrachten die Abbildung $M = \mathbb{1}_2 \mapsto \Lambda = \mathbb{1}_4$. Da $\Lambda = \Lambda(M)$ stetig ist, können wir höchstens die Zusammenhangskomponente bekommen, in der die Eins enthalten ist ($\det(\Lambda) = +1$, stetige Funktion der Λ-Elemente). Λ mit $\det(\Lambda) = -1$ sind nicht stetig aus $\mathbb{1}_4$ zu erreichen. Betrachtet man die Definition der O(1,3), also $\Lambda^\intercal \eta \Lambda = \eta$, so erkennt man:

$$(\Lambda_0{}^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (\Lambda_i{}^0)^2 \geq 1\,. \tag{2.23}$$

Lücke

$\mathbf{-1}$ $\mathbf{1}$

$\Lambda_0{}^0$ (reell)

unstetig

Man kann nicht stetig vom einen zum anderen Ast kommen. Daraus folgt, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ $\mathrm{sign}(\Lambda_0{}^0) = -1$ nicht erreicht. $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ wird höchstens auf $L_+^\uparrow = \mathrm{SO}(1,3) \uparrow$ abgebildet. Zeige, dass jedes $L_+^\uparrow$ erreicht wird (siehe Blatt 7, Aufgabe 15, 16 und [13] (Seite 90). Man verwendet die Zerlegung $\Lambda = RB_3(v)R'$, wobei R und R' Drehungen beschreiben und $B_3(v)$ einen Boost in 3-Richtung mit v. Damit kann man sich sicher sein, dass alle Drehungen und Boosts zu erreichen sind.

2.1.1 Parameterraum der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

Wir wollen zeigen, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist. Außerdem ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ nicht kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Wie sieht der Parameterraum der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ topologisch aus? Betrachten wir dazu die sogenannte polare Darstellung von komplexen Matrizen M. Diese lassen sich schreiben als $M = UH$, wobei die Matrix U unitär und die Matrix H hermitesch mit $\det(H) = 1$ und $\mathrm{Spur}(H) > 0$ ist (analog zu $z = \exp(\mathrm{i}\varphi)\varrho$). Als Übung kann gezeigt werden, dass sich jede komplexe $n \times n$-Matrix $M_n(\mathbb{C})$ in der Form $U_+\sqrt{MM^+}$ schreiben lässt.

1) $_+\sqrt{MM^+}$ ist sinnvoll.
2) M und $_+\sqrt{MM^+}$ haben dieselbe Norm.

Jede Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & A^* \end{pmatrix} \text{ mit } |A|^2 + |B|^2 = 1\,. \tag{2.24}$$

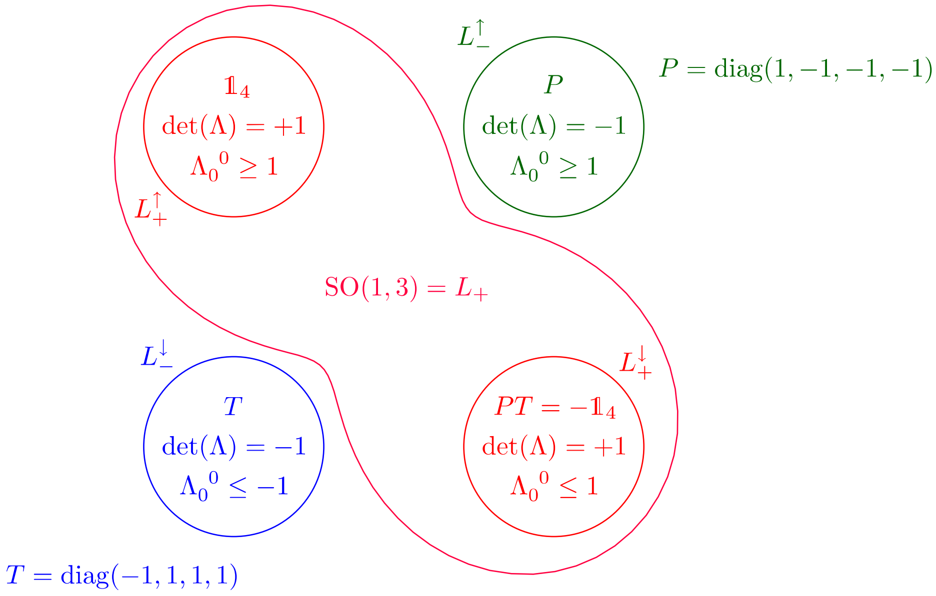
Der Parameterraum dieser Gruppe ist also die S^3 (Oberfläche einer vierdiemensionalen Hyperkugel). Er ist einfach zusammenhängend und kompakt. Eine hermitsche 2×2-Matrix H kann man schreiben als $H = h_a \sigma^a$, wobei die h_a reell sind. Darüber hinaus bedeutet $\det(H) = 1$ folgendes:

$$h_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} h_i^2\,. \tag{2.25}$$

Weiterhin gilt:

$$\mathrm{Sp}(H) = 2h_0 = 2_+\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{3} h_i^2} > 0\,. \tag{2.26}$$

Man hat drei reelle Parameter (h_1, h_2, h_3) auf einer Hyperboloidschale H_+^3 im $\mathbb{R}^4$. Der Parameterraum ist zwar einfach zusammenhängend, aber nicht kompakt. Ebenso gilt dies dann für die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Der Parameterraum der SL(2,$\mathbb{C}$) ist als Produktraum $S^3 \times H_+^3$ ein Raum, bei dem an jedem Punkt der S^3 ein H_+^3 angeheftet ist (Analogie zur Polardarstellung $S^1 \times [0,\infty)$ der Ebene).
Betrachten wir die Zusammenhangsverhältnisse in der Lorentzgruppe SO(1,3) [5]:



$L^\uparrow = \mathrm{SO}(1,3)$ ist nicht einfach zusammenhängend. (Dies rührt daher, weil SO(3) nicht einfach zusammenhängend ist.) Es gibt zwei Äquivalenzklassen von stetig deformierbaren Kurven, je nachdem, ob eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Oberflächenpunkten der Kugel mit Radius π besucht wird.

Übung:

Gesucht ist der Kern der Abbildung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$; das heißt: Wann gilt $KpK^+ = p' = p$? Speziell ist für $p = \mathbb{1}$ der Fall: $KK^+ = \mathbb{1}$. Aus $KpK^{-1} = p$ folgt $[K,p] = 0$. Das bedeutet, dass K im Zentrum von SL(2,ℂ) liegt. Mit dem Schwachen Lemma ist dann $K \sim \lambda\mathbb{1}$ mit $\lambda = \exp(\mathrm{i}\varphi)$ und $\det(K) = \exp(2\mathrm{i}\pi\varphi) = 1$ für $\varphi = 0$, π, also $K = \mathbb{Z}_2$.
K ist Normalteiler (invariante Untergruppe). Es gilt also die Relation $gK = Kg$ für jedes Element $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.
$L_+^\uparrow$ ist isomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/Z_2$. (Identifiziere M, $-M$.) Die allgemeinen Eigenschaften einer Liegruppe beruhen auf dem Verhalten in der Nähe des Einselments. Studiert man die lokale Isomorphie von zusammenhängenden Liegruppen, so findet man heraus, dass sich zu einer nicht einfach zusammenhängenden Liegruppe G eine einfach zusammenhängende Gruppe $\widetilde{G}$ konstruieren lässt (nach Pontryagin). Dann kann eine Abbildung ϱ: $\widetilde{G} \to G$ definiert werden und darüber hinaus ist es möglich, $\widetilde{G}$ so zu konstruieren, dass es eindeutig ist (universelle Überlagerungsgruppe). G ist isomorph zu $\widetilde{G}/\mathrm{Kern}(\varrho)$. In unserem Fall ist $G = L_+^\uparrow$, ϱ: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$ und $L_+^\uparrow = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

2.1.2 σ-Identitäten

iii) $(\overline{\sigma}^a)^{\dot\alpha\beta} = -(\varepsilon\sigma^a\varepsilon)^{\dot\beta\alpha} \equiv -\varepsilon^{\beta\gamma}\sigma^a_{\gamma\dot\delta}\varepsilon^{\dot\delta\dot\alpha}$, $(\varepsilon\overline{\sigma}^a)_{\dot\alpha}{}^{\beta} = (\varepsilon\sigma^a)^{\beta}{}_{\dot\alpha}$.

Es gilt $\varepsilon_{12} = 1$ und $\varepsilon^{12} = -1$. (Außerdem könnte man auch $(\sigma^a)^{\alpha\dot\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^a)_{\alpha\dot\gamma}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = (\overline{\sigma}^a)^{\dot\beta\alpha}$ definieren. Dies wollen wir jedoch nicht verwenden.)

iv) σ^a ist hermitesch: ${\sigma^a}^\dagger = \sigma^a$, $(\sigma^a_{\alpha\dot\beta})^* = \sigma^a_{\beta\dot\alpha}$.

v) Lorentzalgebra (Blatt 7, Aufgabe 17):

$$\frac{\mathrm{i}}{2}(\sigma^a\overline{\sigma}^b - \sigma^b\overline{\sigma}^a)_\alpha{}^\beta =: (\sigma^{\overbrace{ab}})_\alpha{}^\beta \text{ und } \frac{\mathrm{i}}{2}(\overline{\sigma}^a\sigma^b - \overline{\sigma}^b\sigma^a)^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma} =: (\overline{\sigma}^{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}\,. \tag{2.27}$$

vi) $\dfrac{1}{2}(\sigma^a\overline{\sigma}^b + \sigma^b\overline{\sigma}^a)_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta\eta^{ab}$ und analog $\dfrac{1}{2}(\overline{\sigma}^a\sigma^b + \overline{\sigma}^b\sigma^a)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\eta^{ab}$.
Das heißt $\sigma^{0i} = -\sigma^{i0} = \ldots = -\mathrm{i}\sigma^i$ für $i \in \{1,2,3\}$, $\sigma^{ij} = -\sigma^{ji} = \ldots = \varepsilon^{ijk}\sigma^k$ mit $\varepsilon^{123} = 1$.
$\sigma^{ab}/2$ und $\overline{\sigma}^{ab}/2$ erfüllen die Lorentzalgebra:

$$[M^{\overbrace{ab}}, M^{\overbrace{cd}}] = \mathrm{i}(\eta^{ac}M^{bd} + \eta^{bd}M^{ac} - \eta^{bc}M^{ad} - \eta^{ad}M^{bc})\,. \tag{2.28}$$

Die Lorentz-Liealgebra setzt sich zusammen aus $3 + 3 = 6$ Generatoren.

vii) Sei $T_{\underbracket{cd}}$ antisymmetrisch, also $T_{cd} = -T_{da}$. Definiere $\widetilde{T}_{ab} = \alpha\varepsilon_{abcd}T^{cd}$ mit $\varepsilon^{0123} = 1 = -\varepsilon_{0123}$. Hierbei gilt $\widetilde{\widetilde{T}} = T$, falls $\alpha^2 = -1/4$. Will man dies zeigen, muss man folgende Identität kennen:

$$\varepsilon^{abcd}\varepsilon_{cdef} = \beta\left(\delta^a{}_e\delta^b{}_f - \delta^b{}_e\delta^a{}_f\right) = \beta\delta^{ab}{}_{ef} \text{ mit } \beta = -2\,. \tag{2.29}$$

viii) Mit $\alpha = -\mathrm{i}/2$ folgt

$$\widetilde{\sigma}^{ab} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{abcd}\sigma_{cd} = \sigma^{ab}\,. \tag{2.30}$$

Man bezeichnet diese Eigenschaft als „Selbstdualität“. Darüber hinaus gilt $\widetilde{\overline{\sigma}}^{ab} = -\overline{\sigma}^{ab}$; diese Größen nennt man antiselbstdual. Damit kann man einen antisymmetrischen Tensor T_{ab} immer zerlegen wie folgt:

$$T_{\underbracket{ab}} = T^s_{ab} + T^{\mathrm{an}}_{ab}\,, \tag{2.31}$$

wobei T^s selbstdual und T^{an} antiselbstdual ist.

ix) $((\sigma^{ab})_\alpha{}^\beta)^* = (\overline{\sigma}^{ab})^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}$.

x) $(\sigma^{ab}\varepsilon)_{\alpha\beta} \equiv (\sigma^{ab})_\alpha{}^\gamma\varepsilon_{\gamma\beta} = (\sigma^{\overbracket{ab}}\varepsilon)_{\beta\alpha}$ und analog $(\varepsilon\overline{\sigma}^{ab})_{\dot\alpha\dot\beta} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\overline{\sigma}^{ab})^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta} = (\varepsilon\overline{\sigma}^{ab})_{\dot\beta\dot\alpha}$.
Beispielsweise lässt sich ein Objekt $V_{\alpha\beta}$ folgendermaßen zerlegen:

$$V_{\alpha\beta} = V_{\underbracket{\alpha\beta}} + V_{\underbrace{\alpha\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta}V + (\sigma^{ab}\varepsilon)_{\underbrace{\alpha\beta}}V^{\mathrm{sd}}_{\underbracket{ab}}\,. \tag{2.32}$$

Ein Objekt der Form

$$V_{\underbrace{\alpha_1,\ldots,\alpha_I},\underbrace{\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_J}}\,, \tag{2.33}$$

ist irreduzibel. Es stellt sich heraus, dass die irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ gegeben sind durch

$$V_{\underbrace{\alpha_1,\ldots,\alpha_I},\underbrace{\dot\beta_1,\ldots,\dot\beta_J}}\,. \tag{2.34}$$

Nach dieser Notation gilt ψ_α: $(1/2,0)$, $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$: $(0,1/2)$ und $V_{\alpha,\dot\beta} = 1/2V_a(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta}$: $(1/2,1/2)$. ($p_{\alpha\dot\beta} = 1/2p_a\sigma^a_{\alpha\dot\beta}$) (Dies ist das erste Beispiel der Spinornotation im vierdimensionalen Minkowskiraum.) Die Umkehrung ist gegeben durch $p_a = (\overline{\sigma})^{\dot\alpha\beta}p_{\beta\dot\alpha}$. Damit können alle Größen mit Viererindizes so umgeschrieben werden, dass sie nur noch SL(2,$\mathbb{C}$)-Indizes tragen. Betrachten wir folgendes Beispiel:

$$F_{ab} = (\overline{\sigma}_a)^{\dot\alpha\alpha}(\overline{\sigma}_b)^{\dot\beta\beta}F_{\alpha\dot\alpha,\beta\dot\beta} = (\overline{\sigma}_a)^{\dot\alpha\alpha}(\overline{\sigma}_b)^{\dot\beta\beta}F_{\alpha\beta,\dot\alpha\dot\beta} \text{ (neue Bezeichnung)}\,. \tag{2.35}$$

$F_{\alpha\beta,\dot\alpha\dot\beta}$ lässt sich zerlegen in der folgenden Form:

$$F_{\alpha\beta,\dot\alpha\dot\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}\overline{F}_{(\dot\alpha\dot\beta)} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}F_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}F + F_{\underbrace{\alpha\beta},\underbrace{\dot\alpha\dot\beta}}\,. \tag{2.36}$$

Zerlegung eines Zweiertensors mit Vierer-Indizes in die Spinorwelt ($4\cdot 4 = 3+3+1+3\cdot 3$).

$$F_{ab} = -F_{ba} : \; F_{(\alpha\beta)}, \overline{F}_{(\dot\alpha\dot\beta)}; \widetilde{F}_{ab}, E_i \sim F_{0i}, H_i = \varepsilon_{ijk}F_{jk}\,, \quad (6 = 3+3)\,. \tag{2.37}$$

Irreduzible Darstellung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$
Ist $I+J$ gerade, so handelt es sich um einen Tensor. Falls $I+J$ ungerade ist, haben wir einen Spinor. Auf Blatt 7 in Aufgabe 15 werden wir sehen, dass duch $M = \exp(\mathrm{i}\varphi\sigma^3/2)$ Drehungen beschrieben werden. Der Spinor ψ_α $(1/2,0)$ transformiert unter M folgendermaßen: $\psi_\alpha \mapsto -\psi_\alpha$ für $\varphi = 2\pi$ und $\psi_\alpha \mapsto \psi_\alpha$ für $\varphi = 4\pi$.

$$\exp\left(\mathrm{i}\varphi\frac{\sigma^3}{2}\right) = \exp\left(\frac{\varphi}{2}(\mathrm{i}\sigma^3)\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathbb{1}_2 + (\mathrm{i}\sigma^3)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\,. \tag{2.38}$$

$V_{\alpha_1\ldots\alpha_I,\dot\beta_1\ldots\dot\beta_J}$ ist irreduzible Darstellung $(I/2,J/2)$ (Gewichte) [13] (Seite 60, SU(2) auf Seite 122, SL(2,$\mathbb{C}$)).

