

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: SUPERSYMMETRIE II

Dr. Lang

Vorlesung Sommersemester 2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 30. Juli 2006

Mitschrieb der Vorlesung SUPERSYMMETRIE II
von Herrn Dr. LANG im Sommersemester 2006
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Supersymmetrie (SUSY, Bose-Fermi-Symmetrie)	5
1.1	Standardmodell und Supersymmetrie	5
1.2	Feinabstimmungsproblem	6
2	$D = 4$, $N = 1$ (einfache) Poincare-Supersymmetrie	9
2.1	Z_2 -graduierte Algebren	9
2.2	$N = 1$ -Phänomenologie, chirale Struktur des Standardmodells	9
2.3	Wess-Zumino-Modell	11
2.4	Supersymmetrische Eichtheorien gekoppelt an chirale Superfelder	11
2.4.1	Nichtabelsche Eichtheorien (abelscher Fall speziell)	11
3	Spontane Supersymmetriebrechung	13
3.1	Erinnerung an spontane Symmetriebrechung	13
3.2	Symmetriebrechung in der Supersymmetrie	14
3.2.1	Beispiel: Chirale Superfelder	15
3.3	Fayet-Iliopoulos-Modell	15
3.3.1	Beispiel: Massenquadrat-Summenformel für SUSY-Modelle	19
3.4	O’Raifeartaigh-Modell	19
3.5	Massenquadrat-Summenformel in der Supersymmetrie	19
3.6	Massenquadrat-Matrizen	20
3.6.1	Bose-Sektor	20
3.6.2	Fermi-Sektor (Spin 1/2)	21
3.6.3	Einschub: Vierernotation	22
4	Störungstheorie mit Superfeldern	25
4.1	Berezin-Integral, $D = 4$, $N = 1$ Supersymmetrie	25
4.2	Variationsableitung (Funktionalableitung) von Superfeldern	26
4.3	Propagatoren von chiralen, antichiralen Superfeldern	27
4.4	Feynman-Regeln	28
4.4.1	Beispiel: 1-Schleifen-Korrektur zum Propagator	29
4.5	GRS-Regeln für chirale Felder	29
4.6	Beispiele für 1-Schleifen- Γ -Beiträge	33
4.6.1	Einpunktfunktionen: Tadpoles	33
4.6.2	Zweipunktfunktionen $\phi\phi$ bzw. $\overline{\phi\phi}$ mit $m \neq 0$	33
4.7	Superfeldstörungstheorie für Vektorfelder	35
4.7.1	Faddeev-Popov (de Witt) Prozedur/Funktionalintegralformalismus	35
4.7.2	Geistfeldpropagatoren	38
4.7.3	Vektorsuperfeldpropagator in α -Eichung	39
4.8	Feynmanregeln für V in α -Eichung und Geistsuperfelder	40
4.9	Feynman-Regeln für Eichtheorien gekoppelt an chirale Multipletts	40
4.9.1	Propagatoren	40
4.9.2	Vertizes	40
4.10	Divergenzgradformel für allgemeines Modell	41
4.10.1	Bemerkung: Regularisierung von Eichtheorien	42
5	Sanfte Supersymmetriebrechung	43
5.1	Motivation: Sanfte Brechung/Brechung der starren Symmetrie	43
5.2	Klassifikation von sanfter Brechung	44

6	MSSM (minimales supersymmetrisches Standardmodell)	47
6.1	Vorspann	47
6.2	Massenterme für Diracspinor	47
6.3	Superfelder des MSSM	48
6.3.1	Felder des Standardmodells	48
6.4	Minimales supersymmetrisches Standardmodell	49
6.5	Superpotential	51
6.6	Sanfte Brechung der Supersymmetrie	52
6.7	Anomaliefreiheit im MSSM	53
6.8	Potential des MSSM, Higgspotential	55

Kapitel 1

Einleitung: Supersymmetrie (SUSY, Bose-Fermi-Symmetrie)

- 0.) Einleitung
- I.) Wiederholung $D = 4, N = 1$ Supersymmetrie (chirale Superfelder gekoppelt, abelsche/nichtablesche Eichtheorie)
- II.) spontane Supersymmetriebrechung, Massenquadrat-Formel
- III.) Störungstheorie mit Superfeldern: Nichttrennungstheorem
- IV.) Sanfte Supersymmetriebrechung (quadratische UV-Divergenzen vermeiden)
- V.) MSSM (mit sanften Brechungstermen), Higgssektor, etc.

Es gibt fünf Gruppen, die am LHC arbeiten, nämlich ATLAS, CMS, LHCb, ALICE und TOTEM. Speziell ATLAS und CMS sind auf der Suche nach supersymmetrischen Teilchen (sogenannten sparticles).

1.1 Standardmodell und Supersymmetrie

- Materie: Leptonen, Quarks, [Higgs]: Supersymmetrisierung in chiralen Multipletts, benötigt zwei $SU(2)$ -Multipletts (Wegen $SU(2) \times U(1)/U_{em}(1)$ gibt es $8 - 3 = 5$ supersymmetrische Higgsfelder.)
- Eichfelder: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$: $g, Z_{a'}, W_{a'}^\pm, A_\alpha$
Die komplexen Felder werden in reelle Superfelder gepackt.

Dies ist jedoch nur bei einer linearen Modellen richtig. Bei nichtlinearen Modellen ist keine Bose-Fermi-Symmetrie mehr vorhanden. Wir werden das ganze im vierdimensionalen Minkowskiraum (mit $N = 1$) betrachten (chirale Struktur vom Standardmodell, Spin-Statistik-Theorem, relativistische Quantenfeldtheorie).

- i.) Theoretische Aspekte: HtS-Modell (HAAG-TOPUSZANSKI-SOHNUS (1975), COLEMAN-MANDULA)
 N -erweiterte Supersymmetrie (zentrale Ladungen)
Im einfachsten Modell mit $N = 1$ gibt es keine zentralen Ladungen. Ergebnis von COLEMAN-MANDULA: Poincare \otimes Eichgruppen (kompakte Lie-Algebra), supersymmetrische Generatoren Q und \bar{Q} ; R -Symmetrie
- ii.) Phänomenologische Aspekte: Die weitere Motivation, warum Supersymmetrie angeschaut wurde, war das sogenannte Hierarchie-Problem (technisches Feinabstimmungsproblem). Aufgrund des Nichtrennungstheorem war es möglich, dieses Problem in den Griff zu bekommen.
 $M_W \sim 100 \text{ GeV}/c^2$, GUT ($SU(5), O(10), E(6)$), $M_{GUT} \approx 10^{14} \text{ GeV}/c^2$ ($M_{sGUT} \sim 10^{16} \text{ GeV}/c^2$), $M_{\text{Pb}} \sim 10^{19} \text{ GeV}/c^2$ (G_N, c, \hbar)

1.2 Feinabstimmungsproblem

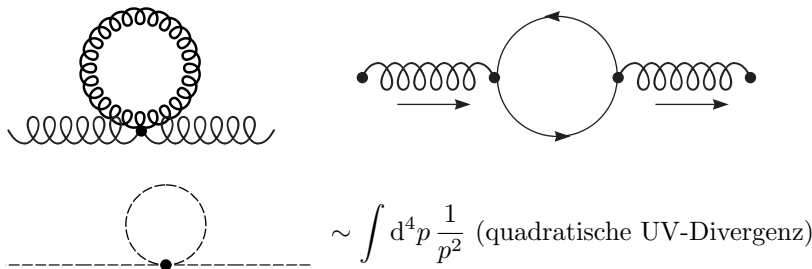
Im Standardmodell bekommen sämtliche Felder die Masse via den Higgseffekt (elektroschwache spontane Symmetriebrechung). Da man die schwache Skala kennt, muss man dafür sorgen, dass $M_W = v/\sqrt{2}g \sim 100 \text{ GeV}/c^2$ ist. Im Vier-Fermion-Limes gilt mit der Fermi-Konstante $G_F = 1/(10^5 \text{ GeV}^2)$:

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4v^2} \text{ mit } v = 180m_p, \sqrt{2}v \sim 250 \text{ GeV}$$

Dies könnte man als Skala für das Standardmodell annehmen. Das Higgs-Massenquadrat muss damit in folgender Größenordnung liegen:

$$m_H^2 = 4\lambda v \sim 0,11\lambda \text{ TeV}^2$$

Wenn man nun für Skalarfelder Ein-Schleifen-Korrekturen in der Störungstheorie betrachtet, stellt man fest, dass quadratische UV-Divergenzen auftreten.



Die Korrektur zur Higgsmasse (die aus Baumgraphen folgt) ist:

$$\delta m_H^2 \sim \left(c_W g^2 + c_H \lambda - \sum_f c_f y_f^2 \right) M_{GUT}^2$$

Sie muss klein sein, da die Higgsmasse (auf Baumgraphen-Niveau) schon im TeV-Bereich liegt.

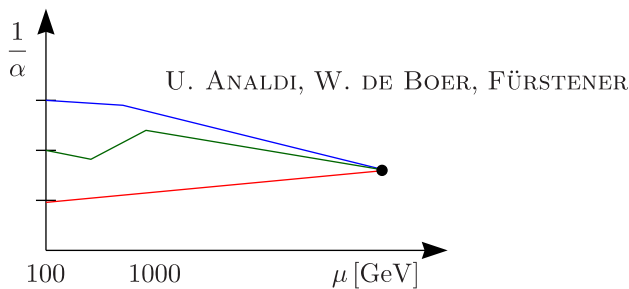
$$m_{H,0}^2 + \delta m_H^2 = m_H^2$$

Jede Ordnung in Störungstheorie ist neu zu fiten. Hier kommt uns nun das Nichtrenormierungstheorem der Supersymmetrie zu Hilfe. Dies besagt, dass es keine Korrekturen zum Higgs-Massenquadrat und den Kopplungskonstanten gibt, wenn man nur chirale Superfelder betrachtet. Das Theorem hat nur dann seine Gültigkeit, wenn die Supersymmetrie exakt ist (1974/1975). Bei der Brechung der Supersymmetrie kommt eine neue Skala ins Spiel, nämlich ΔM_s^2 , welche im Bereich von 1 TeV^2 liegen muss.

$$\delta m_H^2 \sim \frac{g_s^2}{4\pi} \Delta M_s^2$$

Nach 't Hooft sind Skalarfelder (Spin 0) unnatürlich. Es gibt nämlich keine Symmetrie, welche die Masse bei 0 hält. (Bei Fermionen (Spin 1/2) sorgt die chirale Symmetrie dafür, dass die Masse bei 0 liegt. Korrekturen bleiben dann klein.) Mit Supersymmetrie sind auch Spin-0-Massen „geschützt“.

iii.) Bonus: SUSY-GUT (beispielsweise SU(5))



$$M_{sGUT} \sim 10^{16} \frac{\text{GeV}}{c^2} : \text{Protonzerfall mit } \tau_p \geq 10^{30} \text{ bis } 10^{31} \text{ Jahre}$$

$$p \mapsto e^+ + \pi^0, p \mapsto K^+ + \bar{\nu}_\mu \text{ (sGUT)}$$

iv.) Bonus im Rahmen von Kosmologie

Die MSSM hat eine diskrete R-Symmetrie, genannt R-Parität. Diese R-Parität ist multiplikativ und ist bei Teilchen $+1$ und bei sTeilchen -1 (Paarproduktion von sparticles). Das LSP (lightest SUSY-particle) soll damit einen Beitrag zur nichtbaryonischen dunklen Materie liefern. Elektrisch und farbneutral (Higgsino, Partner γ , Eichfelder, Gravitino).

Kapitel 2

$D = 4, N = 1$ (einfache) Poincare-Supersymmetrie

2.1 Z_2 -graduierte Algebren

Kommutatoren und Antikommutatoren von bosonischen und fermionischen Feldern sind gegeben durch:

$$[\mathcal{B}, \mathcal{B}'] = \mathcal{B}'', \quad \{\mathcal{F}, \mathcal{F}'\} = \mathcal{B} \quad \text{und} \quad [\mathcal{B}, \mathcal{F}] = \mathcal{F}'$$

Der Grad von \mathcal{B} ist gleich null, der von \mathcal{F} gleich eins. Die Generatoren der Algebren sind gegeben durch P_a, M_{ab} mit $a \in (0, 1, 2, 3)$. M_{ab} sind die Generatoren der Lorentztransformationen, diese sind antisymmetrisch. Darüberhinaus gibt es \mathcal{F} -Typ-Generatoren $Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = (Q_\alpha)^\dagger$. Wir benutzen die $SL(2, \mathbb{C})$, um diese zu klassifizieren. Diese Lie-Algebra besitzt eine irreduzible Darstellung $(I/2, J/2): \chi_{\alpha_1, \dots, \alpha_I; \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_J}$. Mittels des vollständig antisymmetrischen ε -Symbols in zwei Dimensionen ($\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \bar{\varepsilon}$) können diese Indizes hoch- und runtergezogen werden.

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^a P_a \quad \text{mit} \quad \sigma^a = (\sigma^0 = \mathbf{1}_2, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^a = (\sigma^0 = \mathbf{1}_2, -\sigma^i) = (\bar{\sigma}^a)^{\dot{\alpha}\beta} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3$$

Die σ vermitteln zwischen den verschiedenen Darstellungen der $SL(2, \mathbb{C})$ zu einem Lorentzvektor (eine Art Clebsch-Gordon-Koeffizient).

$$M_{ab} : \frac{1}{2}(\sigma_{ab})^{\beta\alpha} \alpha, \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{ab})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \dot{\beta}, \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Falls man die R-Symmetrie mitnimmt, muss man $[R, Q_\alpha] = -Q_\alpha$ mit $R = R^\dagger$ beachten. Dies ist eine nichttriviale Art innerer Symmetrie.

2.2 $N = 1$ -Phänomenologie, chirale Struktur des Standardmodells

Linkshändige Elektronen $(e(x))_L$ bilden ein Dublett bezüglich der schwachen $SU(2)$ und rechtshändige Elektronen $(e(x))_R$ ein Singulett. Für $N \geq 2$ gibt es keine komplexe Struktur in Multipletts (Hypermultipletts $N = 2$), weshalb die Beschreibung nur für $N = 1$ funktioniert.

- Kommen wir nun zu Supermultipletts. Es gibt Casimir-Operatoren der Form $M^2 = P_a P^a$. Da die Q mit den P_a vertauschen, gilt $[M^2, Q_\alpha] = 0$ bzw. $[M^2, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 0$. Dies bedeutet, dass alle Multipletts unter Supersymmetrie immer dieselbe Masse haben. (Es gibt dann auch Multipletts mit Masse null.) Dies stimmt jedoch nicht mit der Phänomenologie überein, also muss die Supersymmetrie gebrochen sein (verschiedene Spin $\pm 1/2$). Die theoretischen Goldstone-Bosonen der Masse null liefern die Freiheitsgrade für die Eichfelder.
- Es gilt $H = P_0 \geq 0$. Für $H = P_0 = 0$ ist $Q_0|\psi\rangle = 0$ (Wigner-Weyl-Modus). Die notwendige Bedingung für (spontane) Supersymmetrie-Brechung ist jedoch, dass der Grundzustand > 0 ist.
- Superraumformalismus, Superfelder

Hier haben wir die Generatoren $\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha$ und $\bar{\mathbf{Q}}^{\dot{\alpha}}$. Die Superraumkoordinaten sind gegeben durch $z = (x^a, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$ mit $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = (\theta_\alpha)^*$ (Reigenfolge drehen). Die x^a sind $\in \mathbb{R}_c^4$ und die $\theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \in \mathbb{R}_a^4$. Die obigen

Generatoren haben, die Eigenschaft, dass sie den Nullpunkt im Superraum verschieben. Um dies zu zeigen, benötigt man die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. Hierbei müssen wir beachten:

$$[\xi^\alpha \mathbf{Q}_\alpha, \bar{\mathbf{Q}}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}] = 2(\xi \sigma^a \bar{\xi}) \mathbf{P}_a$$

Nun kann man Superfelder $\phi_J(z)$ einführen, wobei J ein $SL(2, \mathbb{C})$ -irreduzibler Index $(I/2, J/2)$ ist.

i.) Das Superfeld ist homogen im Grad:

Ist $I + J$ gerade, so hat ϕ_J den Grad 0 (c-Typ), andernfalls hat ϕ_J den Grad 1 (a-Typ).

ii.) Entwicklung in den Variablen θ_α und $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$

Aufgrund der Grassmann-Struktur dieser Variablen ist $(\theta^\alpha)^n = 0$ für $n \geq 3$ zu beachten. Dies gilt ebenfalls für die $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ (siehe SUSY I, Blatt 10, Aufgabe 26).

iii.) Das Transformationsgesetz bezüglich $\mathbf{P}_a, \mathbf{Q}_\alpha$ ist linear. Die infinitesimale Version ist gegeben durch die Formvariation:

$$\delta \phi_J \equiv \phi'_J(z) - \phi_J(z) = i \left(c^a \widehat{\mathbf{P}}_a + \xi^\alpha \widehat{\mathbf{Q}}_\alpha + \widehat{\bar{\mathbf{Q}}}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \right) \phi_J$$

Diese Operatoren sind gegeben durch:

$$\widehat{\mathbf{P}}_a = i \partial_a = i \frac{\partial}{\partial x^a}, \quad \widehat{\mathbf{Q}}_\alpha = i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^a \bar{\theta}) \partial_a) \quad \text{und} \quad \widehat{\bar{\mathbf{Q}}}_{\dot{\alpha}} = i(\bar{\sigma}^{\dot{\alpha}} + i^{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^a \theta) \partial_a)$$

$\partial_\alpha \equiv \partial / \partial \theta^\alpha$ und $\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \equiv \partial / \partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ sind antikommutierende Ableitungen. Für diese gilt $\partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta$, $\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = -\delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}$ mit $(\varepsilon_{\alpha\beta})^* = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$.

$$\delta \phi_J = -(c^a \partial_a + \xi^\alpha \partial_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i(\xi \sigma^a \bar{\theta}) \partial_a + i(\bar{\xi} \bar{\sigma}^a \theta) \partial_a) \phi_J$$

Die Transformation der Superraumvariablen ist gegeben durch:

$$x'^a = x^a + c^a + i \xi \sigma^a \bar{\theta} - i \theta \sigma^a \bar{\xi}, \quad \theta'^\alpha = \theta^\alpha + \xi^\alpha \quad \text{und} \quad \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$$

$\theta \theta \bar{\theta}$ ist die höchste θ -Komponente in $\phi_J(z)$ (Transformation in Raum-Zeit-Ableitungen).

- SUSY-kovariante Ableitungen $\partial_a, D_\alpha, \bar{D}^{\dot{\alpha}}$

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma^a \bar{\theta}) \partial_a, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = (D_\alpha)^* = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta \sigma^a)_{\dot{\alpha}} \partial_a$$

Die explizite Form dieser kovarianten Ableitungen ist nicht so wichtig. Was vor allen benötigt wird, sind die Antikommutatorrelationen $\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = 0$, $\{D_\alpha, D_\beta\} = 2i(\sigma^a)_{\alpha\beta} \partial_a$ mit $D^n = 0$ für $n \geq 3$ (Blatt 10, Aufgabe 27).

- Kovariant eingeschränkte Superfelder:

$\partial_a \phi_J = 0$ bedeutet, dass ϕ_J komplett von x unabhängig ist. Für **chirale Superfelder** gilt $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \phi_J(z) = 0$ für $z^{(1)} = (x^{a(1)}, \theta^\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$

$$\phi_J(z) = \varphi_J(x^a - i \theta \sigma^a \bar{\theta}, \theta^\alpha) = A_J(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} \psi_{J,\alpha}(x) + \theta^\alpha \theta_\alpha F_J(x) + \text{chirale Ergänzung}$$

Es gilt weiterhin $\delta F_J(x) = -\partial_a(c^a F_J - i \sqrt{2} \bar{\xi} \bar{\sigma}^a \psi_J)$. **Antichirale Superfelder** folgen aus der Bedingung $D_\alpha \chi_J(z) = 0$.

$$\chi_J(z) = \chi_J(x^{a(2)}, \bar{\theta}) = \dots = (B_J, \bar{\chi}_{J,\dot{\alpha}}, G_J) \quad \text{mit} \quad x^{a(2)} = x^a + i \theta \sigma^a \bar{\theta}$$

- Reelles Superfeld:

Für ein reelles Superfeld gilt $\phi_J^*(z) = \phi_J(z)$ mit $J = (I/2, I/2)$. Ein reelles Superfeld ohne Indizes ist $V(z)^\dagger = V(z)$; dieses hat in $(\theta \sigma^a \bar{\theta})$ ein reelles Vektorfeld $v^a(x)$ („Vektorsuperfeld“). Es ist wichtig, wenn wir später Eichtheorien einführen.

- Transversales Superfeld

Das transversale Feld kann sowohl komplex als auch reell sein; es gilt $DDL = 0$ bzw. $\overline{D\bar{D}L} = 0$. Im reellen Fall gilt $DDL = 0 = \overline{D\bar{D}L}$ mit $L^* = \bar{L} = L$. Wegen $\partial_a v^a = 0$, ist v^a ein transversales Vektorfeld.

- SUSY-Wirkungen:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(x) = \begin{cases} \mathcal{L}(z)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}, \mathcal{L}(z) = \mathcal{L}^*(z) \\ \mathcal{L}(z)|_{\theta\theta} + \bar{\mathcal{L}}(z)|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}, \bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{L}(z) = 0, D_\alpha \bar{\mathcal{L}}(z) = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{\mathcal{L}}(z) = (\mathcal{L}(z))^* \end{cases}$$

S selbst ist dimensionslos. Danach müssen wir zum seelenlosen Minkowski-Raum übergehen: $x_c^a \mapsto x^a = x^{a*}$. Die Wirkung ist invariant bis auf für das Wirkungsprinzip irrelevante Oberflächenterme. Aus $\delta S = 0$ folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen.

2.3 Wess-Zumino-Modell

Allgemeine Modellklasse mit chiralen (und antichiralen) Superfeldern:

$$D_{\dot{\alpha}}\phi_i = 0 \text{ und } D_{\alpha}\bar{\phi}^i = 0 \text{ mit } i = 1, \dots, n \text{ und } (\phi_i(z))^* = \bar{\phi}^i(z)$$

Es tritt ein sogenannter superkinetischer Term auf:

$$\mathcal{L}_{s.kin}(z) = \mathcal{L}_{s.kin}^*(z) = \bar{\phi}^i(z)\phi_i(z)$$

Für das Superpotential gilt:

$$\mathcal{L}_{s.pot} : (\mathcal{L}_W(z), \bar{\mathcal{L}}_W(z)), \bar{D}_{\dot{\alpha}}\mathcal{L}_W(z) = 0 = D_{\alpha}\bar{\mathcal{L}}_W(z)$$

$$\mathcal{L}_{s.pot}(x) = \mathcal{L}_W(z)|_{\theta\theta} + \bar{\mathcal{L}}(z)|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

$$\mathcal{L}_W(z) = W(\phi) = \lambda^i\phi_i + \frac{1}{2}m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3!}g^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \dots \text{ mit } [W(\phi)] = 3, [\lambda^i] = 2, [\phi_i] = 1, [m^{ij}] = 1, [g^{ijk}] = 0$$

$$\mathcal{L}_{s.pot} = F_i \frac{\partial W(A)}{\partial A_i} - \frac{1}{2}\psi_i^{\alpha}\psi_{j\alpha} \frac{\partial^2 W[A]}{\partial A_j \partial A_i} + \text{h.k.}$$

$$\frac{\partial W[A]}{\partial A} \equiv \left. \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right|_{\phi_i \mapsto \phi_i}$$

Die F_i, F^i sind Hilfsfelder. Man verwendet die Euler-Lagrange-Gleichungen, um diese F^i zu eliminieren.

$$F_i = -\bar{W}_i(A^*) \equiv \frac{\partial \bar{W}(A^*)}{\partial A^{*i}} \text{ und analog } \bar{F}^i$$

Das Superpotential ist gegeben durch:

$$V(x) = W^i(A)\bar{W}_i(A^*) \geq 0$$

2.4 Supersymmetrische Eichtheorien gekoppelt an chirale Superfelder

2.4.1 Nichtabelsche Eichtheorien (abelscher Fall speziell)

Wir arbeiten zunächst mit kompakten halbeinfachen Lie-Algebren mit den zugehörigen Gruppen. Für die hermiteschen Generatoren schreiben wir zunächst die Kommutatorrelation auf, nämlich $[T_r, T_s] = ic_{rs}{}^t T_t$. Im abelschen Fall verschwinden die Strukturkonstanten $c_{rs}{}^t$. Die Indizes laufen die Dimension der Lie-Algebra ab, also $r = 1, \dots, \dim g$. Für halbeinfache Algebren ist die Determinante der Cartan-Metrik $g_{rs} := c_{ru}{}^v c_{sv}{}^u \neq 0$ und zusätzlich für kompakte Lie-Algebren negativ definit, also $g_{rs} = -\kappa\delta_{rs}$ für $\kappa > 0$. Die Strukturkonstanten $c_{rst} = c_{rs}{}^t g_{t't}$ sind total antisymmetrisch. Schauen wir uns nun die Transformation der Superfelder an:

$$\phi'_i(z) = (\exp(-i\mathbf{\Lambda}(z)))_i{}^j \phi_j(z) \text{ mit } \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^r (T_r)_i{}^j, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\mathbf{\Lambda}^r(z) = 0, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\mathbf{\Lambda} = 0 = D_{\alpha}\mathbf{\Lambda}$$

Damit die Chiralität erhalten bleibt, muss $\mathbf{\Lambda}$ von z (und nicht nur x) abhängen.

$$\phi'(z) = \exp(-i\mathbf{\Lambda}(z))\phi \text{ und } \phi'^{\dagger}(z) = \phi^{\dagger} \exp(i\mathbf{\Lambda}^{\dagger}(z)) \text{ wobei } \mathbf{\Lambda}^{\dagger}(z) = \bar{\mathbf{\Lambda}}^r (T_r)_i{}^j, \bar{\mathbf{\Lambda}}^r = (\mathbf{\Lambda}^r(z))^*$$

