

# SKRIPT ZU THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK I

Prof. Dr. Johann Kühn

Vorlesung Sommersemester 2004

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Skript der Vorlesung THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK I  
von Herrn Prof. Dr. JOHANN KÜHN  
getext von PHILIPP OTTER, TOBIAS ULBRICHT und MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.  
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an [otter@particle.uni-karlsruhe.de](mailto:otter@particle.uni-karlsruhe.de),  
[Marco.Schreck@gmx.de](mailto:Marco.Schreck@gmx.de).



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Feldgleichungen, Lagrangedichten, Symmetrien</b>	<b>5</b>
1.1	Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System	5
1.2	LAGRANGE-Formalismus und HAMILTONsches Prinzip	6
1.2.1	Erinnerung: Punktmechanik	6
1.2.2	Felder	7
1.2.3	Übergang zu relativistischer Schreibweise	7
1.3	Symmetrien, Ströme, Ladungen	9
1.3.1	Vorbemerkungen	9
1.3.2	NOETHER-Theorem	10
1.4	Spezialfälle	11
1.4.1	Innere Symmetrie	11
1.4.2	spezielle äußere Symmetrie: Translation	11
1.5	Einschub: Gruppentheorie	12
1.5.1	$O(n)$ = orthogonale Gruppe	12
1.5.2	$SU(n)$ = spezielle unitäre Gruppe	13
1.5.3	$U(1)$ = reine Phasentransformation	13
1.5.4	Beispiele für innere Symmetrien und erhaltene Ströme	13
<b>2</b>	<b>Quantisierung des skalaren Feldes</b>	<b>17</b>
2.1	Erinnerung an Quantenmechanik	17
2.2	Quantenfelder	18
<b>3</b>	<b>Dirac-Gleichung in quantisierter Form und Fermi-Statistik</b>	<b>25</b>
3.1	Quantisierung	25
3.2	Algebra der Operatoren	26
<b>4</b>	<b>Spin 1 Felder</b>	<b>29</b>
4.1	Massives Vektorfeld	29
4.2	Photon-Felder ( $m^2 = 0$ )	30
4.2.1	LAGRANGE Formalismus	31
4.2.2	Quantisierung im Impulsraum	31
<b>5</b>	<b>Wechselwirkung, Störungstheorie</b>	<b>33</b>
5.1	Störungstheorie für zeitabhängige Probleme (Erinnerung an Quantenmechanik II)	33
5.2	Quantenfeldtheorie	34
5.3	Berechnung der Elektron-Elektron-Streuung	36
5.3.1	Einschub: WICKSches Theorem	36
5.3.2	Einschub: Zweipunkt-Funktionen ( $m \neq 0$ )	38
5.3.3	Elektron-Elektron-Streuung	40
5.3.4	BHABBA-Streuung	41
5.4	Erweiterung der Theorie auf Myonen	41
5.5	FEYNMAN-Regeln	42
<b>6</b>	<b>Von der Amplitude zum Wirkungsquerschnitt</b>	<b>43</b>
6.1	Phasenraum, Flussfaktor	43
6.2	Quadrat der Amplitude, Summation über Spins	45
6.2.1	Zwischenrechnung: Spin-Summen	45
6.2.2	Berechnung des Quadrats der Amplitude	46

<b>7 Schleifen-Diagramme</b>	<b>47</b>
7.1 Beispiel: $\phi^4$ -Theorie . . . . .	47
7.2 Divergenz-Verhalten, qualitative Anmerkungen und Beispiele . . . . .	49
<b>8 Regularisierung und Renormierung</b>	<b>51</b>
<b>9 Strahlungskorrekturen/ Quantenkorrekturen in der Quantenelektrodynamik</b>	<b>53</b>
9.1 Einführung . . . . .	53
9.2 Berechnung und Interpretation der „Vakuum-Polarisation“ . . . . .	54
9.2.1 Interpretation: Ladungsrenormierung . . . . .	55
9.2.2 Bedeutung des Imaginärteils der Vakuum-Polarisation . . . . .	57
9.2.3 Renormierung der äußeren Photonlinien (Interpretation der Wellenfunktionsrenormierung) . . . . .	58
9.3 Selbstmasse des Elektrons/ Der Elektron-Propagator . . . . .	58
9.3.1 Renormierung der Elektronenmasse und des Elektron-Propagators . . . . .	58
9.3.2 Vertexkorrektur . . . . .	59
<b>10 Renormierung allgemein</b>	<b>63</b>
10.1 UV-Divergenzen per Abzählung (Power Counting) . . . . .	63
10.1.1 Übergang zu $d$ Dimensionen . . . . .	67
10.1.2 Beispiel: Skalare $\phi^n$ -Theorie . . . . .	68
10.1.3 Alternative Betrachtung zu Power-Counting . . . . .	68
10.2 Renormierte Störungstheorie . . . . .	69
10.3 Ein-Schleifen-Näherung . . . . .	71
10.4 QED: Renormierte Störungstheorie . . . . .	74
10.5 QED in Ein-Schleifen-Näherung . . . . .	76
10.6 Renormierung in höheren Ordnungen . . . . .	76
10.6.1 Überlappende Divergenz . . . . .	77
10.7 $\phi^4$ in zwei Schleifen . . . . .	78
<b>11 Das Standardmodell</b>	<b>83</b>
11.1 YANG-MILLS-Theorien (nicht-abelsche Eichtheorie) und spontane Symmetriebrechung . . . . .	83
11.1.1 GOLDSTONE-Modell . . . . .	83
11.2 Lokale Symmetrien . . . . .	87
11.2.1 Lokale abelsche Symmetrien, Quantenelektrodynamik . . . . .	87
11.3 HIGGS-Modell . . . . .	88
11.3.1 Beispiel aus der Festkörperphysik: Supraleitung . . . . .	88
11.3.2 ABELSche Eichtheorien (lokal eichinvariant!) . . . . .	88
11.3.3 Nicht-ABELSche Eichgruppen/Einschub über LIE-Gruppen . . . . .	90
11.3.4 Nichtabelsche Eichfelder . . . . .	91
11.3.5 Spezialisierung auf SU(2) . . . . .	92
11.3.6 Spontane Brechung der lokalen SU(2)-Symmetrie . . . . .	93
<b>12 Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung</b>	<b>95</b>
12.1 Ansatz . . . . .	95
12.2 Konsequenzen . . . . .	96
12.2.1 Massenverhältnisse der Eichbosonen, „Mischungswinkel“ . . . . .	96
12.3 Kopplungen der neutralen Eichbosonen an Ladung und Isospin . . . . .	97
12.4 $M_W$ , $v$ und FERMI-Kopplung $G_F$ . . . . .	97
12.4.1 Allgemeine Diskussion für beliebige Darstellung des HIGGSfeldes . . . . .	99
12.5 Elektron-Masse und HIGGS-Kopplung . . . . .	100
12.6 Vektor- und Axial-Kopplungen des $Z_0$ an Fermionen . . . . .	100

# Kapitel 1

## Feldgleichungen, Lagrangedichten, Symmetrien

### 1.1 Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System

Der Übergang vom diskreten zum kontinuierlichen System soll hier am Beispiel eines unendlich langen elastischen Stabes vollzogen werden.

Im diskreten Modell stellen wir uns den Stab aus Massenpunkten, die durch Federn miteinander verbunden sind, bestehend vor. Sei  $a$  der mittlere Abstand zweier Massenpunkte,  $\eta_i$  die Auslenkung des  $i$ -ten Massenpunktes aus der Ruhelage,  $k$  die Federkonstante und  $m$  die Masse eines Massenpunktes.

Die kinetische Energie ist dann

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2 \quad (1.1)$$

Die potentielle Energie ist

$$V = \sum_i \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \quad (1.2)$$

Die Bewegungsgleichung für den  $i$ -ten Massenpunkt lautet

$$m \ddot{\eta}_i = - \frac{\partial V}{\partial \eta_i} = k(\eta_{i+1} - \eta_i) - k(\eta_i - \eta_{i-1}) \quad (1.3)$$

Die LAGRANGE Funktion des Systems lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i a \left[ \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - k a \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

Daraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - k a \left[ \frac{\left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right) + k a \left( \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a} \right)}{a} \right] = 0 \quad (1.5)$$

Der Übergang zum Kontinuum sieht wie folgt aus:

1. Übergang vom diskreten Index  $i$  zu einem kontinuierlichen Index  $x$
2. Einführung der Massendichte:  $\frac{m}{a} \rightarrow \mu$
3. Die Ausdehnung eines Stabes pro Längeneinheit  $\xi$  ist proportional zur Kraft.

$$\xi Y = F \quad (1.6)$$

Die Materialkonstante  $Y$  wird als YOUNG'scher Modul bezeichnet. In unserem Fall ist

$$F = k a \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \quad (1.7)$$

$k a$  ist der YOUNG'sche Modul,  $\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}$  ist die Ausdehnung pro Längeneinheit.

Statt des Index  $i$  wird nun  $x$ , die Lage im Ruhezustand, verwendet. Statt der  $\eta_i$  hat man  $\eta(x)$  als Funktion des Ortes. Damit gilt

$$\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} \rightarrow \frac{\partial\eta(x+a)}{\partial x} \approx \frac{\partial\eta(x)}{\partial x} \quad (1.8)$$

Nun ersetzt man noch die Summe über  $i$  durch ein Integral über  $\frac{dx}{a}$  und erhält als LAGRANGEfunktion des kontinuierlichen Systems

$$L = \int \frac{1}{2} \left( \mu \dot{\eta}^2(t, x) - Y \left( \frac{\partial\eta}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right) dx \quad (1.9)$$

Den Integranden bezeichnet man als LAGRANGEDichte  $\mathcal{L}$ . Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus (1.5)

$$\begin{aligned} \mu \ddot{\eta}(t, x) - Y \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial\eta(t, x+a)}{\partial x} - \frac{\partial\eta(t, x)}{\partial x} \right] \\ = \mu \ddot{\eta}(t, x) - Y \frac{\partial^2\eta(t, x)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

ist also eine Wellengleichung. Als allgemeines Prinzip gilt: nicht  $x$  ist kanonische Variable, sondern  $\eta(x)$ . Die Bewegungsgleichungen sind partielle Differentialgleichungen. Für dreidimensionale Systeme ist

$$L = \int \mathcal{L} dx dy dz \quad (1.11)$$

Der Integrand  $\mathcal{L}$ , die LAGRANGEDichte, ist eine Funktion von  $\eta$ ,  $\frac{\partial\eta}{\partial t}$  und  $\frac{\partial\eta}{\partial x}$ . Der kanonische Impuls ist allgemein  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ , hier also

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} \quad (1.12)$$

## 1.2 Lagrange-Formalismus und Hamiltonsches Prinzip

### 1.2.1 Erinnerung: Punktmechanik

HAMILTONsches Prinzip:  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$  soll minimiert werden, wobei  $q_i(t_1)$  und  $q_i(t_2)$  festliegen.

$$\begin{aligned} 0 = \delta S \\ = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \end{aligned} \quad (1.13)$$

Bei der partiellen Integration verschwindet das Randglied:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right)_{t_{1,2}} = 0 \quad (1.14)$$

Durch unabhängige Variation der  $\delta q_i$  folgt die Euler-LAGRANGE-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1.15)$$

$\frac{\partial L}{\partial q_i}$  ist die verallgemeinerte Kraft,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  der verallgemeinerte Impuls (wichtig für die Quantisierung!).

### 1.2.2 Felder

LAGRANGE Dichte:

$$\mathcal{L}(\eta, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \nabla \eta, t, \vec{x}) \tag{1.16}$$

Anwendung des HAMILTONSchen Prinzips: die Wirkung

$$S[\eta] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{x} \mathcal{L} \tag{1.17}$$

sei stationär, d.h.

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} \delta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \eta} \delta(\nabla \eta) \right) \tag{1.18}$$

Dieser Term wird partiell integriert bezüglich  $t$  und  $\vec{x}$ . Dabei fallen die Randterme weg, wenn  $\delta \eta(t_{1,2}) = 0$  und  $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \eta = 0$ .

$$\Rightarrow 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d\vec{x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} \delta \eta - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \eta} \delta \eta \right) \tag{1.19}$$

Wieder folgt die Euler-LAGRANGE-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \eta} = 0 \tag{1.20}$$

Im Beispiel des Stabes ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \mu \dot{\eta}^2 - Y \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \right)^2 \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \eta}{\partial t}} &= \mu \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \eta} &= -Y \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Also ist die Euler-LAGRANGE-Gleichung für dieses Beispiel (in Übereinstimmung mit 1.1)

$$-\frac{d}{dt} \mu \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{d}{dx} \left( -Y \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \tag{1.22}$$

eine lineare partielle Differentialgleichung.

### 1.2.3 Übergang zu relativistischer Schreibweise

Sei

$$\begin{aligned} \partial_\mu &\equiv \frac{d}{dx^\mu} \\ \int dx &\equiv \int dt dx dy dz \end{aligned} \tag{1.23}$$

$\int dx$  ist LORENTZ-invariant (die Zeitdilatation kompensiert die LORENTZkontraktion).

Felder  $\Phi_i$  sind Auslenkungen in einem noch zu bestimmenden Raum (z.B. elektrische oder magnetische Felder)  
 $\mathcal{L}$  hängt ab von diesen Feldern und ihren Ableitungen:

$$\mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i) \tag{1.24}$$

Falls  $\mathcal{L}$  LORENTZ-invariant ist, sind die Feldgleichungen kovariant.  $H \triangleq$  Energie ist hingegen nicht LORENTZ-invariant. Die Euler-LAGRANGE Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_j} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi_j)} = 0 \quad (1.25)$$

Zu  $\Phi_j$  gehört der kanonische Impuls  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi_j)}$ . Beispiele:

1. reelles skalares Feld ohne Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) &= \frac{1}{2}(\partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi) - \frac{1}{2}m^2 \Phi^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} &= -m^2 \Phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} &= \partial^\mu \Phi \end{aligned} \quad (1.26)$$

Die Bewegungsgleichung, die KLEIN-GORDON-Gleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi = 0 \quad (1.27)$$

beschreibt die Ausbreitung eines wechselwirkungsfreien neutralen Teilchens.

2. komplexes skalares Feld

$$\mathcal{L}(\Phi, \Phi^*, \partial_\mu \Phi, \partial_\mu \Phi^*) = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi \quad (1.28)$$

$\Phi$  und  $\Phi^*$  können formal unabhängig voneinander variiert werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^*} &= -m^2 \Phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi^*} &= \partial^\mu \Phi \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \Phi + m^2 \Phi &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \Phi^* + m^2 \Phi^* &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

3. DIRAC-Feld

Hier ist

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi \quad (1.31)$$

wobei

$$\begin{aligned} \rlap{\not{\partial}} &:= a^\mu \gamma_\mu = a_\mu \gamma^\mu \\ \rlap{\not{\partial}} &:= \gamma^\mu \frac{d}{dx^\mu} = \gamma^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (1.32)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= (i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow (i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi = 0 \quad (1.34)$$

Übung: zeige, dass Variation bezüglich  $\psi$  die Gleichung für  $\bar{\psi}$  liefert, die auch unmittelbar durch komplexe Konjugation aus 1.34 folgt.



## 1.3 Symmetrien, Ströme, Ladungen

### 1.3.1 Vorbemerkungen

#### Symmetrien → Klassifikation von Lösungen

- Gewinnung einer Mannigfaltigkeit von Lösungen aus einer vorgegebenen Lösung. (Beispiel: Translation, Drehung)
- Quantenmechanik: Symmetrien → Entartung im Spektrum
- innere Symmetrien – zeigen sich ebenfalls meistens im Spektrum. (Analogie zum Spin)

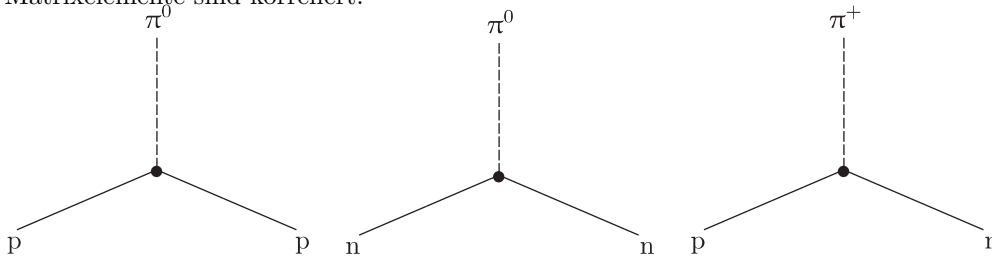
Spin  $\frac{1}{2}$ : 2 Zustände, energetisch entartet, Brechung der Drehsymmetrie durch äußeres Magnetfeld: Entartung wird aufgehoben. Isospin (HEISENBERG):

$$\begin{aligned}
 \text{Proton} & m_p = 938,3 \text{ MeV} \\
 \text{Neutron} & m_n = 939,6 \text{ MeV} \\
 \text{Pion} & m_{\pi^-} = m_{\pi^+} = 139,6 \text{ MeV} \\
 & m_{\pi^0} = 135,0 \text{ MeV} \\
 \text{Kaon} & m(K^+), m(K^-) = 493,6 \text{ MeV} \\
 & m(K^0), m(\bar{K}^0) = 493,6 \text{ MeV}
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

Zusammenhang durch “Drehung” im inneren Symmetrieraum.

- Isospin  $\frac{1}{2}$ :  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$  Doublets
- Isospin 1:  $\vec{\Pi} = \begin{pmatrix} (\pi^+ + \pi^-)/\sqrt{2} \\ (\pi^+ - \pi^-)/i\sqrt{2} \\ \pi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$

Matrixelemente sind korreliert:



#### Symmetrien → Erhaltungssätze

1. “erhaltene” Ladungen:

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}, t) d\vec{x}; \quad \frac{d}{dt} Q(t) = 0 \tag{1.36}$$

2. “erhaltene” Viererströme:

$$\partial^\mu j_\mu = \frac{d}{dt} \rho(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{mit } j_\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

i.) und ii.) sind beinhalten physikalisch die gleiche Aussage, wobei i.) global und ii.) lokal gilt.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{x}, t) d\vec{x} &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}, t) d\vec{x} && \text{Gaußscher Integralsatz} \\
 &= \int_{\text{Oberfläche im } \infty} d\vec{F} \cdot \vec{j} = 0
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

wenn  $\vec{j}$  für große Abstände abfällt.

**Quantenmechanisch:**

Erhaltene Ladung:  $[H, Q] = 0$

Erzeugende einer Symmetrietransformation:  $U = \exp(i\phi Q)$

**Umkehrung:**

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört ein erhaltener Strom  $\rightarrow$  NOETHER-Theorem.

**Achtung:**

Strom hat hier sehr verallgemeinerte Bedeutung.

Beispiel: Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$ .

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow 4 \text{ "Ladungen" } : P_\mu = \int T_{\mu 0} d\vec{x}$$

Lösungen können nach ihrer "Ladung" klassifiziert werden. Neben den kontinuierlichen Symmetrien gibt es zusätzlich diskrete Symmetrien, wie Paritätsspiegelung P, Ladungskonjugation C und Zeitumkehr T.

### 1.3.2 Noether-Theorem

- zu einer kontinuierlichen Symmetrie gehört ein erhaltener Strom

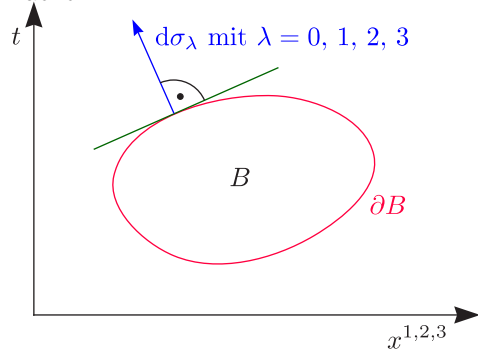
Betrachte die infinitesimale Transformation

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \phi_j(x) &\rightarrow \phi'_j(x') = \phi_j(x) + \delta\phi_j(x) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Außerdem gelte die zusätzliche Annahme, dass  $\mathcal{L}(x)dx$  unter dieser Transformation invariant ist, d.h.

$$\mathcal{L}(x', \phi'_j(x'), \partial'_\mu \phi'_j(x')) dx' = \mathcal{L}(x, \phi_j(x), \partial_\mu \phi_j(x)) dx \quad (1.41)$$

Ferner sei  $B$  ein 4-dimensionaler Bereich des MINKOWSKI-Raumes,  $\partial B$  sein Rand, eine 3-dimensionale Hyperfläche.



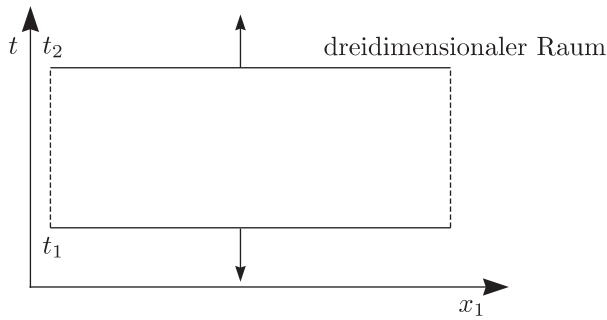
Zur Erinnerung: in 3 Dimensionen steht  $d\vec{F}$  in Richtung der Flächennormalen, hier ist  $d\sigma_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} dx^\mu dx^\nu dx^\rho$ . Dieser Vektor steht senkrecht auf allen 3 Vektoren, welche die Fläche aufspannen und ist proportional zum Volumen. Dann besagt das NOETHER-Theorem

$$\int_{\partial B} \left( -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \phi_j)} \delta\phi_j + T_\mu^\lambda \delta x^\mu \right) d\sigma_\lambda = 0 \quad (1.42)$$

wobei

$$T_\mu^\lambda \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \phi_j)} \partial_\mu \phi_j - g_\mu^\lambda \mathcal{L} \quad (1.43)$$

Dies ist der kanonische Energie-Impuls-Tensor.



## 1.4 Spezialfälle

### 1.4.1 Innere Symmetrie

(relevant für ein  $n$ -Tupel von Feldern  $\phi_i$ )

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$\mathcal{L}$  sei invariant unter den infinitesimalen Transformationen

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi \quad (\text{Index } i \text{ unterdrückt}) \quad (1.45)$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) &= \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \delta\partial_\mu\phi) - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \\ &= \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}}_{\substack{\text{Euler-} \\ \text{LAGRANGE-} \\ \text{Glg.}}} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\partial_\mu\phi \\ &= \left( \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} (\partial_\mu\delta\phi) \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

### 1.4.2 spezielle äußere Symmetrie: Translation

Betrachte infinitesimales  $a$ , und transformiere

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + a \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi(x + a) \end{aligned} \quad (1.47)$$

$\mathcal{L}$  sei invariant, d.h.

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}(\phi', \partial'_\mu\phi') \quad (\text{keine explizite Ortsabhängigkeit}) \quad (1.48)$$

Einerseits gilt:

$$\delta\mathcal{L} = a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \quad (\text{Taylor-Entwicklung}) \quad (1.49)$$

andererseits gilt

$$\delta\phi = a^\nu \partial_\nu \phi(x), \quad \delta\partial_\mu\phi(x) = a^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi(x) \quad (1.50)$$

also

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{L} &= \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right)}_{\substack{\text{Euler-} \\ \text{LAGRANGE-} \\ \text{Glg.}}} (a^\nu \partial_\nu \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi) \\
 &= \left( \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) (a^\nu \partial_\nu \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (a^\nu \partial_\nu \partial_\mu \phi) \\
 &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} a^\nu \partial_\nu \Phi \right)
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Und zusammengenommen:

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} a^\nu \partial_\nu \phi \right) - a^\mu \partial_\mu \mathcal{L} \\
 0 &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} a^\nu \partial_\nu \phi - a^\mu \mathcal{L} \right) \\
 0 &= \partial_\mu a_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right)
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Daraus folgen dann

$$\boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \text{mit } T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}} \tag{1.53}$$

vier erhaltene ‘‘Ströme’’.

## 1.5 Einschub: Gruppentheorie

Beispiele für häufig vorkommende innere Symmetrien.

### 1.5.1 $O(n)$ = orthogonale Gruppe

Eine mögliche Darstellung dieser Gruppe sind die orthogonalen Matrizen mit der Dimension  $n$ . Meistens beschränkt man sich auf  $SO(n)$ , d.h. man fordert zusätzlich Determinante 1, was Spiegelungen ausschliesst. Physikalisch bedeutet dies eine Drehung im  $n$ -dimensionalen Raum.

$n$	Zahl der Generatoren	
1	1	(Identität)
2	1	(Drehwinkel)
3	3	(Eulerwinkel)
$n$	$\frac{n(n-1)}{2}$	

(1.54)

#### Beispiel

$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$  sei ein reelles Tupel von  $n$  Feldern,  $D$  sei eine orthogonale Matrix.  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu \vec{\phi}, \partial^\mu \vec{\phi}, \vec{\phi} \cdot \vec{\phi})$  ist invariant unter

$$\vec{\phi} \rightarrow \phi' = D\vec{\phi} \quad (\text{evident wg. } D^T D = 1) \tag{1.55}$$

$\vec{\phi}$  transformiert sich unter der fundamentalen Darstellung. Tensoren können aus  $\vec{\phi}$  aufgebaut werden (Beispiel  $T_{ij} = \Phi_i \Psi_j$ ). Infinitesimale Transformation in 2 Dimensionen:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ -\phi & 0 \end{pmatrix} + O(\phi^2) \\
 &= \mathbf{1} + i\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + O(\phi^2)
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Allgemeine Drehung in  $n$  Dimensionen, und zwar aus der  $l$ - in die  $m$ -Richtung:

$$(\mathbb{1})_{jk} + i(K_{lm})_{jk} \tag{1.57}$$

mit

$$(K_{lm})_{jk} = -i(\delta_{mj}\delta_{lk} - \delta_{mk}\delta_{lj}) \tag{1.58}$$

### 1.5.2 SU( $n$ ) = spezielle unitäre Gruppe

Eine Darstellung sind unitäre Matrizen  $U$  mit Dimension  $n$  und  $\det U = +1$ . Anzahl der Generatoren ist  $n^2 - 1$ . Betrachte die infinitesimale Transformation

$$U = 1 + i\epsilon_a T^a \tag{1.59}$$

Nun gilt:

$$\left. \begin{array}{l} U \text{ unitär} \rightarrow T^a \text{ hermitesch} \\ \det U = 1 \rightarrow \text{Spur}(T^a) = 0 \end{array} \right\} \text{Warum?}$$

Es gibt  $n^2 - 1$  linear unabhängige  $T^a$ !

#### Beispiel

$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$  sei ein komplexes Tupel von  $n$  Feldern,  $U$  sei eine unitäre Matrix.  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_\mu \phi^+ \partial^\mu \phi, \phi^+ \phi)$  ist invariant unter

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi}' = U \vec{\phi} \quad (\text{evident wg. } U^+ U = 1) \tag{1.60}$$

$\vec{\phi}$  transformiert sich unter der fundamentalen Darstellung. Bekanntestes Beispiel: SU(2) = Isospin. Aus Isospin =  $\frac{1}{2}$  (Doublet) können höhere Darstellungen aufgebaut werden wie beim Spin.

### 1.5.3 U(1) = reine Phasentransformation

Diese Gruppe ist isomorph zu  $O(2)$ .

Es lassen sich zusammensetzen:

$$\begin{array}{lll} \text{SU}(3) \times & \text{SU}(2) \times \text{U}(1) : & \text{Teilchenphysik} \\ \text{QCD} & \text{elektrom. + schwache WW} & \end{array} \tag{1.61}$$

### 1.5.4 Beispiele für innere Symmetrien und erhaltene Ströme

#### Komplexes skalares Feld

$\phi$  sei ein komplexes skalares Feld, also jetzt kein Multipllett, aber doch zwei unabhängige Felder. Die LAGRANGEDichte sei

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda}{2} (\phi^* \phi)^2 \tag{1.62}$$

Höhere Potenzen in  $\Phi^* \Phi$  führen zu Problemen in der quantisierten Theorie ( $\rightarrow$  später).  $\phi^*$  und  $\phi$  sind unabhängig von einander zu variieren.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \\ &= -m^2 \phi - \lambda (\phi^* \phi) \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi \\ &\Rightarrow (\square + m^2) \phi = -\lambda (\phi^* \phi) \phi \end{aligned} \tag{1.63}$$

Das ist für  $\lambda = 0$  die KLEIN-GORDON-Gleichung. Betrachte die Symmetrietransformation:

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \exp(i\alpha)\phi & \phi^* &\rightarrow \phi'^* = \exp(-i\alpha)\phi^* \\ \delta\phi &= i\alpha\phi & \delta\phi^* &= -i\alpha\phi^*\end{aligned}\quad (1.64)$$

Wegen

$$\sum_i \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta\phi \right) = 0 \quad (1.65)$$

gilt

$$\partial_\mu [(\partial^\mu \phi)(-i\alpha\phi^*) + (\partial^\mu \phi^*)(i\alpha\phi)] = 0 \quad (1.66)$$

also

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.67)$$

mit

$$j^\mu = \frac{1}{i} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (1.68)$$

### Diracfelder

$\psi_i$  seien  $n$  DIRACfelder ( $i = 1, \dots, n$ ). Die LAGRANGEDichte sei

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}_j (i\overleftarrow{\partial} - m)\psi_j \quad (1.69)$$

wobei über  $j$  summiert wird und der FEYNMANDagger  $\overleftarrow{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$  ist. Aus den LAGRANGEgleichungen folgen

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_j} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_j)} = (i\overleftarrow{\partial} - m)\psi_j & \text{(DIRACgleichung für } n \text{ Felder)} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_j} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_j)} = -\bar{\psi}_j m - \partial^\mu \bar{\psi}_j i\gamma_\mu = -\bar{\psi}_j (i\overleftarrow{\partial} + m)\end{aligned}\quad (1.70)$$

Die dazugehörige Symmetrie ist  $SU(n) \otimes U(1)$ , d.h.  $\mathcal{L}$  ist invariant unter

$$\psi_j \rightarrow \psi'_j = U_{jk} \psi_k \quad (\det U = 1; U^+ U = 1) \quad (1.71)$$

sowie unter

$$\psi_j \rightarrow \psi'_j = \exp(i\alpha)\psi_j \quad (1.72)$$

Infinitesimal lauten diese Transformationen

$$\begin{aligned}U &\approx (1 + i\epsilon^a T_a) \\ \exp(i\alpha) &\approx 1 + i\alpha\end{aligned}\quad (1.73)$$

Aus den Bedingungen an  $U$  folgt wieder, dass  $T$  hermitesch und spurlos ist.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \delta\psi &= i\epsilon^a T_a \psi & \delta\bar{\psi} &= -i\bar{\psi} \epsilon^a T_a & (SU(n)) \\ \delta\psi &= i\alpha\psi & \delta\bar{\psi} &= -i\alpha\psi & (U(1))\end{aligned}$$

Der Strom folgt aus

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi}_j)} \delta\bar{\psi}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_j)} \delta\psi_j \right) \\ &= \partial_\mu (0 + \bar{\psi}_j i\gamma^\mu i\epsilon_a T_{jk}^a \psi_k) \\ &= -\epsilon_a \partial_\mu (\bar{\psi}_j \gamma^\mu T_{jk}^a \psi_k)\end{aligned}\quad (1.74)$$

und damit

$SU(n)$	$j_\mu^a = \bar{\psi}_j \gamma_\mu T_{jk}^a \psi_k$	$(n^2 - 1)$ Ströme
$U(1)$	$j_\mu = \bar{\psi}_j \gamma_\mu \psi_j$	ein Strom

### Beispiel für den Energie-Impuls-Tensor

Es sei

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4}_{\equiv -V(\phi)} \quad (1.75)$$

Dann ergibt sich aus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi - \lambda \phi^3 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

die Euler-LAGRANGE-Gleichung zu

$$\square \phi + m^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0 \quad (1.76)$$

Der Energie-Impuls-Tensor war gegeben durch (s. Gl. (1.43))

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (1.77)$$

Mit obiger LAGRANGEDichte wird dieser zu

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + g^{\mu\nu} V(\phi) \quad (1.78)$$

Nachweis, dass  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \square \phi \partial^\nu \phi + \partial^\mu \phi \partial_\mu \partial^\nu \phi - \partial_\lambda \partial^\nu \phi \partial^\lambda \phi + \partial^\nu V(\phi) \\ &= \square \phi \partial^\nu \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \partial^\nu \phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.79)$$

unter Verwendung der Feldgleichungen. Anmerkungen:

- Verweis auf elektromagnetisches Feld: Energie-Dichte, Poynting Vektor, Spannungs-Tensor!
- andere äußere Symmetrien:  
Drehungen im MINKOWSKI-Raum entsprechen LORENTZ-Transformationen.
- Skalentransformation: Es sei  $m = 0$ . Unter der Transformation

$$\begin{aligned} x_\mu &\rightarrow x'_\mu = (1 + \delta) x_\mu \\ \phi &\rightarrow \phi' = (1 + \delta)^{-1} \phi \end{aligned} \quad (1.80)$$

bleibt  $\mathcal{L}$  ungeändert. Berechne den zugehörigen Strom aus Gl. (1.42)!