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } \det(M) = ad - cb = 1\,, \tag{2.39}$$

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \text{ und } \overline{z}' = \frac{\overline{az}+\overline{b}}{\overline{cz}+\overline{d}}\,. \tag{2.40}$$

Die SL(2,$\mathbb{C}$) arbeitet auf der abgeschlossenen komplexen Ebene oder der Riemann-Kugel. Wie wirkt eine solche Möbius-Transformation auf Polynome?

$$p(z,\overline{z}) = \sum_{\substack{\alpha_i\in\{0,1\}\\ \beta_j\in\{0,1\}}} p_{\alpha_1\ldots\alpha_I,\beta_1\ldots\beta_J} z^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_I}\overline{z}^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_J}\,,\quad p_{\alpha_1\ldots\alpha_I,\beta_1\ldots\beta_J}\in\mathbb{C}_{I+1,J+1}\,. \tag{2.41}$$

(Die Punkte über den β sind hierbei unterdrückt.) Diese Polynome transformieren folgendermaßen:

$$p'(z,\overline{z}) = (a_{10}z+a_{00})^I(\overline{a}_{10}\overline{z}+\overline{a}_{00})^J p(z',\overline{z}') \text{ mit } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{01}\\ a_{10} & a_{00}\end{pmatrix}\,. \tag{2.42}$$

Die sechs Generatoren der Möbius-Transformationen sind gegeben durch L_{-1} (Verschiebungen: $\mathrm{i}\partial_z$), L_0 ($\mathrm{i}z\partial_z$), L_{+1} ($\mathrm{i}z^2\partial_z$); $\overline{L}_{-1}$, $\overline{L}_0$ und $\overline{L}_{+1}$. Der Irreduzibilitätsbeweis kann mit diesen Polynomen geführt werden (siehe [13]).

2.2 Vier-komponentige Spinoren, Weyl-, Dirac- und Majorana-Spinoren

Wir verweisen hierzu auf Übungsblatt 8.

2.3 Haag-Łopuszański-Sohnius-Theorem

Die in diesen Zusammenhang wichtige Arbeit ist [1]. Das Haag-Łopuszański-Sohnius-Theorem (HŁS) sagt aus, dass man unter den (Z_2)-graduierten Lie-Algebren (Superalgebren) als Symmetrie der S-Matrix nur die Supersymmetrie hat. Außerdem zeigt das Theorem, welche Struktur genau möglich ist, was unter dem Namen ***N*-erweiterte** Supersymmetrie mit **zentralen Ladungen** (Generatoren) läuft. So gesehen gibt dieses Theorem der Supersymmetrie einen Platz in der lokalen relativistischen Quantenfeldtheorie ($D = 4$).
Dies alles basiert auf dem Coleman-Mandula-Theorem (CM) [2]. Dieses Theorem arbeitet nur mit Kommutatoren als Generatoren der Symmetrie. Damals hat man Theorien für 3 Quarks (u, d, s) mit Spin 1/2 im nichtrelativistischen Fall aufgestellt, die unter dem Namen SU(6)-Theorien bekannt waren. Man versuchte dann, die Theorie relativistisch zu verallgemeinern. Coleman und Mandula zeigten, dass dies nicht geht („No-go“-Theorem).

2.3.1 Relativistische Raum-Zeit-Symmetrie

Die Poincaré-Lie-Algebra ist eine semidirekte Summe von den $4+6=10$ Generatoren P_a und M_{ab}. Coleman und Mandula zeigten, dass Raum-Zeit-Symmetrien mit anderen Symmetrien der S-Matrix nur in Form einer direkten Summe auftreten könnten. (Nicht-Raum-Zeit-Symmetrien bezeichnet man als **innere Symmetrien**.) Es wurden dazu folgende Annahmen gemacht:

1) Die S-Matrix ist nicht-trivial und analytisch in lokaler relativistischer Quantenfeldtheorie in vier Dimensionen (Es gibt elastische Zwei-Teilchen-Streuung, beispielsweise nicht nur in Vorwärtsrichtung.) Die S-Matrixelemente sind analytische Funktionen Funktionen von beispielsweise Streuwinkeln.

2) Zu vorgegebener Masse $m > 0$ ($P_aP^a = M^2$) soll es nur **endlich** viele Einteilchenzustände mit kleinerer Masse geben (innere Symmetrien: kompakte Lie-Algebren). Mehrteilchenzustände werden als direkte Produkte von Einteilchenzuständen aufgefasst. Es wird außerdem angenommen, dass es ein eindeutiges Vakuum mit Masse 0 gibt und eine Massenlücke zum ersten Einteilchenzustand besteht. (Im masselosen Fall hat man eine konforme Gruppe. Dies muss extra betrachtet werden.)

3) Technische Annahme: Im Impulsraum sollen die Generatoren Kerne haben, die Distributionen sind (endliche Zahl von Impulsableitungen auf $\delta^{(4)}(p-p')$).

Die Symmetrie der S-Matrix bedeutet, dass die Generatoren mit der S-Matrix vertauschen. Mit diesen Voraussetzungen wird gezeigt, dass die allgemeine Symmetriealgebra, die mit der S-Matrix vertauscht, äquivalent ist zu Poincaré ($P \ominus M$) $\oplus$ kompakte Lie-Algebra (endlicher Fall von Generatoren), wobei das Symbol „$\ominus$“ für eine „semidirekte Summe“ steht. Die kompakte Lie-Algebra kann man in der Form (halbeinfache Lie-Algebra)

$\oplus_n\ \mathrm{u}_n(1)$ schreiben. Die halbeinfachen Lie-Algebren kann man nun noch in eine direkte Summe von einfachen Lie-Algebren zerlegen. In masselosen Theorien gibt es eine sogenannte konforme Algebra: P_a, M_{ab}; D, K_a (15 Parameter). Den Beweis des Coleman-Mandula-Theorems findet man im Weinberg: Teil III (SUSY) (tQF) Anhang B (ohne die Annahme der Lokalität).
Das HŁS-Theorem ist die Verallgemeinerung des CM-Theorems mit Einschluß von Antikommutatoren. (Wir betrachten also Z_2-graduierte Algebren. Neben bosonischen Generatoren haben wir auch fermionische.) Außerdem benötigen wir das Spin-Statistik-Theorem. Dies besagt, dass ganzzahlige Spins der Bose-Einstein-Statistik (Kommutatoren) und halbzahlige Spins der Fermi-Dirac-Statistik genügen (Antikommutatoren). Die Z_2-Graduierung besagt nun $[\mathcal{B},\mathcal{B}'] \sim \mathcal{B}''$, $[\mathcal{B},\mathcal{F}] \sim \mathcal{F}$ und $\{\mathcal{F},\mathcal{F}\} \sim \mathcal{B}$. CM-$\mathcal{B}$-Typ: Poincaré $\oplus$ (kompakte Lie-Algebra). Für kompakte Lie-Gruppen sind endlich dimensionale Darstellungen unitär und es existiert ein invariantes Integral, das Haar-Maß.

$$[P_a,P_b]=0,\ [M_{ab},M_{cd}]=\mathrm{i}(\eta_{ac}M_{bd}+\eta_{bd}M_{ac}-\eta_{bc}M_{ad}-\eta_{ad}M_{bc})\,, \tag{2.43}$$

$$[M_{ab},P_c]=\mathrm{i}(\eta_{ac}P_b-\eta_{bc}M_a)\,. \tag{2.44}$$

P_a ist eine **invariante**, abelsche Unter-Lie-Algebra. Dazu die inneren Symmetrien:

$$[T_r,T_s]=\mathrm{i}c_{rs}{}^tT_t \text{ mit } T_r^\dagger=T_r,\ [T_r,P_a]=0=[T_r,M_{ab}]\,. \tag{2.45}$$

Die Strukturkonstanten $c_{rs}{}^t$ sind reell. An der Cartan-Metrik $g_{rs}=c_{rt}{}^uc_{su}{}^t=g_{sr}$ kann man einiges ablesen, z.B. ob die Lie-Algebra halbeinfach ist. Die Bedingung dafür ist $\det(g)\neq 0$. Die Lie-Algebra ist halbeinfach und kompakt, wenn g negativ definit ist (beispielsweise su(2)). Neu sind die $\mathcal{F}$-Typ-Generatoren. Diese werden in der Sl(2,$\mathbb{C}$) irreduziblen Darstellung $(I/2,J/2)$ betrachtet. HŁS-Ergebnis: $(1/2,0)$, $(0,1/2)$; es gibt also keine $\mathcal{F}$-Generatoren mit Spin $\geq 3/2$.

$$[M_{ab},Q_\alpha{}^A]=\frac{1}{2}(\sigma_{ab})_\alpha{}^\beta Q^A_\beta \text{ mit } A=1,\,\ldots,\,N\,. \tag{2.46}$$

Dies zeigt, das Q^A ein $(1/2,0)$-Spinor ist.

$$[M_{ab},\overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A]=\frac{1}{2}(\overline{\sigma}_{ab})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}{}_A \text{ mit } \overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A=(Q^{\alpha A})^\dagger\,. \tag{2.47}$$

$\dot\alpha$ wird mit dem ε-Symbol nach oben gezogen. Mit $Q_\alpha{}^A$ tauchen auch die hermitesch adjungierten $\overline{Q}_{\dot\alpha A}$ in der Superalgebra auf. Auf Blatt 9 in Aufgabe 22 zeigen wir:

$$[P_a,Q_\alpha{}^A]=0=[P_a,\overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A]\,, \tag{2.48}$$

$$[T_r,Q_\alpha{}^A]=-s_r{}^A{}_BQ_\alpha{}^B \text{ und } [T_r,\overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A]=\overline{Q}^{\dot\alpha}{}_Bs_r{}^B{}_A\,. \tag{2.49}$$

Das heißt, es gilt $(s_r^\dagger)^B{}_A=(s_r)^B{}_A$.

$$\{Q_\alpha{}^A,\overline{Q}^{\dot\beta}{}_B\}=-2\delta^A{}_B(\sigma^a\varepsilon)_\alpha{}^{\dot\beta}P_a\,. \tag{2.50}$$

Das Minuszeichen folgt aus der Positivität von H. Es treten auf der rechten Seite beispielsweise keine M_{ab} ($M_{(\alpha\beta)}$, $M_{(\dot\alpha\dot\beta)}$) auf, da aus der Jacobi-Identität $[\{Q,\overline{Q}\},P]=0$ folgt und dann mit $[Q,P]=0$, $[M,P]\neq 0$ ein Widerspruch entsteht. $\delta^A{}_B$ ergibt sich durch eine geeignete Basiswahl.

$$\{Q_\alpha{}^A,Q_\beta{}^B\}=2\varepsilon_{\alpha\beta}Z^{AB} \text{ mit } Z^{AB}=a^{ABr}T_r=-Z^{BA}\,. \tag{2.51}$$

Z^{AB} ist bosonisch und antisymmetrisch bezüglich beider Indizes. Es treten keine P's auf: $c^{AB\gamma\dot\gamma}P_{\gamma\dot\gamma}$.

$$\{\overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A,\overline{Q}^{\dot\beta}{}_B\}=2\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta}Z_{AB}\,. \tag{2.52}$$

Es gilt $(Z^{AB})^\dagger=Z_{BA}=-Z_{AB}$ und $Z_{BA}=a^*{}_{BA}{}^rT_r$.

$$[Z^{AB},X]=0=[Z_{AB},X] \text{ mit } X\in\{P,M\}\,, \tag{2.53}$$

$$[Z^{AB},Z^{CD}]=0=[Z_{AB},Z_{CD}] \text{ und } [Z_{AB},Q]=0=[Z_{AB},\overline{Q}]\,. \tag{2.54}$$

Dies zeigen wir auf Blatt 9, Aufgabe 23. Z^{AB} und Z_{AB} liegt dann im Zentrum der Super-Lie-Algebra. Deshalb bezeichnet man Z^{AB} auch als **zentrale Ladungen**. Hat P die Dimension $+1$, so folgt $[Q]=1/2=[\overline{Q}]$ und $[T_r]=0=[M_{ab}]$, $[Z]=1$. (Man benötigt massenbehaftete Parameter.) Für $N=1$ (einfache Supersymmetrie) gibt es keine Z_{AB}. Der Antikommutator der Q's verschwindet dann. Es gelten nun folgende Beziehungen:

i) Jacobi-Identität mit Q, $\overline{Q}$ und T: $s^*{}_{rB}{}^A = s_r{}^A{}_B$ ($s_r^+ = s_r$).

Als Übung kann man zeigen: $0 = [(s_r^*)_B{}^A - (s_r)^A{}_B](\sigma^a\varepsilon)_\alpha{}^{\dot\beta}P_a$.

ii) (TTQ): $s_r{}^A{}_C a^{CBt} + s_r{}^B{}_C a^{ACt} = 0$.