Im abelschen Falle tragen die verschiedenen Multipletts verschiedene Ladungen: $\mathbf{\Lambda} \mapsto 2e_i\mathbf{\Lambda}(z)$. $\mathbf{\Lambda}(z)$ ist ein chirales Superfeld (pro einfacher nichtabelscher Lie-Algebra und U(1)-Kopplungskonstanten. Im SU(2)-Fall mit einer Kopplungskonstanten wir $\mathbf{\Lambda}$ ersetzt durch $2g\mathbf{\Lambda}$.) Über die minimale Kopplung werden nun die Eichfelder eingeführt. Damit der superkinetische Term $\phi^{\dagger}\phi$ invariant unter obigen lokalen Transformationen ist, muss $\phi^{\dagger}\phi$ ersetzt werden durch $\phi^{\dagger}\exp(\mathbf{V}(z))\phi$ mit $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{\dagger}$. \mathbf{V} ist liealgebra-wertig und reell: $V_i{}^j(z) = V^r(z)(T_r)_i{}^j, V^r(z) = V^{r*}(z)$. $\exp(\mathbf{V}(z))$ muss sich dabei folgendermaßen transformieren: $(\exp(\mathbf{V}(z)))' = \exp(-i\mathbf{\Lambda}^{\dagger}(z))\exp(\mathbf{V}(z))\exp(i\mathbf{V}(z))$. Mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel erhält man $(\exp(\mathbf{V}(z)))' = \exp(\mathbf{V}'(z))$. Im abelschen Fall ist $\mathbf{V}(z) = \mathbf{V}^*(z)$ (reeller Vektor $v_a(x)$ in $\theta\sigma\theta$) mit $\mathbf{V}' = \mathbf{V}(z) + i(\mathbf{\Lambda} - \bar{\mathbf{\Lambda}})$ und $\mathbf{V} \mapsto 2e_i\mathbf{V}(z)\delta_i{}^j$. Im abelschen Fall kann man außerdem den Fayet-Iliopoulos-Term hinzuaddieren: $\mathcal{L}_{F.I.}(z) = 2k\mathbf{V}(z)$. Es gilt nämlich bis auf eine Raum-Zeit-Ableitung $\mathcal{L}_{F.I.}(x) = \mathcal{L}_{F.I.}(z)|_J = kD(x)$. Im

nichtabelschen Fall ist dieser Term jedoch nicht invariant. Kommen wir nun zur Wess-Zumino-Eichwahl. Dabei handelt es sich um eine partielle Eichwahl.

$$\mathbf{V}_{W.Z.} = \theta\sigma^\alpha\bar{\theta}v_\alpha(x) + \bar{\theta}\theta\theta^\alpha\lambda_\alpha(x) + \theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\frac{1}{2}D(x)$$

(Blatt 14, Aufgabe 2, linear in $\mathbf{\Lambda}, \bar{\mathbf{\Lambda}}$) Hier stellt sich heraus, dass $2\text{Re}(\mathbf{\Lambda}) = \alpha(x)$ (gewichtete Eichfunktionen). Schauen wir uns darüber hinaus den Superpotentialterm $W(\phi)$ an. Für diesen gilt $\bar{D}_{\dot{\alpha}}W = 0$ und $\bar{W}(\phi^\dagger)$.

$$W(\phi) = \lambda^i\phi_i + \frac{1}{2}m^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{3!}g^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \dots \text{ mit } (\exp(-i\mathbf{\Lambda}))^\dagger m \exp(-i\mathbf{\Lambda}) = m \text{ analog für } g^{ijk}$$

$$(\exp(-i\mathbf{\Lambda}))^i_{i'} m^{i'j'} (\exp(-i\mathbf{\Lambda}))_{j'}^j = m^{ij}$$

Die ϕ_i sind nur Singulets und die Dimensionen sind $[W] = 3, [\lambda^i] = 2, [\phi_i] = 1, [m^{ij}] = 1$ und $[g^{ijk}] = 0$.

$$\mathcal{L}_{s.pot}(z) = W(\phi)\bar{\theta}\bar{\theta} + \bar{W}(\phi)\theta\theta \text{ und } \mathcal{L}_{s.pot}(x) = \mathcal{L}_{s.pot}(z)|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

Feldstärkemultipletts:

$$W_\alpha(z), \bar{D}_{\dot{\alpha}}W_\alpha(z) = 0$$

$$W_\alpha(z) = \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(\exp(-\mathbf{V})D_\alpha\exp(\mathbf{V}))$$

Im abelschen Fall gilt $W_\alpha(z)| = \lambda_\alpha(x)$ mit $V(x) = \dots\bar{\theta}\theta\theta^\alpha\lambda_\alpha(x) + \dots$

$$W_{\dot{\alpha}}(z) = -\frac{1}{4}DD((\bar{D}_{\dot{\alpha}}\exp(\mathbf{V}))\exp(-\mathbf{V})) \text{ mit } D_\alpha\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0$$

Im nichtabelschen Falle ist das Transformationsgesetz gegeben durch $W'_\alpha(z) = \exp(-i\mathbf{\Lambda})W_\alpha\exp(i\mathbf{\Lambda})$ und entsprechend für $W_{\dot{\alpha}}^\dagger(z)$. Im abelschen Fall gilt $W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V$, ist also invariant. In adjungierter Darstellung lautet der Eichsektor der Super-Yang-Mills-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{s.Y.M}(x) = \frac{1}{4\kappa}\text{Sp}(W^\alpha W_\alpha)|_{\theta\theta} + \frac{1}{4\kappa}\text{Sp}(W_{\dot{\alpha}}^\dagger W^{\dot{\alpha}\dagger})|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

Diese Terme können geschickt in der Wess-Zumino-Eichung ausgewertet werden (da sie invariant sind). Bemerkung: Instantonen im nichtabelschen Fall (Blatt 13, Aufgabe 35)

$$\mathcal{L}_\theta \sim \theta \text{Im} \left(\frac{1}{2\kappa} \text{Sp}(W^\alpha W_\alpha) \right)$$

In der Wirkung tritt dann der Faktor $\exp(i\theta\nu)$ auf, wobei ν die topologische Windungszahl der Lösung ist.

Kapitel 3

Spontane Supersymmetriebrechung

Falls man das Standardmodell supersymmetrisch verallgemeinern will, muss man die Supersymmetrie brechen, weil die Supermultipletts alle dieselbe Masse haben, was dem Experiment nicht entspricht. (Keine Teilchen verschiedenen Spins haben die gleiche Masse.) (Vergleiche Eichbosonen und spontane Brechung („versteckte Symmetrie“): Renormierung merkt sich die versteckte Symmetrie (K.SYMANZIK: σ -Modell).)

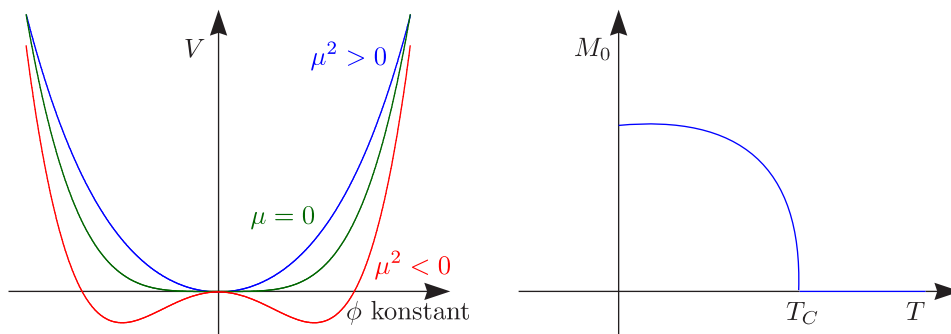
- Die Supersymmetrie kennt keine innere Symmetrie, aber die R.-Z.-Symmetrie (Superraum).
- nichtlineare Symmetrie (ursprüngliche Idee von VOLKOV-AKULOV (1972), Interpretation von Neutrinos als Goldstone-Fermionen)

3.1 Erinnerung an spontane Symmetriebrechung

- i.) \mathcal{L} bzw. S ist invariant unter der betrachteten Symmetrie, aber der Grundzustand nicht. Wendet man die entsprechende Transformation auf einen bestimmten Grundzustand an, so kommt man zu einem anderen Grundzustand (Orbits: Grundzustand nicht eindeutig).
- ii.) kontinuierliche Symmetrie: **Goldstonetal** (Anregungen der Masse 0 sind die Goldstonefelder.)
Für innere Symmetrien (auch Drehungen) handelt es sich bei den Goldstonefeldern um Bosonfelder mit Spin 0.
- iii.) Kontrollparameter:

Im Parameterraum gibt es Sektoren mit exakter Symmetrie und spontan gebrochene Sektoren. Die Kontrollparameter sind die Parameter, welche man variiert, um von einem zum anderen Sektor zu kommen. Der Ordnungsparameter zeigt einem an, ob man sich in einem gebrochenen oder ungebrochenen Sektor befindet. Er ist $\neq 0$ im spontan gebrochenen Fall (beispielsweise spontane Magnetisierung)

Beispiel: Drehsymmetrie (in zwei Dimensionen)



Das Potential ist vom ϕ^4 -Typ:

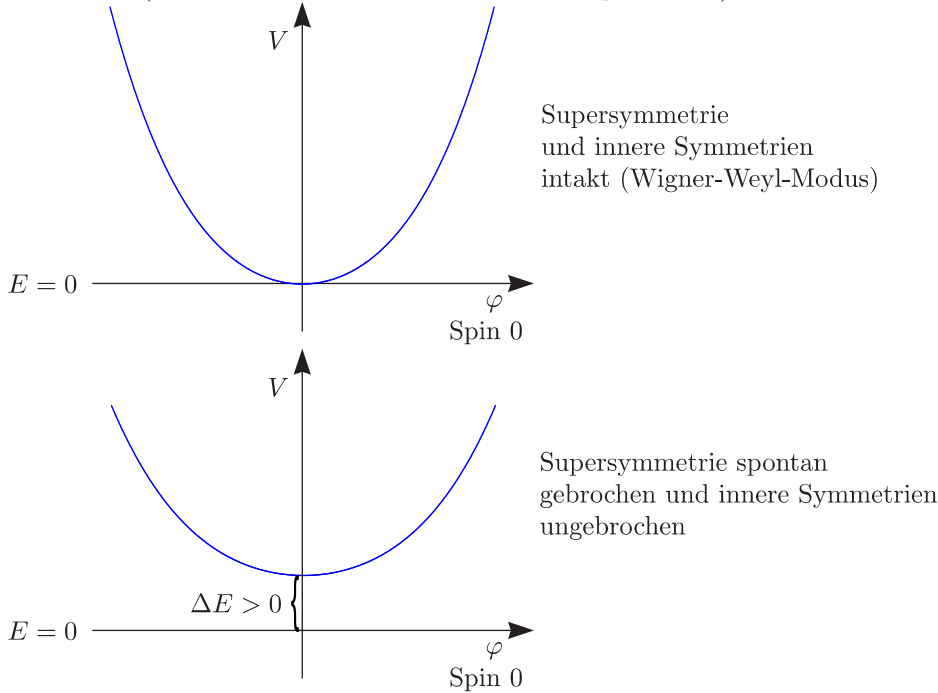
$$V = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda (|\phi|^2)^2 \text{ mit } \phi = \varrho \exp(i\varphi), \varphi' = \varphi + \text{const.}$$

Goldstonefelder transformieren sich inhomogen. Im allgemeinen ist G/H mit $D(H)\phi_0 = \phi_0$ Stabilitätsgruppe.

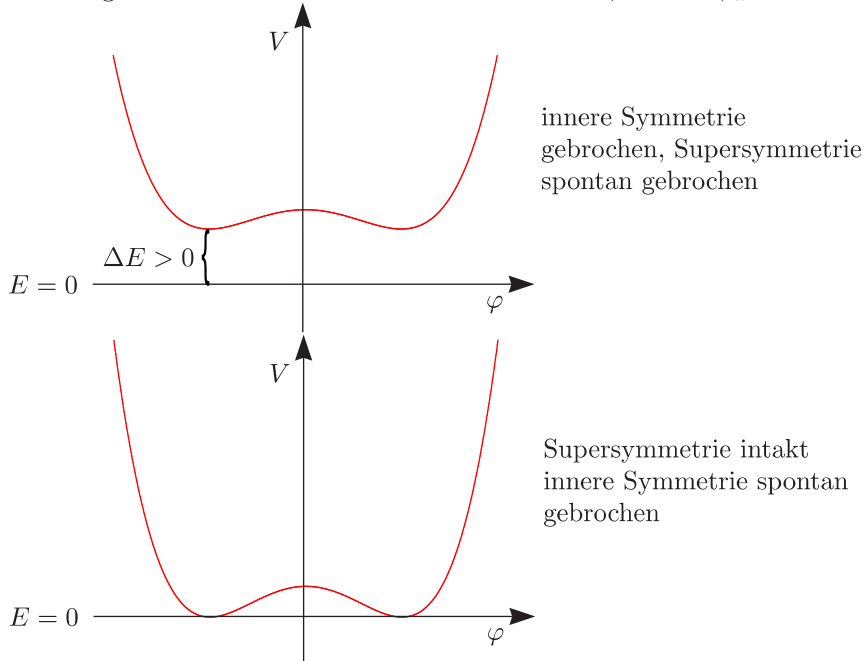
3.2 Symmetriebrechung in der Supersymmetrie

Zustände minimaler Energie (Grundzustände), die durch Supersymmetrie transformiert werden (nicht invariant)

Da $\langle \psi | H | \psi \rangle \geq 0$ ($= 0$) $Q|\psi\rangle = 0 = Q^\dagger|\psi\rangle$ ist, gibt es einen Grundzustand mit $E_0 = 0$ und damit ist die Supersymmetrie intakt (Wigner-Weyl-Modus). Zur Brechung von Supersymmetrie benötigen wir einen Zustand minimaler Energie mit $E_0 > 0$, also eine Energielücke $[0, E_0)$. Man braucht dazu spezielle Felder oder Bereiche in Parameterräumen, die geschickt zu wählen sind. Das Modell muss so eingerichtet werden, dass dies der Fall ist („Phasen“ im Parameterraum, Kontrollparameter). Wir betrachten das Potential V :



Die effektive Wirkung ist gegeben durch $\Gamma(\varphi)$ und $V(\varphi)$ ist das effektive Potential. $\varphi = \langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle$ sind phänomenologische Felder. Man nimmt an, dass der Vakuumzustand $|0\rangle$ translationsinvariant ist, womit φ nicht von x abhängt. Außerdem fordert man Lorentzinvarianz, woraus $\psi_\alpha = 0$ und $v_a = 0$ folgt.



Bei spontaner Supersymmetriebrechung ist $\Delta E > 0$. Der Grundzustand ist dann entartet. (Die Supersymmetrie ist eine kontinuierliche Symmetrie mit den Parametern $\xi_\alpha, \bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ (a-Zahlen).) Deshalb erwartet man, dass es Felder gibt, die zu dieser Entartung gehören (Goldstonefelder). Gesucht ist die Goldstonefeldrichtung.

3.2.1 Beispiel: Chirale Superfelder

Wir betrachten die chiralen Superfelder $(A(x), \psi_\alpha(x), F(x))$ (und die entsprechenden komplex konjugierten Felder). Die Transformationen dieser Felder sind gegeben durch:

$$\delta A = \xi\psi, \quad \delta\psi_\alpha = \sqrt{2}\xi_\alpha F - i\sqrt{2}\xi(\sigma^a\bar{\xi})\partial_a A \quad \text{und} \quad \delta F = -i\sqrt{2}\partial_a(\bar{\xi}\bar{\sigma}^a\psi)$$

Den stationären Punkt des Potentials (Minimum) wollen wir mit $(A^\circ, \psi^\circ = 0, F^\circ)$ bezeichnen. Durch Supersymmetrieanwendung wird man aus dem Minimum weggetrieben zu einem anderen Minimum. Für $F^\circ \neq 0$ (F° ist Ordnungsparameter der Dimension 2) ist der Grundzustand entartet. Außerdem ist charakteristisch, dass es ein zugehöriges Feld mit inhomogenem Transformationsgesetz gibt, nämlich $(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}^\alpha(x))$. Dieses Majorana-Feld würde man als Goldstonefeld zur spontanen Supersymmetriebrechung identifizieren. Man bezeichnet dieses Objekt als „Goldstino“. (Dies ist ein Widerspruch zur Sprachgebung. Das Goldstino ist nicht der supersymmetrische Partner des Goldstonefeldes, sondern das Feld, welches zur spontanen Supersymmetriebrechung führt.) Für solche Modelle ist das Potential vom Wess-Zumino-Typ:

$$V_{p.posh}(A, A^*) = |F_i(A^*)|^2 \geq 0$$

Bei spontaner Supersymmetriebrechung existiert ein i mit $F_i^\circ \neq 0$ (Linearkombination). (Für $N = 1$ Supersymmetrie gibt es **ein** Majoranafeld als Goldstino. Dies hat mit den Generatoren $Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}$ zu tun, die auch schon Majorana-Struktur haben.)

$$V_{off.sh.} = -F^*F - FW'(A^*) - F^*\bar{W}'(A)$$

Hier wurden die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht verwendet. Das Potential ist unphysikalisch.

Im Falle von Vektormultipletts (reelle Superfelder $V(z) = V^*(z)$) ist die Transformation gegeben durch $\delta\lambda_\alpha = \xi_\alpha D$, wobei D die Rolle des **Ordnungsparameters** (mit Dimension 2) spielt. λ_α hat die Dimension $3/2$. Man bezeichnet $(\lambda_\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})$ als Gaugino (= Goldstino). Für $D^\circ \neq 0$ ist die Supersymmetrie gebrochen und für $D^\circ = 0$ ist sie intakt.

$$V = |F_i(A^*)|^2 + \frac{1}{2}D(x)^2 + \frac{1}{2}D_r^2(A^*, A) \geq 0$$

r durchläuft die Dimension der Lie-Algebra.

$$-F_i(A^*) = \frac{\partial\bar{W}(A^*)}{\partial A_i^*}, \quad -D(A^*, A) = \sum_i e_i A_i^* A_i + \text{Fayet-Iliopoulos-Term}$$

$$-D_r(A^*, A) = g(A^* T_r A)$$

Gesucht sind Modelle mit V , welche ein Minimum $\neq 0$ besitzen.

* nur chirale Multipletts (L. O’Raifeartaigh, 1975)

Es werden mindestens drei chirale Superfelder benötigt (L-O’R-Modell). Das Modell besitzt einen Parameterraum (λ, m, g) mit den Dimensionen $(2, 1, 0)$, weist R-Symmetrie und bestimmte diskrete Symmetrien der Felder (Blatt 3, Aufgabe 4) auf.

* Fayet-Iliopoulos-Modell (1974)

Dieses Modell arbeitet mit einer U(1)-Symmetrie und Supersymmetrie.

3.3 Fayet-Iliopoulos-Modell

Wir gehen aus von der Prä-SUSY-Elektrodynamik. Die U(1) wird dabei gekoppelt an zwei chirale Multipletts mit verschiedener Ladung (ϕ^+ und ϕ^-), damit man einen Dirac-Spinor konstruieren kann, um das Elektron zu beschreiben.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{s.ED} = & \left(\frac{1}{4} W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \text{h.k.} \right) + 2kV|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \bar{\phi}_+ \exp(2eV)\phi_+|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \bar{\phi}_- \exp(-2eV)\phi_-|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \\ & + m(\phi_+\phi_-|_{\theta\theta} + \bar{\phi}_+\bar{\phi}_-|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + (3.\text{Ordnung} \equiv 0) + \text{höhere Ordnungen} \end{aligned}$$

Der zweite Term ist der Fayet-Iliopoulos-Term (mit $[k] = 2$). Aus Renormierbarkeitsgründen brechen wir bei ϕ^3 ab. Die supersymmetrisierte Eichfunktion der U(1) ist:

$$\phi'_\pm = \exp(\mp 2ie\Lambda(z))\phi_\pm \quad \text{mit} \quad \bar{D}_\alpha\Lambda = 0, \quad V = V^*, \quad V' = V + i(\Lambda - \bar{\Lambda}), \quad W_\alpha = \frac{1}{4}\overline{DD}D_\alpha V$$

Für den Parameterraum wählen wir (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $k \geq 0$ (sonst $k < 0$: $V \mapsto -V$, $e \mapsto -e$, $\phi_+ \leftrightarrow \phi_-$), $e > 0$ (sonst $e < 0$: $\phi_+ \leftrightarrow \phi_-$) und $|m|^2 > 0$ (falls Elektron/Positron als Dirac-Spinor). Sicher ist $ek > 0$. (Im Falle $k = 0$ gibt es keine spontane Supersymmetriebrechung.) Aus

$$-F_i(A^*) = \frac{\partial \bar{W}(A^*)}{\partial A_i^*}$$

erhält man folgende Gleichungen für die Hilfsfelder:

$$-F_+^*(A_-) = mA_-, \quad -F_-^*(A_+) = mA_+, \quad -D(A_\pm^*, A_\pm) = e(A_+^* A_+ - A_-^* A_-) + k$$

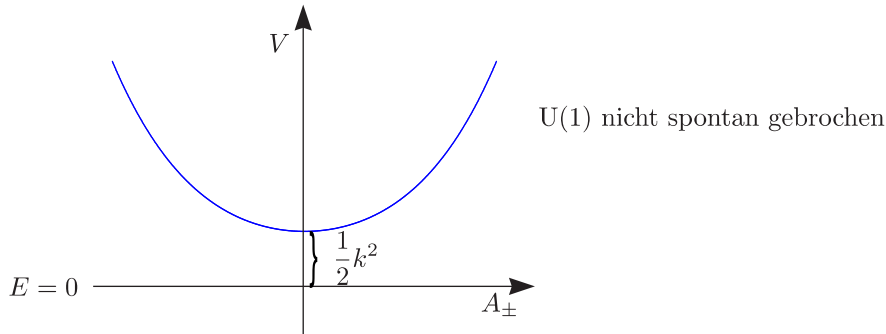
Die Struktur des Potentials ist:

$$V = |F_+|^2 + |F_-|^2 + \frac{1}{2}D^2 = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}e^2(A_+^* A_+ - A_-^* A_-)^2 + \underbrace{(m^2 + ek)|A_+|^2}_{\geq 0} + \underbrace{(m^2 - ek)|A_-|^2}_{\substack{\text{alle Vorzeichen} \\ \text{auch } =0 \text{ möglich}}} \geq 0$$

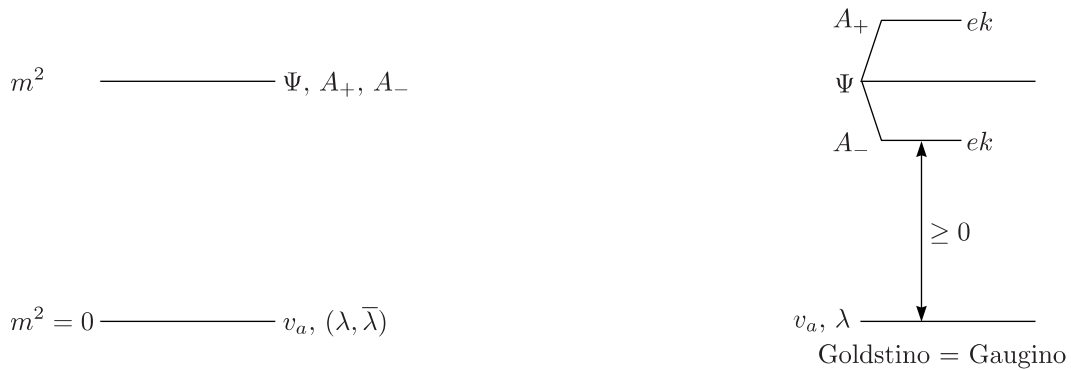
Gesucht ist ein Unterraum des Kontrollraums mit spontan gebrochener Supersymmetrie. (Im Falle $k = 0$ sind die stationären Punkte $A_+^\circ = A_-^\circ = 0$ und das absolute Minimum $V^\circ = 0$, womit die Supersymmetrie intakt ist.) Für $k > 0$ gibt es zwei Fälle:

1.) $m^2 - ek \geq 0$:

Es gilt immer $V^\circ \geq 1/2k^2 > 0$. Um das Minimum zu finden, sorgen wir dafür, dass der dritte Term verschwindet und zwar mit $A_+^\circ = 0$. Aus dem zweiten Term folgt $A_-^\circ = 0$. (Das folgt nicht aus dem letzten Term, da dieser schon mit $m^2 = ek$ verschwindet.)



Die Felder sind invariant unter U(1)-Transformation, weshalb diese ungebrochen bleibt. Weiterhin folgt $D^\circ = -k < 0$ ($\neq 0$) und $F_\pm^\circ = 0$. (Im Fayet-Iliopoulos-Modell wird die Supersymmetrie spontan durch k gebrochen.) Bei der spontanen Supersymmetriebrechung sind die Hilfsfelder also wichtig. Das Goldstino (Partner zu D) ist das „Photino“ $(\lambda_\alpha, \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}})$ mit Masse 0. Der Dirac-Spinor ist gegeben durch $\Psi = (\psi_{+,\alpha}, \bar{\psi}_-^{\dot{\alpha}})$ und beschreibt (e^-, e^+) mit $m^2 > 0$. Die A_\pm -Felder besitzen die Massen $m_{A_+}^2 = m^2 + ek > 0$ und $m_{A_-}^2 = m^2 - ek \geq 0$.



Die Entartung ist zwar aufgehoben, aber es gibt zwei Spin-0-Felder (Teilchen) mit $0 \leq m < m_e \approx 0,511 \text{ MeV}/c^2$. Dies widerspricht der Phänomenologie; so funktioniert es also nicht. Das Problem ist also die symmetrische Verschiebung.

2.) $m^2 - ek < 0$:

Wir suchen die stationären Punkte:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial V}{\partial A_+^*} = (m^2 + ek + e^2(A_+^* A_+ - A_-^* A_-)) A_+$$

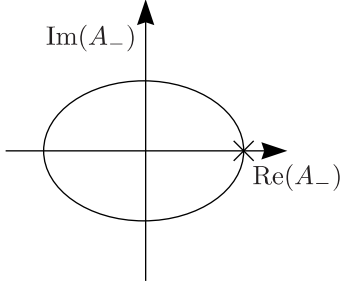
$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial V}{\partial A_-^*} = (m^2 - ek - e^2(A_+^* A_+ - A_-^* A_-)) A_-$$

i.) Unterfall α_1 :

Mit $A_+^{\circ} = 0$ ist die erste Gleichung sofort erfüllt. Den stationären Punkt für A_- wählen wir ungleich null, also $A_-^{\circ} = v$. Die innere U(1)-Symmetrie wird gebrochen, falls das Potential ein Minimum besitzt. (Das Potential besitzt mehr Symmetrie als \mathcal{L} . In unserem Falle besitzt das Potential zufällige U(1)-Symmetrie sowohl bezüglich A_+ als auch A_- getrennt.) Es gibt eine U(1), die geeicht wurde. Diese beiden Symmetrien werden nicht getrennt geeicht. Man vermutet, dass die zusätzliche Symmetrie nicht mehr vorhanden ist, wenn man höhere Ordnungen studiert (mehrere Schleifen). Erwartet wird ein Higgseffekt mit einem langreichweitigen Feld, weil die innere U(1)-Symmetrie und die Supersymmetrie spontan gebrochen wird ($V^{\circ} > 0$). Aus der zweiten Gleichung ergibt sich:

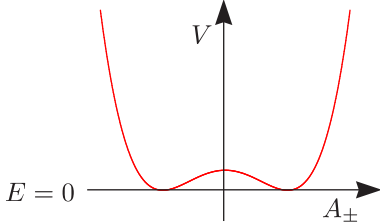
$$e^2 v^2 = -(m^2 - ek) = |m^2 - ek| \text{ mit } v > 0 \text{ reell}$$

$$V^{\circ} = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}e^2 v^4 - |m^2 - ek|v^2 = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}e^2 v^4 \geq 0 \text{ wegen Supersymmetrie}$$

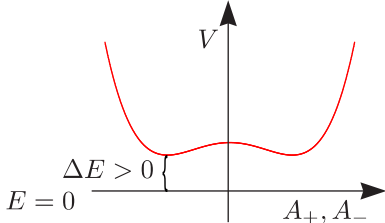


$$0 < k = \frac{1}{e}(e^2 v^2 + m^2) = \frac{1}{2e^2} m^2 (m^2 + 2e^2 v^2) \geq 0$$

Wir behandeln den Fall $m^2 = 0$ extra. Dann gilt nämlich $v^2 = k/e > 0$ und $V^{\circ} = 0$.