# Kapitel 2

## Quantisierung des skalaren Feldes

Die Elektrodynamik beschäftigt sich mit klassischen Feldern, die die Maxwell-Gleichungen erfüllen. Andererseits wissen wir, dass die Maxwell-Gleichungen die Ausbreitung der Photonen in der quantisierten Theorie beschreiben. Wie hängen diese beiden Aspekte zusammen?

### 2.1 Erinnerung an Quantenmechanik

Im SCHRÖDINGERbild sind die Zustandsvektoren  $|t\rangle$  zeitabhängig, wobei die Zeitentwicklung durch die SCHRÖDINGERGEleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle = H |t\rangle \quad (2.1)$$

gegeben ist.  $\langle x|t\rangle = \psi(x, t)$  charakterisiert einen Einteilchen-Zustand mit Wellenfunktion  $\psi(x, t)$  in der Ortsdarstellung. Die Zustände sind normiert:

$$\begin{aligned} \langle t|t\rangle &= \int dx \langle t|x\rangle \langle x|t\rangle \\ &= \int dx |\psi(x, t)|^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die Messgrößen (Observablen) werden im SCHRÖDINGERbild durch Operatoren dargestellt. Der Erwartungswert eines Operators  $O$  im Zustand  $|t\rangle$  ist gegeben durch das Matrixelement  $\langle t|O|t\rangle$ . Der Erwartungswert des Ortsoperators  $X$  berechnet sich zum Beispiel aus

$$\begin{aligned} x(t) &= \langle t|X|t\rangle \\ &= \int dy \psi^*(y, t) y \psi(y, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Messgrößen können auch explizit vom Ort abhängen. Z.B. ist der Operator für die Ladungsdichte am Punkt  $\vec{a}$  für ein Teilchen der Ladung  $e$   $\rho(\vec{a}) = e\delta(\vec{x} - \vec{a})$ . Sein Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} \langle t|\rho(\vec{a})|t\rangle &= e \int d\vec{y} \psi^*(\vec{y}, t) \delta(\vec{y} - \vec{a}) \psi(\vec{y}, t) \\ &= e |\psi(\vec{a}, t)|^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die Matrixelemente von  $\rho(\vec{a})$  sind dann Funktionen des Ortes.

Übergang zum HEISENBERGBild:

$$\begin{aligned} A_H &:= \exp(iHt) A \exp(-iHt) \\ |t\rangle_H &:= \exp(iHt) |t\rangle \end{aligned} \quad (2.5)$$

Die Matrix-Elemente bleiben hierbei unverändert:

$${}_H \langle t| A_H |t\rangle_H = \langle t| A |t\rangle \quad (2.6)$$

Die Zeitabhängigkeit wird auf die Operatoren umgewälzt:

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = i[H, A_H(t)] + \left(\frac{\partial}{\partial t}A\right)_H \quad (2.7)$$

Für eine orts- und zeitabhängige Observable gilt im HEISENBERGBild

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(\vec{x}, t) &= i[H, A(\vec{x}, t)] \\ \frac{d}{dx^j}A(\vec{x}, t) &= i[P^j, A(\vec{x}, t)] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ort und Zeit werden also im HEISENBERGBild gleichbehandelt.

## 2.2 Quantenfelder

Elektrodynamik:  $\vec{E}(\vec{x})$ ,  $\vec{B}(\vec{x})$  sind Felder (Funktion des Ortes). Felder sind Observable, die vermutlich nicht alle gleichzeitig messbar sind (z.B. induziert eine Messung von  $\vec{E}$  durch eine Probeladung am Ort  $\vec{x}$  durch Bewegung der Probeladung ein  $\vec{B}$ -Feld), nichttriviale Vertauschungsrelationen sind also zu erwarten. Zustände, die einer vorgegebenen Feldkonfiguration entsprechen, bestehen i.A. aus einer Überlagerung von Zuständen mit verschiedener Teilchenzahl. Eine praktische Fragestellung ist z.B., welcher Teilchen-Inhalt für  $t \rightarrow \infty$  bei gegebenem Teilchen-Inhalt für  $t \rightarrow -\infty$  zu erwarten ist. Wir wollen zunächst ein reelles skalares Feld betrachten. Das klassische Feld erfüllt die KLEIN-GORDON-Gleichung

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 \quad (2.9)$$

wobei  $x = x_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  ist. Spezielle Lösungen dieser Gleichungen sind ebene Wellen der Form  $\exp(ikx)$  oder  $\exp(-ikx)f$  mit  $k^2 = m^2$ , also  $k_0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{k}^2} =: \pm\omega(\vec{k})$ :

Es gilt  $\square \exp(ikx) = -k^2 \exp(ikx)$ . Die allgemeine Lösung erhält man als Linearkombination:

$$\varphi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( \exp(ikx)\alpha^*(\vec{k}) + \exp(-ikx)\alpha(\vec{k}) \right) \quad (2.10)$$

Der Faktor  $\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_k}$  ist Konvention. Beachte, dass  $d^4k \delta(k^2 - m^2)\Theta(k_0) = \frac{d\vec{k}}{2\omega_k}$  LORENTZinvariant ist.

### Übergang zum quantisierten Feld

Der klassischen Messgröße  $\varphi(x)$  wird der Erwartungswert eines Operators  $\phi(x)$  zugeordnet:

$$\varphi(x) = \langle \text{Zustand} | \phi(x) | \text{Zustand} \rangle \quad (2.11)$$

Bezüglich  $\phi$  machen wir zwei Annahmen:

- **Annahme I:**  $\phi$  sei hermitesch,  $\phi = \phi^\dagger$ . Daraus folgt dann, dass  $\varphi$  reell ist. Ferner gelte

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (2.12)$$

Daraus folgt

$$(\square + m^2)\varphi(x) = 0 \quad (2.13)$$

- **Annahme II:** Wirkung der Erzeugenden der Translation  $P_\mu$

$$\partial_\mu \phi(x) = i[P_\mu, \phi(x)] \quad \text{HEISENBERG Gleichung} \quad (2.14)$$

$P_\mu$  muss noch explizit angegeben werden.

Unser Ziel ist es, eine Beschreibung von Teilchen mittels  $\phi$  zu finden. Jede Lösung der KLEIN-GORDON-Gleichung kann als Überlagerung von ebenen Wellen in der Form (2.10) angegeben werden. Die Fourier-Koeffizienten sind dann Operatoren.

$$\phi(x) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( \exp(ikx)a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx)a(\vec{k}) \right) \quad (2.15)$$

Wendet man die HEISENBERG-Gleichung auf die rechte Seite an, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( \exp(ikx) i k_\mu a^\dagger(\vec{k}) - \exp(-ikx) i k_\mu a(\vec{k}) \right) \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left( \exp(ikx) i [P_\mu, a^\dagger] + \exp(-ikx) i [P_\mu, a] \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

also durch Koeffizientenvergleich der Terme mit  $\exp(ik_0 x_0)$  und  $\exp(-ik_0 x_0)$

$$[P_\mu, a^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a^\dagger \quad (2.17)$$

$$[P_\mu, a(\vec{k})] = -k_\mu a \quad (2.18)$$

Zur Erinnerung: Beim harmonischen Oszillator waren Auf- und Absteigeoperatoren durch die Vertauschungsrelationen  $[H, a^\dagger] = \omega a^\dagger$  und  $[H, a] = -\omega a$  charakterisiert.

### Konstruktion der Zustände auf algebraischem Weg (Fock-Raum)

Mit  $|0\rangle$  identifizieren wir den Vakuumzustand ( $|0\rangle \neq \text{Null!}$ ). Er ist normiert  $\langle 0|0\rangle = 1$ . Im Vakuum ist kein Teilchen vorhanden, es ist  $E = 0$ ,  $\vec{p} = 0$ , somit ist

$$P_\mu |0\rangle = 0 \quad (2.19)$$

Gleichung (2.17) angewendet auf  $|0\rangle$  ergibt

$$\begin{aligned} (P_\mu a^\dagger - a^\dagger P_\mu) |0\rangle &= k_\mu a^\dagger |0\rangle \\ \Rightarrow P_\mu a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle &= k_\mu a^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

Also ist  $a^\dagger |0\rangle$  Eigenzustand des Energie und Impuls-Operators mit den Eigenwerten  $k_0$  und  $\vec{k}$  (falls  $a^\dagger |0\rangle \neq 0$ ). Gleichung (2.18) angewendet auf  $|0\rangle$  ergibt

$$P^0 a |0\rangle = -k_0 a |0\rangle \quad (2.20)$$

also wäre  $a |0\rangle$  Eigenzustand zu negativem Energieeigenwert. Wir wollen fordern, dass stets  $E \geq 0$  gilt. Also folgt

$$\boxed{a(\vec{k}) |0\rangle = 0} \quad \forall \vec{k} \quad (2.21)$$

Falls  $|p\rangle$  Eigenzustand zu  $P_\mu$  mit

$$P_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle \quad (2.22)$$

ist, so gilt

$$\begin{aligned} P_\mu a^\dagger(\vec{k}) |p\rangle &= (p_\mu + k_\mu) a^\dagger(\vec{k}) |p\rangle \\ P_\mu a(\vec{k}) |p\rangle &= (p_\mu - k_\mu) a(\vec{k}) |p\rangle \end{aligned}$$

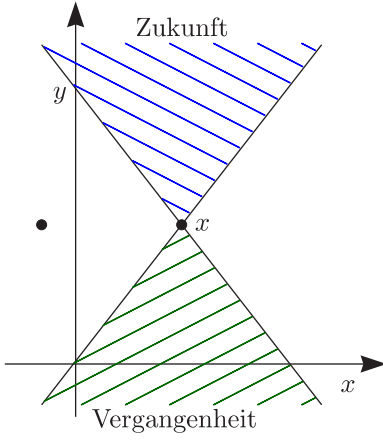
Insbesondere ist

$$P^\mu a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) |0\rangle = (k_1^\mu + k_2^\mu) a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) |0\rangle \quad (2.23)$$

$a^\dagger$  ist also ein Erzeugungsoperator,  $a$  ein Vernichtungsoperator.

- **Annahme III:** Mikrokausalität

Messungen bei  $x$  und  $y$  dürfen sich nicht beeinflussen, wenn  $x, y$  relativ zueinander raumartig sind.



Es muss also gelten

$$\boxed{[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{für } (x - y)^2 < 0} \quad (2.24)$$

Speziell gilt dann auch für  $\vec{x} \neq \vec{y}$

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] &= 0 \\ [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ausserdem gilt trivialerweise

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}, t)] = 0 \quad (2.26)$$

Wir werden jetzt zeigen, dass daraus die BOSE-Symmetrie der Teilchen folgt, d.h.

$$\begin{aligned} [a^\dagger(k_1), a^\dagger(k_2)] &= 0 \\ [a(k_1), a(k_2)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aus

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left( \exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) \right) \\ \dot{\phi}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left( i\omega \exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) - i\omega \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

folgt

$$\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) = 2\omega \int d\vec{x} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \phi(\vec{x}, t) \quad (2.29)$$

$$\exp(i\omega t) a^\dagger(\vec{k}) - \exp(-i\omega t) a(-\vec{k}) = -2i \int d\vec{x} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \dot{\phi}(\vec{x}, t) \quad (2.30)$$

Da  $[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad \forall \vec{x}, \vec{y}$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ (2.29)(\vec{k}_1), (2.29)(\vec{k}_2) \right] \\ &= \exp(+i(\omega_1 + \omega_2)t) \left[ a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2) \right] \\ &\quad + \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)t) \left[ a(-\vec{k}_1), a(-\vec{k}_2) \right] \\ &\quad + \exp(+i(\omega_1 - \omega_2)t) \left[ a^\dagger(\vec{k}_1), a(-\vec{k}_2) \right] \\ &\quad + \exp(-i(\omega_1 - \omega_2)t) \left[ a(-\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2) \right] \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\Rightarrow \left[ a^\dagger(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2) \right] = 0, \quad \left[ a(\vec{k}_1), a(\vec{k}_2) \right] = 0 \quad (2.32)$$

Der letzte Schritt folgt aus der Tatsache, dass die Zeitabhängigkeit der ersten beiden Terme durch keinen anderen Term kompensiert wird (im Gegensatz zu den beiden letzten Termen, die für  $\omega_1 = \omega_2$  die gleiche

Zeitabhängigkeit haben und sich in der Tat kompensieren, s.U.) Dies impliziert bereits BOSE-Symmetrie der Teilchen:

$$\begin{aligned} |k_1, k_2\rangle &\equiv a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle \\ &= a^\dagger(k_2)a^\dagger(k_1)|0\rangle \\ &= |k_2, k_1\rangle \end{aligned} \quad (2.33)$$

Zwei Teilchen-Zustände sind also symmetrisch unter Vertauschung von  $k_1$  und  $k_2$ . Dies ist das erste Beispiel für *das Theorem von Spin und Statistik*, d.h. Teilchen mit ganzzahligem Spin erfüllen BOSEstatistik, solche mit halbzahligem Spin FERMIstatistik.

Als nächstes untersuchen wir den Kommutator  $[a, a^\dagger]$ .  $a^\dagger(\vec{k})$  und  $a(\vec{k})$  werden aus (2.29) und (2.30) berechnet:

$$a^\dagger(\vec{k}) = \exp(-i\omega t) \int d\vec{x} \exp(+i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left( \omega \phi(\vec{x}, t) - i\dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) \quad (2.34)$$

$$a(\vec{k}) = \exp(+i\omega t) \int d\vec{x} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left( \omega \phi(\vec{x}, t) + i\dot{\phi}(\vec{x}, t) \right) \quad (2.35)$$

Unter Verwendung von (2.25) und (2.26) und

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{x})] = [\dot{\phi}(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x})] = 0 \quad (2.36)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} [a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] &= \exp(i(\omega_1 - \omega_2)t) \int d\vec{x} d\vec{y} \exp(-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x} + i\vec{k}_2 \cdot \vec{y}) \\ &\quad \left\{ i\omega_2 [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] - i\omega_1 [\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dieser Ausdruck soll nicht identisch Null sein (ansonsten wären  $a$  und  $\phi$  einfach komplexe Zahlen). Andererseits kann der Integrand nur für  $\vec{x} = \vec{y}$  von Null verschieden sein, siehe (2.25) und (2.26). Als Ansatz fordert man für  $\phi$  und  $\dot{\phi}$  die "kanonische Vertauschungsrelation"

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.38)$$

Daraus folgt dann als Vertauschungsrelation für  $a$  und  $a^\dagger$

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.39)$$

Man kann den Ansatz "begründen", indem man  $\phi$  als kanonische Koordinate,  $\dot{\phi}$  als kanonischen Impuls und  $\vec{x}$  als Index auffasst.

Zusammenfassung:  $\phi$  und  $\dot{\phi}$  gehorchen den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (2.40)$$

$$[\phi(\vec{x}, t), \dot{\phi}(\vec{y}, t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.41)$$

Die Kommutatoren von  $a$  und  $a^\dagger$  sind

$$[a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad (2.42)$$

$$[a, a] = 0 \quad (2.43)$$

$$[a(\vec{k}_1), a^\dagger(\vec{k}_2)] = (2\pi)^3 2\omega_1 \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.44)$$

Bemerkung: Manche Definitionen von  $a$  unterscheiden sich durch einen Faktor  $\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}$ . Mit Hilfe von  $a^\dagger$  konstruieren wir nun Einteilchen-Zustände

$$a^\dagger(\vec{k})|0\rangle \equiv |\vec{k}\rangle \quad (2.45)$$

Die Einteilchen-Zustände sind wie folgt normiert

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.46)$$

sind also uneigentliche Zustände. Mathematisch sorgfältiger wäre es, Zustände mit Hilfe von Wellenpaketen

$$|a^\dagger[f]\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (2.47)$$

einzuführen.

**n-Teilchen-Zustände**

Genauso lassen sich n-Teilchen-Zustände

$$N a^\dagger(\vec{k}_1) \dots a^\dagger(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (2.48)$$

bzw.

$$N a^\dagger[f_1] \dots a^\dagger[f_n] |0\rangle \quad (2.49)$$

eingeführen. Die  $f_i$  seien hierbei orthonormiert, d.h. es gelte

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} f_i^*(\vec{k}) f_j(\vec{k}) = \delta_{ij} \quad (2.50)$$

$N$  ist eine Normierungskonstante. Es ist  $N = 1$  falls alle  $f_i$  verschieden sind. Falls alle  $f_i$  gleich sind, ist  $N = (n!)^{-\frac{1}{2}}$ . Allgemeiner: sind  $r_1$  der  $f_i$  gleich  $f_1$ ,  $r_2$  der  $f_i$  gleich  $f_2$  usw., so ist

$$N = (r_1! r_2! \dots)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

(als Übung nachzurechnen unter Verwendung von (2.50))

**Interpretation**

Die HEISENBERG-Zustände mit einem Teilchen und Impulswellenfunktion  $f(\vec{k})$  sind

$$|f\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (2.52)$$

Entsprechend sind die SCHRÖDINGER-Zustände

$$|f, t\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \exp(-i\omega t) f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \quad (2.53)$$

Aus  $\langle f, t | f, t \rangle = 1$  folgt  $\int |f(\vec{k})|^2 \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = 1$  und umgekehrt.

Anmerkung:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) f(\vec{k}) \exp(-i\omega t) \quad (2.54)$$

kann nicht als Ortswellenfunktion  $\phi(x)$  eines Teilchens interpretiert werden! Denn es ist  $\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \neq 0$  auch für  $(x-y)^2 < 0$  und wir müssten dies als Ausbreitung mit Überlichtgeschwindigkeit interpretieren, was einen Widerspruch zur Kausalität darstellen würde.

Aus den Quantenfeldern lassen sich nun Energie-, Impuls-, Teilchenzahloperator und weitere Operatoren wie folgt aufbauen: man verwendet die NOETHER-Ströme, integriert die 0-Komponente und führt "Normal-Ordnung" durch, d.h. man ersetzt immer  $\int aa^\dagger$  durch  $\int a^\dagger a$ , so dass

$$\langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = 0 \quad (2.55)$$

Das begründet man damit, dass die Reihenfolge in der klassischen Theorie nicht festgelegt ist.

### Teilchenzahloperator

Der Teilchenzahl-Operator ist

$$\mathcal{N} \equiv \int d\tilde{k} a^\dagger a \quad (2.56)$$

Hierbei ist

$$d\tilde{k} = \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\Theta(k_0) = \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \quad (2.57)$$

ein LORENTZ-invariantes Integrationsmaß. Damit ist (nachrechnen)

$$\mathcal{N} \left| \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n \right\rangle = n \left| \vec{k}_1 \dots \vec{k}_n \right\rangle \quad (2.58)$$

Die Energie- und Impulsoperatoren sind

$$H = \int d\tilde{k} \omega a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad (2.59)$$

$$\vec{P} = \int d\tilde{k} \vec{k} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad (2.60)$$

und werden gewonnen aus

$$\begin{aligned} H &= \int d\vec{x} T^{00}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2} \int d\vec{x} \left( : \partial^0 \phi \partial^0 \phi : + : \vec{\nabla} \phi \vec{\nabla} \phi : + m^2 : \phi^2 : \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

mit der Nebenrechnung

$$\phi = \int d\tilde{k} \left( \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (2.62)$$

$$\partial_0 \phi = \int d\tilde{k} \left( i\omega \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) - i\omega \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (2.63)$$

$$\vec{\nabla} \phi = \int d\tilde{k} \left( -i\vec{k} \exp(i\omega t) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) a^\dagger(\vec{k}) + i\vec{k} \exp(-i\omega t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) a(\vec{k}) \right) \quad (2.64)$$

$$(2.65)$$

$$\begin{aligned} m^2 \int d^3x |\phi(\vec{x}, t)|^2|_{t=0} &= \\ &= m^2 \int d\tilde{k} \int d\tilde{k}' \{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}') + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}')] \\ &\quad + \delta(\vec{k} + \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}') + a(\vec{k}) a(\vec{k}')] \} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned}
 \int d^3x |\partial_0 \phi(\vec{x}, t)|^2 |_{t=0} = & \\
 \omega^2 \int d\vec{k} \int d\vec{k}' \{ & \delta(\vec{k} - \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] \\
 & - \delta(\vec{k} + \vec{k}') [a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} & (2.67)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int d^3x |\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t)|^2 |_{t=0} = & \\
 \int d\vec{k} \int d\vec{k}' \{ & \delta(\vec{k} - \vec{k}') [\vec{k} \cdot \vec{k}' a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}') + \vec{k}' \cdot \vec{k} a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}')] \\
 & - \delta(\vec{k} + \vec{k}') [\vec{k} \cdot \vec{k}' a^\dagger(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') + \vec{k}' \cdot \vec{k} a(\vec{k})a(\vec{k}')] \} & (2.68)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow H = \frac{1}{2} \int d\vec{k} \int d\vec{k}' (2\pi)^3 \{ & \overbrace{[m^2 + \omega^2 + \vec{k}^2]}{=2\omega^2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\
 & + \underbrace{[m^2 - \omega^2 + \vec{k}^2]}_{=0} (a^\dagger a^\dagger + a a) \delta(\vec{k} + \vec{k}') \} \\
 = \int d\vec{k} \int d\vec{k}' (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}') \omega^2 & (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})) \\
 = \frac{1}{2} \int d\vec{k} \omega (a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k})) & \\
 = \int d\vec{k} \omega a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) + \text{const} & & (2.69)
 \end{aligned}$$



# Kapitel 3

## Dirac-Gleichung in quantisierter Form und Fermi-Statistik

Die allgemeinen Lösungen der DIRAC-Gleichung vor der Quantisierung lauten:

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int d\vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( \exp(ikx) v_s(\vec{k}) \beta_s^*(\vec{k}) + \exp(-ikx) u_s(\vec{k}) \alpha_s(\vec{k}) \right) \\ \bar{\psi}(x) &= \int d\vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( \exp(-ikx) \bar{v}_s(\vec{k}) \beta_s(\vec{k}) + \exp(+ikx) \bar{u}_s(\vec{k}) \alpha_s^*(\vec{k}) \right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

wobei gilt

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0\tag{3.2}$$

$$(\cancel{k} + m)v_s = 0 \quad \text{Lösung zu negativer Frequenz}\tag{3.3}$$

$$(\cancel{k} - m)u_s = 0 \quad \text{Lösung zu positiver Frequenz}\tag{3.4}$$

### 3.1 Quantisierung

Wir ersetzen

$$\alpha \rightarrow a_s \quad \beta_s^* \rightarrow b_s^+\tag{3.5}$$

Dann lautet die Lösung der DIRAC-Gleichung in quantisierter Form

$$\psi(x) = \int d\vec{k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} \left( \exp(+ikx) v_s(\vec{k}) b_s^+(\vec{k}) + \exp(-ikx) u_s(\vec{k}) a_s(\vec{k}) \right)\tag{3.6}$$

Wir nehmen wieder an, dass die HEISENBERG-Gleichung gilt.

$$\partial_\mu \psi = i[P_\mu, \psi]\tag{3.7}$$

Daraus erhalten wir dann wie vorher

$$\begin{aligned}[P_\mu, a_s^+(\vec{k})] &= k_\mu a^+(\vec{k}) \\ [P_\mu, b_s^+(\vec{k})] &= k_\mu b^+(\vec{k}) \\ [P_\mu, a_s(\vec{k})] &= -k_\mu a_s(\vec{k}) \\ [P_\mu, b_s(\vec{k})] &= -k_\mu b_s(\vec{k})\end{aligned}\tag{3.8}$$

- Daraus folgt wie beim Skalarfeld

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0\tag{3.9}$$

da für alle Zustände die Energie positiv sein muss.

- Die Anwendung von  $\psi$  erzeugt  $e^+$  (Antiteilchen) und vernichtet  $e^-$  (Teilchen).
- $a_s^+(\vec{k})|0\rangle$  entspricht einem Elektronenzustand mit Spin  $s = +\frac{1}{2}$  oder  $-\frac{1}{2}$  und mit Impuls  $\hbar\vec{k}$ .

## 3.2 Algebra der Operatoren

Für den HAMILTONoperator  $H = P_0$  erhält man durch einfache Rechnung (nachrechnen!) aus der Energiedichte

$$T^{00} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}^0 \psi \quad (3.10)$$

vor der Normalordnung

$$H = \int d\vec{k} k_0 \sum_s \left( b_s^+(\vec{k}) b_s(\vec{k}) - a_s(\vec{k}) a_s^+(\vec{k}) \right). \quad (3.11)$$

Würden wir hier für die Erzeuger und Vernichter die gewöhnlichen Vertauschungsrelationen fordern, so hätten Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte Energien.

⇒ Forderung von Antivertauschungsrelationen

$$\left\{ a_r(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}') \right\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.12)$$

$$\left\{ b_r(\vec{k}), b_s^+(\vec{k}') \right\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (3.13)$$

$$\{a, b\} = \{a, a\} = \{b, b\} = \dots = 0 \quad (3.14)$$

Man erhält dann

$$H = \int d\vec{k} k_0 \sum_s \left( b_s^+(\vec{k}) b_s(\vec{k}) + a_s^+(\vec{k}) a_s(\vec{k}) \right) \quad (3.15)$$

Ähnlich ergibt sich für den Impuls

$$\vec{P} = \int d\vec{k} \vec{k} \sum_s \left( b_s^+(\vec{k}) b_s(\vec{k}) + a_s^+(\vec{k}) a_s(\vec{k}) \right) \quad (3.16)$$

sowie für die Ladung

$$Q = \int d\vec{x} : j_0(x) : = \int d\vec{x} : \bar{\psi}(x) \gamma_0 \psi(x) : = \int d\vec{k} \sum_s [a^+ a - b^+ b] \quad (3.17)$$

### Bemerkungen

- Die negative (unendlich große) Konstante entfällt wegen der Normalordnung.
- Es folgen die Antivertauschungsrelationen für die Felder zur gleichen Zeit

$$\left\{ \psi_r(\vec{x}, t), \psi_s(\vec{y}, t) \right\} = \left\{ \bar{\psi}_r(\vec{x}, t), \bar{\psi}_s(\vec{y}, t) \right\} = 0 \quad (3.18)$$

$$\left\{ \psi_r(\vec{x}, t), \bar{\psi}_s(\vec{y}, t) \right\} = \gamma_{rs}^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.19)$$

d. h.  $\psi^\dagger$  ist kanonischer Impuls zu  $\psi$

$$\left\{ \psi_r(\vec{x}, t), \psi_s^\dagger(\vec{y}, t) \right\} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{rs} \quad (3.20)$$

- Dies liefert Mikrokausalität (Vertauschungsrelationen) für Observable, welche bilinear in den Spinorfeldern sind

$$\Rightarrow \left[ \underbrace{\bar{\psi}(\vec{x}, t) M_1 \psi(\vec{x}, t)}_{\text{Observable 1}}, \underbrace{\bar{\psi}(\vec{y}, t) M_2 \psi(\vec{y}, t)}_{\text{Observable 2}} \right] = 0 \quad \text{für } \vec{x} \neq \vec{y} \quad (3.21)$$

Hier sind  $M_i$  natürlich  $4 \times 4$  Matrizen und (3.21) folgt aus folgender Identität

$$[AB, CD] = A\{B, C\}D - AC\{B, D\} - C\{A, D\}B + \{C, A\}DB \quad (3.22)$$

- Insbesondere folgt aus den Antivertauschungsrelationen, dass

$$a_r^\dagger(\vec{p}_1)a_s^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle = -a_s^\dagger(\vec{p}_2)a_r^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle \quad (3.23)$$

und damit für Wellenpakete  $f_1$  und  $f_2$

$$a_r^\dagger[f_1]a_s^\dagger[f_2]|0\rangle = 0 \quad \text{für } f_1 = f_2, r = s \quad (3.24)$$

Das ist das Spin-Statistik-Theorem bzw. Pauli-Prinzip für Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$ . Es gilt auch für wechselwirkende Teilchen. Neben dem CPT Theorem ist das ein grundlegendes Resultat der relativistischen QFT. Nukleonen und Elektronen gehorchen der FERMI-Statistik. Sie manifestiert sich als Basis der Festkörperphysik in dem "FERMI-Gas" der Elektronen und ist verantwortlich für die Stabilität der Materie.

- andererseits: Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) z.B. Photonen, BOSE-Gas, Laser, Helium-4, COOPER-Paare
- CPT-Theorem: Lokale, relativistische QFT ist invariant, wenn sowohl Zeitspiegelung, Paritätsspiegelung und Übergang zu Antiteilchen vorgenommen wird.
- es verbleiben für die Quantisierung Teilchen mit Spin 1 und Masse (3 Freiheitsgrade), Photonen/e.m.-Feld (2 Freiheitsgrade)



# Kapitel 4

## Spin 1 Felder

### 4.1 Massives Vektorfeld

- $W^\pm, Z$  haben Spin 1 und sind Träger der schwachen Wechselwirkung
- $\rho, \omega, \phi$  sind Spin-1 Mesonen und aus Quarks aufgebaut
- Spin 1 erlaubt 3 Einstellungen oder Freiheitsgrade. Ein Kandidat für ein zugehöriges Feld, ein Vektorfeld  $A_\nu$ , hat jedoch 4 Komponenten, d.h. eine Nebenbedingung ist erforderlich.