Nach (i) gilt $s_r{}^B{}_C a^{ACt} = a^{ACt} s^*_{rC}{}^B$. Einerseits sagt (ii), dass $s_r a^t = a^t(-s_r^*)$, das heißt $a^\dagger$ vermittelt zwischen den zwei Darstellungen s_r und $-s_r{}^*$ der inneren Algebra. Andererseits ist a^{CBt} ein **invaranter** Tensor unter einer s_r-Transformation (wobei r fix ist). Ist bei einer inneren Symmetrie-Algebra ein antisymmetrischer Tensor invariant, so spricht man von einer symplektischen Transformation.

iii) $a^{ABr}c_{rs}{}^t = 0$, da $0 = [Z^{AB}, T_r] = a^{ABs}[T_s, T_r] = \mathrm{i}a^{ABr}c_{rs}{}^t T_t$.

Dies zeigen wir auf Blatt 9, Aufgabe 23. Die T_t sind linear unabhängig.

iv) $a^{ABr}s_r{}^D{}_C = 0$.

Dies folgt aus $0 = [Z^{AB}, \overline{Q}^{\dot\gamma}{}_C]$ (Blatt 9).

2.4 $N = 1$, Poincaré-Supersymmetrie $(D = 4)$

Die Superalgebra der sogenannten einfachen Supersymmetrie lautet:

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 2(\sigma^a)_{\alpha\dot\beta}P_a \text{ mit } Q_\alpha \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ und } \overline{Q}_{\dot\alpha} \left(0, \frac{1}{2}\right) \mapsto Q_{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \overline{Q}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{(Majorana)}\,, \tag{2.55}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 = \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\}\,. \tag{2.56}$$

Möglicherweise kommt die sogenannte R-Symmetrie hinzu:

$$[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha,\ [R, \overline{Q}_{\dot\alpha}] = \overline{Q}_{\dot\alpha} \text{ mit } R = R^+\,. \tag{2.57}$$

2.4.1 Darstellungen auf dem Superraum

Sei $z \triangleq (x^a, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}) \in \mathbb{R}^{4,4} = R^4_c \times R^4_a$.

$$\widehat{P}_a = \mathrm{i}\partial_a = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^a},\ \widehat{Q}_\alpha = \mathrm{i}(\partial_\alpha + \mathrm{i}\,{}_\alpha(\sigma^a\overline{\theta})\partial_a) \text{ mit } \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha},\ \partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha{}^\beta,\ \overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,, \tag{2.58}$$

$$\widehat{\overline{Q}}^{\dot\alpha} = \mathrm{i}(\overline{\partial}^{\dot\alpha} + \mathrm{i}\,{}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^a\theta)\partial_a)\,. \tag{2.59}$$

Den Beweis, dass keine $\mathcal{F}$-Typ-Generatoren mit Spin $\geq 3/2$ auftreten, kann man in Wess-Bagger, Seiten 4,5 finden. Von den zwei Casimir-Operatoren der Poincaré-Algebra $M^2 = P^aP_a$ und $W^2 = W^aW_a$ mit dem Pauli-Lubanski-Vektor $W_a = -1/2\varepsilon^{abcd}P_bM_{cd}$ bleibt M^2 weiterhin Casimir-Operator, aber W^a muss geändert werden:

$$W^a_{\text{neu}} := W^a + \text{const.}[\theta^A{}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta A}](\overline{\sigma})^{\dot\beta\dot\alpha}\,. \tag{2.60}$$

Der zweite Casimir ist dann

$$-P^2W^2_{\text{neu}} + (P^aW_{a,\text{neu}})^2\,, \tag{2.61}$$

mit Eigenwerten

$$(m^2)^2Y(Y+1)\,,\quad Y = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots \qquad \text{(Superspin)}\,. \tag{2.62}$$

2.4.2 Superfelder

Wir verwenden im Folgenden die Kurzschreibweise

$$\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} \to \overline{\theta}\,\overline{\theta}\,,\quad \theta^\alpha\theta_\alpha \to \theta\theta\,, \tag{2.63}$$

um Indizes zu sparen und wollen die Superfelder mit $\phi(z)$ bzw. $\phi_\jmath(z)$ bezeichnen, wobei $\jmath$: $(I/2, J/2)$ die irreduzible SL(2,ℂ) angibt, also beispielsweise $\phi_{\underbrace{\alpha\beta},\dot\gamma}(z)$, $\phi_{\alpha,\dot\beta}$. Diese Felder besitzen nun drei Eigenschaften:

i) Definierter Grad: $\mathrm{Grad}(\phi_\jmath) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad I+J \text{ gerade,} \\ 1 & \text{für} \quad I+J \text{ ungerade.} \end{cases}$

ii) Die Taylor-Entwicklung in θ^α, $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ bricht ab (Blatt 10, Aufgabe 24).

Betrachten wir das Beispiel $\jmath = \emptyset$, also $I = J = 0$ (skalares Superfeld).

$$\begin{aligned}\phi(z) \equiv \phi(x,\theta,\overline{\theta}) &= C(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) + (\theta\theta)M(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}N(x) + \\ &+ (\theta^\alpha\sigma^a\overline{\theta}_{\dot\alpha})V_a(x) + (\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\mu}^{\dot\alpha}(x) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\theta^\alpha\lambda_\alpha(x) + (\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})D(x)\,. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Es gilt $\theta\sigma^a\overline{\theta} = 2\theta^\alpha\overline{\theta}^{\dot\alpha}V_{\alpha\dot\alpha}(x)$. Die Freiheitsgrade im komplexen $\phi(x)$ ($\jmath = \emptyset$, also $I = J = 0$) sind $2\cdot 8|2\cdot 8$ reelle a- bzw. c-Felder (austariert). Übung: Die Generatoren für die N-erweiterte Supersymmetrie waren ${Q^\alpha}_A$ und ${\overline{Q}_{\dot\alpha}}^A$ für $D = 4$, $z \mathrel{\hat=} (x^a,\ {\theta_\alpha}^A,\ {\overline{\theta}^{\dot\alpha}}_A)$ für $A = 1, \ldots, N$.

Mit dem SL(2,$\mathbb{C}$)-Index $\jmath$betrachten wir das Superfeld

$$\phi_\jmath = \phi_{\underbrace{\alpha\beta},\dot\gamma}(z) = \psi_{\underbrace{\alpha\beta},\dot\gamma}(x) + \theta^\gamma C_{\underbrace{\alpha\beta},\dot\gamma,\gamma} + \ldots\,. \tag{2.65}$$

Man sortiert dann die gepunkteten und ungepunkteten Indizes.

iii) Die Transformation bezüglich $(P, Q, \overline{Q})$ ist linear, weil es sich um lineare Differentialoperatoren auf dem Superraum handelt.

$$\delta\phi_\jmath \equiv \phi'_\jmath(z) - \phi_\jmath(z) = \mathrm{i}(\xi^\alpha Q_\alpha + \overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{\xi}^{\dot\alpha} + c^a P_a)\phi_\jmath(z)\,. \tag{2.66}$$

(Die Rechnung ist analog zu Blatt 4, Aufgabe 9.) Der einzige Unterschied ist, dass diese Objekte SL(2,$\mathbb{C}$)-Indizes haben und unter Lorentz-Transformationen transformieren. Für ein skalares Superfeld gilt $\phi'(z'(z)) = \phi(z)$. $\phi_{\alpha,\dot\alpha}(z)$ ist ein Vektorsuperfeld. (In der Literatur bezeichnet man oft ein skalares reelles Superfeld ($\phi(z) = \phi^*(z)$) als Vektorsuperfeld. Darauf werden wir später näher eingehen.) Die entsprechenden Superraumtransformationen $z' = z'(z)$ sind $x'^a = x^a + c^a + \mathrm{i}\xi\sigma^a\overline{\theta} - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\xi}$, $\theta'^\alpha = \theta^\alpha + \xi^\alpha$ und $\overline{\theta}'_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}$. Dies sind infinitesimale Transformationen für kleine c, ξ und $\overline{\xi}$. Endliche Transformationen besitzen aber dieselbe Gestalt (Übung). Die Komponentenfelder transformieren sich folgendermaßen:

$$\delta\phi_\jmath = \delta C_\jmath(x) + \theta^\alpha\delta\psi_{\jmath_\alpha} + \ldots + (\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\delta D_\jmath(x)\,, \tag{2.67}$$

$$\delta\phi_\jmath = -(\xi^\alpha\partial_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\partial}^{\dot\alpha} + \mathrm{i}\xi\sigma^a\overline{\theta}\partial_a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\xi}\partial_a + c^a\partial_a)\phi_\jmath(z)\,. \tag{2.68}$$

Durch Vergleich der beiden Ausdrücke kann man dann eine Tabelle aufstellen. (Dies soll auf Blatt 10 in Aufgabe 26 gemacht werden). Beispielsweise gilt:

$$\delta C_\jmath = -(c^a\partial_a C_\jmath + \xi^\alpha\psi_{\jmath,\alpha} + \overline{\xi}_{\dot\alpha}{\overline{\chi}_\jmath}^{\dot\alpha})\,, \tag{2.69}$$

$$\delta D_\jmath = -\left(c^a\partial_a D_\jmath - \frac{\mathrm{i}}{2}\xi\sigma^a\partial_a\overline{\mu}_\jmath - \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^a\partial_a\lambda_\jmath\right)\,. \tag{2.70}$$

Wenn ξ und $\overline{\xi}$ nicht von x abhängen (ungeeichte SUSY), lässt sich die Ableitung herausziehen. Dann gilt:

$$\delta D_\jmath = -\partial_a\left(c^a D_\jmath - \frac{\mathrm{i}}{2}\xi\sigma^a\overline{\mu}_\jmath - \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^a\lambda_\jmath\right)\,. \tag{2.71}$$

2.4.3 Kovariante Ableitungen

Wir benötigen kovariante Ableitungen bezüglich der P, Q und $\overline{Q}$-Transformationen. Die gewöhnliche Ableitung ist kovariant, weil sie mit $\widehat{P}$, $\widehat{Q}$, $\widehat{\overline{Q}}$ vertauscht. Jedoch ist ∂_α nicht kovariant! Man erweitert diese Ableitung zu einem Objekt D_α, für das $\{D_\alpha, \widehat{\overline{Q}}_{\dot\alpha}\} = 0$ gilt. Wir berechnen $D_\alpha\widehat{\overline{Q}}_{\dot\alpha} = \mathrm{i}(-\mathrm{i}(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\partial_a + \ldots$ und $\widehat{\overline{Q}}_{\dot\alpha}D_\alpha$ und finden schließlich $D_\alpha = \partial_\alpha - \mathrm{i}(\sigma^a\overline{\theta})\partial_a$. Entsprechend kann man zeigen, dass $\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + \mathrm{i}(\theta\sigma^a)_{\dot\alpha}\partial_a$ kovariant ist. Als Übung kann man folgendes ausrechnen, indem man die Reihenfolge der Symbole dreht:

$$(\varrho^\alpha D_\alpha\phi_\jmath(z))^* = \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{\varrho}^{\dot\alpha}(\phi_\jmath(z))^* = \overline{\varrho}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}(\phi_\jmath(z))^*\,. \tag{2.72}$$

Die Superalgebra von D und $\overline{D}$ lautet:

$$\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\} = 2\mathrm{i}(\sigma^a)_{\alpha\dot\alpha}\partial_a \text{ und } \{D_\alpha, D_\beta\} = 0 = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\}\,. \tag{2.73}$$

Damit verschwinden Ausdrücke der Form $D_\alpha D_\beta D_\gamma \phi_{\jmath}(z)$. Auf Blatt 10 in Aufgabe 27 berechnen wir beispielsweise $[D^\alpha D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}]$ und zeigen auch, dass $D^\alpha \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha} D_\alpha = \overline{D}_{\dot\alpha} D^\alpha D_\alpha \overline{D}^{\dot\alpha}$ gilt.
Mit $\phi_{\jmath}(z)$ sind auch $D\phi_{\jmath}(z)$, $\partial_a \phi_{\jmath}(z)$ und $\overline{D}\phi_{\jmath}(z)$ Superfelder mit entsprechendem Grad. Neben den D und $\overline{D}$ gibt es noch weitere kovariante Operationen. Mit $\phi_{\jmath}$ ist $(\phi_{\jmath})^*$ ein Superfeld. Dies hat zur Folge, dass ϕ^* vom Typ $\phi^*_{J/2,I/2}$ ist. Falls $I = J$ ist, kann man $(\phi_{\jmath})^* = \phi_{\jmath}$ setzen. Die Bedingung $\phi^*(z) \stackrel{!}{=} \phi(z)$ ist auch eine kovariante Einschränkung.

2.4.4 Regeln zum Rechnen mit Superfeldern

i) $c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ ist Superfeld, wenn ϕ_1 und ϕ_2 Superfelder sind. c_1 und c_2 sind c- oder a-Zahlen. Die beiden Ausdrücke sollen immer in ihren Graden übereinstimmen.

ii) Multiplizieren: δ ist linear und es gilt die kommutierende Produktregel:

$$\delta(\phi_1 \dots \phi_n) = (\delta\phi_1)\phi_2 \dots \phi_n + \dots + \phi_1 \dots \phi_{n-1}\delta(\phi_n)\,. \tag{2.74}$$

Der Grad der ϕ spielt also keine Rolle hier.

iii) Wendet man beliebige ∂_a, D und $\overline{D}$-Operatoren auf $\phi_{\jmath}$ an, so ergibt sich wieder ein Superfeld.

iv) Mit $\phi_{\jmath}$ ist auch $\phi^*_{\jmath}$ ein Superfeld, falls $I = J$ gilt.

Nun wollen wir uns zu verschiedenen Modellen der Supersymmetrie vorarbeiten. Die Komponenten der Superfelder zusammen mit den Transformationsgesetzen mit ξ, $\overline{\xi}$ und c bilden ein **Multiplett**. Diese Komponenten transformieren untereinander, also ist das ϕ-Feld unter Transformationen abgeschlossen. Wir wollen das Multiplett zu $\phi(z)$ (16—16) verkleinern, suchen als echte Untermultipletts. Eine Art der Einschränkung ist $\phi(z) = \phi^*(z)$. Auch ist es möglich die Bedingung $\partial_a\phi(z) = 0$ an das Superfeld zu stellen. Man erhält dann ein von x-unabhängiges Superfeld, also $\phi(\theta, \overline{\theta})$. Hier wollen wir mit der Bedingung $\overline{D}_{\dot\alpha}\phi(z) = 0$ als kovariante Einschränkung weiterarbeiten. Dazu macht man eine Variablentransformation $z = (x, \theta, \overline{\theta}) \mapsto z^{(1)} = (x^{a\,(1)}, \theta^{(1)}, \overline{\theta}^{(1)})$, so dass $\overline{D}_{\dot\alpha}$ übergeht in $\overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}$. Dann ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}\varphi(z^{(1)}) = 0 \text{ mit } \varphi(z^{(1)}) = \phi(z(z^{(1)}))\,. \tag{2.75}$$

Die Lösung $\varphi({x^{(1)}}^a, {\theta^{(1)}}^\alpha)$ im (1)-Superraum wird dann wieder in $\phi(z) = \varphi(x^{(1)}(z), \theta^{(1)}(z))$ (mit den Komponenten $A(x^{(1)})$, $\sqrt{2}\phi(x^{(1)})$ und $F(x^{(1)})$) umgerechnet. Die Lösung zum Problem $\overline{D}_{\dot\alpha}\phi(z) = 0$ nennt man chirales Superfeld und entsprechend die Lösung von $D_\alpha\widehat{\phi}(z) = 0$ antichirales Superfeld (Multiplett). [14] verwendet noch die falsche Bezeichnung „skalare Superfelder“, da kein Vektorfeld vorkommt.
Es sei im folgenden $z^{(1)} = z^{(1)}(z)$.