Sei nun $0 < m^2 < ek$. Für $V^{\circ} > 0$ wird die Supersymmetrie spontan gebrochen.



U(1) Goldstone (zu geeichtem U(1)):

$$A_-(x) = a_-(x) \exp(i\varphi_-(x)) \text{ und } A_+(x) = a_+(x) \exp(-i\varphi_+(x))$$

Wir $\varphi_-(x)$ wird das Goldstonefeld **weggeeicht**.

ii.) Unterfall α_2 :

Aus $0 < m^2 < ek$ und $k > 0$, $e > 0$ folgt $A_-^{\circ} = v = 1/e\sqrt{ek - m^2}$.

$$0 < V^{\circ} = \frac{1}{2e} m^2 (m^2 + e^2 v^2) < \frac{1}{2}k$$

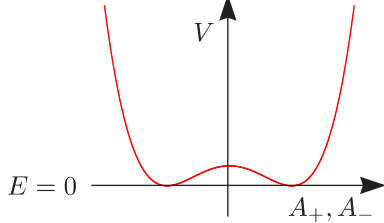
iii.) Unterfall β :

Mit $A_+^\circ = v > 0$ (U(1)) und $A_-^\circ = 0$ folgt aus der ersten Gleichung $e^2v^2 + m^2 + ek = 0$, welche im betrachteten Parameterraum nicht zu erfüllen ist. Diesen Fall brauchen wir also nicht weiter zu betrachten.

iv.) Unterfall γ :

Sei $A_+^\circ = v_+ > 0$ und $A_-^\circ = v_- > 0$. Durch Addition folgt $m^2 = 0$ und durch Subtraktion $ek + e^2(v_+^2 - v_-^2) = 0$.

$$V^\circ = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}e^2(v_+^2 - v_-^2)^2 + ek(v_+^2 - v_-^2) = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}e^2(v_+^2 - v_-^2) = 0$$



Wir wollen nun untersuchen, ob die Massenquadrat-Matrix positiv definit ist. Dazu benötigen wir die Massen aller Felder. Wir betrachten zunächst das Feld v_a . Führen wir die Transformation $A_-(x) \mapsto A'_-(x) + v$ mit ($A_-^\circ = 0$) durch so erhält man aus dem Term $D_a A_-^* D^a A_-$ mit $D_a A_- = \partial_a A_- - iev_a A_-$ einen Ausdruck der Form $e^2 A_-^* A_- v_a^2$. Die spontane Brechung der geeichten U(1) führt also zu $\frac{1}{2}(2e^2v^2)v_a^2$ mit $m_v^2 = 2e^2v^2$. Die Masse des Higgsbosons (Spin 0) rührt von der Krümmung des Potentials in der Umgebung des Minimum her. Mit $\text{Re}(A_-)$, $A_-(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B(x) + iG(x))$ und der Transformation $B(x) = B'(x) + \sqrt{2}v$ erhalten wir die Masse aus dem Term proportional zu B'^2 :

$$\frac{1}{2}(m^2 - ek)(B' + \sqrt{2}v)^2 + \frac{1}{2}e^2 \left(-\frac{1}{2}(B' + \sqrt{2}v)^2 \right)^2 \Big|_{\text{Terme} \sim \frac{1}{2}B'^2} = \frac{1}{2}(2e^2v^2)B'^2 \Rightarrow m_{B'}^2 = 2e^2v^2$$

$\text{Im}(A_-)$ hat keine Masse. Nun müssen wir noch das komplexe A_+ -Feld untersuchen.

$$\left(\frac{1}{2}e^2(-2v^2) + (m^2 + ek) \right) A_+^* A_+ = (-e^2v^2 + m^2 + ek) A_+^* A_+ = (m^2 - ek + m^2 + ek) A_+^* A_+ = 2m^2 A_+^* A_+$$

Aus $\text{Re}(A_+)$ erhalten wir somit $m_{A_+} = 2m^2 > 0$.

Bis jetzt haben wir nur die Boseanteile untersucht. Nun müssen wir noch die Massen der Fermifelder (Spin 1/2) anschauen. Diese folgen aus dem Superpotential.

$$-m(\psi_+ \psi_- - \bar{\psi}_+ \bar{\psi}_-) - \sqrt{2}e \left[-A_-^* (\psi_- \lambda) - A_- (\bar{\psi}_- \bar{\lambda}) + A_+^* (\psi_+ \lambda) + A_+ (\bar{\psi}_+ \bar{\lambda}) \right]$$

Die letzten beiden Terme sind Kopplungsterme.

$$-(m\psi_+ - e\sqrt{2}v\lambda)\psi_- + \text{h.k}$$

Man findet eine Kombination aus ψ_+ und λ , nämlich $\hat{\psi}_+ = \frac{1}{a}(m\psi_+ - e\sqrt{2}v\lambda)$. Dazu gibt es noch eine zusätzliche orthogonale Komponente. Die Idee ist, neue Spinorfelder einzuführen, so dass wir Massenterme erhalten. Der kinetische Term

$$i\bar{\psi}_+ \bar{\sigma}^a \partial_a \psi_+ + i\bar{\lambda} \bar{\sigma}^a \partial_a \lambda$$

soll sich dabei nicht ändern.

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi}_+ \\ \hat{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} m & -e\sqrt{2}v \\ e\sqrt{2}v & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Aus der Bedingung $\frac{1}{a^2}(m^2 + e^2 \cdot 2v^2) \stackrel{!}{=} 1$ folgt noch $a = \sqrt{m^2 + 2e^2v^2}$. Mit dem Diracspinor $\hat{\Psi}_\alpha = (\hat{\psi}_{+, \alpha}, \hat{\psi}_-^{\dot{\alpha}})$ können wir die Terme folgendermaßen schreiben:

$$-a\hat{\psi}_+ \psi_- + \text{h.k} = m_{\hat{\Psi}} \hat{\Psi} \Psi \text{ mit } m_{\hat{\Psi}} = a = \sqrt{m^2 + 2e^2v^2}$$

Weil wir die Supersymmetrie spontan gebrochen haben, erwartet man ein Feld, das masselos ist. Dabei handelt es sich um das Feld $\hat{\lambda}$ (Goldstino).

Aus $F^\circ \neq 0$ und $D^\circ \neq 0$ folgt $-F_+^{\circ*} = mv \neq 0$ und $-D^\circ = ev^2 + h \neq 0$. Linearkombination von ψ_+ , λ und hermitesch konjugierten Anteilen

3.3.1 Beispiel: Massenquadrat-Summenformel für SUSY-Modelle

Wir betrachten chirale Multipletts gekoppelt an Eichfelder und exakt spontan gebrochene Supersymmetrie.

1.) Im gebrochenen Fall:

$$2m_{A_-}^2 + 2m_{A_+}^2 + \underbrace{0}_{v_a} = \underbrace{2}_{\text{reell}} \cdot \underbrace{2}_{2s+1} m_{\psi}^2 + \underbrace{0}_{1 \cdot \frac{1}{2} m_{\tilde{\lambda}}^2}$$

2.) Im ungebrochenen Fall ist dies auch in Ordnung.

$$\sum_{\text{Spins } s} (-1)^{2s} (2s+1) m_s^2 = 0 \quad (\text{Superspur } m^2 = 0)$$

Betrachten wir zunächst die Bosefelder mit Spin 0. Aus $\text{Re}(A_-)$ ergibt sich die Masse des reellen Higgsfeldes $B'(x)$ und zwar $m_{B'(x)}^2 = 2e^2 v^2$. $\text{Im}(A_-)$ ist das wegeichbare Goldstonefeld. Das komplexe A_+ -Feld hat die Masse $2m^2$. Die Masse des Spin-1-Feldes v_a beträgt $2e^2 v^2$ (Higgseffekt, U(1) geeicht). Bei den Fermifeldern gibt es das Goldstino $\hat{\lambda}$ mit Masse 0 und das Diracfeld $\hat{\Psi}$ mit Masse $m^2 + 2e^2 v^2$.

Die vermutete Massenquadrat-Summenformel für die reellen Felder ist gegeben durch (FERRARA-GIRARDELLO-PALUMBO, 1979):

$$\sum_s (-1)^{2s} (2s+1) m_s^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$2 \cdot \underbrace{2m^2}_{A_+} + 1 \cdot \underbrace{2e^2 v^2}_{B'} + 1 \cdot 3 \cdot \underbrace{2e^2 v^2}_{v_a} + 0 = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \underbrace{m^2 + 2e^2 v^2}_{\hat{\Psi}} + \underbrace{0}_{\hat{\lambda}}$$

3.4 O'Raifeartaigh-Modell

Wir betrachten drei chirale Superfelder ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 .

$$\mathcal{L}_{O'R}(x) = \sum_{i=1}^3 \bar{\phi}_i \phi_i |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\left(\lambda \phi_1 + m \phi_2 \phi_3 + \frac{g}{2} \phi_1 \phi_2^2 \right) \Big|_{\theta\theta} + \text{k.k.} \right]$$

(λ, m, g) mit $\lambda \neq 0$

R-Symmetrie:

$$r_{\phi_1} = 2 = r_{\phi_3}, \quad r_{\phi_2} = 0$$

Extra: $\phi'_1 = \phi_1, \phi'_2 = -\phi_2, \phi'_3 = -\phi_3$, spontane Supersymmetriebrechung

Minimum: flaches Potential in A_1° („sliding singletts“; $A_1^\circ \neq 0$: spontane R-Symmetrie-Brechung)

Dies funktioniert nicht mit nur zwei skalaren Superfeldern.

$$W(\phi) = \lambda \phi_0 + g \phi_0^2 \phi_1$$

Hesse-Matrix:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial A \partial A} \right|_{A^\circ} \quad \text{indefinit}$$

3.5 Massenquadrat-Summenformel in der Supersymmetrie

Die Eichtheorie (abelsche, nichtabelsche kompakte halbeinfache Lie-Algebren)) ist gekoppelt an chirale Multipletts.

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{s.\text{Eichteil}}(x) + \mathcal{L}_{s.\text{min.Kopplung}}(x) + \mathcal{L}_{\text{Superpotential}}(x)$$

Der supersymmetrische Eichteil ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{s.\text{Eichteil}}(x) = \left[\frac{1}{4} \frac{1}{(2g)^2} V^{r,\alpha}(z) W^r_{\alpha}(z) \Big|_{\theta\theta} + \underbrace{\frac{1}{4} W^{I,\alpha}(z) W^I_{,\alpha}(z) \Big|_{\theta\theta}}_{\text{U(1)}} + \text{k.k.} \right] + 2k_I V^I_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

Beim abelschen Fall kommt der Fayet-Iliopoulos-Term hinzu. Pro einfacher Lie-Algebra bekommt man eine Kopplung g . Auf Blatt 2, Aufgabe 2 schauen wir uns den Fall $SU(2) \times U(1)$ an.

$$W_\alpha^r = -\frac{g}{2} \overline{DD} [D_\alpha V^r + igc^{rst} D_\alpha V^s V^t], \quad W_\alpha^I = -\frac{1}{4} \overline{DD} D_\alpha V^I(z)$$

$$\mathcal{L}_{s.min.Kopplung}(x) = \underbrace{\phi^\dagger}_{\text{Zeile}} \exp(2gV) \underbrace{\phi}_{\text{Spalte}} \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

$$\mathcal{L}_{s.Potential}(x) = W(\phi)|_{\theta\theta} + \overline{W}(\bar{\phi})|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

Dies ist invariant bezüglich starrer innerer Symmetrie.

$$T_r W_\alpha^r = -\frac{1}{4} \overline{DD} (\exp(-2gV) D_\alpha \exp(2gV)) \quad \text{mit} \quad \phi^\dagger \exp(2gV + g'_I Y_I V^I) \phi$$

Wess-Zumino-Eichung mit undefinierten Komponenten der chiralen Superfelder
Kovariante Ableitung auf die Komponentenfelder:

$$(DA)_a = \left((\partial_a \mathbf{1} + ig\vec{v}_a \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} - ig'v_a \mathbf{1}_2) \right)$$

3.6 Massenquadrat-Matrizen

3.6.1 Bose-Sektor

a.) Spin 0 aus Potential M_0^2

$$V = F^{*,k}(A) F_k(A^*) + \frac{1}{2} (D_r(A^*, A))^2 + \frac{1}{2} (D_I(A^*, A, k_I))^2 \quad \text{mit} \quad F^{*,k}(A) = -\frac{\partial \overline{W}(\phi)}{\partial \phi_k} \Big|_{\phi=A}$$

Entsprechend gibt es Hilfsfeldgleichungen für die D_r und D_I :

$$-D_r(A^*, A) = gA^\dagger T_r A \quad \text{und} \quad -D_I(A^*, A, k_I) = \sum_k Y_{I,k} A_k^* A_k + k_I \quad \text{mit} \quad Y_{I,k} = g_I y_{I,k}$$

Wir suchen die stationären Punkte von $V(A^*, A)$:

$$\frac{\partial V}{\partial A_k} \Big|_{A^\circ, *, A^\circ} = 0 = \frac{\partial V}{\partial A^{*,k}} \Big|_{A^\circ, *, A^\circ}$$

Dazu vollführen wir einen Shift $A_k(x) = \widehat{A}_k(x) + A_k^\circ$. Wir verwenden im folgenden die Notation $A_{\underline{k}} = (A_k, A^{*,k})$ und $A^{\underline{m}} = (A^{*,m}, A_m)$. Um die F -Terme in V zu finden, entwickeln wir um $A_{\underline{k}}^\circ$:

$$W'(A) = W'^\circ + \widehat{A}^* W''^\circ + \frac{1}{2} \widehat{A}^* \widehat{A}^* W'''^\circ + \dots$$

Der quadratische Anteil ist gegeben durch:

$$V_2 = \widehat{A}^* \overline{W}''^\circ W''^\circ \widehat{A} + \frac{1}{2} \widehat{A} \widehat{A} \overline{W}'''^\circ W'^\circ + \frac{1}{2} \overline{W}''^\circ W'''^\circ \widehat{A}^* \widehat{A}^*$$

Mit unserer obigen Notation wollen wir dies folgendermaßen umschreiben:

$$V_2 = \frac{1}{2} A_{\underline{l}} (M_0^2)_{\underline{m}}^{\underline{l}} A^{\underline{m}} \quad \text{mit} \quad (M_0^2)_{\underline{m}}^{\underline{l}} \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial A_{\underline{l}} \partial A^{\underline{m}}} \Big|_{A^\circ} = \begin{pmatrix} (M_0^2)_{\underline{m}}^{\underline{l}} & (M_0^2)_{\underline{l}}^{\underline{m}} \\ (M_0^2)_{\underline{l}}^{\underline{m}} & (M_0^2)_{\underline{m}}^{\underline{l}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (M_0^2)_{\underline{m}}^{\underline{l}} &= \frac{\partial^2 V}{\partial A_{\underline{l}} \partial A^{*,\underline{m}}} \Big|_{A^\circ} = \frac{\partial}{\partial A_{\underline{l}}} \left(W'^k \overline{W}''_{m,k} - D_r(A^*, A)_m (T_r A) \Big|_{A^\circ} - D_I(A^*, A, k)_m (Y_I A) \Big|_{A^\circ} \right) = \\ &= W''^{\circ, \underline{l}k}(A) \overline{W}''_{k,m}{}^\circ(A) + (A^{\circ, \dagger} T_r)^l{}_m (T_r A) + (A^{\circ, \dagger} T_r A^\circ) (T_r)_m{}^{\underline{l}} + \\ &\quad + (A^{\circ, \dagger} Y_I)^l{}_m (Y_I A^\circ) + (A^{\circ, \dagger} Y_I A^\circ + k_I) (Y_I)_m{}^{\underline{l}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M_0^2)_{\underline{m}}^{\underline{l}} &= W''(A^\circ)^{\underline{l},k} \overline{W}''(A^{\circ,*})_{km} + (A^{\circ, \dagger} T_r)^l{}_m (T_r A^\circ) + (A^{\circ, \dagger} T_r A^\circ) (T_r)_m{}^{\underline{l}} + \\ &\quad + (A^{\circ,*} Y_I)^l{}_m (Y_I A^\circ) + (A^{\circ, \dagger} Y_I A^\circ + k_I) (Y_I)_m{}^{\underline{l}} \end{aligned}$$

$$(M_0^2)_l{}^m = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial A^{*,l} \partial A_m} \right|_{A^\circ} = \overline{W''}_{lk} W''^{\circ, mk} + (A^{\circ, \dagger} T_r)^m{}_l (T^r A^\circ) + (A^{\circ, \dagger} T_r A^\circ) (T_r)_l{}^m + (A^{\circ, \dagger} Y_I)^m{}_l (Y_I A^\circ) + (A^{\circ, \dagger} Y_I A^\circ + k_I) (Y_I)_l{}^m$$

Als Übung kann man außerdem die letzten beiden berechnen:

$$(M_0^2)_{l,m} \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial A^{*,l} \partial A^{*,m}} \right|_{A^\circ} \quad \text{und} \quad (M_0^2)^{lm} \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial A_l \partial A_m} \right|_{A^\circ}$$

b.) Spin 1: Vektorfeldmassenquadrat (Higgseffekt)

Falls vorhanden, vollführt man die Transformation $A(x) \mapsto \widehat{A}(x) + A^\circ$. Von eichkovarianter Ableitung von $\mathcal{L}_{s.min.Kopplung}$:

$$\overline{\phi}^m (\exp(2V))_m{}^l \phi_l |_{\theta\theta\overline{\theta\theta}}$$

Mittels der Wess-Zumino-Eichung und der Umdefinition der ϕ -Felder folgt:

$$\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} (\theta\theta)(\overline{\theta\theta}) A^{*,m} (v_a v^a)_m{}^l A_l$$

Zuerst symmetrisieren wir das ganze

$$\mathcal{L}_{Y.Mills, V.2} = A^{*,m} (T_r T_s)_m{}^l A_l v_a^r v^{s,a} = \frac{1}{2} (A^* T_r T_s A + A^* T_s T_r A) v_a^r v^{s,a}$$

und danach vollführen wir einen Shift und erhalten Terme vom Typ

$$\frac{1}{2} \mu_{r,s}^2 v_a^r v^{s,a} \quad \text{mit} \quad \mu_{r,s}^2 = A^{\circ, \dagger} \{T_r, T_s\} A^\circ$$

Dasselbe müssen wir für die U(1)-Teile machen:

$$(\mu^2)_{I,J} = A^{\circ, \dagger} \{Y_I, Y_J\} A^\circ = 2A^{\circ, \dagger} Y_I Y_J A^\circ$$

Die Y_I sind Diagonalmatrizen. Man darf außerdem die Mischterme der abelschen und nichtabelschen Anteile nicht vergessen:

$$2 \cdot \frac{1}{2!} \phi^\dagger (2V)^2 \phi |_{\theta\theta\overline{\theta\theta}} = 4 \cdot \frac{1}{2} (A^\dagger T_r Y_J A) v_a^r v^{s,a}$$

Mittels des Shifts $A(x) \mapsto \widehat{A}(x) + A^\circ$ ergibt sich die folgende Struktur:

$$\frac{1}{2} (\mu^2)_{r,J} v^{r,a} v_a^J + \frac{1}{2} (\mu^2)_{J,r} v_a^J v^{r,a} \quad \text{mit} \quad (\mu^2)_{r,J} = (\mu^2)_{J,r} = 2(A^{\circ, \dagger} T_r Y_J A^\circ)$$

$$\mathcal{L}_{2,V}(x) = \frac{1}{2} (v^{r,a} v_a^J) (M_1^2) \begin{pmatrix} v_a^s \\ v_a^J \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (M_1^2)_{\underline{r}, \underline{s}} = \begin{pmatrix} \mu_{r,s}^2 & \mu_{r,J}^2 \\ \mu_{I,s}^2 & \mu_{I,J}^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{r} = (r, I), \quad \underline{s} = (s, J)$$

$$\frac{1}{2} (\mu^2)_{r,J} v^{r,a} v_a^J + \frac{1}{2} (\mu^2)_{J,r} v_a^J v^{r,a}$$

3.6.2 Fermi-Sektor (Spin 1/2)

In $\mathcal{L}_{s.Eichteil}$ stecken die gauginos $(\lambda, \overline{\lambda})$ und in $\mathcal{L}_{s.min.Kopplung}$ $A^* \psi \lambda$ und $\overline{\phi} V \phi$.

$$\mathcal{L}_{A\psi\psi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial A_l \partial A_k} (\psi_l \psi_k) - \frac{1}{2} \overline{W''}_{l,k} (A^* \overline{\psi}^l \overline{\psi}^k)$$

$$\mathcal{L}_{A\lambda\psi} = -\sqrt{2} A^{*,k} \lambda_k^l \psi_l - \sqrt{2} \overline{\psi}^k (\lambda_k^{\dagger, l} A_l - \sqrt{2} \lambda^i (A^\dagger Y_I \psi) - \sqrt{2} (\psi^\dagger Y_I A) \overline{\lambda}^I)$$

Um zu den Massen zu kommen, müssen wir wieder einen Shift durchführen: $A^\dagger \mapsto A^{\circ, \dagger}$.

$$\mathcal{L}_{A^*\psi\lambda} = -\sqrt{2} A^{*,k} \lambda \psi_l - \sqrt{2} \overline{\psi}^k (\lambda^\dagger)_k{}^l A_l - \sqrt{2} \lambda^I (A^\dagger Y_I \psi) - \sqrt{2} (\psi^\dagger Y_I A) \overline{\lambda}^I$$

Daraus ergeben sich die Massenterme.

$$\mathcal{L}_{\psi\lambda, \overline{\psi}\overline{\lambda}} = \lambda^r (N_r{}^l (A^{\circ, *})) \psi_l + \overline{\psi}^k N_{kr}^\dagger (A^\circ) \overline{\lambda}^r - (\lambda^I \widehat{N}_I^l (A^{\circ, *})) \psi_l + \overline{\psi}^k \widehat{N}_{k,I}^\dagger (A^\circ) \overline{\lambda}^I$$

$$\begin{aligned}
 N_r^l(A^{\circ,*}) &= \sqrt{2}(A^{\circ,\dagger}T_r)^l \sim (-D_r^l(A^\circ)) \\
 N_{kr}^\dagger(A^\circ) &= \sqrt{2}_k(T_r A), \quad \widehat{N}_I^l(A^{\circ,*}) = \sqrt{2}(A^{\circ,\dagger}Y_I)^l \quad \text{und} \quad \widehat{N}_{k,I}^\dagger(A^\circ) = \sqrt{2}_k(Y_I A) \\
 \chi_L^\alpha &= (\psi^\alpha_l, \lambda^{r,\alpha}, \lambda^{l,\alpha}) \quad \text{mit} \quad L \hat{=} l^r, I, \quad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^L = (\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^l, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^r, \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}^I)
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\mathcal{L}_{\psi\lambda, \bar{\psi}\bar{\lambda}} = -\frac{1}{2}\chi_L^\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} (M_{1/2})^{L,N} \chi_N^\beta - \frac{1}{2}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^L \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} (M_{1/2}^\dagger)_{L,N} \bar{\chi}_{\dot{\beta}}^N$$

Dies gilt wegen:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}^k N_{k,r}^\dagger(A^\circ) \bar{\lambda}^r &= \bar{\lambda}^r N_{kr}^\dagger \bar{\psi}^k = \bar{\lambda}^r N_{nr}^\dagger \bar{\psi}^n = \bar{\lambda}^r N^{\dagger,\tau}(A^\circ)_{s,n} \bar{\psi}^n \\
 (M_{1/2})^{L,N} &\equiv \begin{pmatrix} (M_{1/2})^{ln} & (N^\tau)^l_t & (\widehat{N}^\tau)^l_k \\ N_r^n & 0 & 0 \\ \widehat{N}_I^n & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (M_{1/2}^\dagger)_{L,N} = \begin{pmatrix} (M_{1/2}^\dagger)_{l,n} & N_{l,k}^\dagger & \widehat{N}_{l,k}^\dagger \\ N_{rn}^{\dagger,\tau} & 0 & 0 \\ \widehat{N}_{I,n}^{\dagger,\tau} & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Beispielsweise gilt $N^{\dagger,\tau}(A^\circ)_{r,n} = N_{n,r}^\dagger(A^\circ)$. Aus dem Superpotential

$$\mathcal{L}_{A^* \lambda \psi} = -\sqrt{2} A^{*,k}(\lambda)_k^l \psi_l - \sqrt{2} \bar{\psi}^k(\lambda^\dagger)_k^l A_l$$

folgen Massenterme:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\psi\psi, \bar{\psi}\bar{\psi}} &= -\frac{1}{2}\psi_l (M_{1/2})^{l,k} \psi_k + \bar{\psi}^k (M_{1/2}^\dagger)_{k,l} \bar{\psi}^l \\
 (M_{1/2})^{lm} &= (W''(A^\circ))^{l,k} \quad \text{und} \quad (M_{1/2}^*)_{l,k} = (\overline{W}''(A^{\circ,*}))_{l,k} \\
 \mathcal{L}_{A\psi\psi} &= -\frac{1}{2}W''_{l,k}(A^\circ)(\psi_l \psi_k) - \frac{1}{2}\overline{W}''_{l,k}(A^{\circ,*})(\bar{\psi}^l \bar{\psi}^k)
 \end{aligned}$$

3.6.3 Einschub: Vierernotation

Wir gehen aus von:

$$\underline{\Psi}_L = \begin{pmatrix} \chi_{L,\alpha} \\ \bar{\chi}_{L,\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\underline{\psi}}_L = (\chi^\alpha_L, \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^L) \quad \text{mit} \quad L = (l, r, I)$$

Nach den bekannten Regeln (SUSY I, Blatt 8) schreiben wir folgenden Term von der Zweier- in die Vierernotation um:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\chi^\alpha_L (M_{1/2})^{L,N} \chi_{\alpha,N} &= -\frac{1}{2}\bar{\underline{\Psi}}_L \begin{pmatrix} (M_{1/2})^{L,N} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \underline{\Psi}_N \\
 -\frac{1}{2}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^L (M_{1/2}^\dagger)_{L,N} \bar{\chi}^{\dot{\alpha},N} &= -\frac{1}{2}\bar{\underline{\Psi}}_L \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & (M_{1/2}^\dagger)_{L,N} \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \underline{\Psi}_N
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Regeln $\chi\psi + \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\Psi}\Psi$ und $\chi\psi - \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ verwendet. Fassen wir nun die obigen Terme zusammen:

$$\mathcal{L}_{1/2, \text{Massen}} = -\frac{1}{2}\bar{\underline{\Psi}}_L \begin{pmatrix} (M_{1/2})^{L,N} \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & (M_{1/2}^\dagger)_{L,N} \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \underline{\Psi}_N = -\frac{1}{2}\bar{\underline{\Psi}}_L \mathcal{M}^{L,N} \underline{\Psi}_N$$

Für Massenquadrat-Formel:

$$\mathcal{M}^{L,N} \mathcal{M}_{N,M}^\dagger = \begin{pmatrix} (M_{1/2} M_{1/2}^\dagger)^L_M \mathbf{1}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & (M_{1/2}^\dagger M_{1/2})_L^M \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

Für $\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$ sind die Blöcke vertauscht.