Die Feldgleichungen kann man in Anlehnung an die Maxwell'schen Gleichungen hinschreiben. Die Gleichung

$$\partial_\rho F^{\rho\nu} + m^2 A^\nu = 0 \quad (4.1)$$

mit

$$F^{\rho\nu} = \partial^\rho A^\nu - \partial^\nu A^\rho \quad (4.2)$$

nennt man die *Proca-Gleichung*.

Weil die Viererdivergenz  $\partial_\rho F^{\rho\nu}$  verschwindet, gilt  $m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$ . Nimmt man an, dass die Masse ungleich Null ist, folgt als Nebenbedingung

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (4.3)$$

Setzt man dies in (4.2) ein so folgt  $\partial_\rho F^{\rho\nu} = \square A^\nu$  und damit

$$(\square + m^2)A^\nu(x) = 0 \quad \partial_\nu A^\nu(x) = 0 \quad (4.4)$$

äquivalent zur PROCA-Gleichung. Die dazugehörige LAGRANGEDichte lautet:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (4.5)$$

wobei  $A_\mu$  ein reelles Vektorfeld darstellt. In die zugehörigen Euler-LAGRANGE Gleichungen (Nachrechnen!) setzt man als Ansatz ebene Wellen der Form

$$A_\mu = \exp(-ikx)\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) + \text{konjugiert komplex} \quad (4.6)$$

ein, wobei  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$  einen Polarisationsvektor darstellt und die Massenschalenbedingung gilt:  $k_0 = \omega_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ . Damit sind die KLEIN-GORDON-Gleichungen für die  $A_\mu$  erfüllt. Aus der obigen Nebenbedingung folgt:

$$0 = \partial^\mu A_\mu \Rightarrow k^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} = 0 \quad (4.7)$$

d.h. es gibt nur 3 linear unabhängige Polarisationsvektoren  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ . Im Ruhesystem z.B. ist  $k_\mu = (k_0, \vec{0}) = (m, 0, 0, 0)$  und daher hat  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$  keine Null-Komponente. In karthesischer Basis sind die drei  $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$  gegeben durch

$$\epsilon_\mu^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_\mu^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_\mu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

und werden orthonormal gewählt. Alternativ zur karthesischen Basis stellt man zirkulare Polarisation in den Basisvektoren

$$\epsilon_{\mu}^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon_{\mu}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

dar. Es gilt für beliebige Bezugssysteme

$$\epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon^{*\mu(\lambda')} = -\delta_{\lambda\lambda'} \quad (4.10)$$

und die Vollständigkeitsrelation lautet

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}^{(\lambda)} \epsilon_{\nu}^{*\lambda} = - \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m^2} \right) \quad (4.11)$$

Also ist die allgemeine Lösung in quantisierter Form

$$A_{\mu}(x) = \int d\vec{k} \sum_{\lambda=1,2,3} \left( \exp(-ikx) \epsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) + \exp(ikx) \epsilon_{\mu}^{*\lambda}(\vec{k}) a^{+(\lambda)}(\vec{k}) \right) \quad (4.12)$$

wobei hier der Operator  $a^{+(\lambda)}(\vec{k})$  Teilchen mit Polarisation  $\lambda$  und Impuls  $\vec{k}$  erzeugt. Die zugehörigen Vertauschungsrelationen sind

$$[A_{\nu}(x), A_{\nu}(y)] = 0 \quad \text{für} \quad (x-y)^2 < 0 \quad (4.13)$$

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{+(\lambda')}(\vec{k}')] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.14)$$

## 4.2 Photon-Felder ( $m^2 = 0$ )

Die Maxwell-Gleichungen lauten

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = j^{\nu} \quad (4.15)$$

$$\partial_{\mu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.16)$$

mit dem dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

Ausgedrückt durch Potentiale schreibt sich der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad (4.18)$$

und Gleichung (4.16) ist automatisch erfüllt. (nachrechnen!) Das Vektorpotential ist noch nicht eindeutig festgelegt (Eichfreiheit!). Z.B. bleibt  $F_{\mu\nu}$  ungeändert unter der Ersetzung

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu} \Lambda(x) \quad (4.19)$$

wobei  $\Lambda(x)$  ein beliebiges Skalarfeld ist. Wir können nun die LORENTZ-Eichung fordern

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \quad (4.20)$$

denn, falls  $\partial_{\mu} A^{\mu} = G(x) \neq 0$  wäre, so wähle  $\Lambda(x)$  so, dass  $\square \Lambda(x) = -G(x)$  und für das neue Feld  $A'_{\mu}(x)$  gilt dann (4.20). In LORENTZ-Eichung ist die erste Maxwellgleichung (4.15) äquivalent zu

$$\square A^{\nu} = j^{\nu} \quad (4.21)$$

oder im freien Fall ( $j = 0$ )

$$\square A^{\nu} = 0 \quad (4.22)$$

Als weitere Freiheit in der Wahl der Eichung können wir noch solche  $\Lambda$  wählen, für welche gilt:

$$\square \Lambda(x) = 0 \quad (4.23)$$

### 4.2.1 Lagrange Formalismus

Als einfachsten Ansatz für die LAGRANGEDichte könnten wir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) \quad (4.24)$$

wählen. Beim Berechnen der zu  $A_\mu$  kanonisch konjugierten Impulse

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 \quad (4.25)$$

findet man  $\Pi^0 = 0$ . Also modifiziert man Gleichung (4.24) zu

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}\lambda(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad [-j_\mu A^\mu] \quad (4.26)$$

wobei der letzte Term die Wechselwirkung mit einem Strom  $j_\mu$  beschreibt. Die Feldgleichungen hierzu lauten

$$\square A_\mu - (1 - \lambda)\partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad [= j_\mu] \quad (4.27)$$

Und der Impuls ist hier

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 - \lambda g^{\mu 0} \partial_\nu A^\nu \quad (4.28)$$

Für  $\lambda \neq 0$  gilt, wenn wir die Divergenz von (4.27) bilden

$$\lambda \square(\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (4.29)$$

D.h.  $\partial_\mu A^\mu$  ist ein freies Feld. Dies gilt auch wenn Wechselwirkung vorhanden ist, sofern  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Nun wird quantisiert und gleichzeitige Vertauschungsrelationen postuliert

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = i g_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (4.30)$$

Die Forderung  $\partial_\mu A^\mu = 0$  ist inkonsistent mit (4.30), denn  $\Pi^0 = -\lambda(\partial_\mu A^\mu)$  und  $[A_0, \Pi^0] \neq 0$ , also ist  $\partial_\mu A^\mu = 0$  als Operatorgleichung nicht möglich. Wir werden aber sehen, dass

$$\langle \text{physikalischer Zustand} | \partial_\mu A^\mu | \text{physikalischer Zustand} \rangle = 0 \quad (4.31)$$

möglich ist. Außerdem wird im folgenden der "Eichparameter"  $\lambda$  aus Gleichung (4.26) zu  $\lambda = 1$  gesetzt.

### 4.2.2 Quantisierung im Impulsraum

Wir wählen einen Ansatz wie zuvor

$$A_\nu(x) = \int d\vec{k} \sum_\lambda \left[ \exp(-ikx) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) + \exp(ikx) \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{+(\lambda)}(\vec{k}) \right] \quad (4.32)$$

wobei

- $\lambda$  zunächst ein Index aus  $\{1, 2, 3, 4\}$  ist,
- die Notation

$$\sum_\lambda \epsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) = a_\nu(\vec{k}) \quad (4.33)$$

gilt und

- die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [a_\mu, a_\nu] &= [a_\mu^+, a_\nu^+] = 0 \\ [a_\mu(\vec{k}), a_\nu^+(\vec{k}')] &= -g_{\mu\nu} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \end{aligned} \quad (4.34)$$

gelten.

Hierbei ist allerdings das globale Vorzeichen zunächst nicht klar, aber unabhängig von dieser Konvention scheint es Zustände mit positiver und negativer Norm zu geben. Definieren wir

$$a_0[f] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} f(\vec{k}) a(\vec{k}) \quad (4.35)$$

so gilt

$$\langle 0 | a_0[f] a_0^\dagger[f] | 0 \rangle = -1 \quad \text{für} \quad \int d\vec{k} |f(\vec{k})|^2 = 1 \quad (4.36)$$

und das gibt ein Problem bei der Interpretation der Wahrscheinlichkeitsdichte. Ferner gibt es 4 Einteilchenzustände für ein festes  $\vec{k}$ , aber nur 2 Photonpolarisationszustände (links/rechts-zirkular). Lösung ist hier der ‘‘Gupta-Bleuler-Formalismus’’. Anstelle von  $\partial_\mu A^\mu = 0$  als Operatorgleichung fordern wir hier

$$\partial_\mu A^{(-)\mu}(x) | \text{physikalischer Zustand} \rangle = 0 \quad (4.37)$$

als Bedingung an die Zustände, wobei

$$A_\mu^{(-)} \equiv \int d\tilde{k} \exp(-ikx) a_\mu(\vec{k}) \quad (4.38)$$

Daher gilt im Impuls- oder Fourierraum

$$k^\mu a_\mu(\vec{k}) | \text{physikalischer Zustand} \rangle = 0 \quad (4.39)$$

und daraus folgt

$$\langle \text{physikalischer Zustand} | \partial_\mu A^\mu | \text{physikalischer Zustand} \rangle = 0 \quad (4.40)$$

Das Problem ist aber viel weitreichender. Es gilt für Eichtheorien allgemein, dass die Forderung nach Kovarianz unphysikalische Zustände erzeugt (Zustände mit negativer Norm) mit sogenannten ‘‘Geisterteilchen’’. Während die Lösung in der QED noch ‘‘trivial’’ ist, weil die Geister entkoppeln, treten in der QCD und der elektroschwachen WW diese Zustände in der Rechnung auf. Für einlaufende Wellen ohne Geister gibt es aber auch nur auslaufende Wellen ohne Geister, insofern ist die Wahrscheinlichkeitsinterpretation gerettet.



# Kapitel 5

## Wechselwirkung, Störungstheorie

### 5.1 Störungstheorie für zeitabhängige Probleme (Erinnerung an Quantenmechanik II)

Wir beschäftigen uns hier mit HAMILTONoperatoren von der Form

$$H = H_0 + V(t) \quad (5.1)$$

Das System mit  $H_0$  sei exakt und in geschlossener Form lösbar.  $V(t)$  sei klein und für  $t < t_0$  vernachlässigbar. Für Streuprobleme können wir dies auch bei zeitlich konstantem  $V$  anwenden, wenn das gestreute Teilchen erst bei  $t_0$  in den Bereich des Potentials gerät. In der SCHRÖDINGERdarstellung gilt dann

$$i\partial_t |\psi_{in}^0, t\rangle = H_0 |\psi_{in}, t\rangle \quad \text{falls } t < t_0 \quad (5.2)$$

$$i\partial_t |\psi, t\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi, t\rangle \quad \text{für beliebige } t \quad (5.3)$$

Wir gehen nun zur Wechselwirkungsdarstellung über (I $\equiv$ Interaction)

$$|\psi, t\rangle_I = \exp(iH_0 t) |\psi, t\rangle_{\text{SCHRÖDINGER}} \quad (5.4)$$

und erhalten als Bewegungsgleichung

$$i\partial_t |\psi, t\rangle_I = V_I(t) |\psi, t\rangle_I \quad (5.5)$$

wobei

$$V_I(t) = \exp(iH_0 t) V(t) \exp(-iH_0 t) \quad (5.6)$$

Diese lässt sich iterativ lösen:

$$\begin{aligned} |\psi, t\rangle_I &= |\psi, t_0\rangle_I + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |\psi, t_0\rangle_I \\ &\quad + \frac{1}{i^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') |\psi, t_0\rangle_I \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wir wollen nun die Störungsrechnung auf die Streuung anwenden. Dazu setzen wir  $t_0 \rightarrow -\infty$  und definieren ein- und auslaufende Zustände

$$|\psi_{in}\rangle_I = |\psi, t \rightarrow -\infty\rangle_I \quad (5.8)$$

$$|\psi_{out}\rangle_I = |\psi, t \rightarrow +\infty\rangle_I \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

die jeweils durch freie Felder beschrieben werden.  $|\psi_{in}\rangle_I$  und  $|\psi_{out}\rangle_I$  sind zeitunabhängig. (Der Grenzübergang ist in einer geeigneten Norm zu verstehen, worauf hier nicht eingegangen werden soll.)

Als nächstes suchen wir einen Operator  $S$ , die S-Matrix, der bei gegebenem  $|\psi_{in}\rangle_I$  die Übergangsamplitude  $|\psi_{out}\rangle_I$  nach  $|\psi_{out}\rangle_I = S |\psi_{in}\rangle_I$  berechnet. Dieser lässt sich mit Gleichung (5.7) berechnen:

$$\begin{aligned}
 S &= 1 + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dt' V_I(t') \\
 &\quad + \frac{1}{i^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

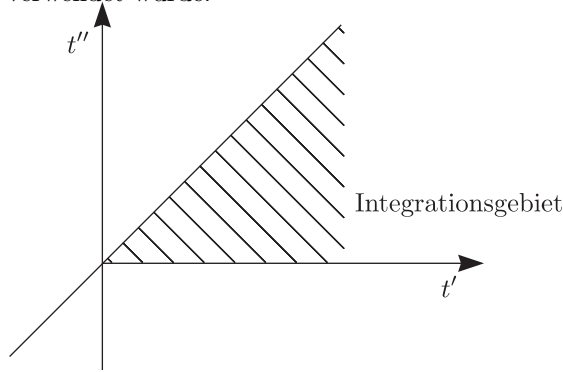
Um diesen Ausdruck in eine etwas kompaktere Form zu bringen, verwendet man

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} dt'' T(V_I(t') V_I(t'')) \tag{5.12}$$

wobei der Zeitordnungsoperator  $T$ , definiert über

$$T(V_I(t') V_I(t'')) = \begin{cases} V_I(t') V_I(t'') & t'' < t' \\ V_I(t'') V_I(t') & t'' \geq t' \end{cases} \tag{5.13}$$

verwendet wurde.



Damit erhält man für die S-Matrix

$$S = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt^{(n)} T [V_I(t') \dots V_I(t^{(n)})] \tag{5.14}$$

$$\Rightarrow S = T \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t) \right) \tag{5.15}$$

## 5.2 Quantenfeldtheorie

In der QFT zerlegen wir den HAMILTONoperator in einen "freien Anteil", der linear und bilinear in den Feldern ist, und einen Wechselwirkungsterm, der höhere Potenzen der Felder enthält. Betrachten wir zum Beispiel die QED. Hier ist

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{DIRAC}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} \tag{5.16}$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial A)^2 \quad (\text{Eichparameter } \lambda = 1) \tag{5.17}$$

$$\mathcal{L}_{\text{DIRAC}} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi \tag{5.18}$$

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = -j^\mu A_\mu = e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \tag{5.19}$$

Der Wechselwirkungsterm im HAMILTONoperator ist

$$H_{\text{WW}}(t) = -L_{\text{WW}}(t) = - \int d^3x \mathcal{L}_{\text{WW}} \quad (5.20)$$

Dem Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dt V_I(t)$  in der Störungstheorie entspricht hier das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt H_{\text{WW}} = - \int d^4x \mathcal{L}_{\text{WW}} \quad (5.21)$$

$\mathcal{L}_{\text{WW}}$  ist ausgedrückt durch freie Felder, also  $A_\mu(x)$  und  $\psi(x)$  mit  $(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0$ , und ist normalgeordnet. Für die Störungstheorie in  $n$ -ter Ordnung entwickelt man  $S$  nach (5.15) bis zur Ordnung  $n$ . Interpretation in niedrigster Ordnung: Es ist

$$\psi \propto (b^\dagger + a) \quad (5.22)$$

$$\bar{\psi} \propto (b + a^\dagger) \quad (5.23)$$

$$A_\mu \propto (\alpha^\dagger + \alpha) \quad (5.24)$$

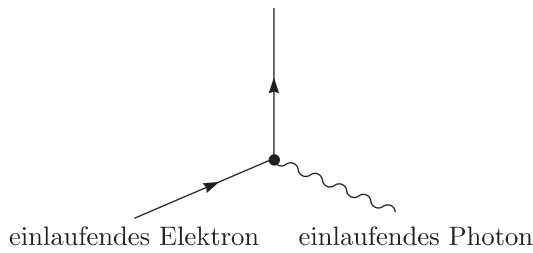
wobei  $a, b, \alpha$  Elektronen, Positronen bzw. Photonen vernichten und  $a^\dagger, b^\dagger, \alpha^\dagger$  sie erzeugen. Also ist

$$H_{\text{WW}} \propto : (b + a^\dagger)(b^\dagger + a) : (\alpha^\dagger + \alpha) \quad (5.25)$$

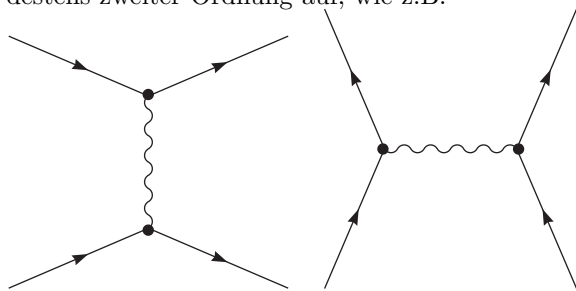
d.h. im Wechselwirkungsterm des HAMILTONoperators treten 8 Kombinationen aus Erzeugern und Vernichtern auf. Sehen wir uns zum Beispiel den Term proportional  $a^\dagger a \alpha$  an, der den Übergang

$$\langle e | a^\dagger a \alpha | \gamma, e \rangle = (\langle 0 | a) a^\dagger a \alpha (a^\dagger \alpha^\dagger | 0 \rangle) \quad (5.26)$$

also  $e + \gamma \rightarrow e$  beschreiben könnte.  
auslaufendes Elektron



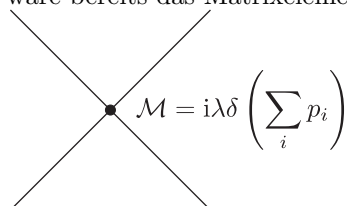
Dieser Übergang ist aber aus kinematischen Gründen verboten. In der QED treten nur Übergänge von mindestens zweiter Ordnung auf, wie z.B.



Im Fall einer skalaren Theorie mit

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4 : \quad (5.27)$$

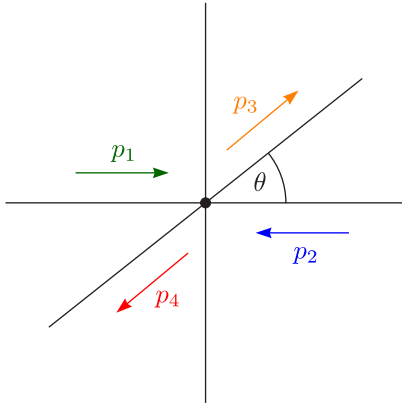
wäre bereits das Matrixelement der Ordnung  $\lambda^1$  von Null verschieden:



### 5.3 Berechnung der Elektron-Elektron-Streuung

Im folgenden sei  $p$  der Impuls und  $r$  der Spinfreiheitsgrad. Wir wollen uns folgenden Prozess näher anschauen:

$$e(p_1, r_1) + e(p_2, r_2) \mapsto e(p_3, r_3) + e(p_4, r_4) \quad (5.28)$$



Die Amplitude berechnet sich mittels des Matrixelements der Streumatrix  $\mathcal{S}$ , wobei  $r_1$  der Spin von  $e_1$  sei usw.:

$$\mathcal{S}_{fi} = \langle 0 | a_{r_3}(p_3) a_{r_4}(p_4) | \mathcal{S} | a_{r_1}^\dagger(p_1) a_{r_2}^\dagger(p_2) | 0 \rangle \quad (5.29)$$

Die S-Matrix entwickeln wir bis zur zweiten Ordnung:  $\mathcal{S} = \mathbf{1} + e \cdot \text{Ausdruck} + e^2 \cdot \text{Ausdruck} + \dots$ . Der erste Term trägt nicht bei, da  $p_1, p_2 \neq p_3, p_4$ . Auch der zweite Term verschwindet, weil  $\mathcal{L}$  linear in  $A$  ist und weder im Anfangs- noch im Endzustand ein Photon auftritt. Betrachten wir also den zweiten Term der Entwicklung

$$\mathcal{S}_{fi} = \frac{(-i)^2}{2!} e^2 \int dx' \int dx'' \langle 0 | a(3) a(4) T [ : \bar{\psi}(x') \gamma^\mu \psi(x') : A_\mu(x') : \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu \psi(x'') : A^\nu(x'') ] a^\dagger(1) a^\dagger(2) | 0 \rangle + \dots \quad (5.30)$$

wobei

$$: \bar{\psi}(x') \gamma^\mu \psi(x') : A_\mu(x') = \mathcal{L}_{WW}(x') \quad (5.31)$$

#### 5.3.1 Einschub: Wicksches Theorem

Dieses dient der Umformung eines Produkts von Feldoperatoren in normalgeordnete Produkte. Zunächst betrachten wir skalare Felder.

- 1.)  $\phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle$
- 2.)  $\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) =: \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) : + : \phi(x_1) : \langle 0 | \phi(x_2)\phi(x_3) | 0 \rangle + : \phi(x_2) : \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_3) | 0 \rangle + : \phi(x_3) : \langle 0 | \phi(x_1)\phi(x_2) | 0 \rangle$

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \phi(x_1) \dots \phi(x_n) =: & \phi(x_1) \dots \phi(x_n) : + \sum_{k < l} : \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \cancel{\phi(x_k)} \dots \cancel{\phi(x_l)} \dots \phi(x_n) : \langle 0 | \phi(x_k) \phi(x_l) | 0 \rangle + \dots + \\ & + \sum_{p \geq 2} \left( \sum_{\substack{k_1 < k_2 \\ < \dots < k_{2p}}} : \phi(x_1) \dots \cancel{\phi(x_{k_1})} \dots \cancel{\phi(x_{k_{2p}})} \dots \phi(x_n) : * \right. \\ & \left. * \sum_{\text{Alle Permutationen}} \langle 0 | \phi(x_{k_1}) \phi(x_{k_2}) | 0 \rangle \dots \langle 0 | \phi(x_{k_{2p-1}}) \phi(x_{k_{2p}}) | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Bei  $T$ -Produkten erhält man:

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2)) =: \phi(x_1)\phi(x_2) : + \langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle \quad (5.33)$$

Bei FERMİ-Feldern sieht die Formel ähnlich aus, man muss jedoch die Minuszeichen (Statistik-Faktoren) bei der Vertauschung berücksichtigen! Von bereits normalgeordneten Produkten gibt es natürlich keine Kontraktion. Wir wollen nun exemplarisch den (einfachsten) Fall, das Produkt zweier Feldoperatoren, herleiten. Sei dazu

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \int d\vec{k} (\exp(ikx)a^\dagger(k) + \exp(-ikx)a(k)) \\ &\equiv \underbrace{\phi_c(x)}_{\text{creation}} + \underbrace{\phi_a(x)}_{\text{annihilation}}\end{aligned}\quad (5.34)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\phi(x)\phi(y) &= (\phi_c(x) + \phi_a(x))(\phi_c(y) + \phi_a(y)) \\ &= \underbrace{\phi_c(x)\phi_c(y) + \phi_a(x)\phi_a(y) + \phi_c(x)\phi_a(y) + \phi_c(y)\phi_a(x)}_{:\phi(x)\phi(y):} \\ &\quad + \underbrace{\phi_a(x)\phi_c(y) - \phi_c(y)\phi_a(x)}_{(*)}\end{aligned}\quad (5.35)$$

Der Term (\*) ist

$$\begin{aligned}(\star) &= \int d\vec{k}d\vec{k}' \exp(-ikx + ik'y) \underbrace{(a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') - a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}))}_{(2\pi)^3 2\omega\delta(\vec{k}-\vec{k}')} \\ &= \int d\vec{k} \exp(-ik(x-y)) \\ &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \exp(-ik(x-y)) \quad \text{mit } k_0 = \omega_k \\ &= \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle\end{aligned}\quad (5.36)$$

Damit haben wir (??) gezeigt.

Als Spezialfall betrachten wir den **Vakuum**-Erwartungswert eines Produktes von Feldoperatoren (wobei  $\phi(x_n) \equiv \phi_n$ ):

$$\begin{aligned}\langle 0 | \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle &= \langle 0 | \underbrace{\phi_1 \phi_2}_{\square} \underbrace{\phi_3 \phi_4}_{\square} | 0 \rangle + \langle 0 | \underbrace{\phi_1 \phi_2 \phi_3}_{\square} \phi_4 | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_1 \underbrace{\phi_2 \phi_3 \phi_4}_{\square} | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle \langle 0 | \phi_3 \phi_4 | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_1 \phi_3 | 0 \rangle \langle 0 | \phi_2 \phi_4 | 0 \rangle + \langle 0 | \phi_1 \phi_4 | 0 \rangle \langle 0 | \phi_2 \phi_3 | 0 \rangle\end{aligned}\quad (5.37)$$

Allgemein bildet man die Summe über alle „möglichen Kontraktionen“ ( $\equiv$  Vakuum-Erwartungswerte zweier Feldoperatoren). Bei FERMİ-Operatoren kommt aufgrund der Vertauschung ein Minuszeichen ( $a_n \equiv a(\vec{k}_n)$ ):

$$\underbrace{a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger}_{\square} = -\underbrace{a_1 a_3^\dagger}_{\square} \underbrace{a_2 a_4^\dagger}_{\square}\quad (5.38)$$

Betrachten wir ferner die Kontraktion des Feldoperators mit  $a^\dagger(\vec{p})$ :

$$\underbrace{\phi(x)}_{\square} a^\dagger(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} [\exp(ikx)a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx)a(\vec{k})] a^\dagger(\vec{p})\quad (5.39)$$

Darüberhinaus gilt  $\underbrace{a(\vec{k})a^\dagger(\vec{p})}_{\square} = (2\pi)^3 \cdot 2\omega \cdot \delta(\vec{k} - \vec{p})$  und somit  $\underbrace{\phi(x)}_{\square} a^\dagger(\vec{p}) = \exp(-ikx)$ . Analog ergibt sich

$\underbrace{a(\vec{p})\phi(x)}_{\square} = \exp(ikx)$ . Entsprechend gilt für die Kontraktion eines DIRAC-Spinors  $\psi(x)$  mit  $a^\dagger(\vec{p})$ :

$$\underbrace{\psi(x)}_{\square} a^\dagger(\vec{p}) = u(p) \exp(-ipx)\quad (5.40)$$

Aber es ist  $\underbrace{\bar{\psi}(x)}_{\square} a^\dagger(\vec{p}) = 0$ . Für jedes ein- bzw. auslaufende Teilchen erhalten wir damit einen Faktor  $\exp(-ipx)$  beziehungsweise  $\exp(+ipx)$ .

**Beispiel:**

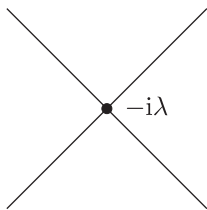
$$\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4(x) : \quad 1 + 2 \mapsto 3 + 4 \quad (5.41)$$

Mittels Störungstheorie 1.Ordnung folgt ergibt sich das Matricelement

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \langle 0 | \underbrace{a(4)a(3)}_{\frac{1}{i} 4!} \underbrace{\frac{1}{i} \frac{\lambda}{4!} \int dx : \phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x) :}_{\frac{1}{i} 4!} a^\dagger(2)a^\dagger(1) | 0 \rangle = \\ &= \int dx \frac{1}{i} \frac{\lambda}{4!} \exp(+ip_4x + ip_3x - ip_2x - ip_1x) + \text{weitere Permutationen} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Man erhält  $4!$  identische Terme und damit nach Ausführung der Integration:

$$4! \frac{1}{i} \frac{\lambda}{4!} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \boxed{-i\lambda(2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_k^4 p_k\right)} \quad (5.43)$$



Dies ist die einfachste FEYNMAN-Regel.

### 5.3.2 Einschub: Zweipunkt-Funktionen ( $m \neq 0$ )

Wir wollen als nächstes den Begriff des Propagators einführen. Dazu betrachten wir zunächst den Erwartungswert des Produkts zweier Feldoperatoren:

$$\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle \equiv D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} \exp(-ip(x-y)) \quad (5.44)$$

Im zeitartigen, also beispielsweise für  $\vec{x} - \vec{y} = 0$ ,  $x_0 - y_0 = t \mapsto \infty$  gilt  $D \sim \exp(imt)$ . Im raumartigen, also für  $x_0 - y_0 = 0$ ,  $|\vec{x} - \vec{y}| = r \mapsto \infty$  gilt  $D \sim \exp(-mr)$ . Für  $(x-y)^2 \rightarrow +\infty$  ist  $D \propto \exp(-m|x-y|)$ . (Frage: Wie lauten die Vorfaktoren?)

Der Kommutator  $[\phi(x), \phi(y)]$  ist für freie Felder eine gewöhnliche Zahl, da  $[a^\dagger, a]$  eine Zahl ist. Dies gilt nicht mehr für wechselwirkende Felder. Also ist

$$\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = D(x-y) - D(y-x) \quad (5.45)$$

Als Propagatoren bezeichnen wir die GREENSfunktionen unserer Feldgleichungen. Für skalare Felder sind das Funktionen  $\Delta(x-y)$  mit der Eigenschaft

$$(\square + m^2)\Delta(x-y) = -i\delta(x-y) \quad (5.46)$$

Um diese Gleichung zu lösen, betrachten wir die Fouriertransformierte von  $\Delta$ :

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(-ip(x-y)) \tilde{G}(p) \quad (5.47)$$

Dann lautet (5.46) einfach  $(-p^2 + m^2)\tilde{G}(p) = -i$ , also ist

$$\begin{aligned} \tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2} \\ \Delta(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} \exp(-ip(x-y)) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Die  $p_0$ -Integration kann man mit Hilfe des Residuensatzes als Kurvenintegral in der komplexen Ebene ausführen. Dazu müssen wir den Polen bei  $\pm\omega_p$  einen kleinen Imaginärteil  $\pm i\epsilon$  geben. Je nach Vorzeichen des Imaginärteils erhalten wir eine retardierte oder avancierte GREENSfunktion.

$$\begin{aligned}\Delta_{ret}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip(x-y))}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2} \\ \Delta_{av}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip(x-y))}{(p_0 - i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}\end{aligned}\quad (5.49)$$

Die Bezeichnungen “retardiert” und “avanciert” werden anhand von Abb. 5.1 klar. Dort ist der Integrationsweg für die  $p_0$ -Integration der retardierten GREENSfunktion skizziert. Für  $x_0 > y_0$  fällt der Integrand für  $\text{Im } p_0 \rightarrow -\infty$  schnell genug ab, so dass der Integrationsweg in der unteren Halbebene geschlossen werden kann. Man erhält dann einen Beitrag von beiden Residuen. Für  $x_0 < y_0$  aber wird der Integrationsweg oben geschlossen und das Integral verschwindet. Die retardierte GREENSfunktion ist also nur für  $x_0 > y_0$  ungleich null. Analog verschwindet die avancierte GREENSfunktion für  $x_0 > y_0$ .