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} \equiv \overline{\partial}_{\dot\alpha} = \frac{\partial x^{a\,(1)}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial^{(1)}_a} + \frac{\partial{\theta^{(1)}}^\beta}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial{\theta^{(1)}}^\beta} + \frac{\partial\overline{\theta}^{(1)}_{\dot\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\frac{\partial}{\partial{\overline{\theta}^{(1)}}_{\dot\beta}}\,, \tag{2.76}$$

$$\partial_a = \delta_a{}^b\partial^{(1)}_b + 0 + 0 = \partial^{(1)}_a\,. \tag{2.77}$$

Dies gilt, falls $\theta^{(1)}$ von x unabhängig ist. Damit $\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + \mathrm{i}(\theta\sigma^a)_{\dot\alpha}\partial_a$ zu $\overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}$ wird, muss im Ansatz

$${x^{(1)}}^a \equiv y^a = x^a + \lambda\mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta},\, {\theta^{(1)}}^\alpha = \theta^\alpha\,, \quad \lambda = -1\,, \quad \overline{\theta}^{(1)}_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha}\,, \tag{2.78}$$

gesetzt werden.

$${x^{(1)}}^a = y^a = x^a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta},\,, \quad {\theta^{(1)}}^\alpha = \theta^\alpha\,, \quad {\overline{\theta}^{(1)}}_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha} \qquad (\text{chiraler Superraum}\mathbb{C}^{4,2})\,. \tag{2.79}$$

Analog verfährt man f+r ein antichirales Superfeld, indem der komplexe Superraum

$$z^{(2)} = ({x^{(2)}}^a, {\theta^{(2)}}^\alpha, {\overline{\theta}^{(2)}}_{\dot\alpha}) = (x^a + \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha})\,, \tag{2.80}$$

verwendet wird.

2.4.5 Chirale und antichirale Superfelder

Darstellung auf $\mathbb{R}^{4,4}$-Superraum z

$$\widehat{P}_a = \mathrm{i}\partial_a,\ \widehat{Q}_\alpha = \mathrm{i}(\partial_\alpha + \mathrm{i}\,{}_\alpha(\sigma^a\overline{\theta})\partial_a) \text{ und } \widehat{Q}^{\dot\alpha} = \mathrm{i}(\overline{\partial}^{\dot\alpha} + \mathrm{i}\,{}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^a\theta)\partial_a)\,. \tag{2.81}$$

Kovariante Ableitungen sind ∂_a und $D_\alpha = \partial_\alpha - \mathrm{i}\,{}_\alpha(\sigma^a\overline{\theta})\partial_a$ und außerdem $\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + \mathrm{i}(\theta\sigma^a)_{\dot\alpha}\partial_a$.

a) Chirale Superfelder: $\overline{D}_{\dot\alpha}\phi(z) = 0$ (chiraler Superraum (komplex))

Wir gehen aus von den Transformationen $x^{(1)^a} = y^a = x^a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}$, $\theta^{(1)^\alpha} = \theta^\alpha$ und $\overline{\theta}^{(1)}_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha}$.

$$\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}|_{z^{(1)}=z^{(1)}(z)} \Rightarrow \overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}\varphi(z^{(1)}) = \overline{\partial}^{(1)}_{\dot\alpha}\phi(z(z^{(1)})) = 0\,. \tag{2.82}$$

Die Lösung ist dann gegeben durch:

$$\varphi(z^{(1)}) = \varphi(x^{(1)},\theta^{(1)}) = A(x^{(1)}) + \theta^{(1)^\alpha}\sqrt{2}\psi_\alpha(x^{(1)}) + (\theta^{(1)}\theta^{(1)})F(x^{(1)})\,. \tag{2.83}$$

Wir rechnen $\phi(z) = \varphi(z^{(1)}(z))$ aus und entwickeln:

$$\phi(z) = A(x^a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x^a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}) + (\theta\theta)F(x^a - \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta})\,, \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned}\phi(z) &= A(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) + (\theta\theta)F(x) + \text{chirale Ergänzung} = \\ &= A(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) + \theta\theta F(x) + \theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\partial_a A) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\theta\sigma^a\overline{\theta})(\theta\sigma^b\overline{\theta})\partial_a\partial_b A + \mathrm{i}(\overline{\theta}\overline{\sigma}^a\theta)\sqrt{2}(\theta^\alpha\partial_a\psi_\alpha)\,.\end{aligned} \tag{2.85}$$

Hierbei benötigen wir nun folgende Beziehungen:

$$\mathrm{i}(\overline{\theta}\overline{\sigma}^a\theta)\sqrt{2}(\theta^\alpha\partial_a\psi_\alpha) = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta^\alpha\theta_\alpha)(\overline{\theta}\sigma^a\sqrt{2}\partial_a\psi)\,, \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(\theta\sigma^a\overline{\theta})(\theta\sigma^b\overline{\theta}) &= -\frac{1}{2}(\theta\sigma^a\overline{\theta})(-\overline{\theta}\overline{\sigma}^b\theta) = -\frac{1}{4}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\sigma^a\overline{\sigma}^b\theta) = \\ &= -\frac{1}{4}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\theta)\Box A \text{ mit } \Box \equiv \partial^a\partial_a\,.\end{aligned} \tag{2.87}$$

$\overline{D}_{\dot\alpha}\phi_{\mathrm{J}} = 0$ führt auf:

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{J}}(z) &= A_{\mathrm{J}}(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_{\mathrm{J}},\alpha(x) + \theta\theta F_{\mathrm{J}}(x) + \theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\partial_a A_{\mathrm{J}}) + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^a\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2}\partial_a\psi_{\mathrm{J},\alpha}\right) + \\ &\quad + (\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(-\frac{1}{4}\Box A_{\mathrm{J}}\right)\,.\end{aligned} \tag{2.88}$$

$\psi_\alpha(x)$ ist ein Weyl-Spinor. In vier Komponenten in der Weyl-Darstellung der γ-Matrizen entspricht dies dem links-chiralen Superfeld

$$\Psi_L = \frac{1+\gamma_5}{2}\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ 0\end{pmatrix}\,. \tag{2.89}$$

Wir wollen uns nun die Transformationen der Komponentenfelder A, ψ und F anschauen (Parameter ξ, $\overline{\xi}$, c^a). Für ein allgemeines Superfeld gilt:

$$\delta\phi = \phi'(z) - \phi(z) = \mathrm{i}(\xi^\alpha\widehat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\widehat{\overline{Q}}^{\dot\alpha} + c^a\widehat{P}_a)\phi(z)\,, \tag{2.90}$$

$$\delta A = -\xi^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha,\ \delta\psi_\alpha = -\xi_\alpha\sqrt{2}F + \sqrt{2}\mathrm{i}_\alpha(\sigma^a\overline{\xi})\partial_a A\,, \tag{2.91}$$

und

$$\delta F = \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\xi}\overline{\sigma}^a\partial_a\sqrt{2}\psi\cdot 2 = \partial_a\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\overline{\xi}\sigma^a\psi\right)\,. \tag{2.92}$$

Für chirale Superfelder transformiert schon F in eine Raum-Zeit-Ableitung.

b) Wir wollen nun $D_\alpha \chi(z) = 0$ (auch mit SL$(2,\mathbb{C})$-Indizes $\jmath$: $\chi_\jmath$) im antichiralen Superraum lösen. Dazu werden folgende Transformationen benötigt:

$$x^{(2)} = x^a + \mathrm{i}\theta^\alpha \sigma^a \overline{\theta}_{\dot\alpha},\ \theta^{\alpha\,(2)} = \theta^\alpha \text{ und } \overline{\theta}^{(2)}_{\dot\alpha} = \overline{\theta}_{\dot\alpha}\,. \tag{2.93}$$

$$\partial^{(2)}_\alpha \chi(z^{(2)}) = 0,\ \chi(z^{(2)}) = \chi(x^{(2)}, \overline{\theta}^{(2)})\,. \tag{2.94}$$

$$\chi(z^{(2)}) = B(x^{(2)}) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x^{(2)}) + (\overline{\theta}^{(2)}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha\,(2)})G(x^{(2)})\,, \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}\chi(z) = \chi(z^{(2)}(z)) &= B(x + \mathrm{i}\theta^\alpha\sigma^a\overline{\theta}_{\dot\alpha}) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x + \mathrm{i}\theta\sigma^a\overline{\theta}_{\dot\alpha}) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})G(x) = \\ &= B(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}G(x) + \text{antichirale Ergänzung}\,.\end{aligned} \tag{2.96}$$

Auch $\overline{\chi}_{\dot\alpha}$ ist ein Weyl-Spinor.

$$\chi_R(x) = \frac{1-\gamma^5}{2}\chi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}\,. \tag{2.97}$$

$$\phi(z),\, \overline{D}_{\dot\alpha}\phi = 0\ :\quad (A(x), \sqrt{2}\psi_\alpha(x), B(x))\,. \tag{2.98}$$

Für das komplex konjugierte Feld $\phi^* = \overline{\phi}$ gilt die Gleichung $D_\alpha\overline{\phi}(z) = 0$; damit ist es also antichiral. Haben die Felder einen Index $\jmath$, so funktioniert alles analog, falls die korrekten Reihenfolgen der Spinoren verwendet werden.

$$\phi = A + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha + \theta\theta F + \theta\sigma^b\overline{\theta}(-\mathrm{i}\partial_b A) + (\theta\theta)\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\overline{\theta}\sigma^a\partial_a\psi\right) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(-\frac{1}{4}\Box A\right)\,, \tag{2.99}$$

$$\overline{\phi} = A^* + \sqrt{2}\overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} + \overline{\theta}\,\overline{\theta}F^* + \theta\sigma^a\overline{\theta}(\mathrm{i}\partial_a A^*) + (\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_a\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\theta\right) + (\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(-\frac{1}{4}\Box A^*\right)\,. \tag{2.100}$$

Beispielsweise gilt:

$$\delta F^* = \partial_a\left(-\mathrm{i}\sqrt{2}\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\overline{\xi}\right)\,. \tag{2.101}$$

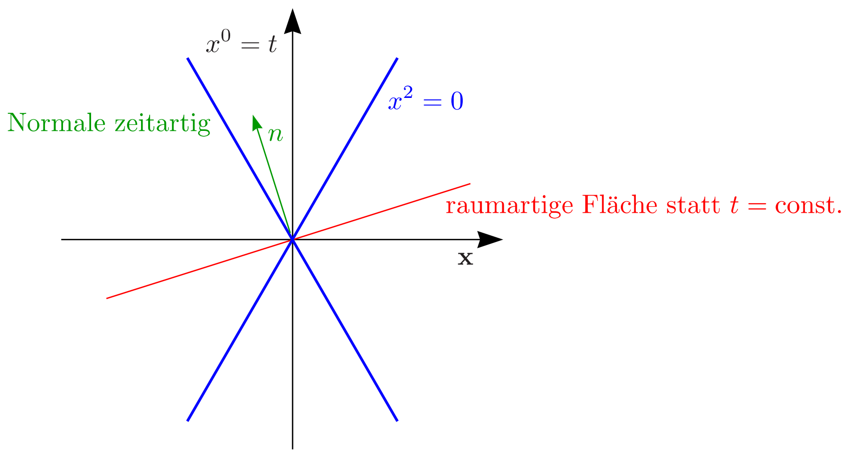
Dabei ist folgende Regel anzumerken: Produkte von chiralen [antichiralen] Superfeldern sind chiral [antichiral], weil $\overline{D}_{\dot\alpha}$, D_α lineare Differentialoperatoren sind. Es sind auch Linearkombinationen möglich, sofern der Grad homogen ist. $\phi\overline{\phi}$ ist weder chiral noch antichiral. Auf Blatt 11 in Aufgabe 28 zeigen wir, dass ein chirales Superfeld notwendig komplex ist, weil ein reelles chirales Superfeld konstant in z und damit kein Feld ist. (Dabei ist die Algebra der D, $\overline{D}$ zu benutzen.)

c) Wess-Zumino-Modell [4]:

Dies ist das einfachste ($D = 4$)-Supersymmetrie-Modell.

i) Supersymmetrie-invariante Wirkungen (S ist hier dimensionslos):

$$S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}(x) \text{ mit } [\mathcal{L}] = [4]\,. \tag{2.102}$$



Die Lagrangedichte ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \mathcal{L}(z)|_{D \text{ oder } (\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})} & \mathcal{L}(z) = \mathcal{L}^*(z) \\ \mathcal{L}(z)|_F + \overline{\mathcal{L}}(z)|_{F^*} & \overline{D}_{\dot\alpha}\mathcal{L}(z) = 0 \ (\mathcal{L} \text{ komplex}) \end{cases} . \tag{2.103}$$

Die Formvariation der Wirkung ist dann gegeben durch:

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\, \delta\mathcal{L} = -\int \mathrm{d}^4x\, \partial_b[f^b(c,\xi,\overline{\xi};\text{Felder}(x))]\,. \tag{2.104}$$

Beim Wirkungsprinzip sind die Oberflächenterme irrelevant. Wir betrachten spezielle δS mit Variationen, die am Rand feste Werte haben.

ii) Wess-Zumino-Modell (kinetischer Term)
Wir beginnen mit $\phi(z)$, $\overline{D}_{\dot\alpha}\phi = 0$ und $\overline{\phi}(z)$, $D_\alpha\overline{\phi}(z) = 0$; und interessieren uns für die Supersymmetrisierung eines komplexen Skalarfeldes (Pauli und Weisskopf (1934)).

$$\mathcal{L}(x) = \partial_a A^* \partial^a A + m^2 A^* A + \ldots\,. \tag{2.105}$$

Normierung über Poissonklammer:

$$\{\pi_A, A\} = \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A)}, A\right\} = \{\partial_0 A^*, A\} = \delta\,. \tag{2.106}$$

Das komplexe Feld A kann man in reelle Felder $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zerlegen:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\partial_a\mathcal{A}\partial^a\mathcal{A} + \frac{1}{2}\partial_a\mathcal{B}\partial^a\mathcal{B}\,. \tag{2.107}$$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(z)|_D\,, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^*\,. \tag{2.108}$$

Durch eine Dimensionsanalyse wird uns klar:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(z) = \lambda\overline{\phi}\phi\,, \quad \mathcal{L}_{\text{kin}}(x) = \mathcal{L}_{\text{kin}}(z)|_{D,x_c\mapsto x}\,, \tag{2.109}$$

$$\overline{\phi}\phi|_D = \partial_a A^*\partial^a A + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}\overline{\sigma}^a\partial_a\psi - \frac{\mathrm{i}}{2}(\partial_a\overline{\psi})\overline{\sigma}^a\psi + F^*F + \partial_b\left(-\frac{1}{4}A^*\partial^b A - \frac{1}{4}(\partial^b A^*)A\right)\,. \tag{2.110}$$

Dies erhält man beispielsweise unter Beachtung von:

$$(\theta\sigma^a\overline{\theta})(-\overline{\theta}\overline{\sigma}^b\theta)\partial_a\varphi\partial_b\varphi = \frac{1}{2}(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\theta)\partial_a\varphi\partial^a\varphi\,. \tag{2.111}$$

(Auf Blatt 11 in Aufgabe 31 soll der Noether-Strom für das Wess-Zumino-Modell berechnet werden.)
Man kann das Ganze nun in die vierkomponentige Notation mit Majorana-Spinoren umschreiben.