Mit dieser Schreibweise betrachten wir die Diagonalblöcke (l, m) von $(M_{1/2} M_{1/2}^\dagger)^L_M$. Für den (1,1)-Block ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 (M_{1/2} M_{1/2}^\dagger)^l_m &= (M_{1/2})^{ln} (M_{1/2}^\dagger)_{nm} + (\overline{N}^\tau)^l_t (N^{\dagger,\tau})_{tn} + (\widehat{N}^\tau)^l_k (\widehat{N}^{\dagger,\tau})_{km} = \\
 &= (W''(A^\circ) \overline{W}''(A^{\circ,*}))^l_m + 2(A^{\circ,\dagger} T_t)^l_n (T_t A^\circ) + 2(A^{\circ,\dagger} Y_K)^l_m (Y_K A^\circ)
 \end{aligned}$$

Analog folgt für den (2,2)-Block

$$(M_{1/2} M_{1/2}^\dagger)_{rs} = N_r^n (N^\dagger)_{ns} = 2(A^{\circ,\dagger} T_r)^n_n (T_s A^\circ) = 2(A^{\circ,\dagger} T_r T_s A^\circ)$$

und analog für den (3,3)-Block:

$$(M_{1/2} M_{1/2}^\dagger)_{I,J} = \widehat{N}_I^n (\widehat{N}^\dagger)_{n,J} = 2(A^{\circ,\dagger} Y_I Y_J A^\circ)$$

Alles zusammengenommen ergibt sich FGP-Massenquadrat-Formel. Als erstes betrachten wir reelle Felder. Die Onshell-Freiheitsgrade sind für Spin 0 (reell) gleich 1 (Klein-Gordon-Gleichung), für Spin 1/2 (Majorana) gleich 2 (nicht 4 wegen den Gleichungen $i_\alpha(\sigma^a \bar{\psi}) = W' \psi_\alpha$, usw.) und für Spin 1 (reeller Vektor v_a) gleich 3 (Proca-Gleichung für massiven Vektor [1936]: $(-\partial_a \partial_b + \square \eta_{ab} + m^2 \eta_{ab}) v^b = 0$ folgt Konsistenzbedingung $\partial_b v^b = 0$).

1.) Bose: Spin 0

$$2(M_0^2)_I^I = 2 \left[\text{Sp}(W''(A^\circ) \overline{W}''(A^{\circ,*})) + (A^{\circ,\dagger} T_r T_r A^\circ) + (A^\circ T_r A^\circ) \underbrace{\text{Sp}(T_r)}_{=0 \text{ (SU)}} + \underbrace{(A^\circ Y_I Y_I A^\circ) + (A^{\circ,\dagger} Y_I A^\circ + k_I)}_{-D_I} \cdot \text{Sp}(Y_I) \right]$$

2.) Bose: Spin 1

$$2 [(A^{\circ,\dagger} T_r T_r A^\circ) + (A^\circ Y_I Y_I A^\circ)]$$

3.) Fermi: Spin 1/2

$$2(M_{1/2} M_{1/2}^\dagger)_L^L = 2 \left[\text{Sp}(W''(A^\circ) \overline{W}''(A^{\circ,*})) + 2(A^{\circ,\dagger} T_t T_t A^\circ) + 2(A^{\circ,\dagger} Y_K Y_K A^\circ) + 2(A^{\circ,\dagger} T_r T_r A^\circ) + 2(A^{\circ,\dagger} Y_I Y_I A^\circ) \right]$$

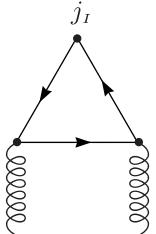
Die Superspur für reelle Felder ist nun definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{sSpur}(\mathcal{M}^2) &= \sum_{\text{Spins}} (-1)^{2s} (2s+1) m_s^2 = 2 \left[\text{Sp}(W''(A^\circ) \overline{W}''(A^{\circ,*})) \left(\underbrace{1}_{\text{Spin 0}} - \underbrace{1}_{\text{Spin 1/2}} \right) + \right. \\ &+ A^{\circ,\dagger} T_r T_r A^\circ \left(\underbrace{1}_{\text{Spin 0}} + \underbrace{3}_{\text{Spin 1}} - \underbrace{4}_{\text{Spin 1/2}} \right) + A^{\circ,\dagger} Y_I Y_I A^\circ \left(\underbrace{1}_{\text{Spin 0}} + \underbrace{3}_{\text{Spin 1}} - \underbrace{4}_{\text{Spin 1/2}} \right) + \\ &\left. - D_I(A^{\circ,*}, A^\circ, k_I) \text{Sp}(Y_I) \right] = -2D_I(A^{\circ,*}, A^\circ, k_I) \text{Sp}(Y_I) \end{aligned}$$

Dies ist die Massenformel für Eichtheorien gekoppelt an chirale Multipletts (egal ob Supersymmetrie oder innere Symmetrien spontan gebrochen sind).

Bemerkungen:

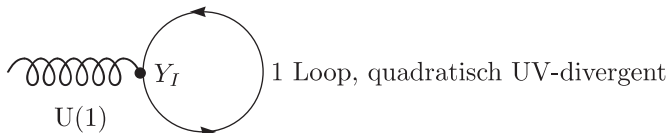
i.) Für die U(1) geeicht (beispielsweise $SU(2) \times U(1)$) gibt es eine Anomaliefreiheit für den Strom.



nichtabelsch

Die Anomaliefreiheit führt auf $\text{Sp}(\{T_r, T_s\} Y_I) = \text{Sp}(\delta_{rs} Y_I) = \text{Sp}(Y_I) = 0$ für alle I .

ii.) Es muss $\text{Sp}(Y_I) = 0$ für alle I gelten, weil man sonst Probleme mit quadratischen Divergenzen bekommt.



Damit gilt $s\text{Sp}(\mathcal{M}^2) = 0$. Bei der minimalen Supergravitation (mSUGRA) wählt man das Kählerpotential $K(\bar{\phi}, \phi)$ speziell, so dass die kinetischen Terme die Form $\bar{\phi}\mathbf{1}\phi$ haben. Dann gilt $s\text{Sp}(\mathcal{M}^2) = 2(n-1)m_{3/2}^2$ mit $n-1$ chiralen Multipletts.

Kapitel 4

Störungstheorie mit Superfeldern

4.1 Berezin-Integral, $D = 4$, $N = 1$ Supersymmetrie

Wir definieren im Superraum $\mathbb{R}_c^4 \times \mathbb{R}_a^4$:

$$\int dz \equiv \int d^8z = \int d^4x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta} \text{ mit } [d^4x] = -4, [d^2\theta] = 1 \text{ und } [d^2\bar{\theta}] = 1$$

Die Seele der Variable x ist irrelevant, nur der Leib spielt eine Rolle. Die Reihenfolge der Integrationen ist prinzipiell egal.

$$\int d^2\theta \equiv -\frac{1}{4} \int d\theta^\alpha \int d\theta_\alpha \equiv -\frac{1}{4} \partial^\alpha \partial_\alpha \text{ und } \int d^2\bar{\theta} \equiv -\frac{1}{4} \int d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \int d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \equiv -\frac{1}{4} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial}^{\dot{\alpha}}$$

Außerdem kann man δ -Funktionen für die θ und $\bar{\theta}$ definieren:

$$\delta^2(\theta - \tau) \equiv (\theta - \tau)^\alpha (\theta - \tau)_\alpha, \delta^2(\bar{\theta} - \bar{\tau}) \equiv (\bar{\theta} - \bar{\tau})_{\dot{\alpha}} (\bar{\theta} - \bar{\tau})^{\dot{\alpha}} \text{ und } \delta^2(0) = 0 = \delta^2(\bar{0})$$

Auch ohne Integration gilt:

$$f(\theta) \delta^2(\theta - \tau) = f(\tau) \delta^2(\theta - \tau) \text{ und analog für } \bar{\theta}$$

$$\int d^2\theta = -\frac{1}{4} \int d\theta_\alpha \int d\theta_\beta \varepsilon^{\beta\alpha}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\int d^2\theta f(\theta) \delta^2(\theta - \tau) = f(\tau)$$

Für ein allgemeines Superfeld können wir die Wirkung folgendermaßen definieren:

$$S = \int dz \mathcal{L}(z) \text{ mit } \mathcal{L}(z) = \mathcal{L}^*(z)$$

Im chiralen Fall $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \mathcal{L}(z) = 0$ gilt:

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} \bar{\partial} \bar{\partial} \right) \mathcal{L}_c(z) = \int d^4x \int d^2\bar{\theta} \equiv \int d^6z$$

Um das ganze mit dem Differential $dz \equiv d^8z$ schreiben zu können, führen wir eine δ -Funktion ein:

$$S = \int dz \delta^2(\theta) \mathcal{L}_c(z) + \text{k.K.} = \int dz (\delta^2(\theta) \mathcal{L}_c(z) + \delta^2(\bar{\theta}) \mathcal{L}_{\bar{c}}(z)) \text{ mit } \mathcal{L}_{\bar{c}}(z) = (\mathcal{L}_c(z))^*$$

\mathcal{L} ist nicht translationsinvariant im Superraum.

4.2 Variationsableitung (Funktionalableitung) von Superfeldern

Gesucht wird für ein allgemeines skalares Superfeld $\phi(z)$ (komplex mit 16/16 kommutierende/antikommütierende Felder als Erzeugendenfunktionen) ist:

$$\frac{\delta\phi(z)}{\delta\phi(v)} = \delta^8(z-v) \equiv \delta^4(x-y)\delta^2(\theta-\tau)\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\tau}) \text{ mit } z \equiv (x, \theta, \bar{\theta}) \text{ und } v \equiv (y, \tau, \bar{\tau})$$

In den δ -Funktionen steckt nur der Leib der x und y . Dies funktioniert analog für reelle skalare Superfelder $\phi^*(z) = \phi(z)$, da die rechte Seite reell ist. Die Dimensionen hier sind $[\delta^4(x-y)] = 4$, $[\delta^2(\theta-\tau)] = -1$ und $[\delta^2(\bar{\theta}-\bar{\tau})] = -1$. Betrachten wir nun folgendes Beispiel:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dz \phi^2(z) \Rightarrow \frac{\delta S}{\delta\phi(v)} = \int dz \phi(z) \delta(z-v) = \phi(v)$$

Für die Variation von S gilt:

$$\delta S[\phi] = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] = \int dz \delta\phi(z) \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(z)} + O((\delta\phi)^2)$$

Chirale Superfelder erfüllen die Einschränkung $\bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0$. Chiraler Superraum:

$$x_{(1)}^a = x^a - i\theta\sigma^a\bar{\theta}, \theta_{(1)}^\alpha = \theta^\alpha, \bar{\theta}_{(1),\dot{\alpha}} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$$

Die Lösung ist, $\phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \varphi(x_{(1)}^a, \theta_{(1)}^\alpha)$ umzuschreiben. Verwende für $\varphi(x_{(1)}, \theta_{(1)})$ die Variation:

$$\frac{\delta\varphi(x_{(1)}, \theta_{(1)})}{\delta\varphi(y_{(1)}, \tau_{(1)})} = \delta^4(x_{(1)} - y_{(1)})\delta^2(\theta_{(1)} - \tau_{(1)})$$

Dies rechnet man dann um in den reellen z -Superraum:

$$\phi(z) = \exp(-i\theta\sigma^a\bar{\theta}\partial_a)\varphi(x, \theta)$$

$$\left. \frac{\delta\varphi(x_{(1)}, \theta_{(1)})}{\delta\varphi(y_{(1)}, \tau_{(1)})} \right|_{\text{umschreiben}} = \frac{\delta\phi(z)}{\delta\phi(v)} \text{ mit } \bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0$$

Wir fügen über die δ -Funktionen eine eins ein:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\varphi(x_{(1)}, \theta_{(1)})}{\delta\varphi(y_{(1)}, \tau_{(1)})} &= \delta^4(x_{(1)} - y_{(1)})\delta^2(\theta_{(1)} - \tau_{(1)}) \left(-\frac{1}{4} \bar{\partial}_{(1)} \bar{\partial}_{(1)} \right) \delta^2(\bar{\theta}_{(1)} - \bar{\tau}_{(1)}) \Big|_{\text{umrechnen}} = \\ &= \left(-\frac{1}{4} \bar{\partial}_{(1)} \bar{\partial}_{(1)} \right) \delta^4(x_{(1)} - y_{(1)})\delta^2(\theta_{(1)} - \tau_{(1)})\delta^2(\bar{\theta}_{(1)} - \bar{\tau}_{(1)}) \Big|_{\text{umschreiben}} = \\ &= \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \delta^4(x^a - y^a - i\theta\sigma^a\bar{\theta} + i\tau\sigma^a\bar{\tau})\delta^2(\theta - \tau)\delta^2(\bar{\theta} - \bar{\tau}) = \\ &= \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \delta^4(x^a - y^a)\delta^2(\theta - \tau)\delta^2(\bar{\theta} - \bar{\tau}) = \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \delta(z - v) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\boxed{\frac{\delta\phi(z)}{\delta\phi(v)} = \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z \delta(z - v) \text{ mit } \bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi = 0}$$

Analog funktioniert das für ein antichirales Superfeld mit $D_\alpha\chi(z) = 0$. Hier geht man in die komplexe Basis $x_{(2)}, \theta_{(2)}, \bar{\theta}_{(2)}$ mit $D_\alpha = \partial_{(2),\alpha}$.

$$\boxed{\frac{\delta\chi(z)}{\delta\chi(v)} = \left(-\frac{1}{4} DD \right)_z \delta(z - v) \text{ mit } D_\alpha\chi(z) = 0}$$

Manchmal ist es einfacher, chirale bzw. antichirale Felder beispielsweise im (1)-Superraum zu betrachten. Betrachten wir nun zwei weitere Beispiele:

$$1.) S = \int d^8 z \bar{\phi} \phi \text{ mit } \bar{D}_\alpha \phi = 0 = D_\alpha \bar{\phi}, \phi = \bar{\phi}^*$$

Man variiert die ϕ und $\bar{\phi}$ voneinander unabhängig (analog zu den komplexen Zahlen z und \bar{z}).

$$\frac{\delta \phi(z)}{\delta \bar{\phi}(v)} = 0 = \frac{\delta \bar{\phi}(z)}{\delta \phi(v)}, \frac{\delta \phi(z)}{\delta \phi(v)} = \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z \delta(z-v), \frac{\delta \bar{\phi}(z)}{\delta \bar{\phi}(v)} = \left(-\frac{1}{4} DD \right)_z \delta(z-v) \text{ mit } v = (y, \tau, \bar{\tau})$$

Damit resultiert, wobei wir beachten, dass die ϕ und $\bar{\phi}$ bosonisch sind:

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{\phi}(v)} = \int dz \bar{\phi}(z) \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z \delta(z-v)$$

Um hier weiterzukommen, benötigen wir folgende Regeln für die partielle Integration, welche man als Übung zeigen kann:

$$(\overline{DD}A)B = A(\overline{DDB}) + \overline{D} \left((\overline{DA})B - (-1)^{\text{Grad}(A)} A \overline{DB} \right)$$

$$(DDA)B = A(DDB) + D \left((DA)B - (-1)^{\text{Grad}(A)} DB \right)$$

Damit folgt weiter:

$$\int dz \left(\left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z \bar{\phi}(z) \right) \delta(z-v) - \underbrace{\int dz \overline{D}(\dots)}_{=0} = - \left(\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z \phi(v)$$

Der zweite Term verschwindet, weil mehr als zwei $\bar{\theta}$ aufeinandertreffen. Durch Nullsetzen erhält man die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Komponentenfelder (A^* , $\sqrt{2}\psi^\alpha$, F^α) (siehe Übung).

2.) Wir betrachten nur Teile der Wirkung:

$$S = \frac{1}{2} \int d^6 z \phi^2 = \frac{1}{2} \int dz \delta^2(\bar{\theta}) \phi^2(z) \text{ mit } \bar{D}_\alpha \phi = 0$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(v)} = \int dz \delta^2(\bar{\theta}) \phi(z) \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \delta(z-v) \right)$$

Die Felder A , $\sqrt{2}\phi$ und F sollen im Unendlichen genügend schnell abfallen.

$$\int dz \left[\left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z (\delta^2(\bar{\theta}) \phi(z)) \right] \delta(z-v) = \int dz \underbrace{\left[\left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_z \delta^2(\bar{\theta}) \right]}_{=1} \phi(z) \delta(z-v) = \phi(v)$$

Damit lassen sich nun Zweipunktfunktionen im Superraum ausrechnen.

4.3 Propagatoren von chiralen, antichiralen Superfeldern

Wir interessieren uns für die freien Greenschen Funktionen. Zur Erinnerung betrachten wir $D = 4$, $N = 0$ Supersymmetrie mit einem reellen Skalarfeld $\varphi(x) = \varphi^*(x)$ mit Masse m .

$$S_2[\varphi] = \int d^4 x \left(\frac{1}{2} \partial_a \varphi(x) \partial^a \varphi(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right)$$

Mit partieller Integration wollen wir S_2 auf folgende Form bringen:

$$S_2[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \varphi(x) K(x, y) \varphi(y) \text{ mit } K(x, y) = -\delta^4(x-y) [\square_y + m^2]$$

$$\begin{aligned} S_2(u, v) &:= \frac{\delta^2 S_2}{\delta \varphi(v) \delta \varphi(u)} = \frac{\delta}{\delta \varphi(v)} = \frac{\delta}{\delta \varphi(v)} \int d^4 x \int d^4 y \delta^4(x-u) K(x, y) \varphi(y) = \frac{\delta}{\delta \varphi(v)} \int d^4 y K(u, y) \varphi(y) = \\ &= \int d^4 y K(u, y) \delta(y-v) = -(\square_v + m^2) \delta(u-v) \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\delta\varphi(x)/\delta\varphi(u) = \delta^4(x - u)$ ausgenutzt. $(\square_v + m^2)$ ist der Klein-Gordon-Operator. Durch Inversion der zweiten Ableitung der Wirkung findet man den Propagator:

$$\int d^4u S_2(v, u)G(u, w) = i\delta^4(v - w)$$

Der Faktor i auf der rechten Seite ist Konvention. Später werden wir feststellen, dass $G(x, y) = \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$ gilt für freie Felder. Die Integration über u hebt sich mit der δ -Funktion $\delta(u - v)$ weg und es folgt:

$$\boxed{-(\square_v + m^2)G(v, w) = i\delta^4(z - w)}$$

Die Randbedingung für diese Gleichung ist Kausalität. Mittels eines Fourier-Ansatzes ergibt sich:

$$D_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \exp(-ipx) \tilde{D}_c(p) \text{ mit } \tilde{D}_c(p) = \frac{-i}{-p^2 - m^2 - i\epsilon}$$

Wir betrachten das ganze im Impulsraum ($p_a \hat{=} i\partial_a$) mit den Feldern ϕ_i ($i = 1, \dots, n$) und den Feldern $\bar{\phi}^j$ ($j = 1, \dots, n$). Für uns sind die kausalen Propagatoren wichtig:

$$\tilde{G}_{J,K}(p; \theta, \tau)|_{\phi_i \phi_j} = i \left(\frac{\bar{m}}{m\bar{m} - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)_{ij} \left(-\frac{1}{4} \overline{DD}_{(p,\theta)} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) \text{ mit } \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \delta^{(2)}(\theta - \tau) \delta^{(2)}(\bar{\theta} - \bar{\tau})$$

In dieser Schreibweise steht θ für $(\theta, \bar{\theta})$ und τ für $(\tau, \bar{\tau})$. Entsprechend lauten die anderen Propagatoren:

$$\tilde{G}_{J,K}(p; \theta, \tau)|_{\bar{\phi}^i \bar{\phi}^j} = i \left(\frac{m}{\bar{m}m - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)^{ij} \left(-\frac{1}{4} DD_{(p,\theta)} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

$$\tilde{G}_{J,K}(p; \theta, \tau)|_{\phi_i \bar{\phi}^j} = -i \left(\frac{1}{\bar{m}m - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)_i^j \left(\frac{1}{16} \overline{DDDD}_{(p,\theta)} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

$$\tilde{G}_{J,K}(p; \theta, \tau)|_{\bar{\phi}^i \phi_j} = -i \left(\frac{1}{m\bar{m} - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)^i_j \left(\frac{1}{16} DDD\overline{D}_{(p,\theta)} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

Formal ist der Propagator gegeben als Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produkts von Feldern:

$$\tilde{G}_{J,K}(p; \theta, \tau) = \langle 0|T^*(\phi_J(v)\phi_K(w))|0\rangle_{|x=y|_p} \text{ mit } v \equiv (x, \theta, \bar{\theta}) \text{ und } w \equiv (y, \tau, \bar{\tau}), \phi_J = (\phi_j, \bar{\phi}^j)$$

[siehe BOGOLIUBOV/SCHIRTOR: quasilokale Operatoren]

Auf Blatt 6 in Aufgabe 13 beschäftigen wir uns mit chiralen Superfeldpropagatoren $\varphi(x, \theta)$, $\bar{\varphi}(x, \bar{\theta})$ mit $\phi(z) = \exp(i\theta\bar{\theta})\varphi(x, \theta)$. Blatt 8:

$$S_2 = \int dz \left(\bar{\phi}\phi + \left(\frac{m}{2} \phi^2 \delta^{(2)}(\bar{\theta}) + \text{k.k.} \right) \right) \Rightarrow \varphi, \bar{\varphi}$$

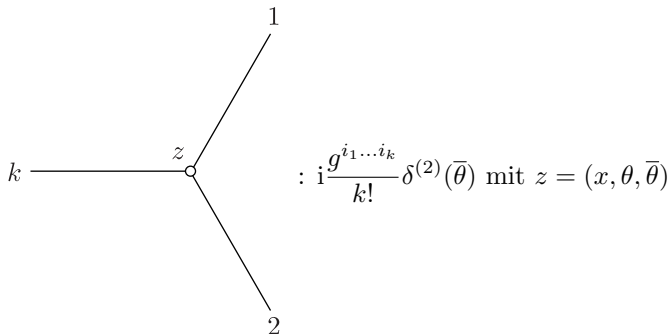
$$\frac{\partial\varphi(x, \theta)}{\partial\varphi(y, \tau)} = \delta^{(4)}(x - y) \delta^{(2)}(\theta - \tau)$$

Auf Blatt 7 in Aufgabe 14 vergleichen wir die Komponentenfeldpropagatoren mit den θ -, τ -Entwicklungen der gefundenen Superpropagatoren.

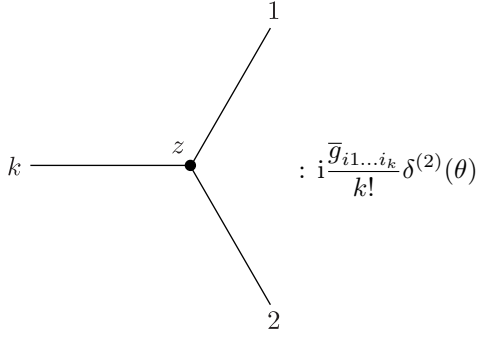
4.4 Feynman-Regeln

Das Superpotential $W(\phi)$ ist ein Polynom bestehend aus Monomen ϕ^n für $n \geq 3$.

$$\mathcal{L}_{s.pot}(z) = W(\phi)\delta^{(2)}(\bar{\theta}) + \overline{W}(\bar{\phi})\delta^{(2)}(\theta) \text{ mit } W(\phi) = \sum_{k=3}^M \frac{1}{k!} g^{i_1 \dots i_k} \phi_{i_1} \dots \phi_{i_k}$$



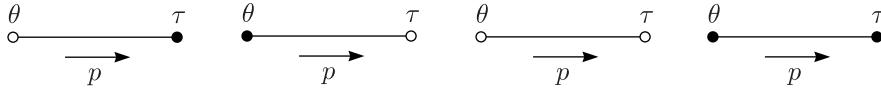
Es gibt pro Vertex eine Integration über z . Im Impulsraum bleibt davon nur die Integration über θ und $\bar{\theta}$ übrig.



An jedem Vertex gilt Impulserhaltung und bei einem zusammenhängenden Diagramm globale Impulserhaltung

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^F p_i \right).$$

Dies folgt von der Fourier-Transformation. Für Vertizes führen wir zwei Farben ein:



Man kann auch Vertizes ohne Farbe einführen; dann muss jedoch den Linien eine Richtung zugewiesen werden.

4.4.1 Beispiel: 1-Schleifen-Korrektur zum Propagator

Wir betrachten den Propagator $\phi\phi$ mit $m \neq 0$ im ϕ^3 -Modell.

$$\sim \left(\frac{ig}{3!} \right)^2 m^2 \int d^4\theta \int d^4\tau \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{m^2 - k^2 - i\epsilon} \frac{i}{m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon} \times$$

$$\times \left[\left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)_{(k,\theta)} \delta^{(4)}(\theta - \tau) \right] \cdot \left[\left(-\frac{1}{4} \overline{DD}_{(-k+p,\theta)} \delta^{(4)}(\theta - \tau) \right) \right]$$

Auf Blatt 6 in Aufgabe 12 zeigen wir:

$$(DD)_{(k,\theta)} \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \exp[(\theta - \tau)k\bar{\theta}] \delta^{(2)}(\bar{\theta} - \bar{\tau}) \text{ und } (\overline{DD})_{(k,\theta)} \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \exp[(-\theta k(\bar{\theta} - \bar{\tau}))] \delta^{(2)}(\theta - \tau)$$

Von der θ -Struktur der δ -Funktionen her erkennen wir, dass es keine Beiträge gibt. Das Integral über k ist für große Impulse (UV-Fall) logarithmisch divergent, was durch Power-Counting festgestellt werden kann. Das ganze Diagramm führt also einen undefinierten Ausdruck $0 \cdot \infty$. Man untersucht zuerst die θ -Struktur der Diagramme und regularisiert danach die divergenten Integrale. Führt die θ -Struktur auf einen verschwindenden Ausdruck, so interpretiert man dies so, dass es für $\langle 0 | \phi(z) \phi(v) | 0 \rangle_{\text{1PI}}$ sowohl keine 1-Schleifen-Beiträge als auch keine endlichen Beiträge gibt.