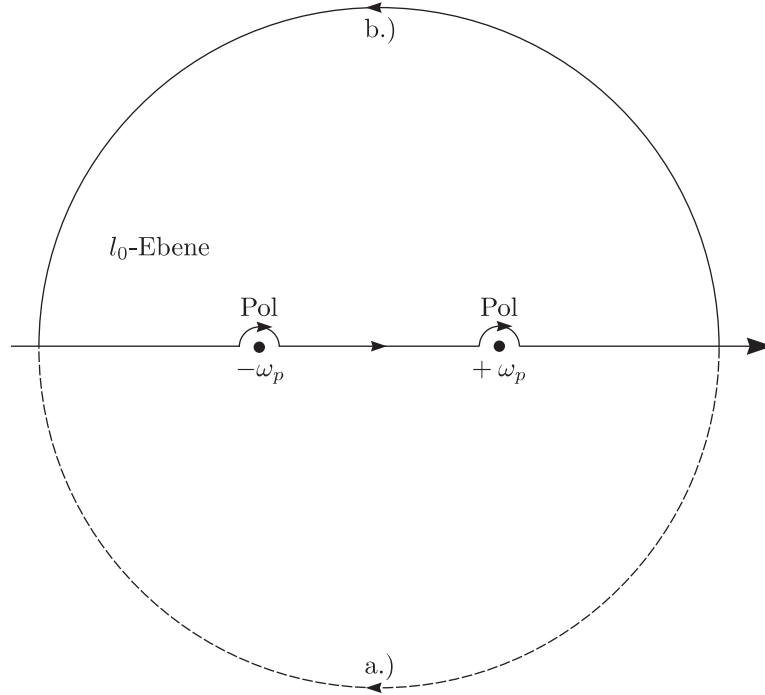


Abbildung 5.1: Integrationswege für das Integral in (5.49). a) Für  $x^0 > y^0$  wird der Integrationsweg unten geschlossen, und es gibt Beiträge von beiden Residuen. b) Für  $x^0 < y^0$  wird der Integrationsweg oben geschlossen, und das Integral verschwindet.

Integriert man entlang des in Abb. 5.2 gezeigten Integrationsweges, so erhält man den sogenannten FEYNMAN-Propagator. Die Pole bei  $\pm(\omega_p - i\epsilon)$  erhält man mit

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \exp(-ip(x-y)) \quad (5.50)$$

Für  $x_0 > y_0$  schließt man den Integrationsweg in der unteren Halbebene und das Residuum des Pols bei  $+(\omega_p - i\epsilon)$  ergibt  $D(x-y)$ . Für  $x_0 < y_0$  schließt man den Integrationsweg in der oberen Halbebene und erhält  $D(y-x)$ . Also ist

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T(\phi(x)\phi(y)) | 0 \rangle \quad (5.51)$$

Der FEYNMAN-Propagator spielt eine große Rolle bei der Entwicklung der S-Matrix nach (5.15). Der Vollständigkeit halber wollen wir den FEYNMAN-Propagator des Photon Felds angeben (ohne Herleitung).

$$\begin{aligned}D_F^{\mu\nu} &= \langle 0 | T(A^\mu(x)A^\nu(y)) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i \left( g^{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)}{p^2 + i\epsilon} \exp(-ip(x-y))\end{aligned}\quad (5.52)$$

In der FEYNMAN Eichung ist  $\xi = 1$ , in der LANDAU-Eichung  $\xi = 0$

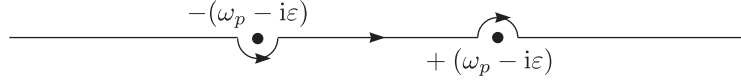


Abbildung 5.2: Integrationsweg für den FEYNMAN-Propagator (5.50)

### 5.3.3 Elektron-Elektron-Streuung

Kommen wir zurück zur MÖLLER-Streuung:

$$e^-(p_1, r_1)e^-(p_2, r_2) \mapsto e^-(p_3, r_3)e^-(p_4, r_4) \quad (5.53)$$

Der Beitrag 2.Ordnung Störungstheorie liefert folgendes Matrixelement:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (-i)^2 \frac{(-e)^2}{2!} \int dx' dx'' \langle 0 | a(3)a(4)T[ \underbrace{\bar{\psi}(x')\gamma^\mu\psi(x') : A_\mu(x')}_{\text{Photon}} : \underbrace{\bar{\psi}(x'')\gamma^\nu\psi(x'')}_{\text{Photon}} : A_\nu(x'')] a^\dagger(1)a^\dagger(2) | 0 \rangle = \\ &= \frac{e^2}{2} \int dx' dx'' T(\underbrace{A_\mu(x')A_\nu(x'')}_{\text{Photon}}) \cdot \bar{u}(4)\gamma^\mu u(2) \exp(-ip_2x' + ip_4x') \cdot \bar{u}(3)\gamma^\nu u(1) \exp(-ip_1x'' + ip_3x'') \end{aligned} \quad (5.54)$$

Hier steht  $a(1)$  beziehungsweise  $u(1)$  für  $a(\vec{p}_1, \vec{r}_1)$  beziehungsweise  $u(\vec{p}_1, \vec{r}_1)$  usw. Außerdem ergeben sich drei weitere Terme. Wir verwenden

$$T(\underbrace{A_\mu(x')A_\nu(x'')}_{\text{Photon}}) \equiv \langle 0 | T(A_\mu(x')A_\nu(x'')) | 0 \rangle \stackrel{(\text{später})}{=} \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \cdot \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon} \exp(-ip(x' - x'')) \quad (5.55)$$

und

$$\int dx' \int dx'' \exp(-ip_2x' + ip_4x' - ipx') \cdot \exp(-ip_1x'' + ip_3x'' + ipx'') = (2\pi)^4 \delta(p_4 - p_2 - p) (2\pi)^4 \delta(p_3 - p_1 + p) \quad (5.56)$$

womit wir erhalten:

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{2} (\bar{u}(p_4)\gamma^\mu u(p_2)) (\bar{u}(p_3)\gamma^\nu u(p_1)) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) + 3 \text{ weitere Terme} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} p_4 \quad p_2 \\ \diagdown \quad / \\ \mu \\ | \\ \nu \\ / \quad \diagdown \\ p_3 \quad p_1 \end{array} \\ p_4 - p_2 = p_1 - p_3 \quad + \text{identischer Beitrag} + \end{array} \\ &-\frac{1}{2} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{c} p_4 \quad p_2 \\ / \quad \diagdown \\ | \\ | \\ / \quad \diagdown \\ p_3 \quad p_1 \end{array} \\ p_3 - p_2 \quad - \text{identischer Beitrag} \end{array} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Damit erhalten wir das Matrixelement, wobei  $u(p_1) \equiv u_1$ ,  $u(p_2) \equiv u_2$ ,  $\bar{u}(p_3) \equiv \bar{u}_3$  und  $\bar{u}(p_4) \equiv \bar{u}_4$ :

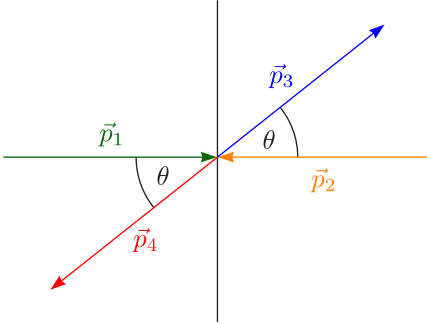
$$(2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) e^2 \left[ \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_4 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma^\nu u_1) - \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_3 - p_2)^2 + i\epsilon} (\bar{u}_3 \gamma^\mu u_2) (\bar{u}_4 \gamma^\nu u_1) \right] \quad (5.59)$$



Es bleibt noch die Kinematik (im Schwerpunktsystem) zu betrachten:

$$(p_4 - p_2)^2 = \left[ \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \right]^2 = -(\vec{p}_4 - \vec{p}_2)^2 = -|\vec{p}_4|^2 - |\vec{p}_2|^2 + 2|\vec{p}_4||\vec{p}_2| \cos \theta = -2|\vec{p}_2|^2(1 - \cos \theta) \quad (5.60)$$

$\theta$  ist der Winkel zwischen  $\vec{p}_2$  und  $\vec{p}_3$  bzw.  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_4$ :



Entsprechend gilt:

$$(p_3 - p_2)^2 = -2|\vec{p}_2|^2 \cdot (1 + \cos \theta) \quad (5.61)$$

Der Nenner ist singulär für  $\theta = 0, \pi$ .

### 5.3.4 Bhabba-Streuung

Die BHABBA-Streuung beschreibt den Prozess  $e^+e^- \mapsto e^+e^-$ . Das Matrixelement lautet  $\langle 0|a(3)b(4)|\mathcal{S}|a^\dagger(1)b^\dagger(2)|0\rangle$ . Wegen der Zerlegung

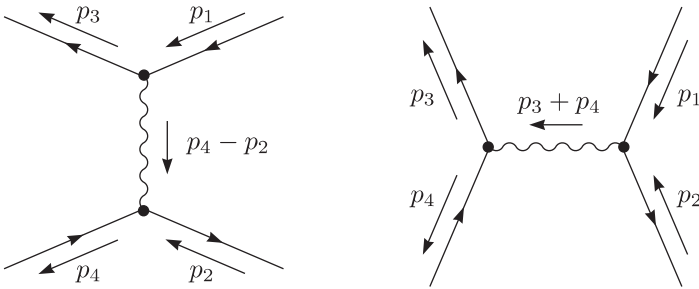
$$\psi = \int d\vec{k} \sum_s \left[ \exp(+ikx)v(\vec{k}) \cdot b^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx)u(\vec{k}) \cdot a(\vec{k}) \right] \quad (5.62)$$

gilt:

$$\underline{b_s(\vec{p})}\psi(x) = \exp(ipx)v_s(\vec{p}) \quad \text{und} \quad \overline{\psi}(x)\underline{b_s^\dagger(\vec{p})} = \exp(-ipx)\overline{v}_s(\vec{p}) \quad (5.63)$$

Anstelle des Faktors  $u_s(\vec{p})\exp(-ipx)$  (einlaufendes  $e^-$ ) steht  $v_s(\vec{p})\exp(+ipx)$  (auslaufendes  $e^+$ ) und anstelle von  $\overline{u}_s(\vec{p})\exp(+ipx)$  (auslaufendes  $e^-$ ) steht  $\overline{v}_s(\vec{p})\exp(-ipx)$  (einlaufendes  $e^+$ ). Fassen wir also zusammen:

$$(2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) e^2 \left[ \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_4 - p_2)^2 + i\varepsilon} (\overline{v}_2 \gamma^\mu v_4) (\overline{u}_3 \gamma^\nu u_1) - \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_3 + p_4)^2 + i\varepsilon} (\overline{u}_3 \gamma^\mu v_4) (\overline{v}_2 \gamma^\nu u_1) \right] \quad (5.64)$$



Relevant ist die BHABBA-Streuung für Elektron-Positron-Collider wie LEP. Der erste Beitrag wird singulär für kleine Streuwinkel.

## 5.4 Erweiterung der Theorie auf Myonen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}(e) + \mathcal{L}_{\text{DIRAC}}(\mu) + \mathcal{L}_{\text{MAXWELL}} + \mathcal{L}_{\text{WW}}(e, A) + \mathcal{L}_{\text{WW}}(\mu, A) \quad (5.65)$$

$\mathcal{L}_{WW}(\mu, A)$  hat dieselbe Form wie  $\mathcal{L}_{WW}(e, A)$ .  $\mathcal{S}$  sieht im Wechselwirkungsbild aus wie folgt:

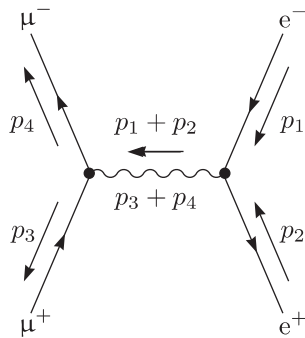
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= T \exp \left( -i \int [\mathcal{L}_{WW}(e, A) + \mathcal{L}_{WW}(\mu, A)] dx \right) = \\ &= T \left( 1 + (-i) \int [\mathcal{L}_{WW}(e, A) + \mathcal{L}_{WW}(\mu, A)] dx + \frac{(-i)^2}{2!} \left[ \left( \int \mathcal{L}_{WW}(e, A) dx \right)^2 + \left( \int \mathcal{L}_{WW}(\mu, A) dx \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left( \int \mathcal{L}_{WW}(e, A) dx \right) \left( \int \mathcal{L}_{WW}(\mu, A) dx \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

Betrachten wir die Reaktion  $e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-$  ( $1 + 2 \mapsto 3 + 4$ ). Hierbei ergibt sich die Amplitude durch  $\langle 0 | b_\mu(3) a_\mu(4) | \mathcal{S} | b_e^\dagger(1) a_e^\dagger(2) | 0 \rangle$ , wobei der nichtverschwindende Beitrag aus

$$i^2 \int dx L_W(e, A) \int dx' L_W(\mu, A) \sim (b_e + a_e^\dagger)(b_e^\dagger + a_e)(b_\mu + a_\mu^\dagger)(b_\mu^\dagger + a_\mu) \quad (5.67)$$

folgt. Nur eine Kontraktion trägt bei, womit sich folgende Amplitude ergibt:

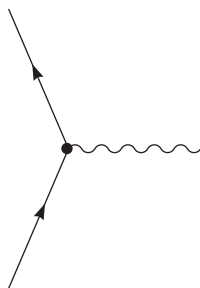
$$\bar{u}(4) \gamma^\nu v(3) \frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_3 + p_4)^2 + i\epsilon} \bar{v}(p_1) \gamma^\mu u(p_2) \quad (5.68)$$



## 5.5 Feynman-Regeln

(Genauer findet man dies in Lehrbüchern!) Diagramme mit vorgegebenen ein- und auslaufenden Linien:

\* Vertex:  $ie\gamma^\mu$



\* Elektron im Anfangszustand:  $u(p)$

\* Photon im Anfangszustand:  $\varepsilon_\mu$

\* Elektron-Propagator:  $\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$



\* Photon-Propagator:  $\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$

An jedem Vertex gilt Impulserhaltung! Über Schleifenimpulse wird mit  $\int \frac{dk}{(2\pi)^4}$  integriert.

# Kapitel 6

## Von der Amplitude zum Wirkungsquerschnitt

### 6.1 Phasenraum, Flussfaktor

Wir folgen dabei der Diskussion, wie sie im OTTO NACHTMANN: „Elementarteilchenphysik“ (VIEWEG Braunschweig) gegeben ist. Etwas genauer findet man dies jedoch bei C. ITZIKSON, J. ZUBER: „Quantum Field Theory“ (MCGRAW-HILL Book Co., New York 1980).

$$\mathcal{S}_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \langle f | \mathcal{T} | i \rangle \quad (6.1)$$

Dies definiert die (LORENTZ-invariante) T-Matrix. Betrachten wir speziell die Reaktion  $a_1(p_1) + a_2(p_2) \mapsto b_1(p'_1) + \dots + b_n(p'_n)$ . Der Wirkungsquerschnitt ist hierbei folgendermaßen definiert:

$$\sigma = \frac{\text{Übergangsrate} (\equiv \text{Zahl der Ereignisse/Zeit})}{\text{Fluss der einlaufenden Teilchen}} \quad (6.2)$$

Zähler und Nenner sind im vorgegebenen LORENTZ-System definiert. Beispielsweise sei  $a_2$  ruhend und  $a_1$  läuft ein. Es sei  $i \neq f$ : Was ist die Bedeutung von  $\frac{\delta^2(\sum - \sum)}{V=\infty}$ ? Der Trick ist, dass wir zum endlichen Volumen übergehen. Bisher haben wir Zustände folgendermaßen normiert:

$$\langle a(\vec{p}_1) | a^\dagger(\vec{p}_1) \rangle = (2\pi)^3 \cdot 2p_1^0 \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) = (2\pi)^3 \cdot 2p_1^0 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V=\mathbb{R}^3} d\vec{x} \exp [+i(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot \vec{x}] \quad (6.3)$$

Für endliches Volumen kann man schreiben:

$$\langle a(\vec{p}_1) | a^\dagger(\vec{p}_1) \rangle = (2p_1^0) V \quad (6.4)$$

Für einen Ein-Teilchen-Zustand ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte als  $2p_1^0$ . Wir benötigen außerdem den Fluss  $\phi \equiv |\vec{v}| \cdot 2p^0 = 2|\vec{p}| \equiv$  Stromdichte. Wir nehmen an, dass sich je ein Teilchen der Sorte  $a_1, a_2$  im Volumen  $V$  befindet. Dann lautet die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$dw_{fi} = \left[ (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \right]^2 \left[ \frac{1}{2p_1^0} \frac{1}{2p_2^0} \frac{1}{V^2} \right] |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 \prod_{f=1, \dots, n} \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 \cdot 2p_f^0} \right) \quad (6.5)$$

Dies gilt für einen  $n$ -Teilchen-Endzustand. Normierung der auslaufenden Zustände:  $[a, a^\dagger] = (2\pi)^3 \cdot 2p_f^0!$

Wir nehmen darüber hinaus an, dass die Wechselwirkung nur in  $V$  und während der Zeit  $T$  wirksam sei.

$$\begin{aligned}
 & (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) = \\
 & = \int dx \exp \left[ i \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) x \right] (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) = \\
 & = \int dx (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) = TV (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right)
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die Übergangsrate ist definiert durch die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit:

$$\frac{dw_f}{T} = \frac{TV}{TV^2} \frac{1}{2p_1^2 \cdot 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_{f=1, \dots, n} \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 \cdot 2p_f^0} \right) |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 \tag{6.7}$$

Wie groß ist der Fluss? Falls sich ein Teilchen im Volumen  $V$  befindet, gilt:

$$\phi = |\vec{v}| \frac{1}{V} = \frac{|\vec{p}_1|}{p_1^0} \frac{1}{V} \tag{6.8}$$

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus  $\frac{dw}{\phi T}$ . Im Ruhesystem von Teilchen 2 gilt:

$$\boxed{d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2|\vec{p}_1|} \frac{1}{2m_2}}_{\text{Flussfaktor}} \underbrace{(2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_{f=1, \dots, n} \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 \cdot 2p_f^0} \right)}_{\text{Phasenraum}} \underbrace{|\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2}_{\text{Matrixelement}}} \tag{6.9}$$

Der Phasenraum ist universell und LORENTZ-invariant. Auch das Matrix-Element ist LORENTZ-invariant; hängt aber vom jeweiligen Prozess ab. Wenn wir über den Phasenraum integrieren, schreiben wir zukünftig:

$$\int d\text{LIPS}(n) \equiv \text{LORENTZ-invariant phase space (LORENTZ-invarianter Phasenraum)} \tag{6.10}$$

$$(2\pi)^4 \cdot \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \cdot \prod_{f=1, \dots, n} \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 \cdot 2p_f^0} \right) \equiv d\text{LIPS}(n) \tag{6.11}$$

Kovariante Schreibweise:

$$(2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_{f=1, \dots, n} \left( \frac{d^3 \vec{p}_f}{(2\pi)^3 \cdot 2p_f^0} \right) = (2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \prod_{f=1, \dots, n} (2\pi) \delta_f(p_f^2 - m_f^2) \frac{d^4 p_f}{(2\pi)^4} \tag{6.12}$$

Der Fluss-Faktor ist  $2|\vec{p}_1| \cdot 2m_2$  und kann in kovarianter Form geschrieben werden. Im Ruhesystem von  $a_2$  ist er gegeben durch:

$$2|\vec{p}_1| \cdot 2m_2 = 4 (\vec{p}_1^2 \cdot m_2^2)^{\frac{1}{2}} = 4 (E_1^2 m_2^2 - m_1^2 m_2^2)^{\frac{1}{2}} = 4 [(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} \tag{6.13}$$

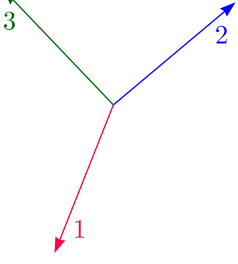
Damit ergibt sich der Wirkungsquerschnitt aus:

$$\boxed{\int d\sigma = \frac{1}{4 [(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}}} \int |\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2 d\text{LIPS}(n)} \tag{6.14}$$

Beispielsweise hat man für  $n = 2$  sechs Integrationen. Aufgrund der vier  $\delta$ -Funktionen bleiben jedoch nur zwei Winkelintegrationen.

Teilchenzahl	Integrationen	$\delta$ -Funktionen	Verbleibende Integrationen
$n = 2$	6	4	2
$n = 3$	9	4	5

Bei drei Teilchen im Endzustand liegen die Impulse in einer Ebene:



Die Orientierung im Raum wird durch drei EULERwinkel beschrieben; als zwei verbleibende Variable kann man beispielsweise  $E_1$  und  $E_2$  (DALITZ-Variablen) wählen. Bei Zerfällen ergibt sich anstelle des Flussfaktors als Koeffizient  $\frac{1}{2M}$ .

## 6.2 Quadrat der Amplitude, Summation über Spins

Wir betrachten den Prozess  $e^+(2)e^-(1) \mapsto \mu^+(4)\mu^-(3)$  mit  $q = p_1 + p_2$ .

$$\mathcal{M} = (-ie) [\bar{v}_{e^+} \gamma^\alpha u_{e^-}] \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2} (-ie) \bar{u}_{\mu^-} \gamma^\beta v_{\mu^+} = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}(2) \gamma^\alpha u(1)) (\bar{u}(3) \gamma_\alpha v(4)) \quad (6.15)$$

Die Indizes 1 und 2 stehen für  $p_1, s_1, \dots$ . Wenn der Spin nicht beobachtet wird, wird über die Spins im Endzustand summiert und über die Spins im Anfangszustand gemittelt.

$$\sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left[ \sum_{\text{Spins: } e^+, e^-} (\bar{v}(2) \gamma^\alpha u(1)) (\bar{v}(2) \gamma_{\alpha'} u(1))^* \right] \cdot \left[ \sum_{\text{Spins: } \mu^+, \mu^-} (\bar{u}(3) \gamma_\alpha v(4)) (\bar{u}(3) \gamma_{\alpha'} v(4))^* \right] \quad (6.16)$$

### 6.2.1 Zwischenrechnung: Spin-Summen

Wir betrachten folgendes Beispiel, wobei  $\Gamma$  für eine beliebige Kombination von  $\gamma$ -Matrizen steht:

$$\sum_{\text{Spins } 1,2} |\bar{u}(1) \Gamma u(2)|^2 = \sum_{\text{Spins } 1,2} (\bar{u}(1) \Gamma u(2)) (u^\dagger(2) \Gamma^\dagger \bar{u}^\dagger(1)) = \sum_{\text{Spins } 1,2} (\bar{u}(1) \Gamma u(2)) (u^\dagger(2) (\gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0) \bar{u}^\dagger(1)) \quad (6.17)$$

Wir erinnern uns an  $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$  und definieren  $\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0$ , womit wir dies umschreiben können zu:

$$\sum_{\text{Spins } 1,2} (\bar{u}(1) \Gamma u(2)) (\bar{u}(2) \bar{\Gamma} u(1)) \quad (6.18)$$

Weiterhin gilt:

$$\sum_{\text{Spins } 1,2} u_\sigma(2) \bar{u}_\rho(2) = (\not{p}_2 + m\mathbf{1})_{\sigma\rho} \quad (6.19)$$

Im Ruhesystem vergewissern wir uns, dass die Formel stimmt:

$$2m \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\sigma (1 \ 0 \ 0 \ 0)_\rho + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_\sigma (0 \ 1 \ 0 \ 0)_\rho \right] = 2m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\sigma\rho} \quad (6.20)$$

Somit erhält man:

$$\sum_{\text{Spins } 1,2} |\bar{u}(1) \Gamma u(2)|^2 = \text{Sp} [\Gamma (\not{p}_2 + m\mathbf{1}) \bar{\Gamma} (\not{p}_1 + m\mathbf{1})] \quad (6.21)$$

Für Antiteilchen gilt  $v_\sigma(1) \bar{v}_\rho(1) = (\not{p}_1 - m\mathbf{1})_{\sigma\rho}$ .

### 6.2.2 Berechnung des Quadrats der Amplitude

Kommen wir nun zu unserer Amplitude zurück und verwenden  $\bar{\gamma}_\mu = \gamma_\mu$ :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{(q^2)^2} \sum_{\text{Spins}} \left[ (\bar{v}(2)\gamma^\alpha u(1)) (\bar{u}(3)\gamma_\alpha v(4)) (\bar{u}(1)\gamma^{\alpha'} v(2)) (\bar{v}(4)\gamma_{\alpha'} u(3)) \right] = \\
 &= \frac{e^4}{(q^2)^2} \text{Sp} \left[ \gamma^\alpha (\not{p}_1 + m) \gamma^{\alpha'} (\not{p}_2 - m) \right] \text{Sp} [\gamma_\alpha (\not{p}_4 - M) \gamma_{\alpha'} (\not{p}_3 + M)]
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Für die Auswertung solcher Spuren gilt (siehe Übungszettel):

$$\text{Sp}(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b \tag{6.23}$$

$$\text{Sp}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4((a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)) \tag{6.24}$$

Steht außerdem eine  $\gamma$ -Matrix mit „offenem Index“ innerhalb der Spur, so ergibt sich beispielsweise:

$$\text{Sp}(\gamma^\alpha \not{b}\not{c}\not{d}) = 4(b^\alpha(c \cdot d) - c^\alpha(b \cdot d) + d^\alpha(b \cdot c)) \tag{6.25}$$

Wir werten die Spur aus. Dazu betrachten wir  $m = m_e \ll M$ , setzen also  $m = 0$ . Nach Integration über den Phasenraum erhalten wir:

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} \left( 1 + \frac{2M^2}{s} \right) \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \tag{6.26}$$

# Kapitel 7

## Schleifen-Diagramme

### 7.1 Beispiel: $\phi^4$ -Theorie

Betrachten wir zunächst eine skalare  $\phi^4$ -Theorie:

$$\mathcal{L} =: \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 : -\frac{1}{2}m^2 : \phi^2 : -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4 : \text{ mit } \mathcal{L}_{WW} = -\frac{\lambda}{4!} : \phi^4 : \quad (7.1)$$

$$\mathcal{S} = \sum_n \frac{i^n}{n!} T \int dx' \int dx'' \dots \int dx^{(n)} \mathcal{L}_{WW}(x') \mathcal{L}_{WW}(x'') \dots \mathcal{L}_{WW}(x^{(n)}) \quad (7.2)$$

Speziell für die 2-Teilchen-Streuung  $1 + 2 \mapsto 3 + 4$  ist das Matrixelement  $\langle 0|a(3)a(4)||\mathcal{S}||a^\dagger(1)a^\dagger(2)|0\rangle$  von Bedeutung.

1.) BORNsche Näherung:

Ein typischer Term der BORNschen Näherung ergibt sich aus:

$$S_{fi}^{\text{BORN}} = \left\langle 0 \left| a(3)a(4) : \frac{(-i)\lambda}{4!} \int dx' : \underbrace{\phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x')}_{\text{4! Permutationen}} : a^\dagger(1)a^\dagger(2) \right| 0 \right\rangle + \dots \quad (7.3)$$

Hierbei gilt  $\underbrace{\phi(x')a^\dagger(1)} = \exp(-ip_1x')$  und außerdem sind 4! Permutationen zu berücksichtigen.

$$S_{fi}^{\text{BORN}} = -i\lambda \int dx' \exp[i(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)x'] = -i\lambda \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2), \text{ also } T_{fi} = -\lambda \quad (7.4)$$

2.) Ordnung  $\lambda^2$ :

$$\left\langle 0 \left| a(3)a(4) : \frac{1}{2} \cdot \frac{(-i\lambda)^2}{(4!)^2} \int dx' dx'' T : \phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x') :: \phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'') : a^\dagger(1)a^\dagger(2) \right| 0 \right\rangle \quad (7.5)$$

Mittels des WICKSchen Theorems erhalten wir typische Beiträge.

- Die Kontraktionen von  $a^\dagger(1), a^\dagger(2)$  mit  $a(3), a(4)$  verschwinden, da  $\langle 0|a(3)a^\dagger(1)|0\rangle \sim \delta(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) = 0$  (wegen  $\vec{p}_3 \neq \vec{p}_1$ ) ist. Also bleiben nur  $\underbrace{\phi a}, \underbrace{\phi a^\dagger}$  oder  $\underbrace{\phi(x')\phi(x'')}$ .
- Kontrahiert man drei oder vier der  $\phi(x')$  mit  $a$  oder  $a^\dagger$ , so bleiben für  $\phi^4(x'')$  nur zwei oder null Operatoren frei, also zu wenig.
- Es bleiben beispielsweise beide  $a^\dagger$  mit  $\phi(x'')$  oder auch beide  $a$  mit  $\phi(x')$ .

$$S_{fi}^{1\text{-Schleifen}} = \frac{(-i\lambda)^2}{2 \cdot 4!} \int dx' dx'' T [\text{Terme}] \quad (7.6)$$

\* Typ ①:

$$\left\langle 0 \left| \underbrace{a(3)a(4)} : \underbrace{\phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x')} :: \overbrace{\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')} : \underbrace{a^\dagger(1)a^\dagger(2)} \right| 0 \right\rangle \quad (7.7)$$

Es gibt weitere  $2 \cdot (4 \cdot 3)^2$  identische Möglichkeiten, bei denen  $a(3), a(4)$  mit  $\phi(x')\phi(x')$  kontrahiert wird. Die Kontraktion von  $a(3)a(4)$  mit  $\phi(x'')\phi(x'')$ , beispielsweise wie folgt

$$\left\langle 0 \left| \underbrace{a(3)a(4)} : \overbrace{\phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x')} :: \underbrace{\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')} : \underbrace{a^\dagger(1)a^\dagger(2)} \right| 0 \right\rangle \quad (7.8)$$

ergibt nochmals das gleiche Resultat. Insgesamt folgt ein Faktor 4!

\* Typ ②:

$$\left\langle 0 \left| \underbrace{a(3)a(4)} : \overbrace{\phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x')} :: \underbrace{\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')} : \underbrace{a^\dagger(1)a^\dagger(2)} \right| 0 \right\rangle \quad (7.9)$$

Es gibt wiederum  $(4!)^2$  identische Möglichkeiten.

\* Typ ③:

$$\left\langle 0 \left| \underbrace{a(3)a(4)} : \overbrace{\phi(x')\phi(x')\phi(x')\phi(x')} :: \underbrace{\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')\phi(x'')} : \underbrace{a^\dagger(1)a^\dagger(2)} \right| 0 \right\rangle \quad (7.10)$$

Auch hier existieren 4! Möglichkeiten.