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}(x) \mathrel{\hat{=}} \partial_a A^*\partial^a A + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Psi}\gamma^a\partial_a\Psi + F^*F \text{ mit } \Psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_\alpha(x)\\ \overline{\psi}^{\dot\alpha}(x)\end{pmatrix}\,. \tag{2.112}$$

Der Faktor $1/2$ zeigt, dass Ψ und $\overline{\Psi}$ (Majorana-Fall) nicht voneinander unabhängig sind. Im Dirac-Fall steht hier dann ein Faktor 1. (Die Raum-Zeit-Ableitungsterme werden weggelassen, daher das Zeichen „$\hat{=}$“.)

iii) Superpotentialterme (Wechselwirkungen)

$$\mathcal{L}_{\text{s.pot}}(x) = \mathcal{L}_{\text{s.pot}}(z)|_F + \overline{\mathcal{L}}_{\text{pot}}(z)|_{F^*} \text{ mit } \mathcal{L}_{\text{s.pot}}(z) = W(\phi) = \lambda\phi + \frac{m}{2}\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3 + \ldots\,. \tag{2.113}$$

$\mathcal{L}(z)$ und $\overline{\mathcal{L}}(z)$ besitzen die Massendimension [3]. Dies ist so kontruiert, dass $\overline{D}_{\dot\alpha}\mathcal{L}_{\text{s.pot}}(z) = 0$ bzw. $\overline{D}_{\dot\alpha}W(\phi) = 0$ ist (chiral). Schauen wir uns das ganze in Komponenten an. Mit $-1/4\partial^\alpha\partial_\alpha\theta^\alpha\theta_\alpha = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{pot}}(x) &= W(\phi)|_{\theta\theta} + \text{k.K.} = \left(-\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha\right)W(\phi)\Big|_{\theta=0=\overline{\theta}} + \text{k.K.} = -\frac{1}{4}\partial^\alpha(\partial_\alpha\phi W'(\phi))|_{\theta\theta} + \text{k.K.} = \\ &= -\frac{1}{4}(\partial\partial\phi)W' + \frac{1}{4}(\partial_\alpha\phi)(\partial^\alpha\phi)W''(\phi) + \text{k.K.} = \\ &= FW'(A) + \frac{1}{4}(\sqrt{2}\psi_\alpha)(\sqrt{2}\psi^\alpha)W''(A) + \text{k.K.} = \\ &= F(x)W'(A) - \frac{1}{2}\psi^\alpha(x)\psi_\alpha(x)W''(A) + \text{k.k}\,.\end{aligned} \tag{2.114}$$

Zusammen erhalten wir folgendes Ergebnis für das Wess-Zumino-Modell:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(z) = \overline{\phi}(z)\phi(z) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}W(\phi) + \theta\theta\overline{W}(\overline{\phi}) \text{ mit } \mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(z)|_{D \text{ oder } \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\,. \tag{2.115}$$

$W(\phi)$ bezeichnet man als Superpotential und $\overline{\phi}(z)\phi(z)$ als spezielles Kählerpotential $K(\overline{\phi}, \phi)$.

iv) Komponentenversion des Wess-Zumino-Modells:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(x) \stackrel{\wedge}{=} {} & \partial_a A^* \partial^a A + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Psi}\gamma^a\partial_a\Psi + FF^* - \frac{1}{2}\psi^\alpha\psi_\alpha W''(A) - \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}\overline{W}''(A^*) + \\ & + FW'(A) + F^*\overline{W}'(A^*)\,.\end{aligned}} \tag{2.116}$$

Auf Blatt 8 in Aufgabe 19a.) hatten wir gelernt, wie man Zweier-Spinoren in Vierernotation umschreibt:

$$\psi^\alpha\psi_\alpha = \overline{\Psi}\frac{1+\gamma^5}{2}\Psi \text{ und } \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}\frac{1-\gamma^5}{2}\Psi \text{ mit } \Psi = \begin{pmatrix}\psi^\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \text{ und } \gamma^5 \equiv \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}. \tag{2.117}$$

Ψ ist ein Majorana-Spinor im chiralen Multiplett. Es gilt also:

$$\psi^\alpha\psi_\alpha = \overline{\Psi_R}\Psi_L \text{ und } \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi_L}\Psi_R \text{ mit } \Psi_R = \frac{1-\gamma^5}{2}\Psi,\ \Psi_L = \frac{1+\gamma^5}{2}\Psi\,. \tag{2.118}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen zeigen, dass F und F^* Hilfsfelder sind, die eliminiert werden sollen. Hierbei beachten wir, dass F und F^* voneinander unabhängige komplexe Größen sind. Für F^* erhält man dann die Gleichung $F = -\overline{W}'(A^*)$ und für F die Gleichung $F^* = -W'(A)$.

$$\mathcal{L}^{\mathrm{p.o.sh}}_{\mathrm{WZ}}(x) \stackrel{\wedge}{=} \partial_a A^* \partial^a A + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Psi}\gamma^a\partial_a\Psi - \frac{1}{2}\psi\psi W''(A) - \frac{1}{2}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}\overline{W}''(A^*) - |W'(A)|^2\,. \tag{2.119}$$

Wir identifizieren das gewöhnliche Potential der Lagrangedichte, also alle Terme ohne Ableitungen und ohne Spinoren. Dieses ist $V = |W'(A)|^2 \geq 0$.

- ✳ Die Superalgebra ist nur „on-shell“ geschlossen, d.h. man braucht ψ-, $\overline{\psi}$-Bewegungsgleichungen. Nichtlineare (im allgemeinen ist W' nicht linear) Supersymmetrie für δA, $\delta\psi^\alpha$. $\delta\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$)
- ✳ Weiterhin stellt sich heraus, dass $\delta\mathcal{L}^{\mathrm{p.o.sh}}$ einen Term $\partial_b v^b$ gibt auch mit den nichtlinearen Transformationen. Hier benötigt man keine Bewegungsgleichung (Blatt 11, Aufgabe 31).
- ✳ Man kann überprüfen, ob die Variation der verwendeten Hilfsfeldgleichung mit den Variationen zusammenpasst, also $\delta F = -\delta\overline{W}'(A^*)$.

Als Übung kann man außerdem die Bewegungsgleichungen berechnen. Für A^*, A, ψ^α und $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ lauten diese:

$$0 = -\Box A - \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi\psi}W'''(A^*) - W'(A)\overline{W}''(A^*)\,, \tag{2.120}$$

$$\mathrm{i}(\sigma^a\partial_a\overline{\psi}) - \psi_\alpha W''(A) = 0\,. \tag{2.121}$$

Man kann die Spinorgleichungen auch in der Vierernotation angeben. Sie entstehen aus

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Psi}\gamma^a\partial_a\Psi = \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi\sigma^a\partial_a\overline{\psi} + \overline{\psi}\overline{\sigma}^a\partial_a\psi)\,, \tag{2.122}$$

wobei $\overline{\psi}$, ψ nicht unabhängig variiert werden. Auf der Massenschale (Euler-Lagrange-Gleichung und Bewegungsgleichungen verwendet) hat man $(A(x), \psi_\alpha)$, d.h. $2-2$ Freiheitsgrade.
Ein spezielles Wess-Zumino-Modell ist folgendes:

$$W(\phi) = \lambda\phi + \frac{m}{2}\phi^2 + \frac{g}{3!}\phi^3\,. \tag{2.123}$$

Später wird dies motiviert von der Forderung der UV-Renormierbarkeit („UV“ bedeutet große Impulse).

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{WZ}} = \int \mathrm{d}^4x \Bigg(& \partial^a A^*\partial_a A + \mathrm{i}\psi\sigma^a\partial_a\overline{\psi} - \left|\lambda + mA + \frac{g}{2}A^2\right|^2 - \frac{1}{2}(m+gA)\psi^\alpha\psi_\alpha - \\ & + \frac{1}{2}(m^*+g^*A^*)\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}\Bigg)\,.\end{aligned} \tag{2.124}$$

Der Massenterm für einen Majorana-Spinor in Vierernotation ist gegeben durch:

$$\boxed{-\frac{1}{2}m\overline{\Psi_R}\Psi_L - \frac{1}{2}m^*\overline{\Psi_L}\Psi_R} \overset{m=m^*}{=} -\frac{1}{2}m\overline{\Psi}\Psi\,. \tag{2.125}$$

(Falls $m \neq m^*$, kommt auch ein Term der Form $\overline{\Psi}\gamma^5\Psi$ hinzu.) Später wollen wir das ganze hier für einen Satz von chiralen Superfeldern ϕ_i ($i = 1, \ldots, n$; $\overline{D}_{\dot\alpha}\phi_i = 0$) aufschreiben. Dies machen wir beispielsweise, um Dirac-Spinoren

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \tag{2.126}$$

zu bekommen.

v) R-Symmetrie im Superraum:
Es gilt $[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha$ und $[R, \overline{Q}_{\dot\alpha}] = \overline{Q}_{\dot\alpha}$, wobei R hermitesch ist, also $R = R^\dagger$ gilt. Dies ist eine innere Symmetrie, wenn man nur Translationen und Lorentz-Transformationen betrachtet. Es ist jedoch eine nichttriviale innere Symmetrie im Superraum, da obige Kommutatoren nicht verschwinden.

$$[R, P_a] = 0 = [R, M_{ab}]\,. \tag{2.127}$$

Die R-Transformation ist eine U(1)-Transformation. Man kann in $z = 0$ die Bedingung $\Phi'(0) = \exp(\mathrm{i}r_\phi\alpha)\Phi(0)$ vorgeben, wobei $\alpha = \alpha^*$ ein Parameter und r_ϕ das reelle R-Gewicht von Φ ist. Infinitesimal sieht die Transformation folgendermaßen aus:

$$\delta\Phi|_0 = \mathrm{i}\alpha r_\phi\Phi(0)\,. \tag{2.128}$$

Nun fordern wir Gleichungen folgender Art:

i) $\exp(\mathrm{i}G(x,\theta,\overline{\theta}))\Phi(0)\exp(-\mathrm{i}G(x,\theta,\overline{\theta})) = \Phi(z)$ mit $G(x,\theta,\overline{\theta}) = x^aP_a + \theta^\alpha Q_\alpha + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}$.

ii) $\Phi'(z') = \exp(\mathrm{i}\alpha r_\phi)\Phi(z)$, Variation: $\widehat{\delta}\Phi \equiv \Phi'(z') - \Phi(z) = \mathrm{i}\alpha r_\phi\Phi(z)$.

iii) Wir stellen die R-Transformation im Hilbert-Raum dar:

$$\exp(\mathrm{i}\alpha R)\Phi(z)\exp(-\mathrm{i}\alpha R) = \exp(-\mathrm{i}\alpha r_\phi)\Phi(z')\,. \tag{2.129}$$

Infinitesimal:

$$\Delta\Phi = \Phi(z') - \Phi(z) = \mathrm{i}\alpha[R, \Phi(z')] = \mathrm{i}\alpha r_\phi\Phi(z') = \mathrm{i}\alpha r_\phi\Phi(z)\,, \tag{2.130}$$

wobei in erster Ordnung nur $z' = z$ beiträgt.

iv) $\delta\Phi = \widehat{\delta}\Phi - \Delta\Phi = -\mathrm{i}\alpha[R, \Phi(z)]$ $\widehat{\delta}\Phi$ verschwindet hier nicht (vergleiche Blatt 3, Aufgabe 2).

v) R-Transformationen lassen den Nullpunkt invariant, also $z = 0 \mapsto z' = 0$.

vi) $[R, \Phi(z)] = -\widehat{R}(z)\Phi(z)$ (von Blatt 3).
$\widehat{R}(z)$ ist die Darstellung von R auf dem Superraum. Unter Verwendung der Identität (iv) folgt:

$$\delta\Phi = -\mathrm{i}\alpha[R, \Phi] = \mathrm{i}\alpha\widehat{R}(z)\Phi(z)\,. \tag{2.131}$$

Für $z = 0$ gilt:

$$\delta\Phi|_0 = \widehat{\delta}\Phi|_0 = \mathrm{i}\alpha r_\phi\Phi(0)\,, \tag{2.132}$$

und mit iv) und vi) folgt

$$\frac{\mathrm{i}}{\alpha}\delta\Phi|_0 = [R, \Phi(0)] = -\widehat{R}(0)\Phi(0) = -r_\phi\mathbb{1}\Phi(0)\,, \quad \text{also } \widehat{R}(0) = r_\phi\mathbb{1}\,. \tag{2.133}$$

Man definiert dann eine neue Größe:

$$\widetilde{R}(z) = \exp(\mathrm{i}G(x,\theta,\overline{\theta}))R\exp(-\mathrm{i}G(x,\theta,\overline{\theta})) = R + \mathrm{i}(\theta Q - \overline{\theta Q}) + 2\theta\sigma^a\overline{\theta}P_a\,. \tag{2.134}$$

Damit gilt mit der obigen Gleichung $[\widetilde{R}(z), \Phi(z)] = -r_\phi\Phi(z)$ und zum Schluss erhalten wir:

$$\delta\Phi|_z = \mathrm{i}\alpha\widehat{R}(z)\Phi(z) = \mathrm{i}\alpha[r_\phi - \mathrm{i}(\theta\widehat{Q} - \widehat{\overline{\theta Q}}) - 2\theta\sigma^a\overline{\theta}\widehat{P}_a]\Phi(z) = \mathrm{i}\alpha(r_\phi + \theta\theta + \overline{\theta}\,\overline{\theta})\Phi(z)\,. \tag{2.135}$$

Eine analoge Rechnung kann für Lorentz-Transformationen durchgeführt werden.