4.5 GRS-Regeln für chirale Felder

Diese Regeln gehen auf GRISARU, POCEK und SIEGEL (1979) zurück. Die Idee ist, dass man die DD - und \overline{DD} -Operatoren der Linien zu den Vertizes verschiebt. Dazu benötigt man sogenannte **Transferidentitäten**. Später werden die $\delta^{(2)}(\theta)$ und $\delta^{(2)}(\bar{\theta})$ von den Vertizes abgearbeitet. Dies hat den Vorteil, dass sowohl die Vertizes als auch die Propagatoren einfacher aussehen.

$$D_\alpha(p, \theta, \bar{\theta}) = (\partial_\theta)_\alpha - \alpha(\sigma^\alpha \bar{\theta}) p_\alpha \text{ und } \overline{D}^{\dot{\alpha}}(p, \theta, \bar{\theta}) = (\bar{\partial}_{\bar{\theta}})^{\dot{\alpha}} - \dot{\alpha}(\bar{p}\theta) \text{ mit } p \hat{=} i\partial$$

Es gilt $\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot{\beta}}\} = 2\bar{p}_{\alpha\dot{\beta}}$, $\{D_\alpha, D_\beta\} = 0 = \{\overline{D}_{\dot{\alpha}}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\}$ und weiter:

$$D_\alpha(p; \theta, \bar{\theta}) \delta^{(4)}(\theta - \tau) = -D_\alpha(-p, \tau, \bar{\tau}) \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \delta^{(4)}(\theta - \tau) (-D_\alpha(-p, \tau, \bar{\tau}))$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \circ \\ \theta \quad D_\alpha \delta^{(4)}(\theta - \tau) \quad \tau \end{array} & = & \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \circ \\ \theta \quad \delta^{(4)}(\theta - \tau)(-D_\alpha) \quad \tau \end{array} \end{array}$$

Analog funktioniert dies mit \overline{D}_α :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \circ \\ \theta \quad \overrightarrow{D}_\alpha \delta^{(4)}(\theta - \tau) \quad \tau \end{array} & = & \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \circ \\ \theta \quad \delta^{(4)}(\theta - \tau)(\overleftarrow{D}_\alpha) \quad \tau \end{array} \end{array}$$

$$\left(-\frac{1}{4}DD\right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) = -\frac{1}{4}D^\alpha \delta^{(4)}(\theta - \tau)(\overleftarrow{D}_\alpha) = \left(-\frac{1}{4}\right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) \overleftarrow{D}^\alpha D_\alpha$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \circ \\ \theta \quad -\frac{1}{4}DD\delta^{(4)} \quad \tau \end{array} & = & \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ \theta \quad \delta^{(4)}(\theta - \tau) \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \quad \tau \end{array} \end{array}$$

Analog geht das mit:

$$\left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \delta^{(4)}(\theta - \tau) \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right)$$

4 Propagatorlinien:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \phi \quad \xrightarrow{p} \quad \overline{\phi} \\ \circ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \\ \theta \quad \frac{1}{16}\overleftarrow{DDDD}\delta^{(4)}(\theta - \tau) \quad \tau \end{array} & = & \begin{array}{c} \phi \quad \xrightarrow{p} \quad \overline{\phi} \\ \theta \circ \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \tau \\ \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \\ \text{zum Vertex } \theta \quad \text{zum Vertex } \tau \end{array} = \\ & & \begin{array}{c} \phi \quad \xrightarrow{p} \quad \overline{\phi} \\ \theta \circ \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \tau \\ \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\delta^{(2)}(\overline{\theta} - \overline{\tau})\right) \delta^{(2)}(\theta - \tau) \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \phi \quad \xrightarrow{p} \quad \overline{\phi} \\ \theta \circ \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \tau \\ \frac{1}{16}DD\overleftarrow{DD}\delta^{(4)}(\theta - \tau) \end{array} & = & \begin{array}{c} \phi \quad \xrightarrow{p} \quad \overline{\phi} \\ \theta \circ \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \tau \\ -\frac{1}{4}DD\delta^{(4)}(\theta - \tau) \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \end{array} = \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overline{\phi} \quad \xrightarrow{p} \quad \phi \\ \theta \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \circ \tau \\ \left(-\frac{1}{4}DD\delta^{(2)}(\theta - \tau)\right) \delta^{(2)}(\overline{\theta} - \overline{\tau}) \left(-\frac{1}{4}\overleftarrow{DD}\right) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \phi \\ \theta \circ \end{array} & \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \phi \\ \circ \tau \end{array} \\
 -\frac{1}{4} \overline{DD} \delta^{(4)}(\theta - \tau) & \quad 1 = p_+ + p_+ + p_- = \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \frac{1}{16} \frac{DD\overline{DD}}{p^2} \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \\
 & = \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \left(-\frac{1}{4} \frac{DD}{p^2} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right)
 \end{aligned}$$

Damit folgen die GRS-Propagatoren:

$$\begin{array}{c} \phi_i \\ \theta \circ \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \overline{\phi}^j \\ \bullet \tau \end{array} : -i \left(\frac{1}{\overline{m}m - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)_i^j \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

$$\begin{array}{c} \overline{\phi}^i \\ \theta \bullet \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \phi_j \\ \circ \tau \end{array} : -i \left(\frac{1}{m\overline{m} - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)_i^j \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

$$\begin{array}{c} \phi_i \\ \theta \circ \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \phi_j \\ \circ \tau \end{array} : i \left(\frac{\overline{m}}{m\overline{m} - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)_{ij} \left(-\frac{1}{4} \frac{DD_{(p,\theta)}}{p^2} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

$$\begin{array}{c} \overline{\phi}^i \\ \theta \bullet \end{array} \xrightarrow{p} \begin{array}{c} \overline{\phi}^j \\ \bullet \tau \end{array} : i \left(\frac{m}{\overline{m}m - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \right)^{ij} \left(-\frac{1}{4} \frac{\overline{DD}}{p^2} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

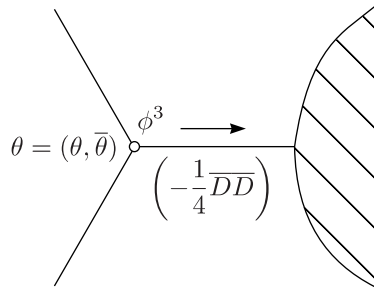
Vertextregeln für ϕ^3 -Theorie:

$$\begin{array}{c} j \\ \diagup \\ \circ \theta = (\theta, \overline{\theta}) \\ \diagdown \\ i \end{array} \quad k \text{---} \quad : \frac{i}{3!} g^{ijk} \left[\int d^4\theta \equiv \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} \right]$$

Die δ -Funktion $\delta^{(2)}(\overline{\theta})$ fällt weg mittels partieller Integration eines $-\overline{DD}/4$ -Operators im z -Raum. Endgültig muss man einmal $-\overline{DD}/4$ weglassen.

$$\begin{array}{c} j \\ \diagup \\ \bullet \theta = (\theta, \overline{\theta}) \\ \diagdown \\ i \end{array} \quad k \text{---} \quad : \frac{i}{3!} \overline{g}^{ijk} \int d^4\theta$$

Je auslaufende Propagatorlinie bekommt einen zusätzlichen Faktor $(-1/4\overline{DD})_{(p,\theta)}$ dazu. Für äußere Linien gilt dies jedoch nicht!



Dies gilt nicht für äußere Linien. Analog funktioniert dies für den $\bar{\phi}^3$ -Vertex. Einer der $-\frac{1}{4}\overline{DD}$ -Operatoren verwendet man (via partieller Integration), um den Vertex $\delta^{(2)}(\bar{\theta})$ zu absorbieren.

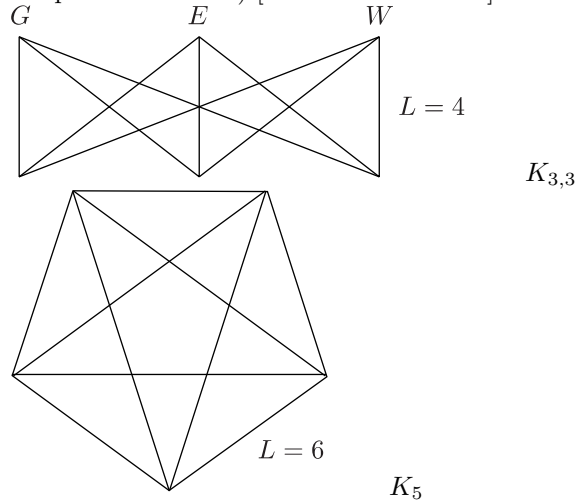
Aus der effektiven Wirkung $\Gamma(\phi, \bar{\phi})$ folgen die 1-Teilchen-irreduziblen Diagramme. Ein-Teilchen-irreduzible Diagramme sind zusammenhängende Diagramme (Graphen) ohne Isthmus (e). Wenn man den Isthmus (Brücke) wegnimmt und der Graph dann einen höheren Zusammenhangsgrad bekommt, ist es 1-Teilchen-reduzibel. An jedem Vertex gilt Impulserhaltung

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^E p_i\right)$$

Außerdem ist der Gesamtimpuls erhalten. Pro Schleife ergibt sich eine vierdimensionale Impulsintegration:

$$\int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 k_L}{(2\pi)^4}$$

L ist hierbei die Loopzahl (zykломatische Zahl). Dies ist die kleinste Zahl von Linien (Kanten), deren Weglassen im Graph G alle Zyklen zerstört. (Dies gilt auch für nicht plättbare (ebene) Diagramme). Es gibt ein einfaches Kriterium, ob man Diagramme in die Ebene abbilden kann oder nicht. Für ebene Graphen K_5 (kompletter Graph und Vertizes) [Kuratowski-Theorie].

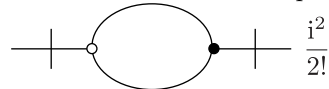


Für zusammenhängende Diagramme gilt $L = I - V + 1$.

Jedes Diagramm besitzt außerdem einen kombinatorischen Faktor (Wick-Zahl, ähnlich zur A^3 -Theorie). V sei die Anzahl der Vertizes $V_0 + \bar{V}_0 = V$.

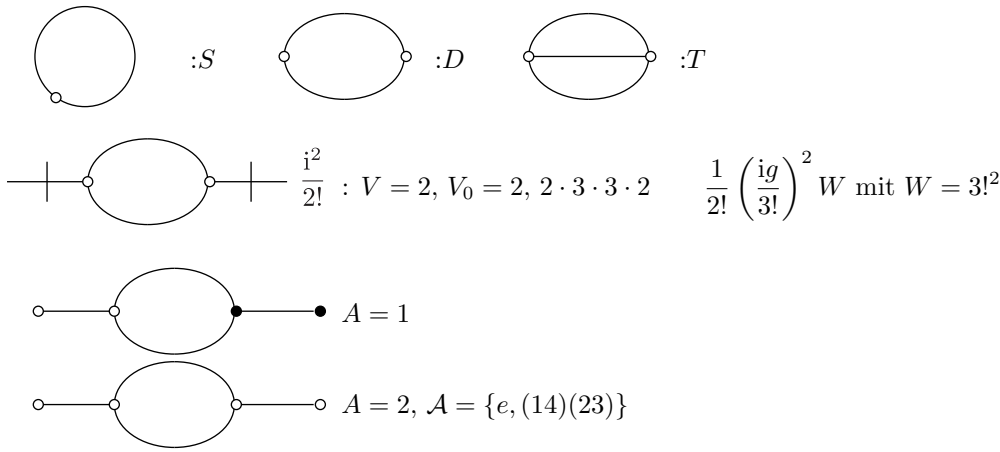
$$i^V \frac{1}{V!} \binom{V}{V_0} \left(\frac{i g}{3!}\right)^{V_0} \left(\frac{i \bar{g}}{3!}\right)^{\bar{V}_0} \cdot W$$

Betrachten wir zwei Beispiele für W :



$$W = V_0! \bar{V}_0! 3!^{V_0} 3!^{\bar{V}_0} n_0! \bar{n}_0! = 2!^5 \cdot 2!^D \cdot 3!^T \cdot A$$

n_0 ist die Zahl der äußeren ϕ -Beine. A ist die Ordnung(\mathcal{A}), wobei \mathcal{A} die Automorphiegruppe ist (Vertizes nummeriert). In diesem Beispiel ist $A = 1$.



4.6 Beispiele für 1-Schleifen- Γ -Beiträge

4.6.1 Einpunktfunktionen: Tadpoles

Das Diagramm gibt es nur, wenn $m \neq 0$ ist.

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \left(-\frac{DD}{4k^2} \right) \delta^4(\theta - \tau) \Big|_{\theta=\tau} = \frac{1}{16} \overline{DDDD} \delta^4(\theta - \tau) \Big|_{\theta=\tau} = 1
 \end{aligned}$$

Dies gilt nach Blatt 6, Regel (iv').

$$\frac{1}{16} \overline{DDDD} \delta^4(\theta - \tau) = \exp(-\tau \hbar \bar{\tau} - \theta \hbar \bar{\theta} + 2\theta \hbar \bar{\tau})$$

Schauen wir uns nun die θ -Struktur an:

$$i \int d^4\theta \tilde{\phi}(p=0, \theta) \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(m^2 - k^2 - i\epsilon)}}_{=I(0; m^2)}$$

Das Integral ist im UV-Limes logarithmisch divergent, wie man mittels Power-Counting feststellt. Die Idee ist, dass hier das falsche Integral für das chirale ϕ steht. Dann würde der Beitrag verschwinden.

$$\int dz \phi(z) \equiv 0 \text{ modulo Oberflächenterme}$$

Man spricht von der „Lokalität“ im θ -Raum, wenn nur eine Integration über $d^4\theta$ und keine anderen τ -Variablen vorhanden ist. Obwohl das Integral also divergent ist, wird dessen Beitrag trotzdem als 0 interpretiert.

4.6.2 Zweipunktfunktionen $\phi\phi$ bzw. $\overline{\phi\phi}$ mit $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
 & \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \left(-\frac{1}{4} \frac{DD}{k^2} \delta^4(\theta - \tau) \right) \left(-\frac{1}{4} \overline{DD} \right) \text{ (partielle Integration im } z\text{-Raum), Transfer} \\
 & \left(-\frac{1}{4} \frac{DD}{(p-k)^2} \delta^{(4)}(\theta - \tau) \right) \\
 & = \frac{1}{16} \overline{DD} \frac{DD}{k^2} \left(-\frac{\overline{DD}}{4} \right) \delta^{(4)}(\theta - \tau) = \frac{1}{16} \overline{DD} \cdot 16(-k^2) \delta^{(4)}(\theta - \tau) = -\frac{1}{4} \overline{DD}_{(k, \theta)} \delta(\theta - \tau)
 \end{aligned}$$

Dies folgt aus der Algebra der D und \bar{D} . Befreie eine $\delta^{(4)}(\theta - \tau)$ -Funktion von $DD, \bar{D}\bar{D}$.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\delta^{(4)}(\theta - \tau) \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ -\frac{1}{4}DD\delta^{(4)}(\theta - \tau) \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} \delta^{(4)} \quad k \\ \text{---} \circ \quad \tau \\ \text{---} \circ \quad p-k \\ \delta^{(4)} \end{array} \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} k \\ \text{---} \circ \quad \theta = \tau \\ \text{---} \circ \quad p-k \\ \delta^{(4)} \end{array} \\
 & & \frac{1}{16} \frac{\bar{D}\bar{D}D D}{(p-k)^2} \delta^{(4)}(\theta - \tau) \Big|_{\theta=\tau} = \frac{1}{(p-k)^2}
 \end{array}$$

$\int d^4\theta$: lokal im θ -Raum

$$\frac{1}{2}g^2 \int d^4\theta \tilde{\phi}(p, \theta)\tilde{\phi}(-p, \theta)I(p^2, m^2) \text{ mit } I(p^2, m^2) = m^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2[m^2 - k^2 - i\epsilon][m^2 - (p-k)^2 + i\epsilon]}$$

Der Divergenzgrad dieses Integrals $I(p^2, m^2)$ ist gleich -2 ; es ist also endlich. Der Beitrag des Graphen verschwindet jedoch:

$$\int dz \phi^2(z) \hat{=} 0$$

Mittels der Entwicklung des Integrals, also

$$I(p^2, m^2) = I(0, m^2) + p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} I \Big|_{p^2=0} + \dots$$

folgt:

- 1.Term: $\int dz \phi^2(z)I(0, m^2) = 0$
- 2.Term: $\int dz \phi \square \phi, \int dz \partial \phi \partial \phi$ auch $\hat{=} 0$

Es gibt kein 1-Schleifen-Beitrag zu $\Gamma_{\phi\phi}$ (kein Superpotentialtyp).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} k \quad \delta^{(4)}(\theta - \tau) \\ \text{---} \circ \quad \tau \\ \text{---} \circ \quad p-k \\ \delta^{(4)}(\theta - \tau) \end{array} \\
 \begin{array}{c} -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D} \\ -\frac{1}{4}DD: \text{ partielle Integration} \\ -\frac{1}{4} \frac{DD}{k^2} \delta^4(\theta - \tau) \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \circ \quad \theta \\ \text{---} \circ \quad \tau \\ p \quad p \end{array}
 \end{array}$$

Lokal im θ -Raum, Transfer, Algebra

$$\underbrace{\frac{1}{16} \bar{D}\bar{D}D D \delta^{(4)}(\theta - \tau) \Big|_{\theta=\tau}}_{=1} \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

$$\sim \int d^4\theta \tilde{\phi}(p, \theta)\tilde{\phi}(-p, \theta)I(p^2, m^2) \text{ mit } I(p^2, m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m^2 - k^2 - i\epsilon)(m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon)}$$

Der erste Term der Entwicklung $I(0, m^2)$ ist im UV-Limes logarithmisch divergent.

$$\int dz \phi(z)\bar{\phi}(z)I(0, m^2)$$

Wir müssen also die Wellenfunktion $\phi, \bar{\phi}$ renormieren (nach t'Hooft, Veltman, Giambiagi, Bollini):

$$\phi_{ren} = \frac{1}{\sqrt{Z}}\phi \text{ und } \bar{\phi}_{ren} = \frac{1}{\sqrt{Z}}\bar{\phi} \text{ mit } \frac{1}{Z} = 1 + I(0, m^2)$$

$$I(0, m^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m^2 - k^2)^2} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(2)(2\pi)^n} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(m^2)^{2 - \frac{n}{2}}}$$

4.7 Superfeldstörungstheorie für Vektorfelder

4.7.1 Faddeev-Popov (de Witt) Prozedur/Funktionalintegralformalismus

i.) $N = 0$ zur Erinnerung (nichtabelscher Fall)

$$S = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{ab}^r(x) F^{r,ab}(x) \right) \text{ mit } [T_r, T_s] = i c_{rs}{}^t T_t$$

Wir betrachten halbeinfache, kompakte Liealgebren. Deren Strukturkonstanten $c_{rs}{}^t$ sind reell. r durchläuft den ganzzahligen Wertebereich $\{1, \dots, n\}$, wobei n die Dimension der jeweiligen Lie-Algebra ist.

$$F_{ab} = v_{ab} + g i [v_a, v_b] \text{ mit } v_a = v_a^r(x) (T_r) \text{ mit } v_{ab} = \partial_a v_b - \partial_b v_a$$

Sei g die Transformation $g(x) = \exp(i\alpha(x))$, wobei $\alpha = \alpha^r(x) T_r$. Die Eichtransformation der v_a besitzt folgende Form:

$$v'_a = v_a^g = g(x) v_a g^{-1}(x) + \frac{i}{g} (\partial_a g) g^{-1} \text{ bzw. } F'_{ab} = g F_{ab} g^{-1}$$

Infinitesimal lautet diese Eichtransformation:

$$\delta v_a = -i [\delta\alpha(x), v_a] + \frac{i}{g} \partial_a \delta\alpha \text{ bzw. } \delta F_{ab} = -i [\delta\alpha(x), F_{ab}]$$

Der quadratische Anteil der Wirkung besitzt folgende Form:

$$S_2 = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y v_a^r(x) K_{r,s}^{ab}(x, y) v_b^s(y) \text{ mit } K^{ab}(r, s)(x, y) = \delta_{r,s} [\square_x \eta^{ab} - \partial_x^a \partial_x^b] \delta^{(4)}(x - y)$$

Der transversale und longitudinale Projektor ist gegeben durch:

$$(P_T)_a{}^b = \delta_a{}^b - \frac{1}{\square} \partial_a \partial^b \text{ und } (P_L)_a{}^b = \frac{1}{\square} \partial_a \partial^b$$

$K_{r,s}^{ab}$ ist nicht invertierbar. Damit lässt sich zunächst der Propagator nicht bestimmen. Die Idee ist, dass man den Repräsentanten einer eichäquivalenten Klasse wählt. Man führt eine eichfixierende Bedingung $F_r(v) = f_r(x)$ ein, wobei $f_r(x)$ zunächst frei ist. Die Bedingung $F_r(v^g) - f_r(x) = 0$ würde die eindeutigen Vertreter einer Eichklasse fixieren. Die Gleichung besitzt genau eine Lösung $\hat{g}(x)$. Beispielsweise funktioniert dies für die axiale Eichung $v_3^r = 0$. (Diese wird oft bei Hamiltonformulierungen von Eichtheorien verwendet.) Eine weitere Eichung aus der Elektrodynamik ist die Strahlungseichung $A_0 = 0$ und $\partial_i A^i = 0$. Darüber hinaus gibt es die Coulombseichung $\partial_i A^i = 0$ und die Lorentzeichung $\partial_a A^a = 0$. Selbst wenn die Felder genügend schnell abfallen im Unendlichen, gibt es eine globale Obstruktion (Gilbov-Willkür, 1978).

Funktionalintegralformalismus: Separiere das Gruppenvolumen (Haar-Maß)

$$\int \mathcal{D}g = V_G$$

für alle $x \in M_4$. Das Haar-Maß existiert für kompakte Lie-Gruppen. Der Faddeev-Popov-Trick ist, eine 1 einzufügen.

$$\int \underbrace{\prod_{x,a,r} dv_a^r(x)}_{\mathcal{D}v} \int \underbrace{\prod_x \overbrace{dg(x)}^{\mathcal{D}g(x)}}_x \underbrace{\prod_{r,x} \delta(F_r(v^g) - f_r)}_{=1} \Delta_F(v) \exp(iS[v])$$

Im eindimensionalen Falle unter der Annahme, dass es eine Nullstelle x_0 von $F(x)$ gibt, gilt:

$$\left(\int dx \delta(F(x)) \right) \cdot |F'(x_0)| = 1$$

Analog dazu gilt in unserem Falle:

$$\Delta_F^{-1}(v) = \int \mathcal{D}g \prod_{r,x} \delta(F_r(v^g) - f_r) \text{ und } \Delta_F(v) = \det_{\substack{r,s \\ x,y}} \left(\frac{\delta F_r[v^g(x)]}{\delta \alpha_s(y)} \right) \Big|_{\hat{g}: F_r(v^{\hat{g}}) - f_r = 0}$$

- a.) Die Faddeev-Popov-Determinante Δ_F ist eichunabhängig: $\Delta_F(v^g) = \Delta_F(v)$. Dies ist so, weil es ein Gruppenmaß (das Haar-Maß) gibt, welches invariant unter Gruppentransformationen ist.

$$\int \mathcal{D}(g'g'') = \int \mathcal{D}g'' \text{ für alle } g'$$

Ebenso gilt $S[v^g] = S[v]$.

$$\Delta_F^{-1}(v^{g'}) = \int \mathcal{D}g' \prod_{r,x} \delta(F_r[v^{gg'}] - f_r) = \Delta_F^{-1}(v^g)$$

- b.) Variablensubstitution im v -Integral: $v \mapsto v' = v^{g^{-1}}$

$$\int \mathcal{D}g \int \mathcal{D}v' \prod \delta(F_r(v'^g) - f_r) g(v') \text{ mit } g(v') = \Delta_F(v) \exp(iS[v]) \text{ und } v' = v'(v) = v^{g^{-1}}$$

Die Jacobi-Determinante $\mathcal{J} = \mathcal{J}(g)$ ist nicht von v abhängig, da v' linear ist in v .

$$\int \mathcal{D}g \mathcal{J}(g) \int \mathcal{D}v \prod \delta(F_r(v) - f_r) \Delta_F(v) \exp(iS[v])$$

Da das Gruppenmaß invariant ist, gilt:

$$\int \mathcal{D}g \mathcal{J}(g) = \int \mathcal{D}(gg') \mathcal{J}(gg') = \int \mathcal{D}g' \mathcal{J}(gg') \text{ mit } g' = g^{-1}$$

Führen wir nun den t'Hooft-Trick durch (integriere über $f_r(x)$ mit Gauß-Integral):

$$\begin{aligned} \exp(iW[J]) &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}v \int \underbrace{\prod_{r,x} df_r(x)}_{\mathcal{D}f} \exp\left(-\frac{i}{2\alpha} \int dx f_r^2(x)\right) \prod_{x,r} \delta(F_r(v) - f_r) \Delta_F(v) \times \\ &\quad \times \exp\left(i\left[S[v] + \int \mathcal{J}^{r,a}(x) v_a(x) dx\right]\right) \text{ da } g = 1 \end{aligned}$$

$$\exp(iW[J]) = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}v \exp\left(-\frac{i}{2\alpha} \int dx (F_r(v))^2 + iS(v) + \int \mathcal{J}^{r,a}(x) v_a(x) dx\right)$$

$W[J]$ ist das Erzeugendenfunktional für zusammenhängende Greensche Funktionen. Aus Blatt 4 in Aufgabe 6 folgt, dass man die δ -Funktion als Gauß-Integral schreiben kann:

$$\Delta_F(v) = \det(M_{r,s}^F(y, x)) = \int \prod_{x,r} d\xi^r(x) d\eta^r(x) \exp\left(-i \int d^4x d^4y \xi^r(x) M_{r,s}^F(x, y) \eta^s(y)\right)$$

Die $\xi^r(x)$ und $\eta^r(x)$ sind komplex und antikommutierend.

$$M_{r,s}^F(x, y) = \frac{\delta_\alpha F_r[v^a(x)]}{\delta \alpha_s(y)} \Big|_{\hat{g}=1 (\alpha=0)}$$

Was ist $\delta_\alpha F_r[v^g(x)]$? Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

$$F_r(v) = \partial^a v_{a,r}$$

$$\delta_\alpha F_r(v) = \partial^a \left[-i c_{rst} \alpha^s(x) v_a^t(x) + \frac{i}{g} \partial_a \alpha_r(x) \right]$$

$M_{r,s}^F(x, y)$ ist die sogenannte Faddeev-Popov-Matrix.

$$M_{r,s}^F(x, y) = -i c_{rst} \partial^a (v_a^t \delta^{(4)}(x-y)) + \frac{i}{g} \square \delta^{(4)}(x-y) \delta_{r,s}$$

Die komplexen antikommutierenden Felder sind skalar, haben aber die falsche Statistik (Fermi-Statistik). Mit diesem Formalismus ergeben sich nun die Propagatoren (Blatt 9, Aufgabe 19) aus $S_2(v, \alpha)$.

ii.) Faddeev-Popov $N = 1$ -Supersymmetrie

$$F_{ab} \mapsto W_\alpha(z) = -\frac{1}{4} \overline{DD} (\exp(-V) D_\alpha \exp(V)) |_{\text{w.Z.-Eichung}} = -\frac{1}{4} \overline{DD} \left(D_\alpha V + \frac{1}{2} [D_\alpha V, V] \right)$$

$$V \mapsto 2gV \text{ mit } V = V^r(z) T_r \text{ und } V^r(z) = V^{*,r}(z)$$

Weiterhin gilt $\text{Sp}(T_r^{adj} T_s^{adj}) = \kappa \delta_{r,s}$ mit $\kappa > 0$.

$$S_{sYM} = \frac{1}{4\kappa} \int dz \text{Sp}(W^\alpha(z) W_\alpha(z))$$

Diese Wirkung ist supereichinvariant bezüglich $\Lambda(z)$ -, $\overline{\Lambda}(z)$ -Transformationen der V .

$$S_{sYM,2} = \frac{1}{4\kappa} \int dz \text{Sp} \left(\frac{1}{16} (\overline{DD} D^\alpha V) (\overline{DD} D_\alpha V) \delta^{(2)}(\overline{\theta}) \right) (\overline{\theta}) + \text{k.K.}$$

Durch zweimalige partielle Integration mit $-\frac{1}{4} \overline{DD} \delta^{(2)}(\overline{\theta}) = 1$ folgt weiter:

$$S_{sYM,2} = -\frac{1}{16\kappa} \int dz \text{Sp}(D^\alpha V \overline{DD} D_\alpha V) + \text{k.k} = \frac{1}{8\kappa} \int dz \text{Sp}(V D \overline{DD} D V)$$

Transversaler Projektor:

$$P_T = \frac{1}{8\Box} D \overline{DD} D$$

Man benötigt longitudinale Teile zur Inversion, das heißt für $\langle 0 | TV(z) V(w) | 0 \rangle$. $DDL = \overline{DDL} = 0$ ist das reelle transversale Multiplett.