Auswertung des ersten Terms  $S_1$ :

$$S_1 = (-i\lambda)^2 \int dx' dx'' \exp[i(p_3x' + p_4x' - p_1x'' - p_2x'')] \cdot \langle 0|T\phi(x')\phi(x'')|0\rangle \cdot \langle 0|T\phi(x')\phi(x'')|0\rangle \quad (7.11)$$

FOURIERtransformation:

$$\langle 0|T\phi(x')\phi(x'')|0\rangle = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \exp[-ip(x' - x'')] \quad (7.12)$$

Eingesetzt ergibt:

$$S_1 = (-i\lambda)^2 \int dx' dx'' \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \frac{i}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \exp[ix'(p_3 + p_4 - p - q) + ix''(-p_1 - p_2 + p + q)] \quad (7.13)$$

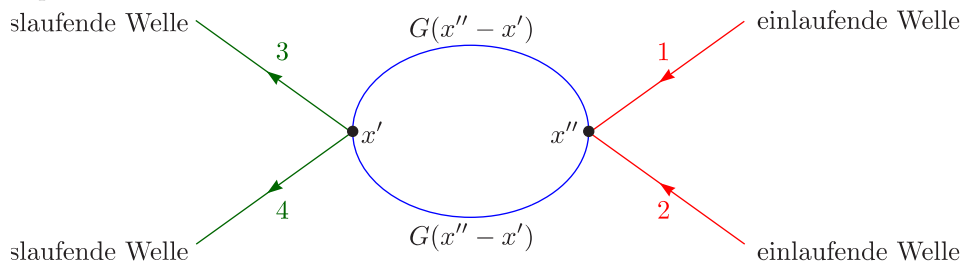
Integration über  $x'$  und  $x''$  liefert zwei  $\delta$ -Funktionen:

$$S_1 = (-i\lambda)^2 \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \frac{i}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(p_3 + p_4 - p - q) \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(-p_1 - p_2 + p + q) \quad (7.14)$$

Wir erhalten mit  $p = p_1 + p_2 - q$ :

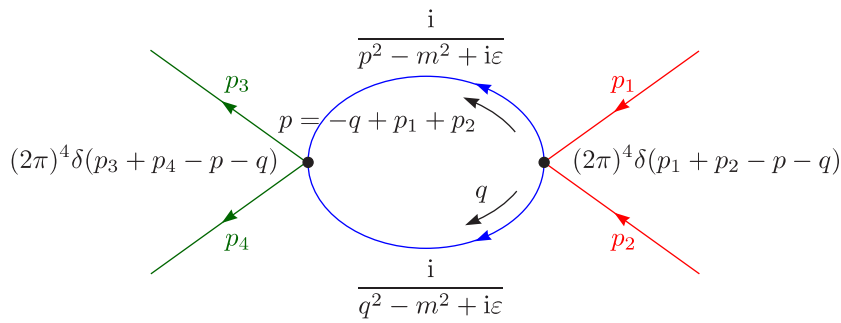
$$(-i\lambda)^2 \cdot (2\pi)^4 \cdot \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \cdot \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{i}{(q^2 - m^2 + i\epsilon)} \cdot \frac{i}{[(q - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (7.15)$$

Interpretation von  $S_1$  im Ortsraum:

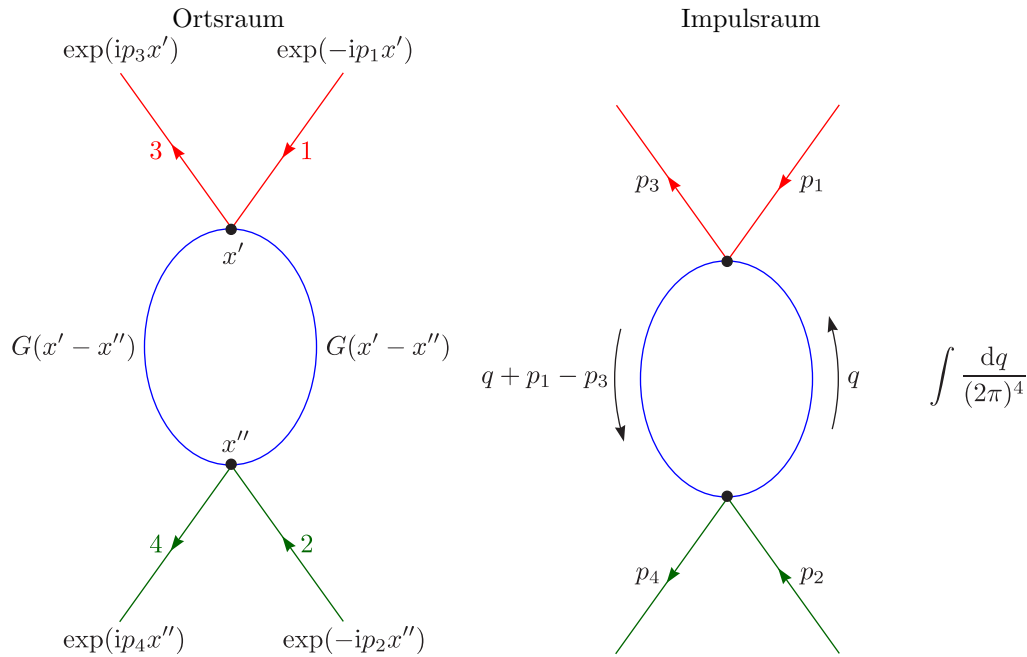




Interpretation von  $S_1$  im Impulsraum:



Integriert wird über  $p$  und  $q$ . Betrachten wir den Beitrag von  $S_2$



Der Beitrag ① hängt nur von  $(p_1 + p_2)^2 = s$  ab, der Beitrag ② nur von  $(p_1 - p_3)^2 = t$ . Der Beitrag ③, der hier nicht gezeigt wird, hängt nur von  $(p_1 - p_4)^2 = u$  ab. Allgemein gilt:

\* Jeder Propagator:

$$\int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{7.16}$$

\* Jeder Vertex:

$$(2\pi)^4 \cdot (-i\lambda) \cdot \delta\left(\sum_i p_i\right) \tag{7.17}$$

Man erhält damit Ein-Schleifen-Diagramme mit  $n$  Propagatoren,  $n$  Vertizes in der Schleife und einer  $\delta$ -Funktion für globale Impulserhaltung. Damit bleibt eine Integration:  $\int \frac{dq}{(2\pi)^4}$ .

**Zwei-Schleifen-Diagramme:**

Man habe  $n$  Propagatoren und  $n-1$  Vertizes. Dann bleiben zwei Integrationen, nämlich  $\int \frac{dq}{(2\pi)^4}$  und  $\int \frac{dq'}{(2\pi)^4}$ .

**7.2 Divergenz-Verhalten, qualitative Anmerkungen und Beispiele**

Wir nehmen an, dass das Divergenzverhalten der Integrale durch Abzählen der Impuls-Potenzen bestimmt ist (Power Counting).

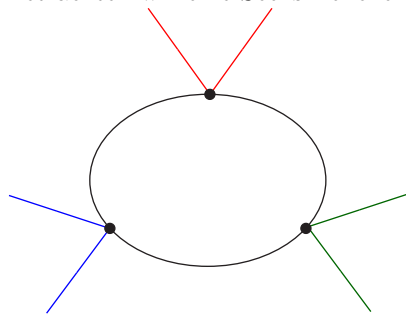
**Beispiel:**

$$\int d^4q \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)} \cdot \frac{1}{(q - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (7.18)$$

Für feste  $p_1, p_2, m$  und große  $q^2$  ist der Integrand proportional zu  $\frac{1}{(q^2)^2}$ . Im Impulsraum ergibt sich eine logarithmische Divergenz. Es handelt sich im Ortsraum um das Quadrat einer singulären Funktion.

**Sechs-Teilchen-Reaktionen und auftretende Divergenzen:**

Betrachten wir eine Sechs-Teilchen-Reaktion in Ein-Schleifen-Näherung

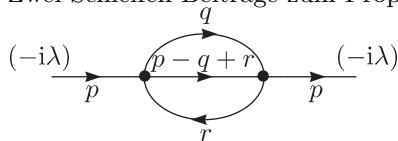


Man kommt hierbei auf Integrale mit Hochenergieverhalten der Form:

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{q^2} \right)^3 \quad (7.19)$$

Diese sind ultraviolett-konvergent. Ebenso gilt das für Acht-Teilchen-Reaktionen.

Zwei-Schleifen-Beiträge zum Propagator:



führt auf:

$$(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - m^2 + i\varepsilon)} \cdot \frac{1}{(r^2 - m^2 + i\varepsilon)} \cdot \frac{1}{(p - q + r)^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (7.20)$$

Dies divergiert quadratisch. UV-Divergenzen treten nur bei Korrekturen zum Propagator und zum Vier-Teilchen-Vertex auf (modulo Subdiagramme!). In der  $\phi^4$ -Theorie können alle Divergenzen von  $S$ -Matrixelementen durch Umdefinition von  $\lambda$  und  $m$  absorbiert werden. (zuzüglich Wellenfunktionsrenormierung, siehe später). Eine renormierbare Theorie besagt, dass die Divergenzen durch Umdefinition der Parameter  $\lambda, m$  absorbiert werden. (Im Gegensatz hierzu treten bei renormierbaren Theorien, wie beispielsweise mit  $\mathcal{L}_{WW} = -\kappa \cdot \phi^6$ , in höheren Ordnungen immer wieder neue Typen von divergenten Streuamplituden auf.)

# Kapitel 8

## Regularisierung und Renormierung

Ausgangspunkt der Diskussion ist die Quantenelektrodynamik. Es soll uns im folgenden möglich sein, die divergenten Integrale zu berechnen, indem wir einem Abschneide-Parameter („Cut-Off“)  $\Lambda$  einführen. Man bezeichnet dieses Vorgehen als Regularisierung. Die Resultate hängen ab von  $e_0$ ,  $m_0$  und  $\Lambda$ , welches groß zu wählen ist! Experimentell lässt sich die Ladung des Elektrons durch die Kraft  $\vec{F} = e \cdot \vec{E}$ , welche dieses in einem statischen elektrischen Feld erfährt, bestimmen. In der regularisierten Theorie findet man:

$$e = e_0 \cdot \left[ 1 + e_0^2 \cdot \left( \hat{a}_1 + a_1 \cdot \ln \left( \frac{\Lambda}{m_0} \right) \right) + e_0^4 \cdot \left( \hat{a}_2 + \hat{a}_2 \cdot \ln \left( \frac{\Lambda}{m_0} \right) + a_2 \cdot \ln^2 \left( \frac{\Lambda}{m_0} \right) \right) + \dots \right] \quad (8.1)$$

Ebenso gilt:

$$m = m_0 \cdot \left[ 1 + e_0^2 \cdot \left( \hat{b}_1 + b_1 \cdot \ln \left( \frac{\Lambda}{m_0} \right) \right) + \dots \right] \quad (8.2)$$

$e_0$  ist aber experimentell nicht beobachtbar! Wir halten deshalb  $e$ ,  $m$  fest und variieren  $e_0$ ,  $m_0$  mit  $\Lambda$ . Die „nackten“ Größen divergieren nun mit  $\Lambda$ , sind aber nicht beobachtbar. Kommen wir zur Renormierungstheorie: Berechne die physikalische Amplitude  $A$  als Funktion von  $e_0$ ,  $m_0$ ,  $\Lambda$  in der regularisierten Theorie:  $A = F(e_0, m_0, \Lambda)$ . Ersetze  $e_0 = e_0(e, m, \Lambda)$  und  $m_0 = m_0(e, m, \Lambda)$  durch Inversion von (8.1). Betrachte  $A = F(e_0(e, m, \Lambda), m_0(e, m, \Lambda), \Lambda)$  als Funktion von  $\Lambda$  bei festem  $e$ ,  $m$ . Im Rahmen der Renormierungstheorie lässt sich beweisen, dass  $A$  im Limes  $\Lambda \mapsto \infty$  endlich bleibt.



# Kapitel 9

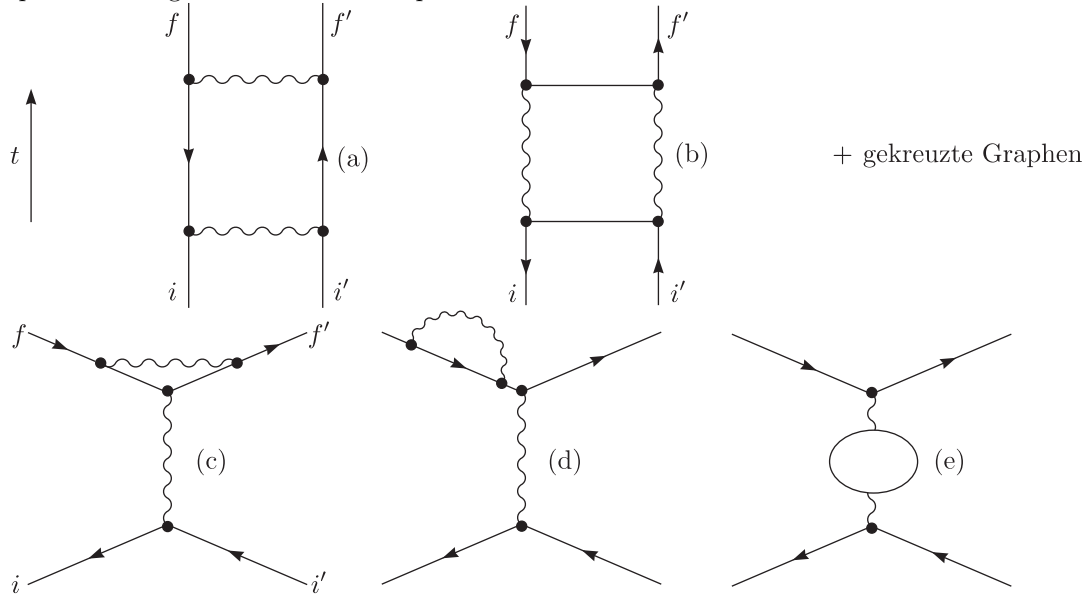
## Strahlungskorrekturen/ Quantenkorrekturen in der Quantenelektrodynamik

### 9.1 Einführung

Wir erinnern uns an die Entwicklung der S-Matrix

$$\mathcal{S} = T \exp \left[ +i \int \frac{\mathcal{L}_{WW}}{\hbar} d^4x \right] \quad (9.1)$$

nach Potenzen von  $\frac{\mathcal{L}_{WW}}{\hbar}$ , welche zu den FEYNMAN-Regeln führt. Zur Elektron-Positron-Streuung tragen beispielsweise folgende FEYNMAN-Graphen bei:



Dies ist natürlich keine vollständige Liste. Das Divergenzverhalten schätzen wir mittels „power counting“ ab:

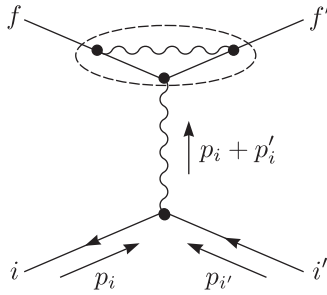
a.), b.)  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2}$ : im UV-Limes (für  $k \gg$  äußere Impulse) konvergent

c.)  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2} \frac{1}{k}$ : logarithmische Divergenz

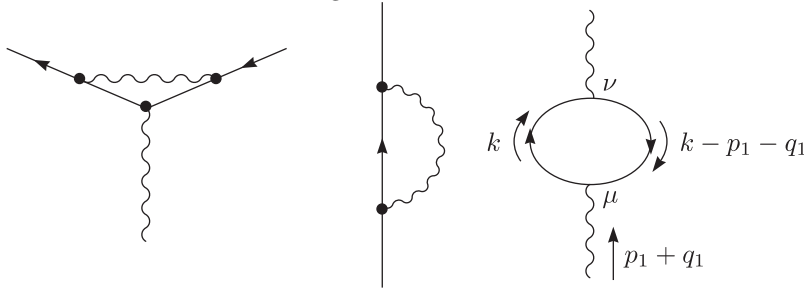
d.)  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k^2}$ : lineare Divergenz

e.)  $\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k} \frac{1}{k}$ : quadratische Divergenz

Wir beschränken die folgende Diskussion auf die Schleifenanteile, und zwar lediglich auf die UV-divergenten Schleifen.



Bei den Baumgraphen-Anteilen ist der Impuls der Propagatoren jeweils durch den äußeren Impuls festgelegt. Wir untersuchen deshalb folgende Bausteine:

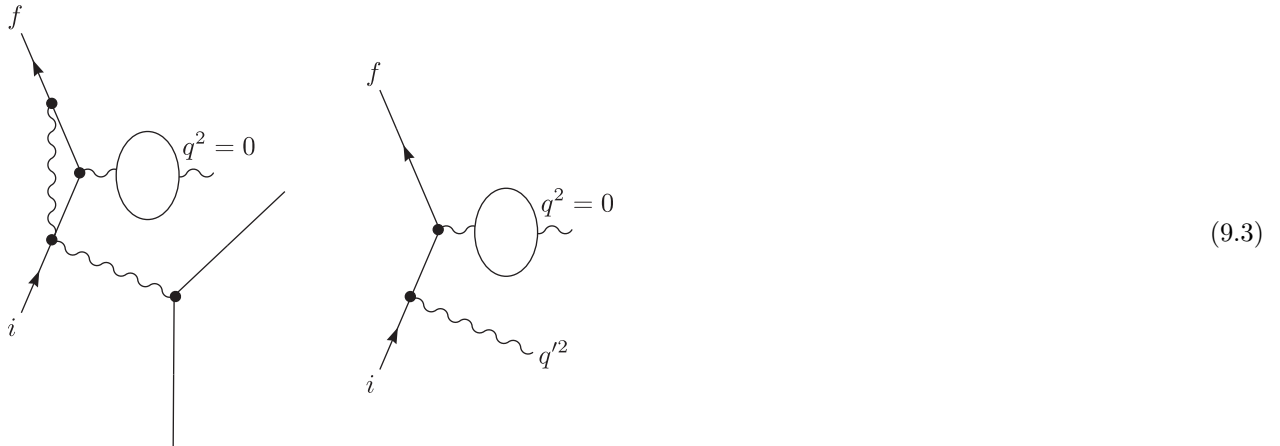


## 9.2 Berechnung und Interpretation der „Vakuum-Polarisation“

In Figur (e) wird quasi der Photon-Propagator  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 + q_1)^2 + i\varepsilon}$  aus der BORNschen Näherung ersetzt durch:

$$\begin{aligned}
 & (-1) \cdot \frac{-ig_{\mu'}^{\mu'}}{(p_1 + q_1)^2 + i\varepsilon} \cdot \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \text{Sp} \left[ (-ie\gamma_{\mu'}) \cdot \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \cdot (-ie\gamma_{\nu'}) \cdot \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1 - \not{q}_1 - m + i\varepsilon} \right]}_{\equiv -i\Pi_{\mu'\nu'}(q)} \cdot \frac{-ig^{\nu'}_{\nu}}{(p_1 + q_1)^2 + i\varepsilon} = \\
 & = \frac{-i}{q^2 + i\varepsilon} \cdot \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot (-1) \cdot \text{Sp} \left[ (-ie\gamma_{\mu}) \cdot \frac{i}{\not{k} - m + i\varepsilon} \cdot (-ie\gamma_{\nu}) \cdot \frac{i}{\not{k} - \not{q} - m + i\varepsilon} \right]}_{\equiv i\Pi_{\mu\nu}(q)} \cdot \frac{-i}{q^2 + i\varepsilon} \text{ mit } q \equiv p_1 + q_1
 \end{aligned}
 \tag{9.2}$$

Der Vorfaktor  $(-1)$  kommt durch die geschlossene Fermion-Schleife. Wegen der Eichinvarianz erwarten wir  $q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0$ . Begründung: Für reelles äußeres Proton ( $q^2 = 0$ ,  $q_\mu \neq 0$ ) taucht die Vakuum-Polarisation ebenfalls auf. Beispiel:



Das Resultat bleibt unverändert bei Eichtransformationen  $A_\mu(q) \mapsto A_\mu(q) + q_\mu f(q^2)$ , wobei für ein reelles Photon  $q^2 = 0$  ist. Daraus ergibt sich  $q^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$ . Wegen der Stromerhaltung  $\partial^\mu j_\mu = 0$ ,  $q^\mu j_\mu(q) = 0$  gilt dies jedoch formal auch für  $q^2 \neq 0$ . Die lässt sich auch explizit zeigen:

$$\begin{aligned} q^\mu i\Pi_{\mu\nu} &= (-1) \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot (-ie)^2 \cdot (i)^2 \cdot \text{Sp} \left[ \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m + i\varepsilon} \cdot \not{q} \cdot \frac{1}{\not{k} - m + i\varepsilon} \cdot \gamma_\nu \right] = \\ &= (-1) \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot (-ie)^2 \cdot (i)^2 \cdot \text{Sp} \left[ \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m + i\varepsilon} \cdot [(\not{k} - m) - (\not{k} - \not{q} - m)] \cdot \frac{1}{\not{k} - m + i\varepsilon} \cdot \gamma_\nu \right] = \\ &= -e^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \cdot \text{Sp} \left[ \left( \frac{1}{\not{k} - \not{q} - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{k} - m + i\varepsilon} \right) \cdot \gamma_\nu \right] \end{aligned} \quad (9.4)$$

Für ein endliches Integral würde man nun im ersten Term  $k' = k - q$  setzen und für den Integranden somit den Wert 0 erhalten. Führt man an dieser Stelle einen Abschneide-Parameter („Cut-off“)  $\Lambda$  mit  $k^2 < \Lambda^2$  ein, so ergibt sich nicht Null! Wählt man eine geschicktere Regularisierung (dimensionale Regularisierung oder PAULI-VILLARS, so erhält man  $q^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$ . Daraus ergibt sich

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i(q_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2) \quad (9.5)$$

was unmittelbar aus dem Ansatz  $\Pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\Pi_1(q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_2(q^2)$  mit  $\Pi_1 = -q^2 \Pi_2$  folgt.

### 9.2.1 Interpretation: Ladungsrenormierung

Betrachten wir den Photon-Propagator:

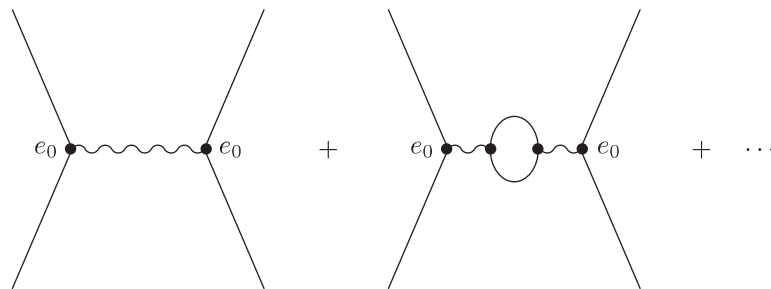
$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \cdot i \cdot (g^{\rho\sigma}q^2 - q^\rho q^\sigma) \Pi(q^2) \cdot \left( \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} \right) + \dots$$

Terme  $\sim q^\mu q^\nu$  verschwinden, wenn sie an erhaltenen äußeren Strom koppeln. Also folgt:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [1 + \Pi(q^2) + \Pi^2(q^2) + \Pi^3(q^2) + \dots] = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left( \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} \right) \quad (9.6)$$

Solange  $\Pi_{\mu\nu}$  die Form  $(g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$  hat und  $\Pi(q^2)$  regulär bei  $q^2 = 0$  ist, bleibt der Pol des Propagators bei  $q^2 = 0$  und damit bleibt  $m_\gamma = 0$ .

a.) Betrachte nun die Streuung bei kleinem  $q^2$ :



$$\sim \frac{e_0^2}{q^2} \cdot \frac{1}{1 - \Pi(q^2)} \stackrel{\text{für } q^2 \rightarrow 0}{=} \frac{e_0^2}{1 - \Pi(0)} \cdot \frac{1}{q^2} \equiv \frac{e^2}{q^2} \quad (9.7)$$

Definition:

$$\frac{e_0^2}{1 - \Pi(0)} \equiv e_0^2 \cdot Z_3 = e^2 \text{ oder } e_0^2 (1 + \delta Z_3) \equiv e^2 \quad (9.8)$$

$e_0$  bezeichnet man als **nackte Ladung** und  $e$  als **physikalische Ladung**. Die Renormierungskonstante  $Z_3$  ist definiert durch:

$$\frac{1}{1 - \Pi(0)} = Z_3 = 1 + \delta Z_3 \quad (9.9)$$

In führender Ordnung gilt  $\delta Z_3 = \Pi(0)$ . Diskussion der  $q^2$ -Abhängigkeit der Streuamplitude!. Definiere  $\hat{\Pi}(q^2) \equiv \Pi(q^2) - \Pi(0)$ .

$$\frac{e_0^2}{q^2(1 - \Pi(q^2))} = \frac{e_0^2}{q^2(1 - \Pi(0) - \hat{\Pi}(q^2))} = \boxed{\frac{e^2}{q^2(1 - \hat{\Pi}(q^2))}} \text{ bis auf Terme höherer Ordnung in } e_0 \quad (9.10)$$

Nach längerer Rechnung (die später präsentiert wird) ergibt sich

$$\hat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \int_0^1 x(1-x) \cdot \left[ -\log(\Delta) + \log(\Delta)|_{q^2=0} \right] dx \text{ mit } \Delta = m^2 - x(1-x) \cdot q^2 \quad (9.11)$$

und somit:

$$\boxed{\hat{\Pi}(q^2) = +\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \cdot \log \left[ 1 - x(1-x) \cdot \frac{q^2}{m^2} \right] dx} \quad (9.12)$$

\* Verhalten für kleine  $\frac{q^2}{m^2}$ :

$$\hat{\Pi}(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \cdot \frac{q^2}{m^2} \cdot \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = \boxed{-\frac{1}{15} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{q^2}{m^2}} \quad (9.13)$$

Den Beitrag zum Potential im nichtrelativistischen Grenzfall erhält man für  $q^2 = -\vec{q}^2$ .

$$\frac{e^2}{\vec{q}^2} \left[ 1 + \frac{1}{15} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{\vec{q}^2}{m^2} \right] = \frac{e^2}{\vec{q}^2} + \frac{1}{15} \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{e^2}{m^2} \quad (9.14)$$

Man erhält für kleine Impulsüberträge eine Abänderung des Potentials der Ordnung  $\frac{\alpha}{\pi}$ . Im Ortsraum ergibt sich

$$\int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (9.15)$$

und (mit  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  ( $\hbar = c = 1$ )):

$$\boxed{\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{15} \cdot \frac{4}{m^2} \cdot \delta(\vec{r})} \quad (9.16)$$

Dies liefert einen zusätzlichen kurzweitreichigen Beitrag zum Potential und somit einen Beitrag zur LAMB-Shift (Aufspaltung zwischen s- und p-Niveaus).

b.) Verhalten bei großen positiven oder negativen  $\frac{q^2}{m^2}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(q^2) &= \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \int_0^1 x(1-x) \left[ \log \left( -\frac{q^2}{m^2 - i\varepsilon} \right) + \log \left( x(1-x) - \frac{m^2 - i\varepsilon}{q^2} \right) \right] dx = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \int_0^1 x(1-x) \cdot \left[ \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} - i\varepsilon \right) + \ln(x(1-x)) + O \left( \frac{m^2}{q^2} \right) \right] dx = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \left[ \underbrace{\int_0^1 x(1-x) dx}_{=\frac{1}{6}} \cdot \ln \left( -\frac{q^2}{m^2} - i\varepsilon \right) + \underbrace{\int_0^1 x(1-x) \cdot \ln(x(1-x)) dx}_{=-\frac{5}{18} = \text{const.}} \right] \end{aligned} \quad (9.17)$$

Damit erhalten wir mit  $\ln(x + i\varepsilon) = \ln|x| + i\pi\theta(x)$ :

$$\boxed{\hat{\Pi}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \left( \ln \left( \frac{q^2}{m^2} \right) + \theta(q^2) \cdot i\pi - \frac{5}{3} \right)} \quad (9.18)$$



Für große  $q^2$  gilt damit für den Propagator:

$$\frac{e^2}{q^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \ln\left(\frac{q^2}{m^2}\right) + \dots\right)} \quad (9.19)$$

Die effektive Ladung wächst mit  $q^2$ ! Der Ausdruck divergiert, falls der Nenner des Bruchs null wird:

$$1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{m^2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{q^2 = m^2 \cdot \exp\left(\frac{3\pi}{\alpha}\right)} \quad (9.20)$$

Man bezeichnet diese kritische Stelle als „LANDAU-Pol“. Wählen wir für  $m$  die Elektronmasse  $m_e = 0,511$  MeV, so ergibt sich:

$$|\bar{q}| \approx \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha}\right) m_e \quad (9.21)$$

### 9.2.2 Bedeutung des Imaginärteils der Vakuum-Polarisation

Wir betrachten den Fall  $q^2 > 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Im}[\Pi(q^2)] &= \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \text{Im} \left[ \int_0^1 x(1-x) \cdot \ln(m^2 - i\varepsilon - q^2 \cdot x(1-x)) dx \right] = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \left[ \int_0^1 x(1-x) \cdot \pi \cdot \theta(q^2 \cdot x(1-x) - m^2) dx \right] \end{aligned} \quad (9.22)$$

Bestimmt man die Nullstellen des Ausdrucks innerhalb der  $\theta$ -Funktion, so erhält man als neuen Integrationsbereich

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \quad (9.23)$$

wobei  $q^2 > 4m^2$  gelten muss, sonst verschwindet das Integral. Damit ergibt sich:

$$\text{Im}[\Pi(q^2)] = 2\alpha \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} x(1-x) dx = \begin{cases} \frac{\alpha}{3} \cdot \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} & \text{für } q^2 \geq 4m^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.24)$$

Interpretation im Zusammenhang mit dem optischen Theorem:

$$\text{Im}[\Pi(q^2)] \sim \left| \begin{array}{c} \text{Diagramm: Ein Photon (gestrichelte Linie) trifft auf ein virtuelles Photon (\(\gamma^*\)), das in ein Elektron-Positron-Paar (\(f, \bar{f}\)) zerfällt. Die Endenergien sind als \(f^2\) und \(\bar{f}^2\) markiert.} \end{array} \right|^2 \quad (9.25)$$

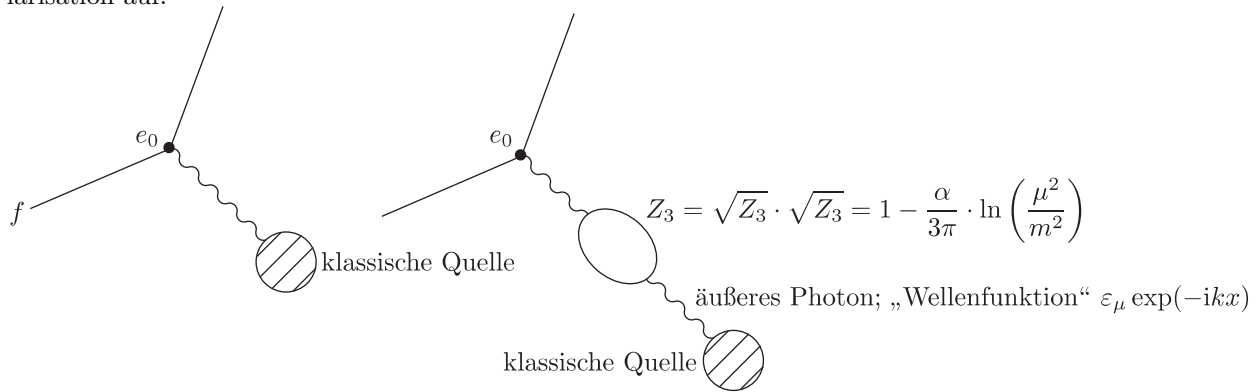
Zur Erinnerung (mit  $m_e = 0$ ,  $m_\mu = m$ ):

$$\sigma(e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{s} \cdot \left(1 + \frac{2m^2}{s}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \quad (9.26)$$

$$\text{Im} \left( \text{Diagramm: Kreisdiagramm mit zwei wavy Lines} \right) = \text{Diagramm: Kreisdiagramm mit zwei wavy Lines und vertikaler Linie} \quad (9.27)$$

### 9.2.3 Renormierung der äußeren Photonlinien (Interpretation der Wellenfunktionsrenormierung)

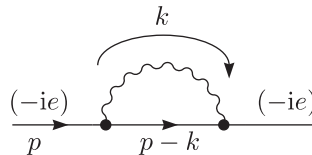
Wenn wir – ausgehend von einer äußeren Quelle – ein Photon ankoppeln, so taucht ebenfalls die Vakuumpolarisation auf:



Entweder werden Blasen in äußeren Linien nicht berücksichtigt und  $\epsilon_\mu \exp(-ikx)$  wird durch  $\sqrt{Z_3} \cdot \epsilon_\mu \exp(-ikx)$  ersetzt (liefert  $e_0 \cdot \sqrt{Z_3} = e_R$ , Wellenfunktionsrenormierung) oder sie werden berücksichtigt und es wird durch  $\sqrt{Z_3}$  dividiert.