2.5 Supersymmetrie und abelsche Eichtheorie

a) Reelles skalares Superfeld (skalares $\jmath = (0,0)$)

Gesucht ist die supersymmetrische Verallgemeinerung eines reellen Vektorfeldes $v_a(x) = v_a^*(x)$, also ein Superfeld $\phi(z)$ ohne Index, das reell ist ($\phi(z) = \phi^*(z) \equiv \overline{\phi}(z)$). Für die weitere Behandlung von Eichtheorien wollen wir das $\phi(z)$ als $V(z)$ bezeichnen. V hat die Form $\ldots + \theta\sigma^a\overline{\theta}v_a(x) + \ldots$ (supersymmetrie-kovariante Einschränkung) und wird manchmal auch als Vektorsuperfeld bezeichnet (obwohl es keinen Index hat).

$$\begin{aligned} V(z) &= C(x) + \theta^\alpha\chi_\alpha(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}(x) + \theta\theta(\mathrm{i}M(x)) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}(-\mathrm{i}M^*(x)) + \theta\sigma^a\overline{\theta}v_a(x) + \\ &+ \theta\theta\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left(\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}{}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^a\partial_a\chi)\right) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta^\alpha\left(\lambda_\alpha(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}{}_\alpha(\sigma^a\partial_a\overline{\chi})\right) + \\ &+ \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(\frac{1}{2}D(x) - \frac{1}{4}\Box C\right) \text{ mit } z = (x^a, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha})\,. \end{aligned} \tag{2.136}$$

- Hierbei gilt $C(x) = C^*(x)$, $D^*(x) = D(x)$ und $v_a^* = v_a$.
- Das allgemeine Superfeld hat 16—16 Komponenten, dieses hier ist vom Typ 8—8.
- Dimensionen: $[v_a] = +1$, $[\theta] = -\frac{1}{2} = [\overline{\theta}]$
  Hieraus folgt $[V] = 0$, V ist also ein dimensionsloses Objekt. (Deshalb ist es beispielsweise möglich, $\exp(V)$ zu bilden.)
- Tabelle der SUSY-Transformationen für Komponenten (Übung: Blatt 10, Aufgabe 26 Tabelle $\phi_\jmath$).
- $\theta\sigma^a\overline{\theta}$ ist reell. Als Übung kann man außerdem Paritäts- und Zeitspiegelungstransformationen (Bewegungsumkehrtransformationen) testen. Man kann dann diktieren, wie sich $v_a(x)$ unter diesen Transformationen verhalten soll. Angenommen $v_a(x)$ transformiert sich wie ein Vektor, so transformiert sich V wie ein Pseudoskalar unter Paritätstransformationen. $\theta\sigma^a\overline{\theta}$ ist ein Pseudovektor. Unter τ-Transformationen ($\tau = KT$, wobei K für die komplexe Konjugation steht) transformiert sich v_a wie $p_a = \mathrm{i}\partial_a$ (aufgrund der minimalen Kopplung) und $V(z)$ ist invariant unter diesen Transformationen.

b) Abelsche Eichtransformation (Maxwell-Fall)

Wir wissen, wie sich $v_a(x)$ transformiert, nämlich $v'_a(x) = v_a(x) + \partial_a\alpha(x)$, wobei $\alpha(x)$ eine reelle Eichfunktion ist. (Möglich wäre auch $\mathrm{i}\partial_a\widehat{\alpha}$ mit $\widehat{\alpha}^* = -\widehat{\alpha}$.) Gesucht sind nun Superfelder, bei denen $\partial_a\alpha(x)$ in der $\theta\overline{\theta}$-Komponente vorkommen (beispielsweise chirales Superfeld). Von Blatt 11, Aufgabe 28, wissen wissen wir, dass ein reelles chirales Superfeld konstant ist. Infolgedessen ist eine geeignete Kombination aus chiralen und antichiralen Superfeldern zu bilden. Sei $\Lambda(z)$ ein chirales Superfeld ($\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0$). Wir nehmen an, dass $\Lambda(z)| = a(x)$ ist, wobei $a(x)$ komplex sein soll. Darüber hinaus sei $\overline{\Lambda}(z) = \Lambda^*$ antichiral ($D_\alpha\overline{\Lambda} = 0$) mit $\overline{\Lambda}(z)| = a^*(x)$.

$$\Lambda + \overline{\Lambda} = \ldots(\theta\sigma^a\overline{\theta})\,(-\mathrm{i}\partial_a a + \mathrm{i}\partial_a a^*) + \ldots = \ldots(\theta\sigma^a\overline{\theta})(\partial_a(-\mathrm{i}(a - a^*))) \text{ mit } \alpha(x) := -\mathrm{i}(a - a^*),. \tag{2.137}$$

Analog kann man folgendes nehmen:

$$\mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda}) \text{ mit } \alpha(x) = a + a^*\,. \tag{2.138}$$

Als Übung kann man sich überlegen, was der Unterschied von $\Lambda + \overline{\Lambda}$ oder $\mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda})$ ist. Im ersten Fall wird man feststellen, dass $\mathrm{Im}(a)$ sich unter Paritätstransformationen wie ein Skalar transformiert. Im zweiten Fall transformiert sich $\mathrm{Re}(A)$ wie ein Skalar unter solchen Transformationen.

Außerdem wollen wir die beiden Projektoren notieren, die auf einen Vektor wirken.

$$(P_T)_a{}^b = \delta_a{}^b - \frac{\partial_a\partial_b}{\Box} \text{ und } (P_L)_a{}^b = \delta_a{}^b - (P_T)_a{}^b\,. \tag{2.139}$$

Hierbei gilt $P_T v' = P_T v$ (Eichfreiheit). Wir wählen nun:

$$V'(z) = V(z) + \mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda}) \text{ mit } \alpha(x) = \Lambda + \overline{\Lambda}\,. \tag{2.140}$$

Aufgrund von $[\alpha] = 0$ muss auch $[\Lambda] = 0 = [\overline{\Lambda}]$ sein.

$$\Lambda(z) = a(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\varrho_\alpha(x) + \theta\theta f(x) + \theta\sigma^a\overline{\theta}(-\mathrm{i}\partial_a a) + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^a\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_a\varrho\right) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(-\frac{1}{4}\Box a(x)\right)\,, \tag{2.141}$$

$$\overline{\Lambda}(z) = a^*(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\overline{\varrho}^{\dot\alpha}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta} f^*(x) + \theta\sigma^a\overline{\theta}(\mathrm{i}\partial_a a^*) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\sigma^a\left(-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\partial_a\overline{\varrho}\right) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(-\frac{1}{4}\Box a^*(x)\right). \quad (2.142)$$

Die supersymmetrische Verallgemeinerung von $\alpha(x)$ ist $\mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda})$. Wir schreiben nun die Gleichung $V'(z) = V(z) + \mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda})$ aus und sortieren entsprechend. Damit ergibt sich dann

$$C'(x) = C(x) + \mathrm{i}(a(x) - a^*(x)), \quad \chi'_\alpha(x) = \chi_\alpha(x) + \mathrm{i}\sqrt{2}\varrho_\alpha(x), \quad M'(x) = M(x) + f(x), \quad (2.143)$$

und entsprechend die komplex konjugierten Ausdrücke für $\overline{\chi}'^{\dot\alpha}$ und M'^*. Außerdem gilt $\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha$, $\overline{\lambda}'_{\dot\alpha} = \overline{\lambda}_{\dot\alpha}$ und $D' = D$. (Daher wurden die Komponenten in V am Anfang in Abschnitt (2.128) umdefiniert.)

c) Partielle Eichwahl (Wess-Zumino-Eichung)

Wir setzen $C'(x) = 0$, indem wir $\mathrm{Im}(a(x))$ verwenden. Entsprechend setzen wir $\chi'_\alpha(x) = 0 = \overline{\chi}'_{\dot\alpha}(x)$, und $M'(x) = 0 = M'^*(x)$, indem wir $\varrho_\alpha(x)$, $\overline{\varrho}^{\dot\alpha}(x)$, $f(x)$ und $f^*(x)$ verwenden. Frei aus Λ, $\overline{\Lambda}$ (chiralen, antichiralen Superfeldern) ist noch $a(x) + a^*(x) = \alpha(x)$. (Beispielsweise kann man die Lorenz-Eichung (nach Ludwig Lorenz (1867)) verwenden: $\partial_a v^a(x) = 0$. Diese Eichwahl ist lorentzkovariant.) Die Wess-Zumino-Eichung ist nicht supersymmetrie-kovariant.

$$V_{\mathrm{WZ}}(z) = \theta\sigma^a\overline{\theta}v_a(x) + \theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\frac{1}{2}D(x). \quad (2.144)$$

Dies ist jedoch kein Superfeld! Es kann nämlich kein Superfeld geben, das in der niedrigsten Komponente verschwindet. Da $V_{\mathrm{WZ}}| = 0$ ist, sind alle Komponenten gleich Null, falls es ein Superfeld wäre (Transformationseigenschaft von Superfeldern). (V_{WZ} ist zu vergleichen mit der Coulomb-Eichung $\partial^i v_i = 0$, die nicht lorentzkovariant ist.)

$$V^2_{\mathrm{WZ}}(z) = \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}v^a v_a \text{ und } V^{n\geq 3}_{\mathrm{WZ}} \equiv 0. \quad (2.145)$$

Eine andere Art, dies aufzuschreiben, ist:

$$V_{\mathrm{WZ}}| = 0 = D_\alpha V_{\mathrm{WZ}}| = \overline{D}_{\dot\alpha}V_{\mathrm{WZ}}| = 0 = DDV_{\mathrm{WZ}}| = \overline{D}\,\overline{D}V_{\mathrm{WZ}}|. \quad (2.146)$$

In diesem Zusammenhang kann man sich überlegen, ob man die Eichung $\partial_a v^a = 0$ supersymmetrisieren kann. v^a ist ein transversaler Vektor.

$$DDV = 0 = \overline{D}\,\overline{D}V \text{ mit } V^* = V. \quad (2.147)$$

Man erhält dann einen in der $\theta\sigma^a\overline{\theta}$-Komponente transveralen Vektor bzw. $\partial_a v^a = 0$. Man bezeichnet dieses dann als reelles transversales (manchmal auch lineares) skalares Superfeld ($\jmath = (0,0)$) (mehr dazu in SUSY II).

d) Feldstärkemultiplett

Wir suchen eine Verallgemeinerung der Maxwell-Feldstärke ($\vec{E}$- und $\vec{H}$-Felder im Vakuum). Die abelsche Feldstärke ist gegeben durch $F_{ab} = v_{ab} = \partial_a v_b - \partial_b v_a$. Sie ist antisymmetrisch und eichinvariant (falls $\alpha(x) \in C^2$): $v'_{ab} = v_{ab}$. F_{ab} hat die Dimension 2. Außerdem gilt $[V] = 0$, $[\lambda] = \frac{3}{2} = [\overline{\lambda}]$ und $[D] = 2$ (unphysikalische Dimension).

Wir müssen nun v_{ab} supersymmetrisch verallgemeinern. Es ist unter supersymmetrischen Eichtransformationen ein invariantes Superfeld zu suchen. λ_α und $\overline{\lambda}_{\dot\alpha}$ sind die niedrigstdimensionalen invarianten Felder. Wir suchen ein Superfeld $W_\alpha| = \lambda_\alpha(x)$ und ein entsprechend komplex Konjugiertes, also $\overline{W}_{\dot\alpha}| = \overline{\lambda}_{\dot\alpha}(x)$, so dass $W'_\alpha = W_\alpha$ gilt unter den supersymmetrischen Eichtransformationen.

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha V \text{ und } \overline{W}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}DD\overline{D}_{\dot\alpha}V, \quad \left[-\frac{1}{4}\overline{\partial}\overline{\partial}\partial_\alpha V| = \lambda_\alpha - \frac{\mathrm{i}}{2}(\sigma^a\partial_a\overline{\lambda})\right]. \quad (2.148)$$

Wir wollen zeigen, dass dies invariant ist:

$$W'_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha(V + \mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda})) = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha V - \frac{\mathrm{i}}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha\Lambda = W_\alpha. \quad (2.149)$$

Hier haben wir ausgenutzt:

$$D_\alpha\overline{\Lambda} = 0 \text{ und } \overline{D}\,\overline{D}D_\alpha\Lambda = [\overline{D}\,\overline{D}, D_\alpha]\Lambda \sim \partial_a\overline{D}\Lambda = 0 \text{ wegen } \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0. \quad (2.150)$$

Es gilt weiterhin $W_\alpha| = \lambda_\alpha$ und $\overline{W}_{\dot\alpha} = \overline{\lambda}_{\dot\alpha}$. Die W_α und $\overline{W}_{\dot\alpha}$ sind wegen $\overline{D}_{\dot\alpha} W_\alpha = 0 = D_\alpha \overline{W}_{\dot\alpha}$ chirale bzw. antichirale Superfelder. Außerdem gilt:

$$D^\alpha W_\alpha = -\frac{1}{4} D\overline{D}\,\overline{D}DV = -\frac{1}{4}\overline{D}DD\overline{D}V = \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha} \text{ also } DW - \overline{DW} = 0\,. \tag{2.151}$$

Übung Blatt 12, Aufgabe 34:

$$\overline{D}_{\dot\alpha} W_\alpha = 0 = D_\alpha \overline{W}_{\dot\alpha} \text{ mit } \overline{W}_{\dot\alpha} = W^*_\alpha,\ DW - \overline{D}W = 0\,, \tag{2.152}$$

woraus sich folgendes ergibt:

$$W_\alpha = \frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha V \text{ mit } V(z) = V^*(z)\,, \quad \left(\overline{W}_{\dot\alpha} = \frac{1}{4}DD\overline{D}_{\dot\alpha}V\right)\,. \tag{2.153}$$

$DW - \overline{DW} = 0$ produziert mit

$$W_\alpha(z) = \lambda_\alpha + \theta^\beta(W_{(\alpha\beta)}(x) + \varepsilon_{\alpha\beta}D) + \theta\theta W_\alpha + \text{chirale Ergänzung}\,, \tag{2.154}$$

unter anderem Gleichungen vom Typ

$$\partial^\gamma{}_{\dot\alpha} W_{(\gamma\alpha)} + \partial_\alpha{}^{\dot\gamma}\overline{W}_{(\dot\gamma\dot\alpha)} = 0\,. \tag{2.155}$$

$\overline{W}_{\dot\alpha}$ ist das entsprechende antichirale Superfeld. In Vektornotation kann mann diese Gleichung umschreiben in $\partial^c W_{(ca)} = 0$, wenn man die Spinornotation für den antisymmetrischen Tensor $W_{(ab)}$ verwendet $(W_{(\alpha\beta)}, \overline{W}_{(\dot\alpha\dot\beta)})$ (Blatt 12, Aufgabe 33). Die duale Gleichung mit $W_{(ca)} = A\varepsilon_{abcd}v^{cd}$ lautet:

$$\varepsilon^{abcd}\partial_b v_{cd} = 0\,, \quad \text{d.h.} \circlearrowleft\!\!\!\!\sum \partial_b v_{cd} = 0\,. \tag{2.156}$$