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{4} \overline{DD} V \text{ und } \mathcal{F}^\dagger(z) = \frac{1}{4} D D V$$

Es gilt $\overline{D}_\alpha \mathcal{F} = 0$. \mathcal{F} ist lie-algebra-wertig. Da die Generatoren hermitesch sind, gilt $\mathcal{F}^\dagger(z) = \mathcal{F}$.

$$S_{\alpha\text{-Eichwahl}} = -\frac{2}{\kappa\alpha} \int dz \text{Sp}(\mathcal{F}^t(v) \mathcal{F}(v))$$

α ist ein reeller Parameter (analog zum t'Hooft-Trick). Die Faddeev-Popov-Matrix folgt aus der infinitesimalen Eichtransformation. Durch partielle Integration und Symmetrisierung ergibt sich weiter:

$$S_{\alpha\text{-Eichwahl}} = -\frac{1}{8 \cdot (2\alpha)} \int dz V^r \{DD, \overline{DD}\} V^s \delta_{r,s}$$

$$(\exp(V))' = \exp(-i\Lambda^\dagger) \exp(V) \exp(i\Lambda) \text{ mit } \Lambda = \Lambda^r(z) T_r \text{ und } \Lambda^\dagger = \overline{\Lambda}^r(z) T_r$$

Auf Blatt 14 in Supersymmetrie I hatten wir gesehen, dass folgendes gilt:

$$\delta V = i\mathcal{L}_{V/2} [\Lambda + \overline{\Lambda} + \coth(\mathcal{L}_{V/2}) (\Lambda - \Lambda^\dagger)] \text{ mit } x \coth(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + \dots$$

Weiterhin gilt:

$$\mathcal{L}_{V/2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_V \text{ mit } (\mathcal{L}_V)^n X = [V, [V, \dots, [V, X]] \dots]$$

Die Geister zu dieser linearen \mathcal{F} - \mathcal{F}^\dagger -Wahl folgen aus der Faddeev-Popov-Matrix:

$$M^r_s(z, z') = \begin{pmatrix} \frac{\delta \mathcal{F}^r(z)}{\delta \Lambda^s(z')} & \frac{\delta \mathcal{F}^r(z)}{\delta \overline{\Lambda}^s(z')} \\ \frac{\delta \overline{\mathcal{F}}^r(z)}{\delta \Lambda^s(z')} & \frac{\delta \overline{\mathcal{F}}^r(z)}{\delta \overline{\Lambda}^s(z')} \end{pmatrix}$$

Diese \mathcal{F}^r sind nicht mehr lie-algebra-wertig. Der Index r durchläuft die Dimension der Lie-Algebra.

$$(\delta F(z))_s^t = \frac{1}{4} \overline{DD} (\delta V)_s^t = \delta \mathcal{F}^r(z) (T_r)_s^t = \frac{i}{4} \overline{DD} [\mathcal{L}_{V/2}]_s^t$$

Auf Blatt 9, in Aufgabe 21 zeigen wir:

$$(\mathcal{L}_{V/2})^n (T_u)_r{}^t = \left[\frac{V}{2} \left[\frac{V}{2}, \dots \left[\frac{V}{2}, T_u \right] \dots \right] \right]_r{}^t = (-1)^n \left(\frac{V}{2} \right)^n (T_u)_r{}^t$$

$$\delta F^r(z) = \frac{i}{4} \overline{DD} \left[V_{+,u}^r(z) \Lambda^u(z) + V_{-,u}^r(z) \overline{\Lambda}^u(z) \right]$$

$$V_{+,u}^r(z) = - \left(\frac{V}{2} \right)_u{}^r + \left[\frac{V}{2} \coth \left(\frac{V}{2} \right) \right]_u{}^r = \delta_u{}^r - \left(\frac{V}{2} \right)_u{}^r + \left[\frac{V}{2} \coth \left(\frac{V}{2} \right) - 1 \right]_u{}^r$$

$$V_{-,u}^r(z) = - \left(\frac{V}{2} \right)_u{}^r - \left[\frac{V}{2} \coth \left(\frac{V}{2} \right) \right]_u{}^r = -\delta_u{}^r - \left(\frac{V}{2} \right)_u{}^r - \left[\frac{V}{2} \coth \left(\frac{V}{2} \right) - 1 \right]_u{}^r$$

$$\delta \overline{F}^r(z) = \frac{i}{4} DD [V_{+,u}^r(z) \Lambda^u(z) + V_{-,u}^r(z) \overline{\Lambda}^u(z)]$$

Die V_{\pm} benötigt man später zur Berechnung der Vertizes und Propagatoren. Wir geben nun die Faddeev-Popov-Matrix an:

$$M^r{}_s(z, z') = i \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \overline{DD}_z (V_{+,s}^r(z) (-\frac{1}{4} \overline{DD}_z)) & \frac{1}{4} \overline{DD}_z (V_{-,s}^r(z) (-\frac{1}{4} DD_z)) \\ \frac{1}{4} DD_z (V_{+,s}^r(z) (-\frac{1}{4} \overline{DD}_z)) & \frac{1}{4} DD_z (V_{-,s}^r(z) (-\frac{1}{4} DD_z)) \end{pmatrix} \delta^{(4)}(z - z')$$

Im abelschen Falle gilt

$$\delta \mathcal{F} = \frac{i}{4} \overline{DD} (\Lambda - \overline{\Lambda}) \text{ und } V_{\pm} = \pm 1$$

Es wird nun die Faddeev-Popov-Determinante mittels antikommutierender chiraler (antichiraler) Superfelder c_r, \overline{c}_r und d^s, \overline{d}^s berechnet. Dabei handelt es sich um Grad-1-(anti)chirale Superfelder.

$$S_{Geist} = i\beta \int dz \int dz' (c_r(z) \delta^{(2)}(\overline{\theta}), \overline{c}_r(z) \delta^{(2)}(\theta)) M^r{}_s(z, z') \begin{pmatrix} d^s(z) \delta^{(2)}(\overline{\theta}') \\ \overline{d}^r(z') \delta^{(2)}(\theta') \end{pmatrix}$$

Die Komponenten von $c(z)$ sind $\xi(x)$ [Grad 1], $\sqrt{2}\mathcal{C}(x)$ [Grad 0], $\varphi(x)$ [Grad 1] und die von $d(z)$ sind gegeben durch $\eta(x)$ [Grad 1], $\sqrt{2}\mathcal{D}(x)$ [Grad 0], $\delta(x)$ [Grad 1].

$$S_{Geist} = i^2 \beta \int dz c_r(z) \delta^{(2)}(\overline{\theta}) \frac{1}{4} \overline{DD}_z V_+(z)_s{}^r \int dz' \left(-\frac{1}{4} \overline{DD}_z \right) \delta^{(8)}(z - z') d^s(z') \delta^{(2)}(\overline{\theta}') + 3 \text{ andere Terme}$$

Durch zweimalige partielle Integration und Ausnutzung, dass die c_r chiral sind, folgt weiter:

$$\begin{aligned} -(-1)\beta \int dz c_r(z) V_+(z)_s{}^r \left(-\frac{1}{4} \overline{DD}_z \right) d^s(z) \delta^{(2)}(\overline{\theta}) + 3 \text{ weitere Terme} &= \\ = \beta \int dz c_s(z) V_+(z)_s{}^r d^s(z) + 3 \text{ weitere Terme} &= \\ = -\beta \int dz \left(d^s(z) V_+(z)_s{}^r c_r(z) + d^s(z) V_-(z)_s{}^r \overline{c}_r(z) + \overline{d}^s(z) V_+(z)_s{}^r c_r(z) + \overline{d}^s(z) V_-(z)_s{}^r \overline{c}_r(z) \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_{Geist-V} = -\beta \int dz (d^s(z) + \overline{d}^s(z)) (V_{+,s}^r(z) c_r(z) + V_{-,s}^r(z) \overline{c}_r(z))}$$

4.7.2 Geistfeldpropagatoren

Wir wollen nun den Geistfeldpropagatoren ausrechnen. Dazu nehmen wir nur den quadratischen Anteil von S mit:

$$S_{Geist,2} = -\beta \int dz (d^s(z) + \overline{d}^s(z)) (c_s(z) - \overline{c}_s(z)) = -\beta \int dz (\overline{c}_s(z) d^s(z) + \overline{d}_s(z) c^s(z))$$

Die restlichen Terme fallen weg wegen der Chiralität. Auf Blatt 10 in Aufgabe 23 zeigen wir, dass mit

$$S_{Geist,2} \stackrel{!}{=} - \int d^4x [\xi^r(x) \square \overline{\eta}_r(x) - \overline{\xi}^r(x) \square \eta_r(x)]$$

und der gegebenen Zerlegung der c - und d -Felder $\beta = 1$ folgt (analog zu chiralen Propagatoren, Statistik beachten!). Im Impulsraum gilt für die Propagatoren der Geistfelder:

$$\tilde{G}_{d_r, \overline{c}^r}(p; \theta, \tau) = \frac{i}{16} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \overline{DD} DD_{(p, \theta, \overline{\theta})} \delta^{(4)}(\theta - \tau) \delta_r{}^s$$

$$\tilde{G}_{c_r, \overline{d}^s}(p; \theta, \tau) = \frac{i}{16} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \overline{DD} DD_{(p, \theta, \overline{\theta})} \delta^{(4)}(\theta - \tau) \delta_r{}^s$$

4.7.3 Vektorsuperfeldpropagator in α -Eichung

Schauen wir uns wieder den quadratischen Teil der supersymmetrischen Yang-Mills-Wirkung an:

$$S_{sYM,2} = \frac{1}{8\kappa} \int dz \operatorname{Sp}(VD^\alpha \overline{DD}D_\alpha V) = \frac{1}{8} \int dz V^r D\overline{DD}DV^s \delta_{r,s}$$

$$S_{\text{Eichfixierung}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2\alpha} \int dz V^r \{DD, \overline{DD}\} V^s \delta_{r,s}$$

Nun nehmen wir noch einen Massenterm hinzu:

$$S_{\mu^2} = \int dz V^r \mu_{r,s}^2 V^s$$

Wir schreiben nun S_2 mittels der Projektoren P_T und P_L und beachten $\mathbf{1} = P_T + P_L$:

$$S_2 = \int dz V^r \left(\delta_{r,s} \square P_T(z) - \frac{\square}{2\alpha} P_L \delta_{r,s} + (P_T + P_L) \mu_{r,s}^2 \right) V^s$$

Man sortiert nun nach Termen mit P_L bzw. P_T und bildet das Inverse unter Beachtung von $(AP_T + BP_L)(A^{-1}P_T + B^{-1}P_L) = \mathbf{1}$:

$$S_{2,r,t}(u, v) \equiv \frac{\delta^2 S_2}{\delta V^r(v) \delta V^\dagger(u)} = 2 \left[(\square_y \delta_{r,t} + \mu_{r,t}^2) P_T(u) + \left(\frac{1}{\alpha} \square_y \delta_{r,t} + \mu_{r,t}^2 \right) P_L(u) \right] \delta^{(8)}(u - v) \text{ mit } v = (x, \theta, \bar{\theta})$$

$$\int d^8 u S_{2,r,t}(v, u) G^{t,s}(u, w) = i \delta_r^s \delta^{(8)}(v - w)$$

Im Impulsraum folgt nun mit $i\partial_x \mapsto p$ der Vektorpropagator in α -Eichung:

$$\tilde{G}_{(\alpha)}^{r,s}(p; \theta, \tau) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \left(-\frac{1}{8p^2} \right) D\overline{DD}D_{(p,\theta)} + \frac{1}{\frac{1}{\alpha}(-p^2 - i\epsilon)\mathbf{1} + \mu^2} \left(\frac{1}{16p^2} \right) \{DD, \overline{DD}\}_{(p,\theta)} \right]^{r,s} \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

Mit der Gleichung

$$-\frac{1}{8p^2} D\overline{DD}D = \mathbf{1} - \frac{1}{16p^2} \{DD, \overline{DD}\}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} - \frac{1}{\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} &= \\ &= \frac{1}{\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} [\alpha(\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}) - (\alpha\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1})] \frac{1}{\alpha\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} = \\ &= \frac{1}{\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} (-p^2)(\alpha - 1) \frac{1}{\alpha\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \end{aligned}$$

(ohne ϵ -Terme im Zähler) ergibt sich schließlich folgende Form:

$$\tilde{G}_{(\alpha)}^{r,s}(p; \theta, \tau) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \left(\mathbf{1} + \frac{(\alpha - 1)(-p^2)}{\alpha\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \cdot \frac{1}{16p^2} \{DD, \overline{DD}\}_{(p,\theta)} \right)^{r,s} \cdot \delta^{(4)}(\theta - \tau) \right]$$

Für den Fall $\alpha = 1$ (Feynman-Eichung) ist der Propagator besonders einfach, nämlich $\sim 1/p^2$. Auf Blatt 10 in Aufgabe 25 werden wir diesen Ausdruck weiter umformen.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(\alpha)}^{r,s}(p; \theta, \tau) &= -i \left(\frac{1}{\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} \cdot \frac{1}{\alpha\mu^2 - (p^2 + i\epsilon)\mathbf{1}} A(p, \theta, \tau) \right)^{r,s} \text{ mit} \\ A(p; \theta, \tau)^{r,s} &= \left[\frac{1}{4} ((1 + \alpha)p^2 \mathbf{1} - 2\alpha\mu^2) \delta^{(4)}(\theta - \tau) + (\alpha - 1) \exp(\theta \not{p} \bar{\tau} - \tau \not{p} \bar{\theta}) \mathbf{1} \right]^{r,s} \end{aligned}$$

4.8 Feynmanregeln für V in α -Eichung und Geistsuperfelder

Die Vertizes folgen aus:

$$S_{sYM,int} = -\frac{1}{16\kappa} \int dz \text{Sp} \left[-VD^\alpha \overline{DD} [D_\alpha V, V] + \frac{1}{4} [D^\alpha V, V] \overline{DD} [\overline{D}_\alpha V, V] \right] + \text{k.k.}$$

In der Wess-Zumino-Eichung gilt:

$$W_\alpha = \frac{1}{4} \overline{DD} \left(D_\alpha V + \frac{1}{2} [D_\alpha V, V] \right)$$

- An jedem Vertex hat man $2D$ und $2\overline{D}$
- In der Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) ist der Vektorpropagator

$$-\frac{i}{2} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

Hier entsprechen die alten Regeln den neuen.

- Neue Regeln für Geister (wie bei $\phi, \overline{\phi}$)

$$S_{Geist-V,int} = - \int dz (d^s(z) + \overline{d}^s(z)) \left(\widehat{V}_{+,r}^s(z) c_r(z) + \widehat{V}_{-,s}^r(z) \overline{c}_r(z) \right)$$

Geister kommen nur als Propagatoren vor und nicht als freie äußere Linien in 1-Teilchen-irreduziblen Diagrammen.

4.9 Feynman-Regeln für Eichtheorien gekoppelt an chirale Multipletts

4.9.1 Propagatoren

Der Vektorfeldpropagator in $\alpha = 1$ -Eichung besitzt folgende Form:

$$\widetilde{G}_{\alpha=1}^{r,s}(p; \theta, \tau) = -\frac{i}{2} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \delta^{r,s} \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

Geistfelder (neue GRS-Regeln):

$$\widetilde{G}_{c_s, \overline{d}_s}(p; \theta, \tau) = i \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \delta_{r,s} \delta^{(4)}(\theta - \tau)$$

4.9.2 Vertizes

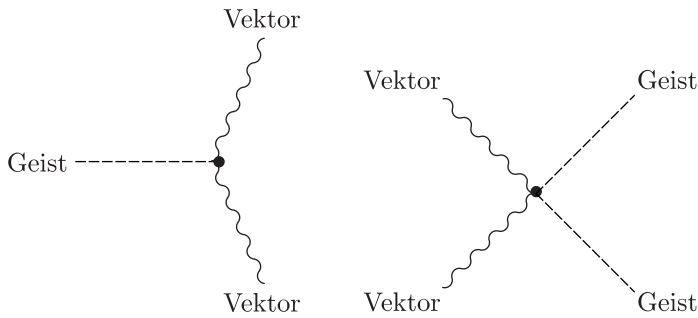
Betrachten wir zunächst die Vertizes vom V^3 -, V^4 -Typ:

$$S_{sYM,int} = -\frac{1}{16\kappa} \left[\int dz \text{Sp} \left(-VD^\alpha \overline{DD} [D_\alpha V, V] + \frac{1}{4} [D^\alpha V, V] \overline{DD} [D_\alpha V, V] \right) + \text{k.k.} \right]$$



Am Vertex befinden sich je zwei D und zwei \overline{D} . Der Geist-Vektorfeld-Vertex ist auch von diesem Typ:

$$S_{c,d,V,int} = - \int dz (d^s(z) + \overline{d}^s(z)) \left(\widehat{V}_{+,s}^r(z) c_r(z) + \widehat{V}_{-,s}^r(z) \overline{c}_r(z) \right) \text{ mit } \widehat{V}_{\pm,s}^r(z) = - \left(\frac{V}{2} \right)_s^r \pm \left(\frac{V}{2} \coth \left(\frac{V}{2} \right) - \mathbf{1} \right)_s^r$$



Wegen der GRS-Regeln für die Geistpropagatoren gibt es effektiv auch 4- D -Typ-Vertizes (auch beispielsweise DD , DD und andere). Geister treten nur als innere Linien (Propagatoren) auf. Superpotential $W(\phi)$ chiral, $\overline{W}(\overline{\phi})$ und minimale Kopplung:

$$\int dz \overline{\phi} (\exp(V) - 1) \phi \quad \text{W.Z.-Eichung}$$

Die ϕ , $\overline{\phi}$ -Komponenten werden undefiniert und es kommen nur Kopplungen der Form $\overline{\phi} V \phi$ und $1/2! \overline{\phi} V^2 \phi$ vor ($V \mapsto 2gV$). Für Propagator ϕ , $\overline{\phi}$ müssen die ausgehenden Operatoren $DD/4$ bzw. $-\overline{D}\overline{D}/4$ beachtet werden. Das Superpotential bricht ab bei ϕ^n für $n \geq 4$ (Nichtrenormierbarkeit, siehe ϕ^4 -Theorie auf Blatt 10).

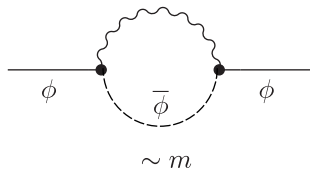
4.10 Divergenzgradformel für allgemeines Modell

Falls man für Vektorfeldpropagator $\alpha = 1$ wählt (Feynman-Eichung), findet keine Änderung der Propagatoren ($W \sim 1/p^2$) und Vertizes (4 D 's) statt. (Hier entsprechen die alten Regeln den neuen.) Im ϕ^3 -Modell musste man pro Vertex $4D$ berücksichtigen. Der Divergenzgrad war gegeben durch:

$$d \leq d_s = 2 - (I_{\phi\phi} + I_{\overline{\phi}\overline{\phi}}) - (E_{\phi} + E_{\overline{\phi}}) - 1$$

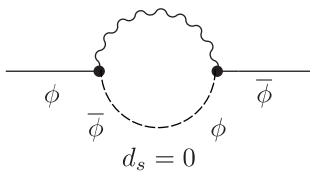
Der Summand -1 muss nur bei externen ϕ - und $\overline{\phi}$ -Linien berücksichtigt werden, damit Superpotentialterme ohne Ableitung nicht die falsche θ -Integration (Lokalität im θ -Raum) haben. Für $\alpha \neq 1$ treten zusätzliche $DD\overline{D}\overline{D}$ -Terme auf. Dann sind extra Korrekturen für innere Linien notwendig. Ebenso für Geister benötigt man keine Korrekturen, da die Propagatoren $\sim 1/p^2$ sind und die Vertizes 4 D 's enthalten. Wir verwenden also die alten Formeln mit einer neuen Interpretation. Auf Blatt 11 in Aufgabe 27 werden wir Korrekturen zu den ϕ -, $\overline{\phi}$ -Feldern berechnen.

i.) Γ_{ϕ^2} , $L = 1$:



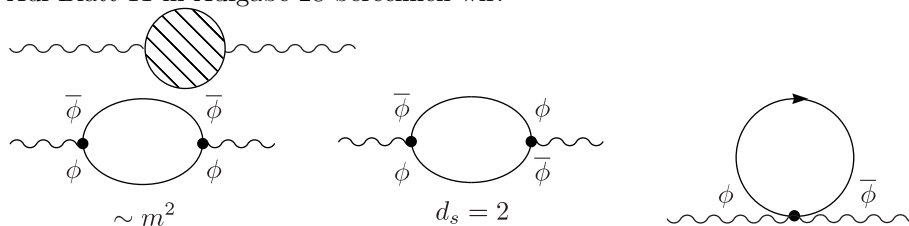
Dies liefert kein Beitrag zum $L = 0$ -Superpotential.

ii.) $\Gamma_{\phi\overline{\phi}}$:



Dieser Beitrag ist UV-divergent.

Auf Blatt 11 in Aufgabe 28 berechnen wir:



Alle diese Diagramme sind UV-divergent.

4.10.1 Bemerkung: Regularisierung von Eichtheorien

- Das t'Hooft-Veltman-Verfahren (1972) ist, $D = 4 - 2\varepsilon$ zu setzen. Man bezeichnet dieses Vorgehen als dimensionale Regularisierung. Dies funktioniert mit den Eichtheorien, solange diese nicht von chiraler Struktur (γ^5) sind. Das Problem besteht darin, ob die Matrix γ^5 dieselben Eigenschaften in D Dimensionen besitzt, welche sie in vier Dimensionen aufweist (Antikommutatorrelationen, Spur, ...) [Jäger, Lehrer (2000)].
- Ein alternatives Vorgehen ist die sogenannte dimensionelle Reduktion (W.Siegel) für Supersymmetrie und Eichtheorien. Die Idee hier ist, die θ -Gymnastik, γ^a -Matrizen, η^{ab} in vier Dimensionen und die Feynman-Integrale in D Dimensionen zu betrachten. Dies führt jedoch zu einer Inkonsistenz bei einer hohen Anzahl von Schleifen (≥ 7), was jedoch in der Praxis nicht wichtig ist [W.Siegel (1980)]. Stöckinger (2005) behauptet, ein konsistentes Schema gefunden zu haben.
- BPHZ [Bogoliubov, Parasiuh, Hepp, Zimmermann, Lowentim]
Diese Theorie ist regulatorfrei. In der Phänomenologie wird damit jedoch nicht gerechnet [Sibold-Piguet: $N = 1$ -Supersymmetrie-Renormierung].

Kapitel 5

Sanfte Supersymmetriebrechung

- Wir müssen die Supersymmetrie brechen, falls sie für die Teilchenphysik Verwendung finden soll, weil die Massen phänomenologisch nicht entartet sind.
- Spontane Supersymmetriebrechung funktioniert nicht wegen der M^2 -Formel. Die supersymmetrische QED liefert das falsche M^2 -Spektrum.
- Deshalb müssen wir uns eine andere Art der Brechung überlegen, nämlich die sogenannte explizite Brechung. Hier schreibt man in die Lagrangefunktion Terme, welche von vorn herein nicht supersymmetrisch sind. Es sind jedoch quadratische Divergenzen zu verhindern.

5.1 Motivation: Sanfte Brechung/Brechung der starren Symmetrie

Die Idee von Symanzik war, die Symmetriebrechung bei den ursprünglichen symmetrischen Termen in der Lagrangefunktion zu verhindern. „Sanft“ bedeutet (nach Symanzik, 1972 und Corgese, Cest) bedeutet, dass die starre Symmetrie gebrochen wird. Bei superrenormierbaren (A^3) Theorien sind nur endliche viele Diagramme UV-divergent (notwendige Bedingung).