### 9.3 Selbstmasse des Elektrons/Der Elektron-Propagator

In inneren ( $p^2 \neq m^2$ ) und äußeren Linien tritt das „Selbstenergie-Diagramm“



auf, welches bei inneren Linien zur Abänderung des Elektron-Propagators und bei äußeren Linien zur Elektron-Wellenfunktionsrenormierung beiträgt.

$$-i\Sigma(\not{p}) \equiv (-ie)^2 \cdot \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \cdot \gamma_\nu \cdot \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} \cdot \gamma^\nu \tag{9.28}$$

Hierbei wurde eine kleine Photonmasse  $\mu$  eingeführt und für den Photon-Propagator die FEYNMAN-Eichung  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$  verwendet. Außerdem gilt:

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} = \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{9.29}$$

Wir wenden an dieser Stelle wieder den FEYNMAN-Trick an, nämlich die Kombination der Produkte. Die logarithmische Divergenz wird regularisiert, indem wir  $\Sigma(\mu^2 \mapsto \Lambda^2)$  abziehen, wobei  $\Lambda^2 \gg m^2$ ,  $\Lambda^2 \gg \mu^2$  und  $\Lambda^2 \gg p^2$  gelte. Im folgenden sei  $\bar{\Sigma}(\not{p})$  das regularisierte  $\Sigma(\not{p})$ .

$$\bar{\Sigma}(\not{p}) = \Sigma_{\mu^2} - \Sigma_{\Lambda^2} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \int_0^1 [2m - \not{p}x] \cdot \ln \left( \frac{\Lambda^2 \cdot x}{m^2(1-x) + \mu^2 \cdot x - p^2 \cdot x(1-x) - i\epsilon} \right) dx \tag{9.30}$$

Achtung: Es tauchen Terme  $\sim \mathbf{1}$  und  $\sim \not{p}$  auf; diese Terme sind voneinander unabhängig! Bei der Vakuumpolarisation hingen dagegen die  $g_{\mu\nu}$ - und  $k_\mu k_\nu$ -Terme voneinander ab.

#### 9.3.1 Renormierung der Elektronenmasse und des Elektron-Propagators

Für den Elektron-Propagator erhält man:



Dann ergibt sich mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m_0} + \frac{i}{\not{p} - m_0} \cdot [-i\bar{\Sigma}(\not{p})] \cdot \frac{i}{\not{p} - m_0} + \dots &= \frac{i}{\not{p} - m_0} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\bar{\Sigma}(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right) + \left( \frac{\bar{\Sigma}(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right)^2 + \dots \right] = \\ &= \frac{i}{(\not{p} - m_0) \cdot \left( 1 - \frac{\bar{\Sigma}(\not{p})}{\not{p} - m_0} \right)} = \boxed{\frac{i}{\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(\not{p})}} \end{aligned} \quad (9.31)$$

Der Pol soll bei  $m = m_R$  liegen. Damit ergibt sich folgende Forderung an  $m_0$ :

$$(\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(\not{p})) \Big|_{\not{p}=m} = 0 \quad (9.32)$$

In der Umgebung von  $\not{p} \approx m$  folgt mit einer TAYLOR-Entwicklung:

$$(\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(\not{p})) = (\not{p} - m) \left( 1 - \frac{d\bar{\Sigma}}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} + O((\not{p} - m)^2) \right) \quad (9.33)$$

Der Propagator hat nahe am Pol die Form (wobei  $Z_2$  die Wellenfunktionsrenormierungskonstante ist):

$$\frac{Z_2}{\not{p} - m} \text{ mit } Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\bar{\Sigma}}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \text{ und } \delta Z_2 = \frac{d\bar{\Sigma}}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m} \quad (9.34)$$

Wir berechnen den divergenten Anteil der Massenrenormierung:

$$\delta m = m_R - m_0 = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot m_0 \cdot \int_0^1 (2-x) \cdot \ln \left( \frac{\Lambda^2}{(1-x)^2 m_0^2 + x\mu^2} \right) dx \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \delta m = \frac{3\alpha}{4\pi} \cdot m_0 \cdot \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) + \text{const.} \quad (9.35)$$

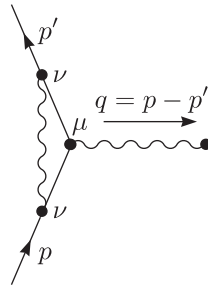
Damit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\not{p} - m_0 - \bar{\Sigma}(\not{p})} &= \frac{i}{(\not{p} - m_0) - \delta m + (Z_2^{-1} - 1 + O((\not{p} - m)^2)) \cdot (\not{p} - m_0)} = \\ &= \frac{i}{-\delta m + (Z_2^{-1} + O((\not{p} - m)^2)) \cdot (\not{p} - m_0)} = \frac{i \cdot Z_2}{(\not{p} - m_0) \cdot (1 + Z_2 \cdot O((\not{p} - m)^2)) - Z_2 \cdot \delta m} = \\ &= \boxed{\frac{i \cdot Z_2}{(\not{p} - m_0 - \delta m) \cdot (1 + O((\not{p} - m)^2))}} \end{aligned} \quad (9.36)$$

Wir bezeichnen mit  $m_0 + \delta m \equiv m_R$  die physikalische Masse  $m$ !  $Z_2$  spielt eine ähnliche Rolle wie  $Z_3$ , wird jedoch nicht durch Ladungsrenormierung kompensiert, sondern für innere Linien durch direkte Kompensation mit divergenten Anteilen der Vertizes (siehe unten); bei äußeren Linien ergibt  $Z_3$  die Wellenfunktionsrenormierung.

### 9.3.2 Vertexkorrektur

Betrachten wir folgendes Diagramm:



Ohne äußere Spinoren:

$$\Lambda_\mu(p', p) = (-ie)^2 \cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)}{(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)} \cdot \gamma_\nu \cdot \frac{i}{(\not{p}' - \not{k} - m + i\varepsilon)} \cdot \gamma_\mu \cdot \frac{i}{(\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon)} \cdot \gamma^\nu \quad (9.37)$$

Wir haben zur Regularisierung der Infrarotdivergenzen eine kleine Photonmasse  $\mu$  eingeführt. Es treten zwei linear unabhängige äußere Impulse auf, nämlich  $p$  und  $p'$  mit  $p^2 = p'^2 = m^2$  und bei Streuung  $p_0, p'_0 > 0$ . Für die  $e^+e^-$ -Vernichtung ist  $p_0 > 0$  und  $p'_0 < 0$ . Wir betrachten das Verhalten für  $p' - p \equiv q \mapsto 0$  mit  $q^2 < 0$ .  $\Lambda_\mu(p, p)$  ist eine Matrix im Spinorraum mit einem LORENTZ-Index, welche nur von  $p$  (und  $\lambda^2$ ) abhängt. Mögliche Formen sind  $m\gamma_\mu f_1(p^2)$  oder auch  $p_\mu f_2(p^2)\mathbf{1}$ . Diese Möglichkeiten sind nicht linear unabhängig, denn es gilt zwischen Spinoren  $\bar{u}(p)$  und  $u(p)$ :

$$m\gamma_\mu \stackrel{\text{DIRAC}}{=} \not{p}\gamma_\mu \stackrel{\text{Antiver-}}{\stackrel{\text{tauschung}}{=}} 2p_\mu - \gamma_\mu\not{p} = 2p_\mu - \gamma_\mu m \quad (9.38)$$

Somit ist  $\Lambda_\mu(p, p) \sim \gamma_\mu$  im Limes  $q \mapsto 0$ . Wir berechnen  $\Lambda_\mu$  nach Regularisierung.

$$\bar{\Lambda}_\mu = \Lambda_\mu(\text{Photonmasse} = \mu) - \Lambda_\mu(\text{Photonmasse (Regulatoremasse)}) = \Lambda_R \quad (9.39)$$

Wir definieren:

$$\bar{u}(p) \cdot \bar{\Lambda}_\mu(p, p) \cdot u(p) = (Z_1^{-1} - 1) \cdot \bar{u}\gamma_\mu u [+ \text{anomales magnetisches Moment} \sim q_\mu] \quad (9.40)$$

Der Sinn dieser Definition ist folgender: BORN $[\gamma_\mu]$ +1-Schleifen-Korrektur  $\Rightarrow Z_1^{-1}$ . Es gilt außerdem ganz allgemein die WARD-Identität:

$$\boxed{\Lambda_\mu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p^\mu}} \quad (9.41)$$

Sie ist von entscheidender Bedeutung für eine große Zahl von Beweisen in der Renormierungs-Theorie. Die Identität folgt durch Vergleich der Integranden. Beachte weiterhin:

$$-\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left( \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \right) = \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \cdot \gamma_\mu \cdot \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} \quad (9.42)$$

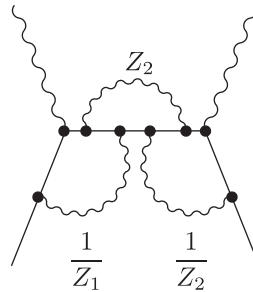
Diagrammatisch:

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} \left( \text{Diagramm: Propagator mit Schleife } \Sigma \right) = \text{Diagramm: Propagator mit Schleife } (-\gamma_\mu) = -\Lambda_\mu(p, p) \quad (9.43)$$

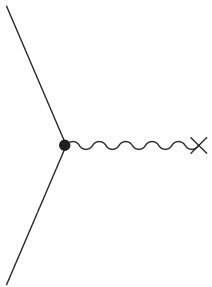
Die Ableitung der Selbstenergie nach dem äußeren Impuls entspricht also der Einsetzung von  $-\gamma_\mu$  in den inneren Fermionpropagator. Nach Regularisierung gilt dies ebenfalls. Wegen  $\bar{\Sigma} = \delta m - [Z_2^{-1} - 1 + O((\not{p} - m)^2)] \cdot (\not{p} - m)$  gilt:

$$-\frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial p^\mu} = \bar{\Lambda}_\mu = [Z_2^{-1} - 1]\gamma_\mu \quad (9.44)$$

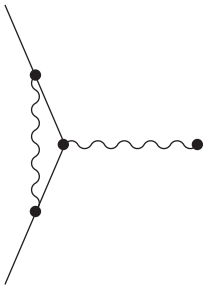
Aus der WARD-Identität folgt also  $Z_1 = Z_2$ . Wir zerlegen nun  $\Lambda_\mu$  in einen divergenten und einen endlichen Anteil, nämlich  $\Lambda_\mu(p', p) = (Z_1^{-1} - 1) \cdot \gamma_\mu + \Lambda_\mu^\mu(p', p)$ , wobei  $\Lambda_\mu^\mu \mapsto 0$  für  $p' \mapsto p$ . Die Differenz  $\Lambda_\mu(p', p) - \Lambda_\mu(p, p)$  ist offensichtlich endlich.



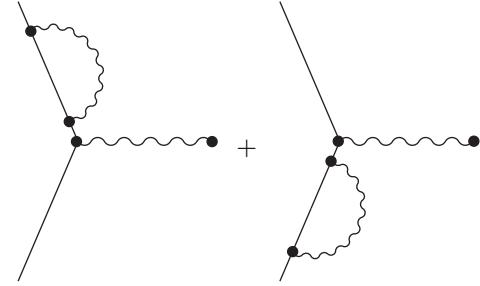
Wir fassen nun die Einschleifen-Beiträge für die Streuung an einer äußeren Quelle im Grenzfall  $q \mapsto 0$  (THOMSON-Limes) zusammen:



$$-ie_0\gamma_\mu$$

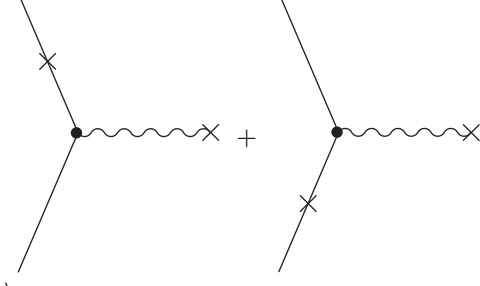


$$-ie_0\gamma_\mu \cdot (Z_1^{-1} - 1)$$

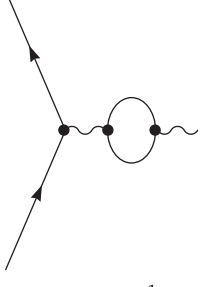


$$\begin{aligned} & \delta m \cdot \frac{1}{\not{p} - m_0} \cdot (-ie_0\gamma_\mu) - (Z_2^{-1} - 1) \cdot (-ie_0\gamma_\mu) \\ & + (-ie_0\gamma_\mu) \cdot \frac{1}{\not{p} - m_0} \cdot \delta m - (-ie_0\gamma_\mu) \cdot (Z_2^{-1} - 1) \end{aligned}$$

Wir beginnen mit  $m_0 = m_R - \delta m$  in  $\mathcal{L}$ . Dies führt zu einem zusätzlichen Vertex.



$$-\delta m \cdot \frac{1}{\not{p} - m} \cdot (-ie_0\gamma_\mu) - (-ie_0\gamma_\mu) \cdot \frac{1}{\not{p} - m} \cdot \delta m$$



$$-(-ie_0\gamma_\mu) \cdot \frac{\alpha}{3\pi} \cdot \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) = -ie_0\gamma_\mu \cdot (Z_3 - 1)$$

Achtung:  $(Z^{-1} - 1)$  ist  $O(\alpha)$ ! Die  $\delta m$ -Terme heben sich weg.

$$\begin{aligned} (-ie_0\gamma_\mu) \cdot [1 + (Z_1^{-1} - 1) - 2 \cdot (Z_2^{-1} - 1) + (Z_3 - 1)] & \approx (-ie_0\gamma_\mu) \cdot \frac{[1 + (Z_1^{-1} - 1)] \cdot [1 + (Z_3 - 1)]}{[1 + (Z_2^{-1} - 1)]^2} = \\ & = (-ie_0\gamma_\mu) \cdot \frac{Z_2^2 \cdot Z_3}{Z_1} \end{aligned} \quad (9.45)$$

Aufgrund der Wellenfunktionsrenormierung für Elektron und Photon muss außerdem ein Faktor  $\frac{1}{Z_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_3}}$  berücksichtigt werden, womit sich ergibt:

$$(-ie_0\gamma_\mu) \cdot Z_1^{-1} \cdot Z_2 \cdot \sqrt{Z_3} = \boxed{-ie_R\gamma_\mu} \quad (9.46)$$

Also sind nur Ladungs- und Massenrenormierung erforderlich.



# Kapitel 10

## Renormierung allgemein

Wir halten uns in diesem Kapitel an das Buch PESKIN: „Quantum Field Theory“.

### 10.1 UV-Divergenzen per Abzählung (Power Counting)

Für die Behandlung der Quantenelektrodynamik führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Bezeichnung	Bedeutung
$N_e$	Anzahl der externen Elektron-Linien
$N_\gamma$	Anzahl der externen Photon-Linien
$P_e$	Anzahl der Elektron-Propagatoren
$P_\gamma$	Anzahl der Photon-Propagatoren
$V$	Anzahl der Vertizes
$L$	Anzahl der Schleifen (Loops)

Der Grad der scheinbaren Divergenzen ergibt sich aus:

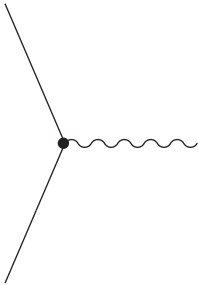
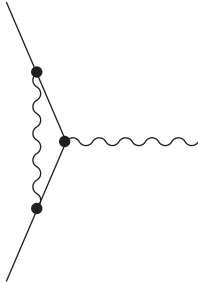
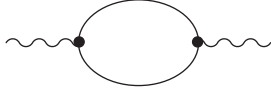
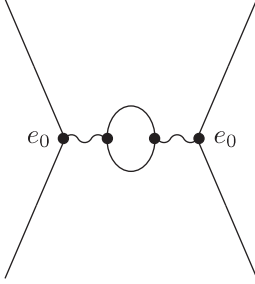
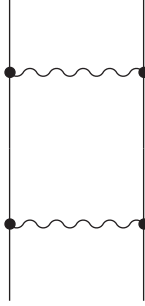
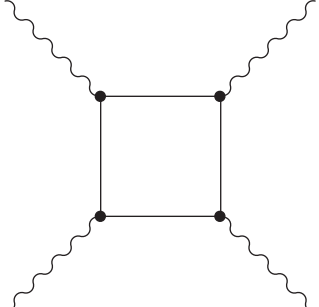
$$\int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_L}{(k_i - m) \dots (k_j^2) \dots} \Rightarrow \boxed{D \equiv 4L - P_e - 2P_\gamma} \quad (10.1)$$

- \*  $D > 0$ : Divergenz  $\sim \Lambda^D$  (mit Abschneideparameter  $\Lambda \mapsto \infty$ )
- \*  $D = 0$ : Divergenz  $\sim \ln \Lambda$
- \*  $D < 0$ : Konvergenz

Jedoch trifft „Power Counting“ oft nicht zu:

- \* Subdiagramme  $\Rightarrow$  Divergenzen trotz  $D < 0$
- \* Symmetrien (beispielsweise WARD-Identität)  $\Rightarrow$  Konvergenz trotz  $D \geq 0$

Betrachten wir folgende Beispiele:

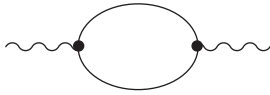
	$D = 0$	endlich	
	$D = 0$	$\sim \ln(\Lambda)$	
	$D = 2$	$\sim \ln(\Lambda)$	WARD-Identität
	$D = -2$	$\sim \ln(\Lambda)$	Subdiagramm: Divergenz
	$D = -2$	UV-endlich	
	$D = 0$	endlich wegen Strom-Erhaltung	

Wir formulieren unsere Abzählregel um. Für die Anzahl der Loops  $L$  gilt:

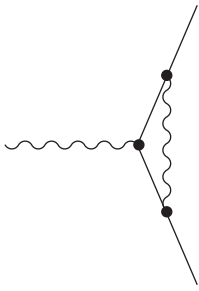
$$\boxed{L = P_e + P_\gamma - V + 1} \tag{10.2}$$

Beispiele:

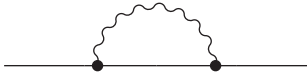




$$L = 0 + 2 - 2 + 1 = 1$$



$$L = 2 + 1 - 3 + 1 = 1$$



$$L = 1 + 1 - 2 + 1 = 1$$

Wir wollen dies allgemein für beliebige Schleifen beweisen. Für alle Propagatoren muss man über  $d^4k$  integrieren. Jeder Vertex liefert eine vierdimensionale  $\delta$ -Funktion. Eine weitere  $\delta$ -Funktion berücksichtigt die globale Impulserhaltung:

$$\int (d^4k)^{P_e} (d^4k)^{P_\gamma} \cdot \left[ \delta^{(4)} \left( \sum_i k_i \right) \right]^V \cdot \frac{1}{\delta^{(4)} \left( \sum_i p_i \right)} \sim \int (d^4k)^{P_e + P_\gamma - V + 1} \quad (10.3)$$

Dies liefert also  $L = P_e + P_\gamma - V + 1$  als die Anzahl der Schleifenintegrale. Außerdem gilt:  $N_\gamma$  ist die Anzahl der externen Photon-Linien. Diese knüpfen an einen Vertex an, genauso wie externe Elektron-Linien. Sowohl Photon-Propagatoren als auch Elektron-Propagatoren (also innere Photonen bzw. Elektronen) hängen an zwei Vertices; ein Vertex braucht eine Photon-Linie und zwei Elektron-Linien. Also gilt:

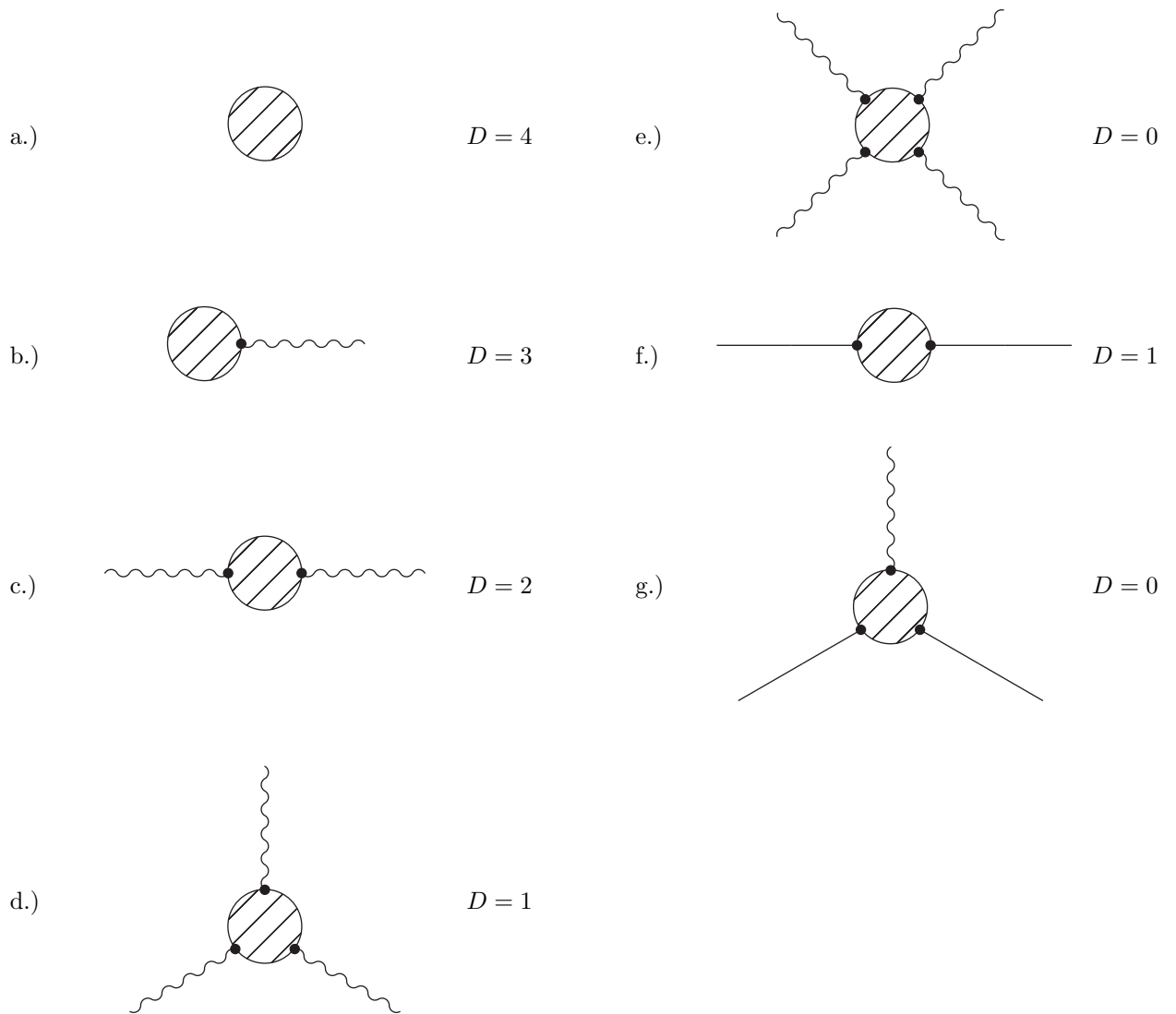
$$\boxed{V = 2P_\gamma + N_\gamma} = \frac{1}{2} \cdot (2P_e + N_e) \quad (10.4)$$

$$D = 4 \cdot (P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma = 4 - 3P_e - 2P_\gamma - 4V \quad (10.5)$$

Unter Verwendung von  $P_e = V - \frac{1}{2} \cdot N_e$  und  $P_\gamma = \frac{1}{2} \cdot (V - N_\gamma)$  ergibt sich:

$$\boxed{D = 4 - N_\gamma - \frac{3}{2} \cdot N_e} \quad (10.6)$$

Die scheinbare Divergenz ist also unabhängig von der Anzahl der Loops und der Anzahl der Vertices und hängt nur ab von der Zahl der äußeren Linien. Betrachten wir nun Diagramme mit  $D \geq 0$ :



a.) Keine Streuung!

b.)  $\langle \Omega | j_\mu(x) | \Omega \rangle$  ist LORENTZ-Vektor

$$\langle \Omega | j_\mu(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | j_\mu(0) | \Omega \rangle \quad (10.7)$$

Man hat keinen Vektor zur Verfügung und damit ist der Ausdruck gleich 0.

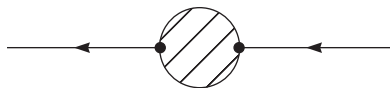
c.) Es treten zwei Ableitungen der Form  $(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\Pi(q^2)$  auf. Damit liegt eine logarithmische Divergenz vor.

d.) Dies ist 0 aufgrund der Ladungskonjugation:

$$C j_\mu C^{-1} = -j_\mu, \quad C |\Omega\rangle = |\Omega\rangle \quad (10.8)$$

e.) An jeder äußeren Linie hängt wegen der Stromerhaltung ein Faktor vom Typ  $(g_{\mu\nu}k_\sigma - g_{\mu\sigma}k_\nu)$ . Man hat also vier Ableitungen und damit ist das Resultat konvergent.

f.)  $\Sigma(p) = A_0(p^2) \cdot \mathbf{1} + A_1(p^2) \cdot \not{p}$



Mittels TAYLOR-Entwicklung ergibt sich:

$$A_0(0) + A_1(0) \cdot \not{p} + \frac{A_2(0)}{2} \cdot \not{p}^2 + \dots \text{ mit } A_n = \frac{1}{n!} \cdot \left. \frac{d^n}{d\not{p}^n} \Sigma(p) \right|_{p=0} \quad (10.9)$$

Die Ableitung wirkt auf den Fermion-Propagator.  $\not{p}$  ist der äußere Impuls und  $\not{k}$  ein Schleifen-Impuls:

$$\frac{d}{d\not{p}} \left( \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m} \right) = - \frac{1}{(\not{p} + \not{k} - m)^2} \quad (10.10)$$

Eine lineare Divergenz tritt grundsätzlich nicht auf (asymmetrischer Integrand!). Damit folgt:

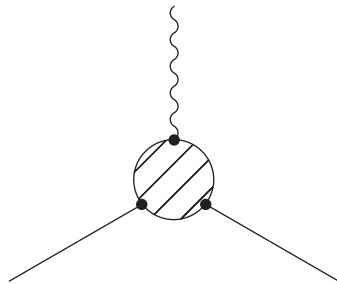
$$A_0 = a_0 \cdot m \cdot \ln(\Lambda) + \text{endlicher Ausdruck} \quad (10.11)$$

$$A_1 = a_1 \cdot \ln(\Lambda) + \text{endlicher Ausdruck} \quad (10.12)$$

$$A_2 = \text{endlicher Ausdruck} \quad (10.13)$$

Man hat zwei divergente Konstanten, nämlich  $a_0$  und  $a_1$ .

- g.) Bildet man die Ableitung nach dem externen Impuls, so ist das Resultat konvergent. Daraus folgt, dass die gesamte Impulsabhängigkeit des Integrals endlich ist. Also ist nur der konstante Anteil logarithmisch divergent.



$$\sim -ie\gamma^\mu \ln(\Lambda) + \text{endliche impulsabhängige Terme} \quad (10.14)$$

Der erste TAYLOR-Koeffizient liefert das anomale magnetische Moment, welches in Einschleifen-Näherung von SCHWINGER berechnet wurde.

Wir haben also nur drei „primitiv-divergente“ Diagrammtypen:

	eine logarithmische Divergenz	zwei Divergenzen
Ladungs- und Wellenfunktionsrenormierung	Ladung	Massen- und Wellenfunktionsrenormierung

Dies führt auf vier divergente Konstanten, nämlich Ladung, Masse, Wellenfunktionsrenormierung für  $\psi$  und  $A$ .

### 10.1.1 Übergang zu $d$ Dimensionen

Der Divergenzgrad ist dann gegeben durch  $D \equiv d \cdot L - P_e - 2P_\gamma$ . Die Gleichungen (10.2) und (10.4) gelten jedoch weiter:  $L = P_e + P_\gamma - V + 1$ ,  $V = 2P_\gamma + N_\gamma$ . Als Verallgemeinerung von Gleichung (10.5) ergibt sich:

$$D = d + \left( \frac{d-4}{2} \right) \cdot V - \left( \frac{d-2}{2} \right) \cdot N_\gamma - \left( \frac{d-1}{2} \right) \cdot N_e \quad (10.15)$$

Jetzt hängt der Divergenzgrad außerdem von der Zahl der Vertizes ab. Falls  $d < 4$  ist, führt eine zunehmende Zahl von Vertizes zu  $D < 0$ . Es gibt dann nur eine endliche Zahl von divergenten Diagrammen; man spricht von einer „super-renormierbaren Theorie“. Die Lage ist jedoch für  $d > 4$  gerade entgegengesetzt. Jeder Diagramm-Typ wird mit einer zunehmenden Zahl von Vertizes (in höherer Ordnung) divergent; wir haben eine „nicht-renormierbare Theorie“.