Dies ist die erste Gruppe der Maxwellgleichungen, nämlich $\operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{H}$ und $\operatorname{div}\vec{H} = 0$. Es handelt sich dabei um die Bianchi-Identität. Diese Gleichung wird mit dem inversen Poincaré-Lemma (im M_4) gelöst. Man schreibt v_{cd} als 2-Form. Aus $0 = \mathrm{d}F$ folgt $F = \mathrm{d}v$, wobei v die 1-Form v_a ist. W_α aus V ausrechnen:

$$W_{(\alpha\beta)}(x) = 2\mathrm{i}v_{(\alpha\beta)}(x) \text{ mit } v_{ab} := \partial_a v_b - \partial_b v_a,\ v_{(\alpha\beta)},\ \overline{v}_{(\dot\alpha\dot\beta)}\,. \tag{2.157}$$

Eichinvariante Größen kann man in der Wess-Zumino-Eichung auswerten.

$$V_{\mathrm{WZ}}(z) = \theta\sigma^a\overline{\theta}v_a(x) + \theta\theta\overline{\theta}\overline{\lambda}(x) + \overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(\frac{1}{2}D\right)\,, \tag{2.158}$$

$$F_{ab} \equiv v_{ab} = \partial_a v_b - \partial_b v_a :\ v_{(\alpha\beta)}(x),\ v_{(\dot\alpha\dot\beta)}(x) : W_\alpha,\ \overline{W}_{\dot\alpha}\,, \tag{2.159}$$

$$\overline{D}_{\dot\alpha}W_\alpha = 0 = D_\alpha\overline{W}_{\dot\alpha} \text{ mit } W_{\dot\alpha} = (W_\alpha)^*\,, \tag{2.160}$$

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{D}\,\overline{D}D_\alpha V,\ \overline{W}_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}DD\overline{D}_{\dot\alpha}\,, \tag{2.161}$$

$$W'_\alpha = W_\alpha,\ \overline{W}'_{\dot\alpha} = \overline{W}'_{\dot\alpha},\ W_\alpha = W_\alpha(\text{W.Z.})\,. \tag{2.162}$$

Blatt 12, Aufgabe 32:

$$W_\alpha(z) = \lambda_\alpha(x) + \theta^\beta(\varepsilon_{\alpha\beta}D + 2\mathrm{i}v_{(\alpha\beta)}) + \theta\theta\mathrm{i}_\alpha(\sigma^a\partial_a\overline{\lambda}) + \text{chirale Ergänzung}\,. \tag{2.163}$$

$D = D^*$, $v_a = v_a^*$ und λ, $\overline{\lambda}$ beschreiben einen Majorana-Spinor $\Lambda = (\lambda_\alpha, \overline{\lambda}^{\dot\alpha})^\intercal$, den man auch als **Gaugino** bezeichnet. (Falls v_a ein Viererpotential (Photonfeld) ist, spricht man von einen Photino.)

e) Supersymmetrietransformationen

Wir betrachten Transformationen mit ξ, $\overline{\xi}$ (und c_a trivial). Blatt 10 in Aufgabe 26:

$$\delta\lambda_\alpha = -(\xi_\alpha D(x) - 2\mathrm{i}\xi^\beta v_{(\beta\alpha)}(x))\,, \tag{2.164}$$

$$\delta D = -2\mathrm{i}\xi\partial^a\partial_a\overline{\lambda} - (2\mathrm{i})^2\overline{\xi}\overline{\sigma}^a\partial_a\lambda\,, \tag{2.165}$$

$$\delta v_{(\alpha\beta)} = \xi_{(\beta}(\sigma^a\partial_a\overline{\lambda})_{\alpha)}\,, \quad A_{(\alpha\beta)} := \frac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})\,. \tag{2.166}$$

Und hermitesch Konjugiertes von $\overline{W}_{\dot\alpha}$ (Übung):

$$\delta v_{ab} = -[\xi\sigma_b\partial_a\overline{\lambda}(x) - \overline{\xi}\overline{\sigma}_b\partial_a\lambda(x) - (a \leftrightarrow b)]\,. \tag{2.167}$$

f) Supersymmetrische Wirkung

Wir schreiben nun die Wirkung auf, welche die U(1)-symmetrischen Terme verallgemeinert (Super-Maxwell, falls λ Photon ist):

$$S = \int \mathrm{d}^4x\, \mathcal{L}(x) \text{ mit } \mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}v^{ab}v_{ab} + \text{supersymmetrische Ergänzung}\,. \tag{2.168}$$

Als Übung kann man zeigen, dass sich v_{ab} mittels der E_i und H_i folgendermaßen als Matrix schreiben lassen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ E_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ E_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ wobei } v_{0i} = -E_i = -\partial_i\varphi + \partial_0 A_i,\, v_{ij} = \varepsilon_{ijm}H_m\,. \tag{2.169}$$

Man erhält dann für $\mathcal{L}$ und $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{H}^2) \text{ und } \mathcal{H} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\,. \tag{2.170}$$

Dies wollen wir nun verallgemeinern.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{4}W^\alpha(z)W_\alpha(z)|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\,. \tag{2.171}$$

Auf Blatt 13, in Aufgabe 35, soll $(1/4)W^\alpha W_\alpha = (1/4)W^\alpha_{\mathrm{WZ}}W_\alpha^{\mathrm{WZ}}$ und das hermitesch Konjugierte getrennt ausgerechnet werden. Man erhält dann:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}v^{ab}(x)v_{ab}(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\lambda\sigma^a\partial_a\overline{\lambda} - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_a\lambda\sigma^a\overline{\lambda} + \frac{1}{2}D^2\,. \tag{2.172}$$

Der Faktor 1/2 ist die Standardnormierung für ein reelles Feld (in diesem Falle D). Den zweiten und dritten Summanden können wir auch in eine vierkomponentige Notation mit den Majorana-Spinoren

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \overline{\lambda}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}\,, \tag{2.173}$$

umschreiben:

$$\frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\Lambda}\gamma^a\partial_a\Lambda\,. \tag{2.174}$$

Bemerkung: Auf Blatt 13 in Aufgabe 35 soll man außerdem

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta})\,, \tag{2.175}$$

ausrechnen. Die supersymmetrische Verallgemeinerung lautet:

$$\frac{\mathrm{i}}{4}v^{ab}\widetilde{v}_{ab} + \ldots \text{ mit } \widetilde{v}_{ab} := -\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{abcd}v^{cd}\,. \tag{2.176}$$

Außerdem kann man $\mathcal{A}(x)$ als Raum-Zeit-Ableitung schreiben:

$$\mathcal{A}(x) = \partial_a\left(\frac{1}{4}\varepsilon^{abcd}v_b v_{cd} + \frac{1}{2}\lambda\sigma^a\overline{\lambda}\right)\,. \tag{2.177}$$

Dies ist eine pseudoskalare Dichte, falls v_a ein Vektor ist. Prinzipiell kann man dies auch in die Lagrangefunktion schreiben, falls man keinen Wert auf Paritätserhaltung legt. Die Bewegungsgleichungen ändern sich dann jedoch nicht (wegen der Raum-Zeit-Ableitung). Es können jedoch andere Effekte auftreten. $\mathcal{A}(x) = \mathrm{i}/4v^{ab}\widetilde{v}_{ab}$ taucht als Anomalie bei γ^5-Transformationen auf. $\partial_a j^{5a}(x) = 0$ wird in der 1-Schleifen-Störungsrechnung „aufgeweicht“ zu $\partial_a j^{5a}(x) = \mathcal{A}(x)$ (U(1)-Anomalie für Axialstrom).

g) Fayet-Iliopoulos-Term [3]:

Das folgende gilt nur für U(1)-Eichtheorien! In nichtabelschen Eichtheorien gibt es diesen Term nicht, was wir im weiteren Verlauf der Vorlesung feststellen werden. $V(z)$ ist nicht super-eichinvariant ($V' = V + \mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda})$).

$$\mathcal{L}_{\mathrm{FI}}(x) = kV(z)|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} = \frac{1}{2}D - \frac{1}{4}\Box C \mathrel{\hat=} \frac{1}{2}D \text{ (modulo Raum-Zeit-Ableitung) mit } [k] = 2\,. \tag{2.178}$$

D ist eichinvariant ($D = D'$). Man benutzt also den Trick, dass Raum-Zeit-Ableitungen in der Wirkung nicht wichtig sind. Man kann dies jedoch auch direkt sehen, indem man die Transformation durchführt:

$$\mathrm{i}k(\Lambda - \overline{\Lambda})|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \mapsto \text{Raum-Zeit-Ableitung von } a,\, a^*\,. \tag{2.179}$$

(Bei U(1)-Eichtheorien + Supersymmetrie: Spontane Supersymmetrie-Brechung möglich mit diesem FI-Term)

h) Supersymmetrische Eichtheorie gekoppelt an chirale Superfelder (minimale Kopplung)

Wir betrachten zuerst im Falle „$N = 0$“ (keine Supersymmetrie) eine U(1)-Phasentransformation (kompakt), also $A' = \exp(-\mathrm{i}\alpha)A$ (und komplex konjugiert für A^*), wobei A ein komplexes Skalarfeld ist. A lässt sich auch in zwei reelle Felder $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zerlegen, also $A = (1/\sqrt{2})(\mathcal{A}+\mathrm{i}\mathcal{B})$. Für ein solches komplexes Skalarfeld lautet die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}(x) = \partial_a A^* \partial^a A - m^2 A^* A - V(A^* A)\,. \tag{2.180}$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter einer starren (x-unabhängigen) Transformation mit $\alpha = \alpha^*$. Dies ist eine „innere“ Symmetrie, da α mit P_a vertauscht. Wir führen nun eine Eichung durch ($\alpha \mapsto \alpha(x)$) und schauen uns die Transformation $A' = \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))A$ an.

i) Die Potentialterme bleiben invariant, falls sie bezüglich der starren Transformationen invariant waren.

ii) $\partial_a A \mapsto D_a A$ mit $(D_a A)' = \exp(-\mathrm{i}\alpha(x))(D_a A)$
Dies ist eine kovariante Ableitung bezüglich der Phasentransformation.

Man führt nun ein neue Feld ein, dass die Änderung unter der Transformation kompensiert. Als Übung kann man zeigen:

$$D_a A = \partial_a A - \mathrm{i}v_a A \text{ mit } v'_a = v_a + \partial_a \alpha(x) \text{ und entsprechend } (D_a A)' = \partial_a A' - \mathrm{i}v'_a A'\,. \tag{2.181}$$

Man bekommt nun eine Kopplung der komplexen Skalarfelder an diese neuen Vektorfelder v_a (minimale Kopplung). Jetzt ersetzt man alle Ableitungen ∂_a durch die kovariante Ableitung:

$$\mathcal{L}(x) = (D_a A^*)(D^a A) - mA^* A - v(A^* A)\,, \tag{2.182}$$

wobei

$$(D_a A^*)(D^a A) = \partial_a A^* \partial^a A - \mathrm{i}v_a A^* \overleftrightarrow{\partial}^a A - v_a v^a A^* A\,. \tag{2.183}$$

Hierbei gilt $A^* \overleftrightarrow{\partial}_a A = A^* \partial_a A - (\partial_a A^*)A$. Analog funktioniert das ganze für einen Dirac-Spinor:

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(x) = \mathrm{i}\overline{\Psi}\gamma^a \partial_a \Psi - m\overline{\Psi}\Psi\,. \tag{2.184}$$

Man kann verschiedenen Feldern unterschiedliche Gewichte bei diesen Transformationen geben. Diese stehen vor $\alpha(x)$. Diese Gewichte werden mit elektrischen Ladungen in Verbindung gebracht. Betrachten wir nun eine andere eichinvariante Lagrangedichte, welche man nicht durch $\partial_a \mapsto D_a$ (also minimale Kopplung) erhält. Pauli-Term (1932/33 und 1941):

$$\mathcal{L}_{Pauli}(x) = \kappa\overline{\Psi}(x)\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^a, \gamma^b]\Psi(x)F_{ab}\,. \tag{2.185}$$

F_{ab} entspricht v_{ab}, wobei $[F_{ab}] = 2$. Da die Ψ die Dimension 3/2 haben, muss $[\kappa] = -1$ sein. Man benutzt diese Terme nicht in der geeichten Diracschen Lagrangefunktion, weil dies wegen $[\kappa] = -1$ zu nichtrenormierbaren Theorien führt. In effektiven Lagrangefunktionen kann solch ein Dimension-5-Term auftreten mit $K \sim 1/\Lambda$ (Cut-Off). Mit minimaler Kopplung wäre dieser Term aus folgendem Term zu erhalten:

$$-\kappa\partial_a\overline{\Psi}\frac{\mathrm{i}}{2}[\gamma^a, \gamma^b]\partial_b\Psi \text{ mit } [\kappa] = -1\,. \tag{2.186}$$

Dies liefert jedoch keinen Beitrag zur Bewegungsgleichung. Nun wollen wir den Fall $N = 1$ (also mit Supersymmetrie) betrachten. Dazu nehmen einen Satz von chiralen ($\overline{D}_{\dot\alpha}\phi = 0$) Superfeldern $\phi_k(z)$ mit $k = 1, \ldots, n$ und antichirale ($D_\alpha\overline{\phi}_k = 0$) Superfelder $\overline{\phi}_k = \phi_k^*$.