- Sanfte SUSY-Brechungsterme: MSSM (minimales supersymmetrisches Standardmodell) + $\mathcal{L}_{\text{sanfte Brechung}}$ (viele komplexe Parameter)

Oft: Motivation, welche Terme als sanfte zu interpretieren sind: mSUGRA (SUGRA: $\xi, \bar{\xi} \mapsto \xi(x), \bar{\xi}(x)$)

Die Methode ist, Superfelder und Divergenzgradformel zu verwenden. Werte Superfelder („Spurionen“) nicht-supersymmetrisch aus, wie beispielsweise $U(z) = U^*(z)$ (Dimension 0), $U(z)| = \mu^2 \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$
Dies sind keine Superfelder mehr; die Supersymmetrie ist also gebrochen.

$$\eta(z)\bar{D}_{\dot{\alpha}}\eta = 0, \eta| = \hat{\mu}\theta\theta$$

Analysiere die UV-Divergenzen via Divergenzgradformel und GRS-Regeln (mit $\alpha = 1$ -Eichung). Jeder Vertex liefert ≤ 4 D 's. Treten mehr als 4 D 's pro Vertex auf, haben wir also einen Überschuss pro Vertex, so kann man bei vielen Vertizes d_s beliebig hoch wählen (analog zu A^6). Mit Vertizes mit ≤ 4 D 's gilt:

$$d_s = 2 - (E_{\phi} + E_{\bar{\phi}}) - (I_{\phi\phi} + I_{\bar{\phi}\bar{\phi}}) - 1$$

(< 4 D 's: Unterschuss in d_s , dann ist die Theorie superrenormierbar) Verwende Spurionen nur als äußere Linien (also keine Propagatoren). Wie ist es möglich, dass die Theorie quadratisch divergent ist? Die kritischen Kandidaten für solche Divergenzen sind äußere V -Linien, für die $E_{\phi} = 0 = E_{\bar{\phi}}$ und $I_{\phi\phi} = 0 = I_{\bar{\phi}\bar{\phi}}$ gilt. Um die Eichinvarianz zu erhalten, benötigen wir $D\bar{D}$ um $W_{\alpha}, \bar{W}^{\dot{\alpha}}$ zu konstruieren:

$$E_V = 2 : \int d^4x \int d^4\theta D^{\alpha}V \frac{1}{4} \bar{D}\bar{D}D_{\alpha}V + \text{k.k.} \stackrel{\wedge}{=} \int dz W^{\alpha}W_{\alpha}\delta^{(2)}(\theta) + \text{k.k.}$$

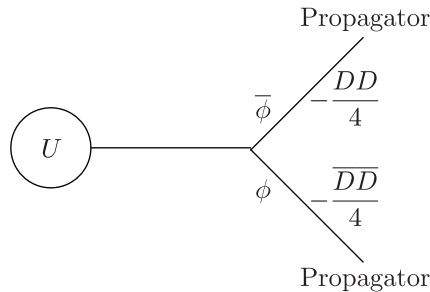
Auf Blatt 11 in Aufgabe 28 werden Korrekturen die den V -Propagatoren berechnet. Hier rettet uns aber die Anomaliefreiheitsbedingung. Diese verlangt, dass $\text{Sp}(Y) \stackrel{!}{=} 0$ ist.

5.2 Klassifikation von sanfter Brechung

Wir nehmen ein reelles Spurionfeld hinzu:

$$S_U = \int dz U \bar{\phi} \phi \text{ mit } U = U^* \text{ und } U \uparrow = \mp \mu^2 \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta}$$

$$S_{U \uparrow} = \mp \mu^2 A^* A$$



Man untersucht dann, welche UV-Divergenzen auftreten.

Spurionen besitzen keine Propagatoren, kommen also nicht als innere Linien vor. Sie sind Eichsingulets und koppeln nicht an Ein-Teilchen-irreduzible Vakuumdiagramme.

Vakuumerwartungswerte von Spurionen interessieren uns nicht.

- 1.) Man verwendet die ursprüngliche Lagrangedichte mit einem zusätzlichen Spurionfeld U :

$$S_U = \int dz \bar{\phi} \phi U \text{ mit } U \uparrow = \mp \mu^2 \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta}$$

μ^2 ist reellwertig.

$$S_U \uparrow = \int d^4x ()$$



- 2.) $S_{\eta, \bar{\eta}} = -\frac{1}{2} \int dz \left(W^\alpha W_\alpha \eta \delta^{(2)}(\bar{\theta}) + \text{k.K.} \right)$, also nichtabelsch

η ist chiral und $\eta \uparrow = \mu \theta \theta$.

$$S_{\eta, \bar{\eta}} \uparrow = \int d^4x \left(-\frac{\mu}{2} (\lambda^\alpha \lambda_\alpha + \text{k.K.}) \right)$$

- 3.) $\widehat{S}_{\eta, \bar{\eta}} = \int dz \bar{\psi} \psi \eta + \text{k.K.}$ und $\widehat{S}_{\eta, \bar{\eta}} \uparrow = \mu \int d^4x (A^* F + F^* A)$

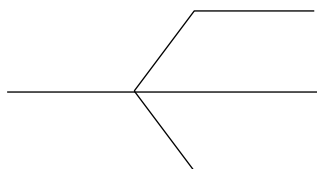
η ist chiral mit $\eta \uparrow = \mu \theta \theta$.

- 4.) $S_{\chi, \bar{\chi}} = \int d^4x \int d^2\theta \chi \phi^2 + \text{k.K.}$

χ ist chiral mit $\chi \uparrow = \pm \mu^2 \theta \theta$.

$$S_{\chi, \bar{\chi}} = \pm \frac{\mu^2}{2} \int d^4x (A^2 - B^2)$$

Dies liefert eine analoge Aufspaltung wie bei der spontanen Brechung. Für die Phänomenologie ist dieser Fall jedoch nicht interessant.



$$5.) S_{w,\bar{w}} = \int dz (w\phi^3\delta^{(2)}(\bar{\theta}) + \text{k.K.}) \text{ mit } \omega \uparrow = \mu\theta\theta$$

$$S_{w,\bar{w}} \uparrow = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \int dx (\mathcal{A}^3 - 3\mathcal{A}\mathcal{B}^2)$$

6.) Blatt 12, Aufgabe 30 (nicht in GR-Liste)

$$S_{\hat{U}} = \int dz D^\alpha U \phi W_\alpha + \text{k.K.} \text{ mit } [U] = -1$$

Dies ist ein neuer Typ, den es nur im abelschen Falle gibt. ϕ transformiert nicht unter der $U(1)$. Ebenso ist $U \uparrow = \mu/\sqrt{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ ein Singulett und **ist** eichinvariant (modula partieller Integration analog zum Fayet-Iliopolous-Term).

$$S_{\hat{U} \uparrow} = 2 \frac{\mu}{\sqrt{2}} \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{2} \psi^\alpha \lambda_\alpha - AD \right) + \text{k.K.} \text{ mit } \Psi = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Ψ ist ein Dirac-Spinor.

7.) Blatt 12, Aufgabe 31: Majorana-Spinor Ψ im chiralen Multipllett

$$S_U = \int dz U D^\alpha \phi D_\alpha \phi + \text{k.K.} \text{ mit } U \uparrow = -\frac{\mu}{4} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} [U] = -1$$

Eine Auswertung mit den Spurionen fñhrt auf:

$$\int d^4x \left(-\frac{\mu}{2} \bar{\Psi} \Psi \right) \text{ mit } \Psi = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Die auftretenden Vertizes sind vom Typ $6D$ und damit scheint die Theorie nichtrenormierbar (Überschuss) zu sein. Die Brechung wäre also nicht sanft. Im Jahre 1982 haben jedoch IKTK (Inove,...) festgestellt, dass die Brechung doch sanft ist, falls das Eichmodell keine Singulettts beinhalten würde.

8.) Blatt 12, Aufgabe 32: Diracmasse für Gauginos zusammen mit chiralen Spin-1/2-Feld χ_α im V

$$S_T = m_V \int dz T D^\alpha V W_\alpha + \text{k.K.} \text{ mit } [T] = -1$$

Dies ist so ähnlich gebaut, wie wenn man dem Vektorsuperfeld eine Masse gibt. Wir legen hier auf Eichsymmetrie keinen Wert. (Der obige Ausdruck ist nämlich nicht eichinvariant.)

$$T \uparrow = \Delta m_D \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \text{ mit } [\Delta m_D] = 1$$

$$S_{T \uparrow} = m_V \Delta m_D \int d^4x (\chi^\alpha \lambda_\alpha + \text{k.K.}) \text{ mit } \Psi = \begin{pmatrix} m_V \chi_\alpha = \hat{\chi}_\alpha \\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \text{ mit } [\chi^\alpha] = \frac{1}{2}$$

S_T ist zwar vom $4D$ -Typ, aber es gilt $d_s = 2$. Wegen den äußeren V -Linien gibt es quadratische Divergenzen. Um den Divergenzgrad zu verringern, könnte eine Eichsymmetrie weiterhelfen (zur Reduktion der D 's in \mathcal{L}), die jedoch hier nicht vorhanden ist.

$$9.) \int dz \bar{\eta} \phi^2 + \text{k.K.} \text{ mit } \eta \uparrow = m\theta\theta = m\delta^{(2)}(\theta)$$

Dies ist der normaler supersymmetrische Massenterm. Er ist bis auf einen konstanten Term invariant unter Supersymmetrie.

Kapitel 6

MSSM (minimales supersymmetrisches Standardmodell)

6.1 Vorspann

In der Weyl-Darstellung der γ -Matrizen ist γ^5 diagonal

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

und die Vierer-Diracspinoren sind gegeben durch:

$$\Psi_{\underline{\alpha}}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha}(x) \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}^{\alpha} = (\chi^{\alpha}, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}})$$

$$\Psi_{\underline{\alpha}}^C = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi_L = \frac{\mathbf{1} + \gamma^5}{2} \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_R = \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Ψ^C ist der ladungskonjugierte Spinor. Entsprechend sind die links- und rechtshändigen ladungskonjugierten Spinoren gegeben durch:

$$\Psi_{L}^C = \frac{\mathbf{1} + \gamma^5}{2} \Psi^C = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_{R}^C = \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} \Psi^C = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\Psi_{L}^C} = (0, \bar{\chi}, \dot{\alpha}) \quad \text{und} \quad \overline{\Psi_{R}^C} = (\psi^{\alpha}, 0) \quad \text{mit} \quad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\chi_{\alpha})^*, \dots$$

Die adjungierten links- und rechtshändigen Spinoren sind gegeben durch:

$$\overline{\Psi}_L = (0, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}) \quad \text{und} \quad \overline{\Psi}_R = (\chi^{\alpha}, 0)$$

Ebenso kann man folgendes definieren:

$$(\bar{\Psi})_L = \bar{\Psi} \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} \quad \text{und} \quad (\bar{\Psi})_R = \bar{\Psi} \frac{\mathbf{1} + \gamma^5}{2}$$

Diese Spinoren werden wir doch so nicht verwenden.

Zweiernotation	ψ_{α}	ψ^{α}	$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$	$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$	χ_{α}	χ^{α}	$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$	$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$
Vierernotation	ψ_L	$\bar{\Psi}_{\dot{R}}^C$	$\bar{\Psi}_L$	Ψ_R^C	Ψ_L^C	$\bar{\Psi}_R$	$\bar{\Psi}_{\dot{L}}^C$	Ψ_R

In manchen Büchern [beispielsweise Dress et al.] findet man:

$$\Psi_R^C := C \bar{\Psi}_R^{\top} = \Psi_L^C \quad \text{mit} \quad \Psi_{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

6.2 Massenterme für Diracspinor

Wir gehen aus von $\Psi = (\psi_{\alpha}, \bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^{\top}$ und verwenden, dass die $\chi_{\alpha}, \psi_{\alpha}$ antikommutieren:

$$\bar{\Psi} \Psi = \chi^{\alpha} \psi_{\alpha} + \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R$$

Darüber hinaus gilt:

$$\overline{\Psi}\Psi = \psi^\alpha \chi_\alpha + \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}^C_R \Psi^C_L + \overline{\Psi}_L \Psi_R$$

$$\overline{\Psi}\Psi = \chi^\alpha \psi_\alpha + \overline{\chi}_{\dot{\alpha}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}_R \Psi_L + \overline{\Psi}^C_L \Psi^C_R$$

$$\overline{\Psi}\Psi = \psi^\alpha \chi_\alpha + \overline{\chi}_{\dot{\alpha}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}^C_R \Psi^C_L + \overline{\Psi}^C_L \Psi^C_R$$

Majorana-Typ-I-Masse:

$$\psi^\alpha \psi_\alpha + \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}^C_R \Psi_L + \overline{\Psi}_L \Psi^C_R$$

Majorana-Typ-II-Masse:

$$\chi^\alpha \chi_\alpha + \overline{\chi}_{\dot{\alpha}} \overline{\chi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}_R \Psi^C_L + \overline{\Psi}^C_L \Psi_R$$

Die Definition des Majorana-Spinors ist $\Psi_M = \Psi_M^C$. Für einen solchen Spinor in der Darstellung $\Psi_M = (\psi_\alpha, \overline{\psi}^{\dot{\alpha}})^\top$ gilt ($\chi_\alpha = \psi_\alpha$, $\overline{\chi}_{\dot{\alpha}} = \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$):

$$\psi^\alpha \psi_\alpha + \overline{\psi}_{\dot{\alpha}} \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} = \overline{\Psi}_R \Psi_L + \overline{\Psi}_L \Psi_R$$

Dies ist der Massenterm für einen Majorana-Spinor.

Ein Term, der hier auftritt, ist $fv(\overline{\nu}_L \nu_R + \text{k.k.})$, wobei v der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes ist ($fv := m_D$). Dabei handelt es sich um einen Dirac-Massenterm. Majorana-Typ-I-Massenterm und Typ-II-Massenterm:

$$\overline{\nu}^C_R \nu_L + \overline{\nu}_L \nu^C_R \quad \left(-\frac{1}{2} m_M^{(I)} \right)$$

$$\overline{\nu}_R \nu^C_L + \overline{\nu}^C_L \nu_R \quad \left(-\frac{1}{2} m_M^{(II)} \right)$$

Das ist jedoch nicht möglich mit Higgsdubletts. Alle drei Typen lassen sich in der folgenden Form schreiben:

$$\mathcal{L}_{\text{Masse } \nu} = -\frac{1}{2} (\overline{\nu}_L, \overline{\nu}^C_L) \begin{pmatrix} m_M^{(I)} & m_D \\ m_D & m_M^{(II)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_R^C \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{k.K.}$$

Um dies zu zeigen, benötigt man beispielsweise:

$$\overline{\nu}_L \nu_R = \frac{1}{2} (\overline{\nu}_L \nu_R + \overline{\nu}^C_L \nu^C_R)$$

6.3 Superfelder des MSSM

Wir schauen uns die supersymmetrische Version (später sanfte Brechungen) an.

6.3.1 Felder des Standardmodells

Die Symmetriegruppe des Standardmodell ist $SU_c(3) \times SU_w(2) \times U_Y(1)$. Die Gell-Mann-Nishijima-Relation lautet $Q = T_3 + Y/2$.

i.) Quarksektor: $q_{I,A,\underline{\alpha}}(x)$

$\underline{\alpha}$ ist der Index eines $SL(2, \mathbb{C})$ -Spinors, $I \in \{1, 2, 3\}$ steht für die Generation und A beschreibt das Farbtuplett. x ist definiert im Minkowski-Raum M_4 .

$$q_{I,A,L} = \begin{pmatrix} u_{I,A}(x) \\ d_{I,A}(x) \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} (I=1), \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} (I=2) \text{ und } \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} (I=3)$$

Die Hyperladung dieses Links-Dubletts ist $Y = 1/3$. Hieraus folgt:

$$Q_u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ und } Q_d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Rechtshändige Singuletts bezüglich $SU_w(2)$ sind

$$u_{I,A,R} = \frac{1 + \gamma^5}{2} u_{I,A} \quad \left(3, 0, \frac{4}{3} \right) \text{ und } d_{I,A,R} \quad \left(3, 0, -\frac{2}{3} \right)$$

Das Standardmodell ist nicht symmetrisch zwischen links und rechts; es ist also ein chirales Modell. Die entsprechenden Antifelder sind gegeben durch $(\overline{u}_I^{AC})_R$.

ii.) Leptonsektor:

$$L_I(x) = \begin{pmatrix} \nu_{I,L}(x) \\ e_{I,L}(x) \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$$

Im Standardmodell gibt es kein rechtshändiges Neutrino. Nimmt man $\nu_{I,R}(x)$ mit, ist es ein neutrales Singulett $(0,0,0)$. Ebenso besitzt $e_{I,R}(x)$ die Quantenzahlen $(0,0,-2)$. Daraus lässt sich ein Dirac-Spinor bauen:

$$e_I(x) = \begin{pmatrix} e_{I,\alpha} \\ \bar{e}_I^{\dot{C},\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_I)_L \\ (e_I)_R \end{pmatrix}$$

iii.) Spontane Symmetriebrechung $SU_w(2) \times U_Y(1) \mapsto U_{el}(1)$:

Hierzu wird das Higgsfeld benötigt. Im Standardmodell verwendet man das Higgsdublett in folgender Form:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^{(u)}(x) \\ \phi^{(d)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$U_{el}(1)$ wird nicht spontan gebrochen. Aus der spontanen Brechung resultieren Massen für die q's, l's und h's.

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -G_{I,J}^{(e)}(\bar{L}_I\phi)e_{J,R} + \text{k.K.} \Rightarrow -G_{I,J}^{(e)}(\dots + \bar{e}_{I,L}\phi^0 e_{J,R} + \text{k.K.}) \text{ mit } \phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v \text{ mit } Y = (+1, +1, -2)$$

Analog funktioniert dies für die down-Quarks. Für die Massen der up-Quarks benötigen wir:

$$\phi^C = i\tau^2\phi^* \begin{pmatrix} \phi^{*,0} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$$

$$-G_{I,J}^{(\nu)}\bar{L}_I\phi^C\nu_{J,R} + \text{k.K. mit } Y = (+1, -1, 0)$$

6.4 Minimales supersymmetrisches Standardmodell

In der $N = 1$ -Supersymmetrie verwendet man **chirale** (antichirale) Superfelder für die Quarks, Leptonen, Higgsteilchen und reelle Superfelder (Vektorsuperfelder) für Eichfelder. Lineare Multipletts (dual zu chiralen Multipletts) wollen wir nicht verwenden.

i.) Quarksektor:

$$\mathbf{Q}_{I,A}(z) = \begin{pmatrix} Q_{I,A}^{(u)}(z) \\ Q_{I,A}^{(d)}(z) \end{pmatrix}$$

$$Q_{I,A}^{(u)}(z) = \tilde{u}_{I,A}(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}u_{I,A,\alpha}(x) + \theta\theta F_{Q,I,A}^{(u)}(x) + \dots \text{ mit } \tilde{u}: \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$Q_{I,A}^{(d)}(z) = \tilde{d}_{I,A}(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}d_{I,A,\alpha}(x) + \theta\theta F_{Q,I,A}^{(d)}(x) + \dots$$

Oft findet man die Schreibweise $\tilde{u}_{I,A}(x) = \tilde{u}_{I,A,L}$. Für ein komplexes Skalarfeld macht dies zwar keinen Sinn, aber die Notation hat sich trotzdem durchgesetzt. Die antichiralen Superfelder bildet man durch komplexe Konjugation.

$$\mathbf{Q}_I^{+,A}(z) = (\overline{Q}_I^{(u)}, \overline{Q}_I^{(d),A}(z))$$

$$\overline{Q}_I^{(u),A}(z) = \tilde{\bar{u}}_I^A(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\sqrt{2}\bar{u}_I^{A,\dot{\alpha}}(x) + \overline{\theta\theta}F_{Q,I}^{(u)}(x) + \dots$$

$$\overline{Q}_I^{(d),A}(z) = \tilde{\bar{d}}_I^A(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\sqrt{2}\bar{d}_I^{A,\dot{\alpha}}(x) + \overline{\theta\theta}F_{Q,I}^{(d)}(x) + \dots$$

Weinberg (Teil III) verwendet die Notation (U_i, D_i) . Für einen Diracspinor $u_{I,A}(x)$ gilt:

$$\bar{U}_{I,A}(z) = \tilde{\bar{u}}^c_{I,A}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\sqrt{2}(u^c)_{I,A}^{\dot{\alpha}}(x) + \overline{\theta\theta}F_{\bar{U};I,A}(x) + \dots \quad \left(3, 0, \frac{4}{3}\right)$$

Das kleine c hier hat nichts mit der Ladungskonjugation zu tun.

$$U_I^A(z) = (\tilde{u}^c)_I^A(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} (u^c)_{I,\alpha}^A(x) + \theta\theta F_{U;I}^{*,A}(x) + \dots \quad \left(\bar{3}, 0, -\frac{4}{3} \right)$$

Für Down-Quarks gilt entsprechend:

$$\bar{D}_{I,A}(z) = \tilde{d}^c_{I,A}(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \sqrt{2} (\bar{d}^c)_{I,A}^{\dot{\alpha}}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} F_{\bar{D};I,A}(x) + \dots \quad \left(3, 0, -\frac{2}{3} \right)$$

$$D_I^A(z) = \tilde{d}^c_I{}^A(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} (d^c)_{I,\alpha}^A(x) + \theta\theta F_{D;I}^{*,A}(x) + \dots \quad \left(\bar{3}, 0, \frac{2}{3} \right)$$

ii.) Leptonsektor

Wir verwenden chirale Superfelder:

$$\mathbf{L}_I(z) = \begin{pmatrix} L_I^{(u)}(z) \\ L_I^{(d)}(z) \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, -1 \right)$$

$$L_I^{(u)} = \tilde{\nu}_I(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} \nu_{I,\alpha}(x) + \theta\theta F_{L;I}^{(u)}(x) + \dots$$

$$L_I^{(d)} = \tilde{e}_I(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} e_{I,\alpha}(x) + \theta\theta F_{L;I}^{(d)}(x) + \dots$$

Antichirale:

$$\mathbf{L}_I^+(z) = (\bar{L}_I^{(u)}(z), \bar{L}_I^{(d)}(z))$$

$$\bar{L}_I(z) = \tilde{\bar{\nu}}_I(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \sqrt{2} \bar{\nu}_I^{\dot{\alpha}}(x) + \bar{F}_{L;I}^{(u)}(x) + \dots$$

Analog zu \bar{U} gilt (jenseits des MSSM):

$$\bar{N}_I(z) = \tilde{\bar{\nu}}_I^c(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \sqrt{2} \bar{\nu}_I^{c,\dot{\alpha}}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} F_{\bar{N},\bar{L}}(x) + \dots$$

$$N_I(z) = \tilde{\nu}^c_I(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} (\nu^c)_{I,\alpha}(x) + \theta\theta F_{N,I}^*(x) + \dots$$

$$E_I(z) = \tilde{e}^c_I(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} (e^c)_{I,\alpha}(x) + \theta\theta F_{E,I}^*(x) + \dots \quad (0, 0, 2)$$

$$\bar{E}_I(z) = \tilde{\bar{e}}^c_I(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \sqrt{2} (\bar{e}^c)_{I,\alpha}^{\dot{\alpha}}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta} F_{E;I}(x) + \dots$$

iii.) Higgssektor:

Aus dem Standardmodell ist bekannt:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{(0)}(x) \\ \phi^{(+)}(x) \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\mathbf{H}_u = \begin{pmatrix} H_u^{(u)}(z) \\ H_u^{(d)}(z) \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

\mathbf{H}_u gibt den up-Squarks Masse. ϕ^* können wir nicht als chirales Multipllett verwenden. Man benötigt dazu das chirale Superfeld

$$H_d(z) = \begin{pmatrix} H_d^{(u)}(z) \\ H_d^{(d)}(z) \end{pmatrix} \quad \left(0, \frac{1}{2}, -1 \right)$$

Die Quantenzahlen sind dieselben wie von \mathbf{L} . Könnte man deshalb das Higgs als Sneutrino interpretieren? Dies funktioniert jedoch nicht, weil es Ärger mit der Leptonzahlerhaltung und Anomalien gibt. Die entsprechenden antichiralen Felder haben folgende Form:

$$\mathbf{H}_u^+(z) = (\bar{H}_u^{(u)}(z), \bar{H}_u^{(d)}(z)) \quad \left(0, \frac{1}{2}, -1 \right)$$

$$\mathbf{H}_d^+(z) = (\bar{H}_d^{(u)}(z), \bar{H}_d^{(d)}(z)) \quad \left(0, \frac{1}{2}, +1 \right)$$

$$H_u^{(u)}(x) = h_u^{(u)}(x) + \theta^\alpha \sqrt{2} \tilde{h}_{u,\alpha}^{(u)}(x) + \theta\theta F_{H_u}^{*,(u)}(x) + \dots$$

$$H_u^{(d)}(x) = \dots$$

Die Spinoren $\tilde{h}_{u,\alpha}^{(u)}$ werden benötigt, um Anomalien zu beseitigen.

$$H_d^{(u)}(z) = h_d^{(u)}(z) + \theta^\alpha \sqrt{2} \tilde{h}_{d,\alpha}^{(u)}(z) + \theta\theta F_{H_d}^{(u)}(z) + \dots$$

$$H_d^{(d)}(z) = h_d^{(d)}(z) + \dots$$

Entsprechend für die antichiralen Superfelder:

$$\overline{H}_u^{(u)}(z) = h_u^{(u),*}(z)$$

Man hat $2 \cdot 4 = 8$ reelle Felder. Bei der spontanen Symmetriebrechung werden drei Felder benötigt, um die Massen der Eichbosonen zu erzeugen. Damit bleiben 5 reelle Higgsfelder übrig.

iv.) Eichsektor:

$$* \text{SU}_c(3) (g_c): V^r(z) = V^{r*}(z): v_a^r(x), \tilde{v}_\alpha^r(x), \tilde{v}^{r,\dot{\alpha}}(x) \text{ mit } r = 1, \dots, 8$$

$$* \text{SU}_w(2) (g): \overline{V}(z) = \overline{V}^*(z) (0,1,0): V^\pm, V^3(z), A^\circ \pm_a, A_\alpha^3(x), \tilde{A}_\alpha^\pm(x), \tilde{A}_\alpha^3, \tilde{A}^{\pm,\dot{\alpha}}, \tilde{A}^{3,\dot{\alpha}}(x)$$

$$* \text{U}_Y(1) (g'): V(z) = V^*(z) (0,0,0): \overline{D}(x), D_a(x), \tilde{B}_\alpha(x), \tilde{B}^{\dot{\alpha}}(x), D(x)$$

c.) Wirkung des MSSM

1.) Eichsektor:

$$\mathcal{L}_{eich}(z) = \frac{1}{4 \cdot (2g)^2} \vec{W}_\alpha(z) \vec{W}_\alpha(z) \delta^{(2)}(\vec{\theta}) + \text{k.K.} + \frac{1}{4(2g')^2} W^\alpha W_\alpha \delta^{(2)}(\vec{\theta}) + \text{k.K.} + \frac{1}{4(2g_c)^2} (W^{r,\alpha} W_\alpha^r \delta^{(2)}(\theta) + \text{h.k.})$$

In der Wess-Zumino-Eichung gilt:

$$\vec{W}_\alpha(z) = -\frac{2g}{4} \overline{D\overline{D}} (D_\alpha \vec{V} + ig D_\alpha \vec{V} \times \vec{V})$$

$$W_\alpha(z) = -\frac{2g'}{4} \overline{D\overline{D}} D_\alpha V \text{ und } W_\alpha^r(z) = -\frac{2g_c}{4} \overline{D\overline{D}} (D_\alpha V^r + ig_c f^{rst} (D_\alpha V_s) V_t)$$

Fayet-Iliopolous-Term: $\text{U}_Y(1): 2kV$

6.5 Superpotential

Teilchen besitzen R-Parität +1 und supersymmetrische Teilchen -1.

$$\frac{R_P \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline Q & U & D & L & N & E & H_u & H_d & V \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ \hline \end{array}}{R_P = (-1)^{3(B-L)+2S}}$$

Für Superfelder ist $S = 0$. Außerdem gilt $R_P(\theta) = R_P(\vec{\theta}) = -1$. Majorana-Massenterme für Gauginos: $\lambda^\alpha \lambda_\alpha + \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ Verboten sind quadratische Terme wie $L_I (i\tau^2) H_u$ (verletzen L, R_P), trilineare Terme wie $(Q_I (i\tau^2) L_J) E_K Y_{IJK}^l$ (verletzen L, R_P) und $U_O^A D_J^B D_J^C \varepsilon_{ABC} Y_{IJK}$ (verletzen B, R_P). Invariant ist der Term $(L_I (i\tau^2) H_u) N_J Y(N)_{IJ}$ mit $R_P(N) = -1$. Die R-Parität wäre verletzt für $R_P(N) = +1$. Ebenso erfüllt der Massenterm $1/2 N_I m_{IJ} N_J$ die R-Parität.