### 10.1.2 Beispiel: Skalare $\phi^n$ -Theorie

Betrachten wir folgende LAGRANGE-Funktion:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n \quad (10.16)$$

$N$  sei die Anzahl der externen Linien,  $P$  die Anzahl der Propagatoren und  $V$  die Anzahl der Vertizes. Beginnen wir mit der Anzahl der Schleifen (Loops):  $L = P - V + 1$  (§). (Der Beweis verläuft analog zu Gleichung (10.2).) Außerdem gilt der Zusammenhang  $n \cdot V = N + 2P$  (§§), wobei  $n$  die Anzahl der Linien pro Vertex ist. Für den Divergenzgrad erhalten wir  $D = d \cdot L - 2P$ , wobei  $d$  für die  $d$ -dimensionale Integration steht und  $P$  für die  $P$  Propagatoren  $\sim \frac{1}{k^2}$ . Formen wir diese Gleichung um:

$$D = d \cdot L - 2P \stackrel{(\S)}{=} d \cdot (P - V + 1) - 2P = -d \cdot V + d + \left(\frac{d-2}{2}\right) \cdot 2P \stackrel{(\S\S)}{=} d - d \cdot V + \left(\frac{d-2}{2}\right) \cdot (nV - N) \quad (10.17)$$

$$D = d + \left[ n \cdot \left(\frac{d-2}{2}\right) - d \right] \cdot V - \left(\frac{d-2}{2}\right) \cdot N \quad (10.18)$$

Betrachten wir speziell  $d = 4$ . Dann erhalten wir:

$$D = 4 + (n - 4) \cdot V - N \quad (10.19)$$

Die Wahl  $n = 4$  führt auf eine renormierbare Theorie. Man hat also eine endliche Zahl von divergenten (mit  $D \geq 0$ ) Diagramm-Typen ( $N \leq 4$ ). Für  $n > 4$  ist die Theorie nicht renormierbar; für  $n = 3$  ist sie zwar super-renormierbar, aber es existiert kein stabiler Grundzustand (Vakuum).

Speziell für  $d = 3$  erhält man:

$$D = 3 + \left(\frac{n}{2} - 3\right) \cdot V - \frac{N}{2} \quad (10.20)$$

Der Fall  $n = 4$  ist super-renormierbar und  $n = 6$  immerhin noch renormierbar.

### 10.1.3 Alternative Betrachtung zu Power-Counting

Die Wirkung ist definiert als  $\int \mathcal{L} d^d x$  und ist dimensionslos ( $\hbar = 1$ ). Außerdem gilt  $\dim(d^d x) = -d$  (in Massendimensionen). Für den kinetischen Term merken wir uns:  $\dim[\mathcal{L}] = \dim[m^2 \phi^2] = d$ . Daraus ergibt sich für  $\phi$  eine Massendimension von  $\frac{d-2}{2}$ . Für den Wechselwirkungsterm gilt:

$$d = \dim[\mathcal{L}_{WW}] = \dim[\lambda \cdot \phi^n] = \dim[\lambda] + n \cdot \left(\frac{d-2}{2}\right) \Rightarrow \dim[\lambda] = d - n \cdot \left(\frac{d-2}{2}\right) \quad (10.21)$$

Dies ist auch der Koeffizient von  $V$  in Gleichung (10.18). (Für  $d = 4$  und  $n = 4$  ergibt sich  $\dim[\lambda] = 0$ .) Hieraus kann man nun folgendes ablesen:


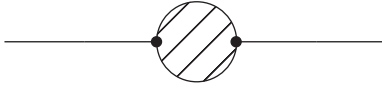
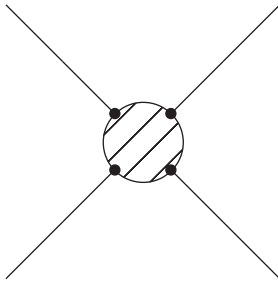
- \*  $\dim[\lambda] > 0$ : super-renormierbare Theorie
- \*  $\dim[\lambda] = 0$ : renormierbare Theorie
- \*  $\dim[\lambda] < 0$ : nicht renormierbare Theorie

## 10.2 Renormierte Störungstheorie

Das Vorgehen ist hierbei folgendes: Berechne Diagramme mit Regulator (Abschneide-Parameter („Cut-Off“)  $\Lambda$  oder in  $d \neq 4$ ) als Funktion von  $e_0$  und  $m_0$ . Berechne hieraus  $m$  ( $\equiv$  Lage des Pols des Fermion-Propagators) und die Ladung  $e$  ( $\equiv$  Kopplung des Photons bei  $q = 0$ ). Wenn wir ein S-Matrix-Element berechnen wollen, müssen wir die sogenannte Wellenfunktionsrenormierung (auch Feld-Renormierung genannte) bestimmen.  $Z$  ist gegeben durch das Residuum des Propagators. Wir berechnen  $e_0, m_0$  als Funktion von  $e$  und  $m$ , also  $e_0(e, m)$  und  $m_0(e, m)$ . (Zunächst hatten wir  $e(e_0, m_0)$  und  $m(e_0, m_0)$  erhalten.) Mit dieser Bedingung betrachten wir danach den Übergang  $\Lambda \mapsto \infty$  oder  $d \mapsto 4$ , wobei die Amplitude endlich bleibt. Wie kann man dieses Vorgehen nun formalisieren? Als Beispiel betrachten wir hierzu die  $\phi^4$ -Theorie:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 \tag{10.22}$$

Der Divergenzgrad für die  $N$ -Punktfunktion ist  $D = 4 - N$  (in  $d = 4$ ). Es werden nur Diagramme mit geradem  $N$  erzeugt ( $\phi \mapsto -\phi$ )! Divergente Diagramme:

		
$D = 4$	$D = 2$	$D = 0$
Vakuum-Diagramm	$\sim \Lambda^2 + p^2 \cdot \ln(\Lambda)$ Massen-Renormierung Quadratische Divergenz! $\sim \lambda \cdot \Lambda^2$ „fine tuning“ und Wellenfunktionsrenormierung	$\sim \ln(\Lambda)$ , Kopplung

$\lambda_0$  und  $m_0$  sind fiktive Größen, welche experimentell nicht zugänglich sind. Damit sind  $\lambda_0$  und  $m_0$  aus der Theorie zu eliminieren. Dazu wollen wir in der LAGRANGE-Funktion zu  $\lambda, m$  übergehen. Wie erreichen wir das? Dazu erinnern wir uns:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle \exp(ipx) = \frac{i \cdot Z}{p^2 - m^2} + \text{Reguläre Terme} \tag{10.23}$$

Wir drücken  $\phi$  aus durch  $Z^{\frac{1}{2}} \cdot \phi_{ren}$ , also durch das renormierte Feld mit dem Vorfaktor  $Z^{\frac{1}{2}}$ . (Dann müssen S-Matrix-Elemente nicht mehr mit  $Z^{-\frac{n}{2}}$  für die Wellenfunktionsrenormierung multipliziert werden.) Die LAGRANGE-Dichte hat dann folgende Form:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \cdot Z (\partial_\mu \phi_{ren})^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \cdot Z \phi_{ren}^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \cdot Z^2 \phi_{ren}^4 \tag{10.24}$$

Wir eliminieren nun  $m_0, e_0$  und definieren:

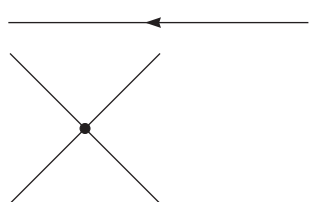
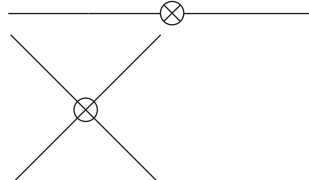
$$\delta_z \equiv Z - 1, \delta_m \equiv m_0^2 \cdot Z - m^2, \delta_\lambda \equiv \lambda_0 \cdot Z^2 - \lambda \tag{10.25}$$

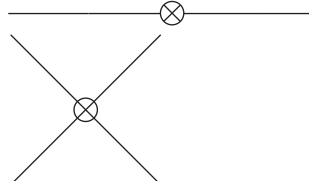
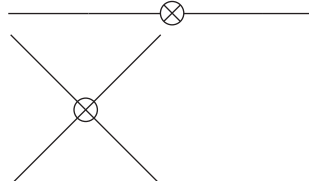
Damit erhalten wir folgende LAGRANGE-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{ren})^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_{ren}^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_{ren}^4 + \frac{1}{2} \delta_z (\partial_\mu \phi_{ren})^2 - \frac{1}{2} \delta_m \phi_{ren}^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi_{ren}^4 \tag{10.26}$$

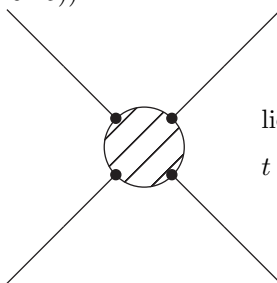
Der letzten drei Terme bezeichnet man auch als Gegen-Terme (oder Counter-Terme).  $\delta_{z,m,\lambda}$  sind als Störungs-

reihe festgelegt. Dies führt auf folgende FEYNMAN-Regeln:

	$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	}	wie vorher, aber mit $\lambda, m$	(10.27)
	$-i \cdot \lambda$			

	$i \cdot (p^2 \cdot \delta_z - \delta_m)$	}	Gegenterme	(10.28)
	$-i\delta_\lambda$			

In jeder Ordnung bestimmt  $m$  die Lage des Pols, so dass das Residuum des Propagators 1 ist (siehe Gleichung (10.25)).

	liefert am Normierungspunkt $s = 4m^2$ in jeder Ordnung $-i\lambda$ . Bei $s = 4m^2$ gilt $t = u = 0$ , also $p_1 = p_2 = \begin{pmatrix} m \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ .
--	---

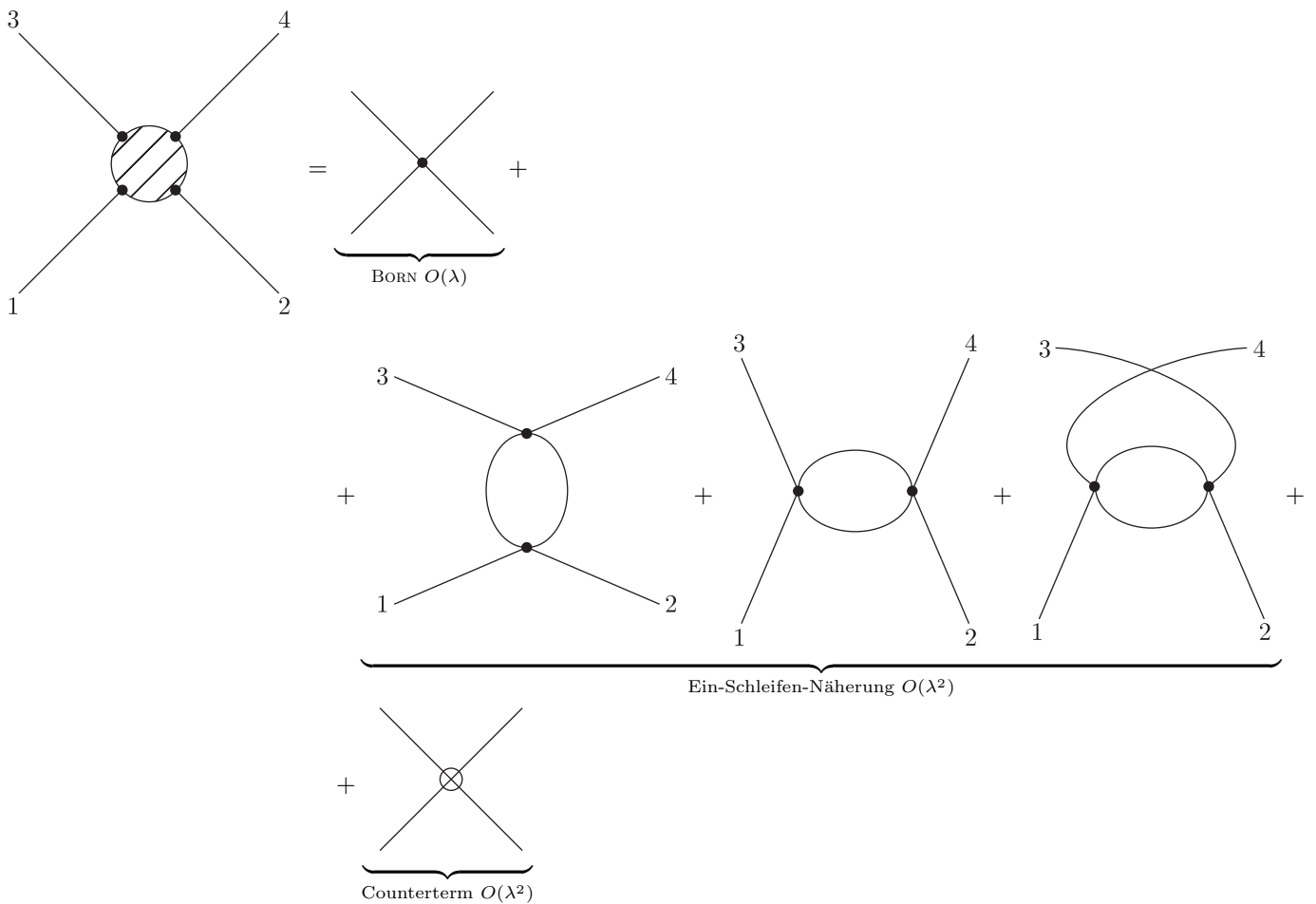
Dies ist eine mögliche Festlegung der „Normierungsbedingung“.

(10.29)

Die Vorschrift ist nun folgende: Berechne alle Diagramme mittels der FEYNMAN-Regeln (mit  $\lambda, m$  und den noch festzulegenden Counter-Termen in Abhängigkeit vom Regulator  $\Lambda$ ). Das Resultat hängt ab von  $\lambda, m$  (Observablen) und  $\delta_z, \delta_m, \delta_\lambda$ . Wähle anschließend  $\delta_z, \delta_m$  und  $\delta_\lambda$  so, dass die Renormierungsbedingungen gelten. Der Regulator kann dann entfernt werden ( $\Lambda \mapsto \infty$ ) und man erhält ein endliches Resultat.

### 10.3 Ein-Schleifen-Näherung

Wir berechnen  $M(p_1 p_2 \mapsto p_3 p_4)$ :



(10.30)

Wir berechnen die Diagramme auf der rechten Seite der Gleichung, wobei  $p = p_1 + p_2$  sei:

\* Erstes Einschleifen-Diagramm:

$$= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \cdot \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \equiv (-i\lambda)^2 \cdot i \cdot V(p^2) \quad (10.31)$$

Außerdem gilt  $p^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$ .

\* Zweites Einschleifen-Diagramm:

Einschleifen-Rechnung wie eben, mit  $p_1 + p_2 \mapsto p_1 - p_3$  (Impulsübertrag) und  $(p_1 - p_3)^2 \equiv t$ .

\* Drittes Einschleifen-Diagramm:

Einschleifen-Rechnung wie eben, mit  $p_1 + p_2 \mapsto p_1 - p_4$  und  $(p_1 - p_4)^2 \equiv u$ .

Also ergibt sich:

$$iM = -i\lambda + (-i\lambda)^2 \cdot i \cdot [V(s) + V(t) + V(u)] - i \cdot \delta_\lambda \quad (10.32)$$

Die Renormierungsbedingung lautet  $iM(s = 4m^2, t = u = 0) \equiv -\lambda$  und daraus folgt  $\delta_\lambda = -\lambda^2 \cdot [V(4m^2) + 2 \cdot V(0)]$ .

**Hinweis auf dimensionale Regularisierung:**

In  $d$  Dimensionen hat  $\lambda$  die Dimension

$$\dim[\lambda] = d - \frac{n \cdot (d-2)}{2} \stackrel{n=4}{=} -d + 4 = -\varepsilon \tag{10.33}$$

Wir ersetzen  $\lambda$  durch  $\lambda \cdot \mu^\varepsilon$ , womit das neue  $\lambda$  dimensionslos ist.

$$\mu^\varepsilon \mapsto 1 + \varepsilon \cdot \ln(\mu) \tag{10.34}$$

Zusammen mit  $\frac{2}{\varepsilon}$  ergibt sich  $\ln(\mu^2)$ .

**Rechnung:**

Mit  $\varepsilon = 4 - d$  (oft setzt man auch  $2\varepsilon = 4 - d$ ) ergibt sich:

$$V(p^2) \stackrel{d \rightarrow 4}{=} \frac{1}{32 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^1 \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln[m^2 - x(1-x) \cdot p^2] + \ln(\mu^2) \right) dx \tag{10.35}$$

Damit folgt  $\delta_\lambda$ :

$$\delta_\lambda = \frac{\lambda^2}{32 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^1 \left( \frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma + 3 \cdot \ln(4\pi) - 3 \cdot \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \ln[1 - 4x \cdot (1-x)] \right) dx \tag{10.36}$$

$$iM = -i\lambda - \frac{i \cdot \lambda^2}{32 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^1 \left[ \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x) \cdot s}{m^2}\right) + \text{Ausdruck}(t) + \text{Ausdruck}(u) - \ln[1 - 4x \cdot (1-x)] \right] dx \tag{10.37}$$

Der Ausdruck ist endlich per Konstruktion. Für  $s = 4m^2$  und  $t = u = 0$  verschwindet auch die Korrektur auf diese Weise. (Wir hätten natürlich  $\lambda$  anders definieren können, dann ändert sich auch die Korrektur.) Wir berechnen nun  $\delta_z$  und  $\delta_m$ :

$$-iM(p^2) = \text{---} \circ \text{---} \tag{10.38}$$

Man bezeichnet dieses Verhalten als „ein-Teilchen-irreduzibel“. Also ist ein Term der Form



nicht dabei. Die Zweipunktfunktion ergibt sich aus der geometrischen Reihe:

$$\text{---} \circ \text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \tag{10.39}$$

$$\begin{aligned} & \frac{i}{p^2 - m^2} \cdot \mathbf{1} + \frac{i}{p^2 - m^2} \cdot \left[ (-i \cdot M(p^2)) \cdot \frac{i}{p^2 - m^2} \right] + \frac{i}{p^2 - m^2} \cdot \left[ (-i \cdot M(p^2)) \cdot \frac{i}{p^2 - m^2} \right]^2 + \dots = \\ & = \frac{i}{p^2 - m^2} \cdot \left[ \frac{1}{1 - \frac{M(p^2)}{p^2 - m^2}} \right] = \frac{i}{p^2 - m^2 - M^2(p^2)} \end{aligned} \tag{10.40}$$



Wir stellen die Forderung, dass sich der Pol bei  $p^2 = m^2$  befinden soll, dass also das Residuum bei 1 liegt. Also muss gelten:

$$M^2(p^2)|_{p^2=m^2} = 0, \quad \frac{d}{dp^2}M(p^2)|_{p^2=m^2} = 0 \tag{10.41}$$

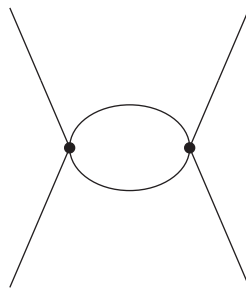
Diagrammatisch:

$$\begin{aligned}
 -iM(p^2) &= \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} = \\
 &= -i \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \int \frac{dk}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} + i \cdot (\delta_z \cdot p^2 - \delta_m) = -i \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{1 - \frac{d}{2}}} + i \cdot (\delta_z \cdot p^2 - \delta_m)
 \end{aligned} \tag{10.42}$$

Hieraus ergibt sich  $\delta_z = 0$  und  $\delta_m = -i\lambda$ . Dies liefert  $M(p^2) = 0$  und  $\frac{d}{dp^2}M(p^2) = 0$ . (Da der Impuls  $p$  nicht durch die Schleife fließt, ist das Resultat noch untypisch einfach!) Man erhält  $M(p^2) \neq 0$  in  $O(\lambda^2)$  aus:

$$\text{Diagramm 1} + \underbrace{\text{Diagramm 2}}_{\text{Counterterm}} + \underbrace{\text{Diagramm 3}}_{O(\lambda)\text{-Counterterm}} \tag{10.43}$$

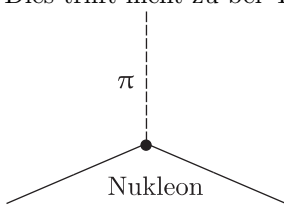
Der Counterterm beim zweiten Diagramm rührt von



her. Das dritte Diagramm ist neu zu berechnen.  $\delta_z = 0$  ist hier zufällig in  $O(\lambda)$ .

**Einschub:**

Dies trifft nicht zu bei YUKAWA-Theorie (Boson+Fermion). Yukawa:



$$-iM(p^2) = \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= -(-ig)^2 \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Sp} \left[ \frac{i \cdot (k+p+m_f) \cdot i \cdot (k+m)}{[(k+p)^2 - m^2] \cdot [k^2 - m^2]} \right] + i \cdot (\delta_z \cdot p^2 - \delta_m) = \\
 &= -4g^2 \cdot \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k \cdot (p+k) + m_f^2}{((k+p)^2 - m^2) \cdot (k^2 - m^2)} + i \cdot (\delta_z \cdot p^2 - \delta_m)
 \end{aligned} \tag{10.44}$$

Mit  $l = k + xp$  ergibt sich in der FEYNMAN-Parameter-Darstellung:

$$-4g^2 \int dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2 - x(1-x) \cdot p^2 + m_f^2}{l^2 + x(1-x) \cdot p^2 - m_f^2} \stackrel{\text{Rechnung}}{=} \frac{4i \cdot g^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Delta^{1 - \frac{d}{2}}} \text{ mit } \Delta = m_f^2 - x(1-x) \quad (10.45)$$

$\delta_m$  ist gegeben durch den Wert bei  $p^2 = m^2$ :

$$\delta_m = \frac{4g^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{[m_f^2 - x(1-x) \cdot m^2]^{1 - \frac{d}{2}}} \quad (10.46)$$

$\delta_z$  erhält man aus der Bedingung, dass auch die erste Ableitung  $M(p^2)|_{p^2=m^2}$  verschwinden muss:

$$\delta_z = -\frac{4g^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{x(1-x) \cdot \Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[m_f^2 - x(1-x) \cdot m^2]^{2 - \frac{d}{2}}} \quad (10.47)$$

Kommen wir zum Schluss zur Auswertung von beiden. Wir benötigen

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}-2}} \cdot \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[m_f^2 - x(1-x) \cdot m^2]^{2 - \frac{d}{2}}} = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln[m_f^2 - x(1-x) \cdot m^2] \quad (10.48)$$

wobei mit  $d = 4 - \varepsilon$  gilt:

$$\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2 - \frac{d}{2}} \cdot \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{2}{\varepsilon} \left(1 - \gamma_E \frac{\varepsilon}{2} + \dots\right) \quad (10.49)$$

## 10.4 QED: Renormierte Störungstheorie

Wir formulieren die Störungstheorie im folgenden in physikalischen Parametern. Als Ausgangspunkt dient uns folgende LAGRANGE-Dichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \cdot F_{\mu\nu}^2 + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m_0)\psi - e_0 \cdot \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (10.50)$$

\* Elektron-Propagator:



$$\frac{i \cdot Z_2}{\not{p} - m} + \dots \text{ (kein Pol)}$$

\* Photon-Propagator:



$$\frac{-i \cdot Z_3 \cdot g_{\mu\nu}}{q^2} + \dots \text{ (kein Pol)}$$

Wir drücken die LAGRANGE-Dichte durch  $\psi = Z_2^{\frac{1}{2}} \cdot \psi_{ren}$  und  $A^\mu = Z_3^{\frac{1}{2}} \cdot A_{ren}^\mu$  aus wie folgt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \cdot Z_3 \cdot (F_{ren}^{\mu\nu})^2 + Z_2 \cdot \bar{\psi}_{ren}(i\not{\partial} - m_0)\psi_{ren} - e_0 \cdot Z_2 \cdot Z_3^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{\psi}_{ren}\gamma_\mu\psi_{ren}A_{ren}^\mu \quad (10.51)$$

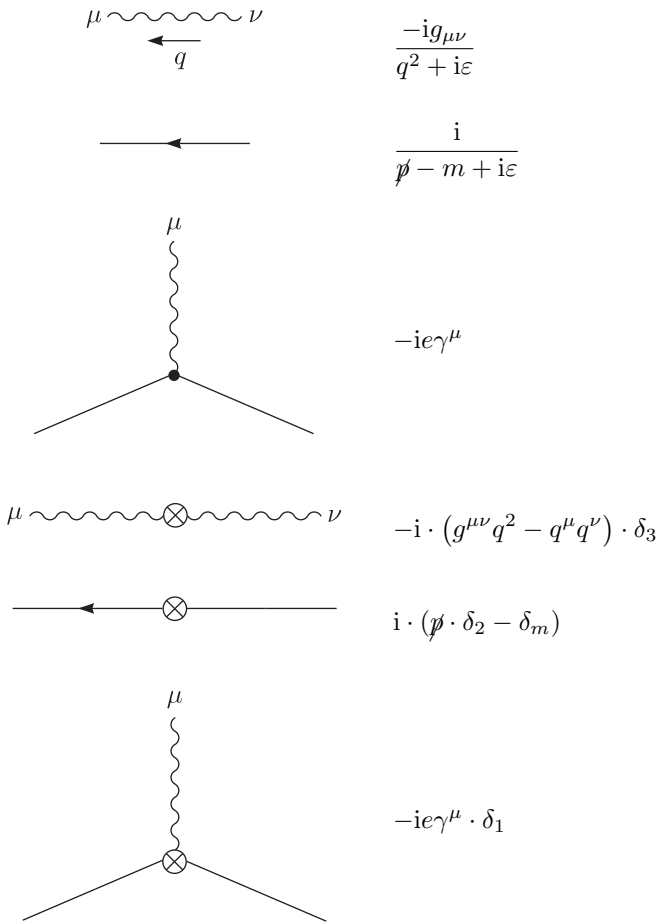
Wir definieren die physikalische Ladung  $e$  über  $e \cdot Z_1 = e_0 \cdot Z_2 \cdot Z_3^{\frac{1}{2}}$ . Außerdem werden wir mit  $m$  die physikalische Masse bezeichnen.  $Z_1$  ist erforderlich, damit der Vertex einschließlich Korrekturen  $e$  liefert, also  $e \cdot Z_1 \cdot \Gamma = e \cdot \gamma$  bei Impulsübertrag Null.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \cdot (F_{ren}^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_{ren}(i\not{\partial} - m)\psi_{ren} - e \cdot \bar{\psi}_{ren}\gamma_\mu\psi_{ren}A_{ren}^\mu + \text{Counter-Terme} \quad (10.52)$$

Die Counter-Terme sind

$$-\frac{1}{4} \cdot \delta_3 \cdot (F_{ren}^{\mu\nu})^2 + \bar{\psi}_{ren}(i\delta_2 \cdot \not{\partial} - \delta_m)\psi_{ren} - e\delta_1 \cdot \bar{\psi}_{ren}\gamma^\mu\psi_{ren}(A_{ren})_\mu \quad (10.53)$$

mit  $\delta_3 = Z_3 - 1$ ,  $\delta_2 = Z_2 - 1$ ,  $\delta_m = Z_2 \cdot m_0 - m$  und  $\delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e_0}{e} \cdot Z_2 \cdot Z_3^{\frac{1}{2}} - 1$ . FEYNMAN-Regeln:



Die Form des Counterterms mit zwei Photonen – proportional zu  $\delta_3$  – erhält man durch partielle Integration von:

$$\int -\frac{1}{4} \cdot (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \cdot (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \int \frac{1}{4} [A_\nu \cdot (\partial^2 A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu A^\nu) - A_\mu \cdot (\partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial^2 A^\mu)] = \int \frac{1}{2} \cdot A_\mu (g^{\mu\nu} \partial^2 - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu \quad (10.54)$$

Die Renormierungskonstanten folgen aus:

$$\text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} = -i\Sigma(\not{p}), \quad \boxed{\Sigma(\not{p} = m) = 0, \quad \left. \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \right|_{\not{p}=m} = 0} \quad (10.55)$$

$$\text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} = +i\Pi^{\mu\nu} = i \cdot (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \cdot \Pi(q^2), \quad \boxed{\Pi(q^2 = 0) = 0} \quad (10.56)$$

$$\left( \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \right) \text{ amputiert} = -ie\Gamma^\mu(p), \quad \boxed{-ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) = -ie\gamma^\mu} \quad (10.57)$$

## 10.5 QED in Ein-Schleifen-Näherung

Wir verwenden dimensionale Regularisierung und setzen die Photon-Masse  $\mu \neq 0$ . Der Index „2“ bei  $\Sigma$  steht im folgenden für „2.Ordnung“:

$$\begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} = -i\Sigma_2(\not{p}) = -i \cdot \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \cdot [(4 - \varepsilon) \cdot m - (2 - \varepsilon) \cdot x\not{p}]}{[(1 - x) \cdot m^2 + x \cdot \mu^2 - x(1 - x) \cdot p^2]^{2 - \frac{d}{2}}} \quad (10.58)$$

$$\text{---} \otimes \text{---} = i \cdot (\not{p} \cdot \delta_2 - \delta_m) \quad (10.59)$$

$$\Sigma(\not{p} = m) = \frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \cdot [(4 - \varepsilon) \cdot m - (2 - \varepsilon) \cdot xm]}{[(1 - x) \cdot m^2 + x \cdot \mu^2 - x(1 - x) \cdot m^2]^{2 - \frac{d}{2}}} + (-m \cdot \delta_2 + \delta_m) = 0 \quad (10.60)$$

$$\boxed{(\delta_m - m \cdot \delta_2) = -\Sigma_2(m) = -\frac{e^2 \cdot m}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2}) \cdot [4 - 2x + \varepsilon \cdot (x - 1)]}{[(1 - x)^2 \cdot m^2 + x^2 \cdot \mu^2]^{2 - \frac{d}{2}}}} \quad (10.61)$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{d}{d\not{p}} \Sigma_2(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m} &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{[(1 - x)^2 \cdot m^2 + x \cdot \mu^2]^{2 - \frac{d}{2}}} * \\ &* \left[ (2 - \varepsilon) \cdot x - \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2x(1 - x) \cdot m^2}{(1 - x)^2 \cdot m^2 + x \cdot \mu^2} \cdot (4 - 2x - \varepsilon \cdot (1 - x)) \right] \end{aligned} \quad (10.62)$$

Entsprechend gilt:

$$\delta_3 = \Pi_2(0) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{2 - \frac{d}{2}}} \cdot 8 \cdot (1 - x) \quad (10.63)$$

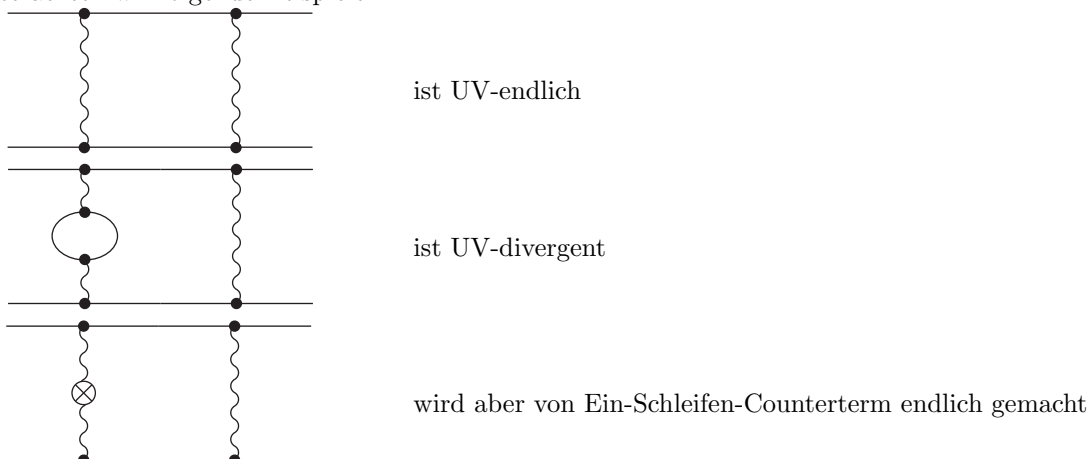
Die Vertex-Funktion lautet  $\delta_1 = -\delta F_1(0) = \text{Vertexkorrektur}$ ; weiterhin ist  $\delta_1 = \delta_2$  oder  $Z_1 = Z_2$ . Dies folgt aus  $\delta F_1(0) = \frac{d}{d\not{p}} \Sigma_2(\not{p})$ .