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\phi}_k \phi_k|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + W(\phi)|_{\theta\theta} + \overline{W}(\overline{\phi})|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\,. \tag{2.187}$$

Die entsprechende Phasentransformation lautet nun:

$$\phi_k' = \exp(-\mathrm{i}\alpha e_k)\phi_k \text{ und } \overline{\phi}_k' = \exp(\mathrm{i}\alpha e_k)\overline{\phi}_k \text{ für } k = 1, \ldots, n\,. \tag{2.188}$$

Die α und die e_k sind dabei reell. $\mathcal{L}(z)$ ist **invariant**, falls $W(\phi)$ invariant ist:

$$W(\phi) = \lambda_k\phi_k + \frac{m_{ij}}{2}\phi_i\phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!}\phi_i\phi_j\phi_k + \ldots \text{ mit } [W] = 3,\ [\lambda_k] = 2,\ [m_{ij}] = 1 \text{ und } [g_{ijk}] = 0\,. \tag{2.189}$$

Wir starten mit einen Parameter $\alpha = \Lambda$ für die Phasentransformation. Eine supersymmetrische Art, eine Konstante zu definieren, ist $\alpha = \Lambda + \overline{\Lambda}$ mit $\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0$ und $\overline{\Lambda} = \Lambda^*$. Aus $\Lambda = \overline{\Lambda}$ folgt nämlich $\Lambda = \overline{\Lambda} = \alpha/2$. Die Wess-Zumino-Wirkung ist invariant unter

$$\phi_k'(z) = \exp(-\mathrm{i}\alpha e_k)\phi_k \text{ mit } k = 1, \ldots, n \text{ und } \overline{D}_{\dot\alpha}\phi_k = 0\,, \tag{2.190}$$

$$\overline{\phi}_k'(z) = \exp(\mathrm{i}\alpha e_k)\overline{\phi}_k \text{ mit } k = 1, \ldots, n \text{ und } \overline{\phi}_k = \phi_k^*\,. \tag{2.191}$$

Das Superpotential muss invariant unter den Phasentransformationen sein. Eiche: $\alpha \mapsto \alpha(x)$. Dabei treten Probleme mit der Chiralität der Felder auf. Wenn man die Chiralität erhalten will, muss α ein chirales (bzw. für $\overline{\phi}_k$ ein antichirales) Superfeld sein.

$$\phi_k'(z) = \exp(-2\mathrm{i}e_k\Lambda(z))\phi_k \text{ mit } \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda = 0\,, \tag{2.192}$$

$$\overline{\phi}_k'(z) = \exp(2\mathrm{i}e_k\overline{\Lambda}(z))\overline{\phi}_k \text{ mit } D_\alpha\overline{\Lambda} = 0\,. \tag{2.193}$$

Die Eichsymmetrie respektiert die Supersymmetrie und die Chiralität. Λ und $\overline{\Lambda}$ bezeichnet man als Super-Eichfunktionen. Man vermutet nun:

$$\alpha(x) = (\Lambda + \overline{\Lambda})|\,. \tag{2.194}$$

Wie transformieren sich die Komponenten A_k, ϕ_k, F_k und deren komplex Konjugierte? Die Λ-$\overline{\Lambda}$-Zerlegung funktioniert wie früher, z.B.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\psi_{k,\alpha}' &= D_\alpha\phi_k'| = D_\alpha(\exp(-2\mathrm{i}e_k\Lambda))|A_k + \exp(-2\mathrm{i}e_k\Lambda|)\sqrt{2}\psi_{k,\alpha} = \\ &= -2\mathrm{i}e_k D_\alpha\Lambda|\exp(-2\mathrm{i}e_k\Lambda|)A_k + \exp(-2\mathrm{i}e_k\Lambda|)\sqrt{2}\psi_{k,\alpha}\,.\end{aligned} \tag{2.195}$$

Jetzt schauen wir uns das U(1)-invariante Modell an.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(z) = \sum_{k=1}^{n}\overline{\phi}_k\phi_k + \left[\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(\sum_k\lambda_k\phi_k + \frac{1}{2}\sum_{k,j}m_{kj}\phi_k\phi_j + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}g_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \ldots\right) + \text{k.K.}\right]\,, \tag{2.196}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{WZ}}(z)|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\,. \tag{2.197}$$

Dies ist invariant bezüglich starrer Transformation (α), falls das Superpotential invariant ist. Der Superpotentialteil bleibt auch geeicht invariant ($\Lambda(z)$, $\overline{\Lambda}(z)$). Der superkinetische Term transformiert aber folgendermaßen:

$$\sum_k\overline{\phi}_k'\phi_k' = \sum_k\overline{\phi}_k\exp(2\mathrm{i}e_k\overline{\Lambda})\exp(-2\mathrm{i}e_k\Lambda)\phi_k\,. \tag{2.198}$$

Der superkinetische Term ist also nur dann invariant, wenn $\Lambda = \overline{\Lambda}$, also konstant ist. Um Invarianz unter Eichtransformationen zu erhalten, schreiben wir den Term als

$$\sum_k\overline{\phi}_k\exp(2e_kV(z))\phi_k\,. \tag{2.199}$$

und geben gleichzeitig ein Transformationsverhalten für $V(z)$ vor, nämlich $V'(z) = V(z) + \mathrm{i}(\Lambda - \overline{\Lambda})$. $V(z)$ ist ein reelles Superfeld ($V(z) = V^*(z)$). In dieser Version wird keine Ableitung kovariantisiert, sondern der superkinetische Term. Die Feldstärken W_α und $\overline{W}_{\dot\alpha}$ von Teil d) sind invariant unter der supersymmetrischen Eichtransformation.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{s-U(1)}}(x) = \frac{1}{4}W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} &+ \frac{1}{4}\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + 2kV|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &+ \sum_{k=1}^{n}\overline{\phi}_k\exp(2e_kV)\phi_k|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + W(\vec{\phi})|_{\theta\theta} + \overline{W}(\vec{\overline{\phi}})_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\,.\end{aligned} \tag{2.200}$$

Die Lagrangedichte ist eichinvariant, $\exp(2e_k V)$ nichtpolynomale Wirkung.

Nimm Wess-Zumino-Eichwahl (s-eichinvariantes $\mathcal{L}_{\mathrm{s-U(1)}}$).

$$V_{\mathrm{WZ}} = \theta\sigma^a\overline{\theta}v_a + \ldots \qquad V_{\mathrm{WZ}}^m = 0 \text{ mit } m \geq 3\,. \tag{2.201}$$

Wir gehen also in die Wess-Zumino-Eichung:

$$\overline{\phi}_k^{\mathrm{WZ}} \exp(2e_k V_{\mathrm{WZ}})\phi_k^{\mathrm{WZ}}\,. \tag{2.202}$$

Nach Konstruktion ist $\overline{\phi}_k^{\mathrm{WZ}}$ ein antichirales und ϕ_k^{WZ} ein chirales Superfeld. Man definiert die Komponentenfelder A, ψ, F und die komplex Konjugierten um zu A', ψ', F' und entsprechend die komplex Konjugierten. Lässt man die Striche wieder weg, so sieht das ganze aus wie vorher (mit $V = V_{\mathrm{WZ}}$). Trotzdem muss, man sich darüber bewusst sein, dass sich die Theorie eventuell geändert hat. Man muss sich über die Äquivalenzklassen der Feldtransformationen (Borchers-Klassen) Gedanken machen. Die Idee ist, kanonische Feldtransformationen durchzuführen, bei denen sich die S-Matrix-Elemente nicht ändern.

i) Komponentenfeldversion der minimalen Kopplung:

Auf Blatt 13 in Aufgabe 37 berechnen wir den transformierten superkinetischen Term:

$$\overline{\phi}'_k \exp(2e_k V_{\mathrm{WZ}})\phi'_k|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}} = \overline{\phi}'_k \left(1 + 2e_k V_{\mathrm{WZ}} + \frac{1}{2}(2e_k V_{\mathrm{WZ}})^2\right)\phi'_k|_{\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\,. \tag{2.203}$$

$2e_k V_{\mathrm{WZ}}$ produziert uns einen Term der Form $A_k^* v_a v^a A_k$. Die nullte Ordnung ist die gewöhnliche eichkovariante Ableitung. Schauen wir uns das ganze bis zur ersten Ordnung an:

$$D_a X_k = \partial_a X_k + \mathrm{i}e_k X_k v_a \text{ mit } k = 1,\,\ldots,\,n \text{ und den umdefinierten Feldern } X_k = (A_k, \sqrt{2}\psi_{k,\alpha})\,, \tag{2.204}$$

$$D_a\overline{X}_k = \partial_a\overline{X}_k - \mathrm{i}e_k\overline{X}_k v_a\,. \tag{2.205}$$

Für festes k kann man die $\psi_{k,\alpha}$ und $\overline{\psi}_k^{\dot{\alpha}}$ in einem Majorana-Spinor zusammenfassen, also $\Psi_{k,\alpha} = (\psi_{k,\alpha}, \overline{\psi}_k^{\dot{\alpha}})$. Schreiben wir die kovariante Ableitung auf ψ, $\overline{\psi}$ um:

$$D_a\Psi_{k,\underline{\alpha}} = \partial_a\Psi_{k,\underline{\alpha}} + \mathrm{i}e_k v_a(\gamma^5\Psi_k)_{\underline{\alpha}}\,. \tag{2.206}$$

$\underline{\alpha}$ ist ein Viererindex! Das Gaugino ist immer ein Majorana-Spinor. In diesem Falle ist aber die kovariante Ableitung die gewöhnliche Ableitung, weil die λ_α, $\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ eichinvariant sind. Für Dirac-Spinor:

$$\Psi_{\underline{\alpha}}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{1,\alpha}(x) \\ \overline{\psi}_2^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix}\,. \tag{2.207}$$

In der dazu passenden kovarianten Ableitung kommt kein γ^5 vor: $D_a\Psi_{\underline{\alpha}} = \partial_a\Psi_{\underline{\alpha}} + \mathrm{i}e_k v_a\Psi_{\underline{\alpha}}$. Für Majorana-Spinoren: Phasentransformation invers γ^5-Transformationen (siehe Blatt 13, Aufgabe 36)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{s-U(1)}}(x) = {} & -\frac{1}{4}v_{ab}v^{ab} + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\lambda}\gamma^a\partial_a\lambda + \frac{1}{2}D^2 + \kappa D + \Bigg(\lambda_k F_k + m_{kj}A_k F_j - \frac{1}{2}m_{kj}(\psi_k^\alpha\psi_{j,\alpha}) + \\ & + \frac{1}{2}g_{kjl}A_k A_j F_l - \frac{1}{3}g_{kjl}(\psi_k^\alpha\psi_{l,\alpha})A_j + \mathrm{k.K}\Bigg) + (D_a A_k^*)(D^a A_k) + \frac{\mathrm{i}}{2}\psi_k\sigma^a D_a\psi_k + \\ & + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{\psi}_k\overline{\sigma}^a D_a\psi_k + F_k^* F_k + e_k D_a A_k^* A_k - \sqrt{2}e_k(A_k^*(\psi_k^\alpha\lambda_\alpha) + A_k(\overline{\psi}_{k,\dot{\alpha}}\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}})\,.\end{aligned} \tag{2.208}$$

Das Superpotential $W(\phi)$ enthält alle Terme bis ausschließlich ϕ^3. D, F_k^* und F_k sind Hilfsfelder. Diese sind zu **eliminieren**. Schauen wir uns die Hilfsfeldgleichungen für D und F_k an:

$$-D = k + \sum e_k A_k^* A_k,\ -F_k^* = \lambda_k + m_{kj}A_j + \frac{1}{2}g_{kjl}A_j A_l = \frac{\partial W(\overline{A})}{\partial A_k}\,. \tag{2.209}$$

Für Gleichung für F_k^* erhält man aus der letzten durch komplexe Konjugation. Das Potential der Theorie ist dann:

$$V = \frac{1}{2}D^2(\vec{A}^*, \vec{A}) + F_k^*(\vec{A})F_k(\vec{A}^*) \geq 0\,. \tag{2.210}$$

2.6 Prä-SUSY-Elektrodynamik

Die Idee ist, das System aus Elektron, Positron und Photon zu supersymmetrisieren. $M^2 = P_a P^a$ ist einer der Casimir-Operatoren der Theorie, wobei $[P_a, Q_\alpha] = 0$ ist. Das supersymmetrische Multiplett hat die gleiche Masse. Dies ist jedoch kein Modell der Elektrodynamik, da die A_+, A_-, A_+^* und A_-^* Partner im Dirac-Spinor Ψ (Elektron-Positron) sind. Diese Partner besitzen die gleiche Masse, nämlich $m_\mathrm{e} \approx 0,5\,\mathrm{MeV}/c^2$. Wir betrachten zwei chirale Multipletts ϕ_+ und ϕ_- mit $\phi'_\pm = \exp(\mp 2\mathrm{i}e\Lambda(z))\phi_\pm$. $\overline{\psi_-}'^{\dot\alpha} = \exp(-\mathrm{i}\alpha e)\overline{\psi_-}^{\dot\alpha}$ passt zusammen mit $\psi_{+,\alpha}$': $\Psi_{\underline{\alpha}} = (\psi_{+,\alpha}, \overline{\psi}_-^{\dot\alpha})$, wobei ϕ_+ chiral und $\overline{\phi_-}$ antichirale Superfelder sind.

$$S_{\text{Prä-SUSY-ED}} = \int \mathrm{d}^4x \, \left(\frac{1}{4} W^\alpha W_\alpha \overline{\theta}\,\overline{\theta} + \frac{1}{4} \overline{W}_{\dot\alpha} \overline{W}^{\dot\alpha} \theta\theta + 2kV + m(\phi_+\phi_-\overline{\theta}\,\overline{\theta} + \overline{\phi}_+\overline{\phi}_-\theta\theta) \right) . \qquad (2.211)$$

Bis auf ϕ^3-Terme sind dies alle möglichen Terme. (Es kommt kein λ oder g in $W(\phi_+, \phi_-)$ vor.) Hierbei ist m reell. Setzt man $m \neq m^*$ an, so treten Probleme mit der Parität auf.

Literaturverzeichnis

[1] R. Haag, J. T. Lopuszanski und M. Sohnius, „*All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix*," Nucl. Phys. B **88** (1975) 257.

[2] S. R. Coleman und J. Mandula, „*All possible symmetries of the S Matrix*," Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[3] P. Fayet und J. Iliopoulos, „*Spontaneously Broken Supergauge Symmetries and Goldstone Spinors*," Phys. Lett. B **51** (1974) 461.

[4] J. Wess und B. Zumino, „*A Lagrangian Model Invariant Under Supergauge Transformations*," Phys. Lett. B **49** (1974) 52.

[5] R. F. Streater und A. S. Wightman, „*PCT, spin and statistics, and all that*," `http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?irn=2423855`, *Redwood City, USA: Addison-Wesley (1989) 207 p. (Advanced book classics).*

[6] A. J. Hanson, T. Regge und C. Teitelboim, „*Constrained Hamiltonian Systems*,"

[7] B. L. van der Waerden, „*Spinoranalyse*," Nachr. Akad. Göttingen (1928).

[8] B. L. van der Waerden, „*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen (Band 36): Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*," Berlin, Springer (1932).

[9] B. L. van der Waerden, „*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete (Band 214): Group theory and quantum mechanics*," Berlin, Heidelberg, New York, Springer (1974).

[10] E. M. Corson, "*Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*," Hafner Publishing Company, New York, (1953), 155.

[11] O. Laporte, G. E. Uhlenbeck, „*Application of Spinor Analysis to the Maxwell and Dirac Equations*," Phys. Rev. **37** (1931) 1380.

[12] W. L. Bade, H. Jehle, „*An Introduction to Spinors*," Rev. Mod. Phys. **25** (1953) 714.

[13] M. A. Neumark, „*Hochschulbücher für Mathematik (57): Lineare Darstellungen der Lorentzgruppe*," Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1963) 391.

[14] J. Wess und J. Bagger, „*Supersymmetry and Supergravity*," Princeton University Press, Princeton, 1983, 2.Auflage 1992.