Das Superpotential hat also folgende Form:

$$W = \mu \left(H_u^{(u)} H_d^{(d)} - H_u^{(d)} H_d^{(u)} \right) + \frac{1}{2} m_{IJ} N_I' N_J' + (Q_A^{(u)} Y^{(u)} U'^A) H_u^{(d)} - (Q_A^{(d)} Y^{(u)} U'^A) H_u^{(u)} + \\ + (Q_A^{(u)} Y^{(d)} D'^A) H_d^{(d)} - (Q_A^{(d)} Y^{(d)} D'^A) H_d^{(u)} + (L'^{(u)} Y^{(l)} E') H_d^{(d)} - (L^{(d)} Y^{(l)} E') H_d^{(u)} + \\ + (L'^{(u)} Y^{(N)} N') H_u^{(d)} - (L^{(d)} Y^{(N)} N') H_u^{(u)}$$

Man muss überprüfen, ob das Modell eine Brechung der Symmetrie zulässt: $\text{SU}_w(2) \times \text{U}_Y(1) \mapsto \text{U}_{el}(1)$. Dazu ist das Potential zu untersuchen. Es bleiben nach der Brechung fünf Higgsfelder übrig, $H_u^{(d)} \mapsto v_u/\sqrt{2}$ und $H_d^{(u)} \mapsto v_d/\sqrt{2}$ mit $\tan(\beta) v_u/v_d$.

6.6 Sanfte Brechung der Supersymmetrie

Es dürfen keine quadratischen (und höheren) Divergenzen auftreten. Die Eichsymmetrie soll nicht spontan gebrochen werden; alle Terme sollen eichinvariant sein. Außerdem soll ist R-Parität erhalten sein.

i.) Gaugino-Massenterme (Typ II):

$$\int dz \eta W^\alpha W_\alpha \delta^{(2)}(\bar{\theta}) + \text{k.K.}$$

Die Massenterme (abelsch bzw. nichtabelsch) sind von folgender Form:

$$-\frac{\mu}{2} \int d^4x (\lambda^\alpha \lambda_\alpha + \text{k.K.})$$

$$\mathcal{L}_{Majorana}^{soft} = -\frac{1}{2} \left(M_1 \tilde{B}^\alpha(x) \tilde{B}_\alpha(x) + M_2 \tilde{A}^\alpha(x) \tilde{A}_\alpha(x) + M_3 \tilde{v}^{r,\alpha}(x) \tilde{v}^r_\alpha(x) + \text{k.K.} \right)$$

Diese Massenterme sind R-paritätsinvariant, weil alle Terme quadratisch sind.

ii.) Massenterme für Skalarfelder der **chiralen Multipletts** (Typ I):

$$\pm \mu^2 A^* A \text{ wegen } \int dz U \bar{\phi} \phi \text{ mit } U = \pm \mu^2 \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi^\dagger \phi}^{soft} = & Q_I'^{+,A} M_{I,J}^Q Q'_{I,A} |_{\theta=\bar{\theta}=0} + U_I'^A M_{I,J}^{2U} \bar{U}'_{I,A} |_{\theta=\bar{\theta}=0} + D_I'^A M_{I,J}^{2d} \bar{D}'_{J,A} |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \\ & + L_I'^+ M_{I,J}^{2L} L'_{J} |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \bar{E}'_I M_{I,J}^{2E} E'_J |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \bar{N}_I M_{I,J}^{2N} N_J |_{\theta=\bar{\theta}=0} + \\ & m_1^2 H_u^+ H_u |_{\theta=\bar{\theta}=0} + m_2^2 H_d^+ H_d |_{\theta=\bar{\theta}=0} \end{aligned}$$

Sowohl die Eichsymmetrie als auch die R-Parität ist erhalten.

iii.) Superpotentialterme $|_{\theta=\bar{\theta}=0}$

a.) Linear nur für Eichsingulett: N_I und $R_P = +1$ für $L(N) = 0$

b.) Quadratisch (Typ IV): $\pm \mu^2 (A^2 + A^{*2})$

$$m_3^2 H_u^\dagger (i\tau^2) H_d | + \text{k.K.}$$

Oft wird m_3^2 geschrieben in der Form $m_3^2 = -B\mu$ mit $[B] = [\mu] = 1$.

$$\sum_{I,J} \tilde{v}_I^c (\widehat{M}^2)^{(N)} + \text{k.K.}$$

c.) Trilinear (Typ V):

$$\frac{\mu}{\sqrt{2}} \int d^4x (\mathcal{A}^3 - 3\mathcal{A}\mathcal{B}^2)$$

$$\sum_{I,J} (Y^{(u)} A^{(u)})_{I,J} (\tilde{u}'_{I,A} \tilde{d}'_{I,A}) \begin{pmatrix} h_u^{(d)} \\ -h_u^{(u)} \end{pmatrix} (\tilde{u}^c)_J + \text{k.K.} \text{ mit } [Y^{(u)}] = 0, [A^{(u)}] = 1$$

$$\begin{aligned} & \sum_{I,J} (y^{(d)} A^{(d)})_{I,J} (\tilde{u}'_{I,A} \tilde{d}'_{I,A}) \begin{pmatrix} h_d^{(d)} \\ -h_d^{(u)} \end{pmatrix} (\tilde{d}^c)_J + \text{k.K.} + \sum_{I,J} (y^{(l)} A^{(l)})_{I,J} (\tilde{\nu}'_I, \tilde{e}'_I) \begin{pmatrix} h_d^{(d)} \\ -h_d^{(u)} \end{pmatrix} (\tilde{e}^c)_J + \\ & + \text{k.K.} + \sum_{I,J} (Y^{(N)} A^{(N)})_{I,J} (\tilde{\nu}'_I, \tilde{c}_I) \begin{pmatrix} h_u^{(d)} \\ -h_u^{(u)} \end{pmatrix} \tilde{\nu}_J^c + \text{k.K.} \end{aligned}$$

iv.) Typ 3:

$$\int dz \eta \bar{\phi} \phi \mapsto \mu \int d^4x (A^* F + F^* A)$$

nach Elimination von F, F^*

v.) Typ 7:

$$S_{\widehat{U}} = \int dz D^\alpha \widehat{U} \phi W_\alpha + \text{k.K.}$$

abelsche Eichsymmetrie, $U_Y(1)$ -Singulets:

$$\sum_I \mu_I \int d^4x \left((\widetilde{v}'^c)_I^\alpha \widetilde{B}_\alpha + (\widetilde{v}'^c)_I D(x) \right) + \text{k.K.}$$

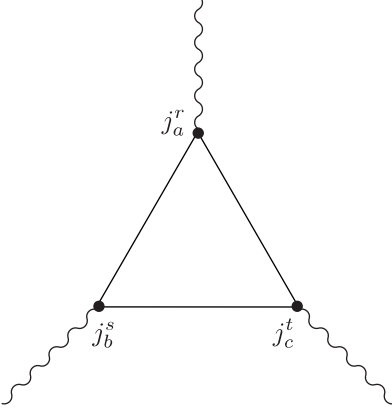
R_P nur, wenn $R_P(N) = 1$

6.7 Anomaliefreiheit im MSSM

\mathcal{L} ist in niedrigster Ordnung invariant unter der starren Transformation (die später geeicht wird). Aufgrund dieser Symmetrie gibt es einen Noetherstrom, für den $\partial_a j^a = 0$ gilt.

$$0 = \delta \mathcal{L} = \partial_a \underbrace{(\text{Parameter, Felder})}_{\alpha j^a(x)} + \text{Euler-Lagrange-Gleichungen}$$

$j^a(x)$ rührt nur von den kinetischen Termen her. In höherer Ordnung Strörungstheorie (unter Berücksichtigung von Quantenkorrekturen) kann es passieren, dass die Ströme j^a nicht mehr divergenzfrei bleiben. Ein solches Verhalten wir als Anomalie bezeichnet (schon in Loopordnung 1). Im Standardmodell gibt es zu jeder Gruppe ($SU_c(3) \times SU_w(2) \times U_Y(1)$) einen Strom, die an Vektorfelder koppeln.



Ist das Feld in der Schleife ein Fermionfeld, so ist das Diagramm linear UV-divergent. Betrachten wir beispielsweise den kinetischen Fermionterm $i\bar{\Psi}\not{D}\Psi$. Je nach Eichgruppe tauchen dann Ströme der Form $j^{a,r}(x) = \bar{\Psi}\gamma^a T^r \Psi$ auf. Wir teilen den Fermionstrom (für ein Spin-1/2-Diracfeld) in einen links- und rechtshändigen Anteil auf:

$$j^{a,r}(x) = \bar{\Psi}_R \gamma^a T_R^r \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma^a T_L^r \Psi_L = \bar{\Psi}_L^C \gamma^a T_R^r \psi_L^C + \bar{\Psi}_L \gamma^a T_L^r \Psi_L$$

Wir müssen also ab sofort nur noch linkshändige Felder mitnehmen. Da die Massenterme nicht zu den Anomalien beitragen, benötigen wir nur die Propagatoren für $m \mapsto 0$. Propagatoren sind immer Diagonal in der Händigkeit. Wir müssen also nur linkshändige Felder im Dreiecksgraph (im Spin-1/2-Fall) anschauen. Man schafft es nicht, dass alle Divergenzen von Strömen verschwinden. Die Dreiecksanomalie für Spin-1/2-Teilchen hat folgende Struktur:

$$D^{r,s,t} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\{T^r, T^s\} T^t)$$

$D^{r,s,t}$ ist total symmetrisch in den Indizes r , s und t .

$$j^r = \bar{\chi} \gamma^a T^r \chi \quad \text{mit} \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_L^c \end{pmatrix}$$

Ein typischer Anomalieterm ist $\partial_a j^a \sim D \varepsilon_{abcd} F^{ab} F^{cd}$.

	SU _c (3)	SU _w (2)	U _Y (1) (Y/2)
$q = (u_L, d_L)$	3	2	1/6
$\bar{u}_L^c \equiv \bar{u}_{A,L}^*$	$\bar{3}$	1	-2/3
$\bar{d}_L^c \equiv \bar{d}_{A,R}^*$	$\bar{3}$	1	1/3
$L = (\nu_L, e_L)$	1	2	-1/2
$e_L^c \equiv e_R^*$	1	1	1
ν_R^*	1	1	0
$\phi = (\phi^+, \phi^0)$	1	2	-1/2

Folgende Kombinationen von Gruppen können beispielsweise zur Anomalie beitragen:

- SU(3) × SU(3) × SU(3)
- SU(3) × SU(3) × U(1)
- SU(2) × SU(2) × SU(2) mit SU(2) ≡ O(3)
- SU(2) × SU(2) × U(1)
- U(1) × U(1) × U(1)

Die Kombination SU(3) × U(1) × U(1) trägt jedoch nicht bei, weil $D^{r,s,t}$ ein Singulett sein muss beispielsweise bezüglich der Farbe. Dies ist jedoch mit dieser Zusammenstellung nicht möglich, weil die Farbindices der SU(3) nicht abgesättigt werden können.

O(3) ist eine sogenannte sichere Gruppe. Das bedeutet, dass es eine Darstellung gibt mit der Eigenschaft $(T^r)^\dagger = -AT^rA^{-1}$ ($iT^r \triangleq (iT^r)^*$), wobei T^r hermitesch ist. Dies gilt mit $A \equiv \mathbf{1}$ für jede adjungierte Darstellung. Damit folgt $D^{r,s,t} = -D^{r,s,t} \equiv 0$. Weil Gauginos mit der adjungierten Darstellung transformieren, tragen sie somit nicht zu Anomalien bei.

Ströme, die geeicht werden, müssen anomaliefrei sein, weil sonst die Unitarität verletzt wäre. Außerdem wären viele Beweise in der Renormierungstheorie nicht durchführbar (Bouchiat, Meyer und Ilipolous). Bei Strömen, welche nicht geeicht werden, können Anomalien vorkommen. Beispielsweise wird der Zerfall des neutralen Pions π^0 ($\bar{d}\bar{d}$) in zwei Photonen γ erklärt durch eine Anomalie (Anomaliefreiheit ABJ (Adler, Bell-Jachiw)).

$$\sum_{\text{alle}} \left(\frac{Y}{2}\right)^3 = 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot 1^3 \stackrel{!}{=} 0$$

Macht man für die Anomalie den Ansatz $\sim \varepsilon^{abcd} F_{ab} F_{cd}$, so kann die Anomalie nicht durch Skalarfelder herrühren. Man kann auch argumentieren, indem man sich den U_Y(1)-Strom anschaut. Dazu verwenden wir, dass der kinetische Term die Form

$$D_a \Phi^\dagger D^a \Phi \text{ mit } D^a \Phi = \partial^a \Phi - i \frac{g'}{2} Y B^a \Phi - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \Phi \vec{A}$$

hat und erhalten:

$$j^a(x) = -i \partial^a \Phi^\dagger + i \Phi^\dagger \partial^a \Phi$$

Die $\phi^{+,0}$ -Felder sind selbst wieder komplex und können in Real- und Imaginärteil aufgespalten werden:

$$\phi^{+,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A^\pm + iB^\pm)$$

Setzen wir dies in $J^a(x)$ ein, so ergibt sich:

$$j^a(x) = -(\partial^a A^+ B^+ + \partial^a A^0 B^0 - A^+ \partial^a B^+ - A^0 \partial^a B^0)$$

Dieser Strom ist also nicht diagonal in A, B . Spaltet man die Propagatoren, die aus $\partial_a \Phi^\dagger \partial^a \Phi$ folgen, in Real- und Imaginärteil auf, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \partial_a A^+ \partial^a A^+ + \frac{1}{2} \partial_a B^+ \partial^a B^+$$

Der SU(2)-Strom für die Higgsfelder hat folgende Form:

$$\vec{j}^a(x) = -i \left(\partial^a \Phi^\dagger + \frac{\vec{\tau}}{2} \Phi - \Phi^\dagger + \frac{\vec{\tau}}{2} \partial^a \Phi \right) \text{ mit } i\tau^2 = \varepsilon$$

$$-\frac{i}{2}\partial^a(B^0A^+ - \partial^aA^0B^+ + \partial^aA^+B^0 - \partial^aB^+A^0)$$

Im MSSM gibt es zwei voneinander unabhängige Higgsino-Doublets im Gegensatz zum Standardmodell, wo es nur eins gibt. Im Standardmodell gehen beide durch komplexe Konjugation auseinander hervor.

	SU _w (2)	U _Y (1) Y/2
$\tilde{h}_u = (\tilde{h}_u^{(u)}, \tilde{h}_u^{(d)})$	2	1/2
$\tilde{h}_d = (\tilde{h}_d^{(u)}, \tilde{h}_d^{(d)})$	2	-1/2

- SU_w(2) × SU_w(2) × U(1):

$$\sum_{\text{Doublets}} \frac{Y}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

- U_Y(1) × U_Y(1) × U_Y(1):

$$\sum_{\text{links}} \left(\frac{y}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

Man hat eine gerade Anzahl von Higgsdoublets. Skalare tragen nicht bei.

6.8 Potential des MSSM, Higgspotential

$$V_{\text{SUSY}} = V_F + V_D = \sum_{\phi} \left| \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\theta=\bar{\theta}=0}^2 + \frac{1}{2} \sum_r (\phi^\dagger T^r \phi)^2|_{\theta=\bar{\theta}=0}$$

T_R sind die Darstellungen, unter denen die ϕ Multipletts sind. Zu jeder einfachen Gruppe gehört eine Kopplungskonstante, die in T^r steckt.

$$V_{\text{sanft}} = -\mathcal{L}_{\phi^* \phi}^{\text{sanft}} \left| -\frac{A}{B} \right\} W(\phi)|_{\theta\bar{\theta}=0}$$

Typ 3 lassen wir weg und ebenso Typ 7 wegen $L(N) = 0$. V_F erhält man durch Ableiten nach den Feldern. Betrachten wir zunächst die Ableitung nach $H_u^{(u)}$

$$W(\phi) = \mu H_u^{\dagger} (i\tau^2) H_d + \frac{1}{2} N_I m_{IJ} N_J + (Q_{I,A}^{\dagger} (i\tau^2) Y_{IJ}^{(iu)} H_u) U_J^A + Q_{I,A}^{\dagger} (i\tau^2) Y_{IJ}^{(d)} H_d) D_J^A + \\ + L_I^{\dagger} (i\tau^2) Y_{IJ}^{(e)} H_d) E_J + (L_I (i\tau^2) Y_{IJ}^{(N)} H_u) N_J$$

$$|\mu H_d^{(d)} - Q_A^{(d)} Y^{(u)} U^A - L^{(d)} Y^{(N)} N|^2 = |\mu h_d^{(d)} - \tilde{d}_A y^{(u)} \tilde{u}^{c,A} - \tilde{e} Y^{(N)} \tilde{v}^c|^2$$

Analog folgt für $H_u^{(d)}$:

$$|-\mu h_d^{(u)} - \tilde{u}_A Y^{(u)} \tilde{u}^{c,A} + \tilde{v} Y^{(N)} \tilde{v}^e|^2$$

Schauen wir uns die einzelnen Terme, die auftreten, an:

$$H_d^{(u)} : |-\mu h_d^{(d)} - \tilde{d}_A Y^{(d)} \tilde{d}^{c,A} - \tilde{e} Y^{(e)} \tilde{e}^c|^2; \quad H_d^{(d)} : |\mu h_u^{(u)} + \tilde{u}_A Y^{(d)} \tilde{d}^{c,A} + \tilde{v} Y^{(e)} \tilde{e}^c|^2$$

$$Q_{A,I}^{(u)} : \sum_{A,I} |I(Y^{(u)} \tilde{u}^{c,A}) h_u^{(d)} + I(Y^{(d)} \tilde{d}^{c,A}) h_d^{(d)}|^2; \quad Q_{A,I}^{(d)} : \sum_{A,I} |-(y^{(u)} \tilde{u}^{c,A}) h_u^{(u)} - I(Y^{(d)} \tilde{d}^{c,A}) h_d^{(u)}|^2$$

$$U_I^A : \sum_{I,A} |(\tilde{v}_A Y^{(u)})_I h_d^{(d)} - (\tilde{d}_A Y^{(u)})_I h_u^{(u)}|^2; \quad D_I^A : \sum_{A,I} |(\tilde{u}_A Y^{(d)})_I h_d^{(d)} - (\tilde{d}_A Y^{(d)})_I h_d^{(u)}|^2$$

$$LL_I^{(u)} : \sum_I |I(Y^{(e)} \tilde{e}^c) h_d^{(d)} + I(Y^{(n)} \tilde{v}^c) h_d^{(d)}|^2$$

$$\sum_I |I(m^N N) + (L^{(N)} Y^{(N)})_I h_u^{(d)} - (L^{(d)} Y^{(N)})_I h_u^{(u)}|^2$$

$$V_D^{\text{UY}(1)} : \frac{1}{2} \left[k + \frac{g'}{2} \left(h_u^{(u),*} h_u^{(u)} + h_u^{(d),*} h_u^{(d)} - h_d^{(u),*} h_d^{(u)} - h_d^{(d),*} h_d^{(d)} + \frac{1}{3} (\tilde{u}_I^A \tilde{u}_{I,A} + \tilde{d}_I^A \tilde{d}_{I,A}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4}{3} \tilde{u}_{I,A}^c \tilde{u}_I^{c,A} + \frac{2}{3} \tilde{d}_{I,A}^c \tilde{d}_I^{c,A} - (\tilde{v}_I \tilde{v}_I + \tilde{l}_I \tilde{l}_I) + 2 \tilde{e}_I^c \tilde{e}_I^c \right) \right]^2$$

$$V_D^{\text{SU}(2)} : \frac{1}{2} \frac{g^2}{4} \left(H_u^+ \tilde{\tau} H_u + H_d^+ \tilde{\tau} H_d + L_I^+ \tilde{\tau} L_I + Q_I^{+,A} \tilde{\tau} A_{I,A} \right)^2$$

Beim Quadrieren nutzen wir Gleichungen des Typs $(\tau^i)_\alpha^\beta (\tau^i)_\gamma^\delta = -\delta_\alpha^\beta \delta_\gamma^\delta + 2\delta_\alpha^\delta \delta_\gamma^\beta$ aus.

$$\text{Diagonale Terme + Mischterme} = \frac{g^2}{8} \left(-(H_u^+ H_u)(H_u^+ H_u) + 2(H_u^+ H_u)(H_u u^+ H_u) |1 \cdot (|H_u^{(u)}|^2 + |h_u^{(d)}|^2)^2 \right)$$

$$\frac{g^2}{8} \left((|h_u^{(u)}|^2 + |h_u^{(d)}|^2)^2 + (|h_d^{(u)}|^2 + |h_d^{(d)}|^2)^2 - (\tilde{v}_I \tilde{v}_I + \tilde{e}_I \tilde{e}_I)^2 + 2(\tilde{v}_I \tilde{v}_J + \tilde{e}_I \tilde{e}_J) \cdot (\tilde{v}_J \tilde{v}_I + \tilde{e}_J \tilde{e}_I) - (\tilde{u}_I^A \tilde{u}_{I,A} + \tilde{d}_I^A \tilde{d}_{I,A})^2 + 2(\tilde{u}_I^A \tilde{u}_{I,B} + \tilde{d}_I^A \tilde{d}_{I,B})(\tilde{u}_J^B K \tilde{u}_{I,A} + \tilde{d}_J^B \tilde{d}_{I,A}) \right) + \text{Mischterme}$$

Die Mischterme sind gegeben durch:

$$-2(|h_u^{(u)}|^2 + |h_u^{(d)}|^2)(|h_d^{(u)}|^2 + |h_d^{(d)}|^2) + 4(h_u^{(u),*} h_d^{(u)} + h_u^{(d),*} h_d^{(d)})(h_d^{(u),*} h_u^{(u)} + h_d^{(d),*} h_u^{(d)}) + (k\tilde{q})\text{-Terme} + (k\tilde{l})\text{-Terme}$$

$$V_D^{\text{SU}(3)} = \frac{g_c^2}{8} \left[(\tilde{Q}_I^+ \tilde{\lambda} \tilde{Q}_I)(\tilde{Q}_J^+ \tilde{\lambda} \tilde{Q}_J) + (\tilde{u}_I^c \tilde{\lambda} \tilde{u}_I^c)(\tilde{u}_J^c \tilde{\lambda} \tilde{u}_J^c) + (\tilde{d}_I^c \tilde{\lambda} \tilde{d}_I^c)(\tilde{d}_J^c \tilde{\lambda} \tilde{d}_J^c) + 2(\tilde{Q}_I^+ \tilde{\lambda} \tilde{Q}_I)(\tilde{u}_I^c \tilde{\lambda} \tilde{u}_I^c) + 2(\tilde{Q}_I^+ \tilde{\lambda} \tilde{Q}_I)(\tilde{d}_I^c \tilde{\lambda} \tilde{d}_I^c) + 2(\tilde{u}_I^c \tilde{\lambda} \tilde{u}_I^c)(\tilde{d}_I^c \tilde{\lambda} \tilde{d}_I^c) \right]$$

Zur weiteren Berechnung verwenden wir Identitäten für die Gell-Mann-Matrizen:

$$(\lambda^r)_A^B (\lambda^r)_C^D = -\frac{2}{3} \delta_A^B \delta_C^D + 2\delta_A^D \delta_C^B$$

Teilstudium: Higgspotential, Sektor der ungeladenen Higgsfeldern im Parameterraum Das Wunschminimum von V ist, dass alle geladenen Quarks, Sleptons im stationären Punkt den Wert 0 annehmen. Ebenso sollte die Farbe nicht spontan brechen oder auch Leptonzahlen nicht spontan verletzt sein. Die einzig ungeladenen Felder, die nicht Squarks oder Slepions sind, sind $h_u^{(d)}, h_d^{(u)} \mapsto h_u^0, h_d^0$.

$$V_{\text{Higgs, neutrale Felder}} = |h_d^{(u)}|^2 (|\mu|^2 + m_1^2) + |h_u^{(d)}|^2 (|\mu|^2 + m_2^2) + h_u^{(d)} h_d^{(u)} \mu B + \text{k.K. mit } m_3 = -\mu B$$

Weitere Terme:

$$\frac{1}{2} (g^2 + g'^2) \left[|h_u^{(d)}|^2 - |h_d^{(u)}|^2 \right]^2$$

Für $k \neq 0$ muss man $|\mu|^2$ ersetzen durch $\hat{\mu}^2 = |\mu|^2 - g'/2\kappa$. Die restlichen Felder sind die ungeladenen Higgsfelder. Im Falle $|h_u^{(d)}| = |h_d^{(u)}|$ fallen alle quadratische Term weg. Wir bezeichnen dann das komplexe Feld als allgemein als h .

$$V = (2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2)|h|^2 + \mu B(h^2 + (h^*)^2)$$

$$2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2 + 2\mu B \geq 0$$

Dann hat man eine Chance, dass das Potential nach unten beschränkt ist.

$$h_d^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_d + \hat{h}_d^0 \text{ und } h_u^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_u + \hat{h}_u^0$$

Dann kann man Symmetrien verwenden des Potentials. SU(2) Mann kann v_d reell wählen. Dann studiert man die stationären Gleichungen. und man sieht, dass auch v_u reell gewählt werden kann. Man erhält dann weitere Gleichungen:

$$2B\mu + m_A^2 \sin(2\beta) = 0 \text{ mit } \tan \beta = \frac{v_u}{v_d}$$

$$m_1^2 - m_2^2 + (m_A^2 + m_Z^2) \cos \beta = 0$$

$$m_A^2 = 2|\mu|^2 + m_1^2 + m_2^2 \geq 0$$

$$m_Z^2 = \frac{1}{4} (g^2 + g'^2) (v_u^2 + v_d^2)$$

Es ist zu erwarten, dass es sich um ein Minimum handelt, da das Potential nach unten beschränkt ist. Zum Schluss dürfen nur noch fünf reelle Higgsfelder vorkommen.