## 10.6 Renormierung in höheren Ordnungen

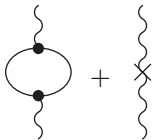
Hierbei treten zwei Probleme auf:

- \* Divergente Subdiagramme
- \* Überlappende Divergenzen

Betrachten wir folgende Beispiele:



Das heißt, als Integrand taucht auf:



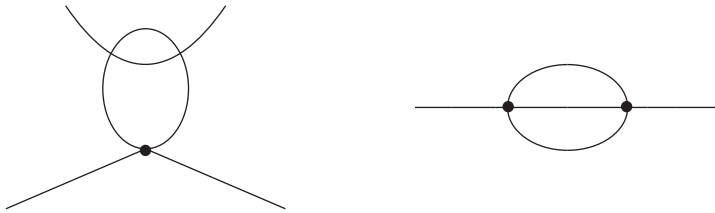
$$(10.64)$$

Diese Kombination ist endlich und führt zu endlichen Resultaten nach der Integration.

### 10.6.1 Überlappende Divergenz

Es befindet sich ein Propagator in mehreren divergenten Schleifen gleichzeitig!

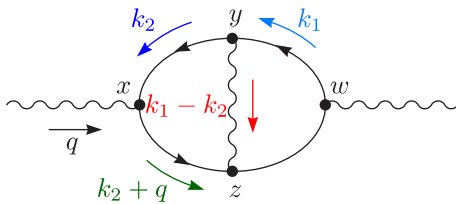
1.)  $\phi^4$ -Theorie:



2.) Quantenelektrodynamik:



#### Beispiel:

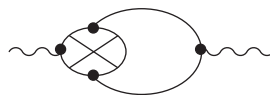


Ein divergenter Beitrag wird von großen  $k_2$  geliefert; dies bedeutet, dass  $x, y$  und  $z$  nahe beisammen liegen. Dies kann man folgendermaßen interpretieren:



$$\Rightarrow \text{Vertexkorrektur} \quad (10.65)$$

Es zeigt sich eine logarithmische Divergenz  $\sim i\alpha\gamma^\mu \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \ln(\Lambda^2)$  oder  $\frac{1}{\epsilon}$ . Eingesetzt in



liefert das Ein-Schleifen-Resultat, multipliziert mit  $\sim \frac{\alpha}{\pi} \cdot \ln(\Lambda^2)$ , also

$$\frac{\alpha}{\pi} \cdot (g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu) \cdot (\ln(\Lambda^2) - \ln(q^2)) \cdot \frac{\alpha}{\pi} \cdot \ln(\Lambda^2) \quad (10.66)$$

Es ist  $\ln^2(\Lambda^2)$  aus der Region mit großen  $k_1$  und  $k_2$  und  $\ln(q^2) \cdot \ln(\Lambda^2)$  aus dem Bereich mit großem  $k_2$  und  $k_1$  von der Ordnung  $q^2$  oder  $m^2$ . Ebenso gilt dies für  $k_1 \leftrightarrow k_2$ . Ein Term  $\sim \ln(\Lambda^2) \cdot \Pi(q^2)$  wäre eine nicht-lokale Divergenz (kein Polynom in  $q \Rightarrow$  keine  $\delta$ -Funktion mit  $x$ ). Diese Divergenz wird kompensiert durch einen Schleifen-Counter-Term in der Schleife:



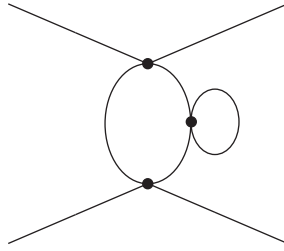
$$(10.67)$$

Der Rest enthält nur noch lokale Divergenzen (Polynome in  $q^2$ ) der Ordnung  $\alpha^2$ . Daraus ergibt sich ein Zwei-Schleifen-Counterterm in  $Z_3$  bzw.  $\delta_3$ . Behauptung: In jeder Ordnung werden die „nicht-lokalen Divergenzen“ durch die Einsetzung von Countertermen im Supgraphen entfernt. Es bleiben nur lokale Divergenzen und daraus folgt ein Beitrag zur Renormierung in der betreffenden Ordnung. Wichtige Arbeiten zu dieser Thematik gehen auf BOGOLIUBOV, PARASUIK, sowie auf HEPP und ZIMMERMANN (BPHZ-Renormierung) zurück.

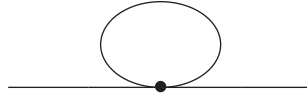
### 10.7 $\phi^4$ in zwei Schleifen

(10.68)

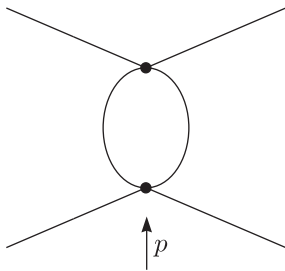
Dabei handelt es sich insgesamt um 16 Diagramme. Außerdem tauchen Diagramme von folgendem Typ auf:



Jedoch wird der Beitrag zum Propagator



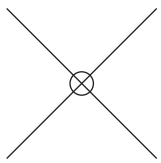
durch Renormierung zu Null gesetzt. Wegen der Counter-Terme verschwinden alle impulsabhängigen Divergenzen. Dies wollen wir im folgenden beweisen. Dazu erinnern wir uns an:



$$= (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2) = (-i\lambda^2) \cdot \left[ -\frac{i}{2} \cdot \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{[m^2 - x(1-x) \cdot p^2]^{2 - \frac{d}{2}}} dx \right]$$

(10.69)

Der Counterterm war so gewählt, dass für  $s = 4m^2$  die Korrekturen verschwanden.



$$= -i\delta_\lambda = (-i\lambda)^2 \cdot \left[ -i \cdot V(4m^2) - \underbrace{2i \cdot V(0)}_{s \rightarrow (t,u)} \right] \equiv \left( \text{diagram} \right)_s + \left( \text{diagram} \right)_{(t+u)}$$

(10.70)

Zerlege die fünf Diagramme:

(10.71)

Gruppe I zerfällt in ein Produkt:

(10.72)

(10.73)

Wir bilden die Summe:

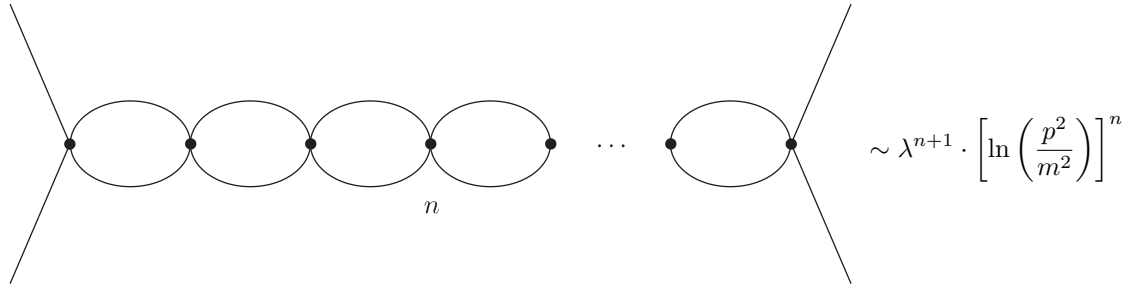
$$(-i\lambda)^3 \left[ (iV(p^2))^2 - 2iV(p^2)iV(m^2) \right] = (-i\lambda)^3 \left[ \underbrace{-(V(p^2) - V(m^2))^2}_{\text{endlich}} + \underbrace{[V(m^2)]^2}_{\substack{\text{unabhängig} \\ \text{von } p^2}} \right] \quad (10.74)$$



- \* Divergenz  $\sim [V(m^2)]^2 \sim \left[ \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right]^2 \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$ , führt also auf Doppel-Pol. Koeffizient ist von  $p^2$  unabhängig
- \* Verhalten bei hohem  $p^2$

$$[V(p^2) - V(m^2)]^2 \sim \ln^2\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \tag{10.75}$$

Für höhere Ordnungen gilt:



$$\sim \lambda^{n+1} \cdot \left[ \ln\left(\frac{p^2}{m^2}\right) \right]^n \tag{10.76}$$

Für Gruppe II und III ist die Berechnung erheblich mühsamer, das Resultat bezüglich Divergenz ist aber entsprechend. (Kompliziert ist die Berechnung der endlichen Terme!)



# Kapitel 11

## Das Standardmodell

### 11.1 Yang-Mills-Theorien (nicht-abelsche Eichtheorie) und spontane Symmetriebrechung

Eine Theorie mit bestimmten Symmetrie-Relationen zwischen Kopplungskonstanten und Massenparametern kann eventuell die Wechselwirkung massiver Vektorbosonen mit Fermionen und Bosonen beschreiben und dennoch kompatibel mit der Unitarität sein. Es bleibt natürlich zu zeigen, dass dies tatsächlich auf eine renormierbare Theorie führt (T'HOOFT!).

Wenn wir mit einer solchen Theorie die Elementarteilchen beschreiben wollen, so müssen wir uns einige Gedanken über Symmetriebrechung machen. Simples Ändern der Kopplungen oder Addition von Massentermen („harte Massen“) zerstört natürlich alle schönen Eigenschaften. ( $\Rightarrow$  Spontane Symmetriebrechung!)

#### 11.1.1 Goldstone-Modell

Betrachten wir folgende LAGRANGE-Funktion:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (11.1)$$

Wenn die LAGRANGE-Funktion hermitesch sein soll, bietet sich an,  $V$  als eine Funktion von  $\phi^\dagger \phi$  zu wählen. Wenn wir Renormierbarkeit in 1+3 Dimensionen fordern, kann maximal ein Polynom vierten Grades vorliegen. Wir schreiben also:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda^2 (\phi^\dagger \phi)^2 + \text{irrelevante Konstante} \quad (11.2)$$

Es liegt U(1)-Symmetrie vor: Die LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L}$  ist invariant bezüglich der Transformation  $\phi(x) \mapsto \phi'(x) = \exp(i\theta)\phi(x)$  (Globale Symmetrie). Weiterhin gelte  $\lambda^2 \geq 0$ , weil sonst kein Grundzustand existiert. Es stellt sich die Frage, ob der **Grundzustand** ebenfalls symmetrisch ist; der angeregte Zustand ist nämlich im allgemeinen ohnehin nicht symmetrisch. (Beim Wasserstoffatom ist beispielsweise der Grundzustand der mit  $l = 0$ ; dieser ist invariant unter Drehungen im Gegensatz zum angeregten Zustand mit  $l = 1$ .) Wir suchen also den Zustand niedrigster Energie. Die Energiedichte ist gegeben durch:

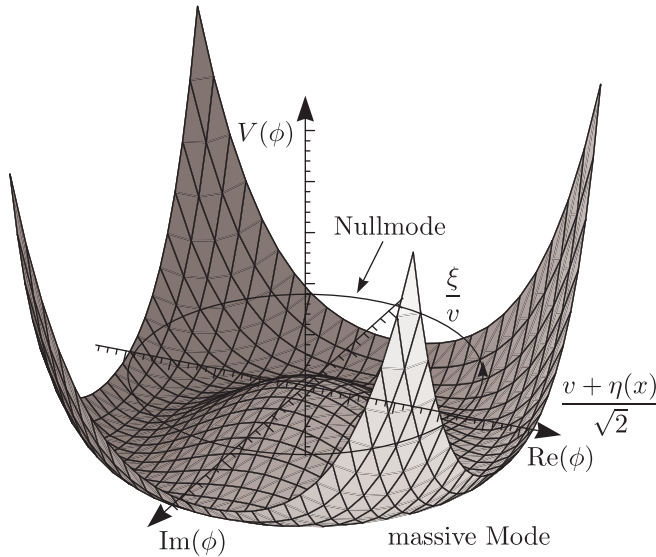
$$\mathcal{H} = \partial_0 \phi^\dagger \partial_0 \phi + (\vec{\nabla} \phi)^2 + V(\phi) \quad (11.3)$$

Wir suchen das Minimum für  $\phi(x) = \phi_0 = \text{const.}$ ; in diesem Falle ist  $V(\phi)$  zu minimieren:

1.)  $\mu^2 > 0$ : Minimum für  $\phi_0 = 0$

Die Lösung ist invariant unter  $\phi_0 \mapsto \exp(i\theta)\phi_0$ ; damit ist der Grundzustand eindeutig.

2.)  $\mu^2 < 0$ :



Das Minimum dieser Funktion wollen wir bestimmen:

$$\boxed{2\lambda^2\phi^\dagger\phi + \mu^2 = 0} \Rightarrow |\phi| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda^2}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (11.4)$$

Die Phase ist unbestimmt und der Grundzustand daher nicht eindeutig! Die Lösung ist nicht invariant unter  $U(1)$ , sondern wird in eine andere Lösung transformiert; man spricht von der „**spontanen Symmetriebrechung**“. Wir schreiben die LAGRANGE-Dichte nun als:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi - \lambda^2\left(\phi^\dagger\phi - \frac{v^2}{2}\right)^2 + \text{irrelevante Konstante mit } V(\phi_0) = 0 \quad (11.5)$$

Klassisch entspricht die „Nullmode“ der Bewegung auf einem Kreis im Minimum, die klassische Mode der Schwingung in radialer Richtung. In der Quantenfeldtheorie betrachtet man kleine quantenmechanische Anregungen um das klassische Minimum und das sind gerade die Teilchen. Wir machen einen Ansatz, welcher die Struktur in der Umgebung des Minimums besser berücksichtigt:

$$\phi(x) = \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \cdot \exp\left(i \cdot \frac{\xi(x)}{v}\right) \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( \partial\eta + (v + \eta) \cdot i \cdot \frac{\partial\xi}{v} \right)^\dagger \left( \partial\eta + (v + \eta) \cdot i \cdot \frac{\partial\xi}{v} \right) - \frac{\lambda^2}{4} (v + \eta)^4 - \frac{\mu^2}{2} (v + \eta)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\partial\eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial\xi)^2 - \underbrace{\left( \frac{\lambda^2}{4} \cdot 4 \cdot v^3 + \frac{\mu^2}{2} \cdot 2v \right)}_{=0} \cdot \eta - \underbrace{\left( \frac{\lambda^2}{4} \cdot 6v^2 + \frac{\mu^2}{2} \right)}_{=-\frac{|2\mu^2|}{2} \cdot \eta^2} \cdot \eta^2 + \text{Wechselwirkungsterme} \end{aligned} \quad (11.7)$$

Die Wechselwirkungsterme sind Terme mit kubischen und höheren Potenzen in den Feldern.  $\xi$  ist damit masselos und  $m_\eta = \sqrt{2}\lambda v = \sqrt{-2\mu^2}$ . Die Null-Mode beschreibt Anregungen in der Richtung, welche durch die gebrochene Symmetrie-Transformation erreicht werden kann. Ein Beispiel hierzu aus der Festkörperphysik sind die sogenannten Spinwellen im Ferromagneten. Der Grundzustand ist entartet gegenüber Drehungen. Hier gilt  $E \sim k$  (Wellenvektor); es existiert keine Energie-Lücke, was  $m = 0$  entspricht.

$U(1)$  ist isomorph zu  $O(2)$ ! ( $U(1) \leftrightarrow$  Drehungen in der 1-2-Ebene)

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad (11.8)$$

Wir wollen die Überlegungen zur Symmetriebrechung auf Drehungen im  $n$ -dimensionalen inneren Symmetrie-Raum verallgemeinern (Verallgemeinerung auf  $O(n)$ ). Die Anzahl der Generatoren ist dann  $\frac{1}{2}n(n-1)$ . Wir

hatten dies im Kapitel „Häufig vorkommende innere Symmetrien“ bewiesen. Wir betrachten nun reelle Felder  $\phi_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  und die zugehörige LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L}$ :

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \vec{\phi} \partial_\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}) \text{ mit } V = \frac{1}{2} \mu^2 (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) + \frac{1}{4} \lambda^2 (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 \quad (11.9)$$

Wir unterscheiden wieder die zwei Fälle:

1.)  $\mu^2 > 0$ :

$$\vec{\phi}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = 0 \Rightarrow \vec{\phi}_0 = 0 \quad (11.10)$$

2.)  $\mu^2 < 0$ :

Hier gilt für das Minimum:

$$\vec{\phi}_0 \cdot \vec{\phi}_0 = \frac{-\mu^2}{\lambda^2} \equiv v^2 \Rightarrow |\vec{\phi}_0| = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}} \quad (11.11)$$

Die Richtung von  $\vec{\phi}_0$  ist beliebig;  $\vec{\phi}_0$  liegt also auf der  $(n-1)$ -dimensionalen Oberfläche der Kugel im  $n$ -dimensionalen Raum  $R_n$ . Wähle  $\vec{\phi}_0 = (0, 0, \dots, 0, v)^\top$ . Dieser Vektor ist invariant unter Drehungen um seine Richtung, also aus der Gruppe  $O_{n-1}$ , jedoch nicht invariant unter Drehungen aus der  $n$ - in die 1-, 2-, ...,  $(n-1)$ -Richtung. Man hat damit  $n-1$  „spontan“ gebrochene Symmetrien und  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$  erhaltene Symmetrien.

$$\frac{1}{2}n(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = n-1 \quad (11.12)$$

Dies liefert also  $n-1$  masselose Felder und ein massives Feld. Die Auslenkungen  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  entsprechen Drehungen aus der  $n$ - in die  $i$ -Richtung. Wir wählen eine neue Parametrisierung für die Felder, nämlich „Kugelkoordinaten“, wobei  $\xi_i$  die Drehwinkel und  $\eta$  den Radius darstellt.

$$(\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{n-1}(x), \phi_n(x)) \mapsto (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_{n-1}(x), \eta(x)) \quad (11.13)$$

$$\phi(x) = \exp \left[ i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i(x) \cdot \frac{K_i}{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} \right] \quad (11.14)$$

$K_i$  sind die Generatoren der Drehung aus der  $n$ - in die  $i$ -Richtung ( $(K_i)_{kl} = -i \cdot (\delta_{ik}\delta_{nl} - \delta_{il}\delta_{nk})$ ) und somit:

$$i \cdot \frac{K_i}{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

Die eins befindet sich in der  $i$ -ten Zeile. Beispielsweise gilt für zwei Dimensionen für  $i = 2$

$$(K_{i=2})_{kl} = -i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{kl} \text{ und somit } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{für ungerades } n \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für gerades } n \end{cases} \quad (11.16)$$

Wir verwenden die neue Parametrisierung für die LAGRANGEDICHTE:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial\eta \end{pmatrix} + i\partial\xi_i \cdot \frac{K_i}{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial\eta \end{pmatrix} + i\partial\xi_i \cdot \frac{K_i}{v} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right] - V(v+\eta) = \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial\eta \end{pmatrix} + \partial\xi_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 + \frac{\eta}{v} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]^\dagger \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial\eta \end{pmatrix} + \partial\xi_i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 + \frac{\eta}{v} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] - V(v+\eta) = \\
 &= \frac{1}{2} (\partial\eta)^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (\partial\xi_i)^2 - |\mu^2| \cdot \eta^2 + (\text{Höhere Ordnung in } \eta, \xi \stackrel{\wedge}{=} \text{Wechselwirkungsterme})
 \end{aligned} \tag{11.17}$$

Man kommt somit zu einem massiven Feld mit der Masse  $m = \sqrt{2|\mu^2|}$  und  $n-1$  masselose Felder ( $\stackrel{\wedge}{=} n-1$  spontan gebrochene Transformation). Dies kann auf eine beliebige  $N$ -dimensionale Gruppe  $G$  (mit  $N$  Generatoren) verallgemeinert werden. Die  $\phi_i$  transformieren sich unter einer beliebigen  $n$ -dimensionalen reellen Darstellung von  $G$  (kann durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil immer erreicht werden).

$$\phi_i \mapsto \exp(-i \cdot \theta^\alpha L_\alpha) \phi_i \tag{11.18}$$

Wir berücksichtigen nur die infinitesimale Änderung  $\delta\phi_i = -i \cdot \theta^\alpha L_{ij}^\alpha \phi_j$ .  $V(\phi)$  ist invariant unter  $G$ ; wir wählen  $\phi_i$  ortsunabhängig! Aus der Invarianz erhält man:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \cdot \delta\phi_i = \frac{\partial V}{\partial \phi_i} \cdot (-i\theta^\alpha L_{ij}^\alpha \phi_j) \tag{11.19}$$

Man erhält hieraus für  $\alpha = 1, \dots, N$  folgende  $N$  Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j = 0 \tag{11.20}$$

Wir leiten nach  $\phi_k$  ab:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} L_{ij}^\alpha \phi_j + \frac{\partial V}{\partial \phi_i} L_{ik}^\alpha = 0 \tag{11.21}$$

Wähle  $\phi_i = v_i$  so, dass  $V$  minimal wird:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} (\phi_i = v_i) = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial V}{\partial \phi_k \partial \phi_i} L_{ij}^\alpha v_j \right|_{\min} = 0 \tag{11.22}$$

Die Krümmung in der durch  $Lv$  gegebenen Richtung ist gleich null. Wir entwickeln  $V$  am Minimum, wobei der lineare Term offensichtlich Null ist und die irrelevante Konstante nicht berücksichtigt wird:

$$V = -\frac{1}{2} (\mu^2)_{ij} (\phi - v)_i (\phi - v)_j \Rightarrow \boxed{\mu_{ki}^2 L_{ij}^\alpha v_j = 0} \tag{11.23}$$

$L_{ij}^\alpha v_j$  sei null für  $\alpha = 1, \dots, M$ . (Also sei unsere Lösung invariant unter diesen Transformationen.) Damit ist  $(\mu^2)_{ki}$  unbestimmt. Für  $\alpha = M+1, \dots, N$  ist  $L_{ij}^\alpha v_j \neq 0$  und der Eigenwert zu  $L_{ij}^\alpha v_j$  verschwindet. Es gibt also  $N-M$  Felder  $L_{ij}^\alpha (\phi^j - v^j)$ , welche keinen quadratischen Term in  $\mathcal{L}$  haben. Die lineare Unabhängigkeit ist eigentlich noch zu beweisen.

Unsere bisherigen Überlegungen beruhen lediglich auf der klassischen Feldtheorie. Im Rahmen einer relativistischen Quantenfeldtheorie lassen sich die Argumente verallgemeinern und von der Störungstheorie abstrahieren: Es gebe einen erhaltenen Strom  $\partial^\mu j_\mu = 0$ . Aufgrund klassischer Überlegungen erwartet man eine erhaltene Ladung

$$Q = \int_{V \mapsto \infty} d^3 \vec{x} j_0(x) \tag{11.24}$$

die als Generator der zugehörigen Symmetrietransformation fungiert. Wenn aber das Vakuum nicht invariant unter dieser Transformation ist, so müsste  $\hat{Q}|0\rangle \neq 0$  gelten. Dann wäre aber die Norm

$$\langle 0|Q^2|0\rangle = \int d^3\vec{x} \langle 0|j_0(\vec{x})|Q0\rangle = \infty \quad (11.25)$$

wenn das Vakuum nicht unter der entsprechenden Transformation invariant ist. Man kann nun zeigen (vergleiche ITZIKSON+ZUBER), dass entweder  $Q|0\rangle = 0$  mit  $Q = \int d^3\vec{x} j_0(x)$  oder  $\hat{B}Q$ , aber es gibt Zustände mit Masse null und den Quantenzahlen des Stromes, die also durch Anwendung von  $j_0(x)$  auf  $|0\rangle$  erzeugt werden. Man kann zeigen, dass der Spin der GOLDSTONE-Bosonen nur 0 oder  $\frac{1}{2}$  sein kann. Letzteres ist nur möglich, wenn die Symmetrieoperatoren Bosonen und Fermionen mischen; man spricht von der „**Supersymmetrie**“. In Theorien mit indefiniter Metrik (Eichtheorien) müssen die masselosen Zustände nicht unbedingt in physikalischen HILBERT-Räumen liegen (Geister). Es kann manchmal nützlich sein, solche Zustände zu vermeiden (unitäre Eichungen).

## 11.2 Lokale Symmetrien

### 11.2.1 Lokale abelsche Symmetrien, Quantenelektrodynamik

- a.) Ausgangspunkt ist die LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$ , wobei die  $\psi$  DIRAC-Felder mit der Masse  $m$  sind.  $\mathcal{L}$  ist invariant unter der globalen ( $\equiv$  ortsunabhängigen) Transformation  $\psi \mapsto \exp(i\alpha)\psi$ , wobei  $\alpha$  ortsabhängig sein soll:  $\alpha = \alpha(x)$ .  $\mathcal{L}$  ist invariant, wenn man  $\mathcal{L}_1 = \bar{\psi}(i\not{\partial} + e\mathcal{A} - m)\psi$  wählt und für  $A_\mu$  fordert:

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (11.26)$$

Außerdem führen wir die kovariante Ableitung  $(\partial_\mu - ieA_\mu) \equiv D_\mu$  ein. Um für das Feld  $A_\mu$  Bewegungsgleichungen zu erhalten, addiert man den kinetischen Term

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{Eichterm, wobei } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (11.27)$$

Damit ergibt sich die LAGRANGE-Funktion der Quantenelektrodynamik:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{Eichterme} \quad (11.28)$$

$\psi$  ist das Elektron-Feld und  $A_\mu$  das Photon-Feld. Die Bewegungsgleichung für  $A_\mu$  lautet:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu} - \partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\mu} = 0 \Rightarrow \bar{\psi}e\gamma^\mu\psi - \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0 \text{ wegen } \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu A_\mu} \left( \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right) = F_{\nu\mu} \quad (11.29)$$

Die letzte Beziehung kann als Übung nachgerechnet werden. Also ergibt sich  $\partial_\nu F^{\mu\nu} = ej^\mu$  mit  $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$  und das sind die aus der Elektrodynamik bekannten MAXWELL-Gleichungen. Die Bewegungsgleichung für  $\psi$  ergibt sich aus:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} - \partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu\psi} = 0 \Rightarrow (i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (11.30)$$

Entsprechend folgt  $\bar{\psi}(-i\overleftarrow{\not{\partial}} - m) = 0$ .

- b.) Betrachten wir ein skalares geladenes Feld (wie beispielsweise  $\pi^\pm$ ) in Wechselwirkung mit Photonen (aber zunächst ohne Selbst-Wechselwirkung). Die LAGRANGE-Funktion ohne Wechselwirkung lautet:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \quad (11.31)$$

Diese ist invariant unter der Transformation  $\phi \mapsto \phi' = \exp(i\alpha)\phi$ . Invarianz unter lokaler Eichtransformation mit  $\phi' = \exp(i\alpha(x))\phi$  besteht, falls:

$$\mathcal{L} = D_\mu^*\phi^*D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \text{ mit } D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \quad (11.32)$$

Wie lauten die Bewegungsgleichungen?

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*} = ieA_\mu D^\mu\phi - m^2\phi, \quad \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} = D^\mu\phi \Rightarrow (ieA_\mu - \partial_\mu)D^\mu\phi - m^2\phi = 0, \quad \boxed{(D^2 + m^2)\phi = 0} \quad (11.33)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\mu} = ie\phi^* D^\mu \phi + (D_\mu^* \phi^*)(-ie)\phi, \quad \partial_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu A_\mu} = \partial_\nu F^{\nu\mu} \Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} = ie\phi^* D^\mu \phi - ie\phi D^\mu \phi^* \quad (11.34)$$

Man definiert hierzu:

$$j^\mu = ie\phi^* D^\mu \phi - ie\phi D^\mu \phi^* \quad (11.35)$$

Durch Nachrechnen erhält man  $\partial_\mu j^\mu = 0!$

## 11.3 Higgs-Modell

Nach ENGLER und BROUT, HIGGS und KIBBLE, ANDERSON (Supraleitung)

### 11.3.1 Beispiel aus der Festkörperphysik: Supraleitung

Man findet dies unter anderem im ITZIKSON, ZUBER auf Seite 612. Im Supraleiter gibt es durch Phonon-Wechselwirkungen **Elektron**-Paare mit der Ladung  $q = 2e$ . Im Grundzustand ist ihre Dichte konstant:  $\psi\psi^* = \varrho^2$  (ähnlich wie im  $\phi$  im GOLDSTONE-Modell). Wir betrachten stationäre Lösungen!

$$\vec{D} \frac{\psi}{i} = \left( \frac{\vec{\nabla}}{i} - q\vec{A} \right) \psi \quad (11.36)$$

Das Feld  $\psi$  lässt sich in der Form  $\psi = \varrho(x) \exp(i\theta(x))$  angeben und für den Strom  $\vec{J}$  ergibt sich für konstantes  $|\psi|$ :

$$\vec{J} = \frac{1}{2m} \psi^* \left( \frac{\vec{\nabla}}{i} - 2q\vec{A} \right) \psi = \frac{\varrho^2}{m} \cdot \left( \vec{\nabla}\theta(x) - q\vec{A} \right) \quad (11.37)$$

Der Strom muss erhalten sein, also  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . Außerdem wählen wir für  $\vec{A}$  transversale Eichung:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Mit diesen Bedingungen ergibt sich:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{\varrho^2}{m} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\theta(x) - q\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{\varrho^2}{m} \cdot \Delta\theta(x) \quad (11.38)$$

Falls  $\theta = \text{const.}$ , so gilt  $\vec{J} = -\frac{\varrho^2}{m} q\vec{A}$ . Aus einer der MAXWELL-Gleichungen erhält man:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = q\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = q\vec{J} \Rightarrow \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \Delta\vec{A} = q\vec{J} \Rightarrow \Delta\vec{A} = -q\vec{J} = \frac{q^2 \cdot \varrho^2}{m} \cdot \vec{A} \quad (11.39)$$

$$\boxed{\Delta\vec{A} = \frac{\varrho^2 \cdot q^2}{m} \cdot \vec{A}} \quad (11.40)$$

Im Supraleiter hat  $A$  nur eine endliche Reichweite! Die Eindringtiefe beträgt  $\lambda = \frac{\sqrt{m}}{|e \cdot q|}$ . Das masselose Photonfeld wird massiv durch seine Wechselwirkung mit dem geladenen Skalarfeld  $\psi$ .

### 11.3.2 Abelsche Eichtheorien (lokal eichinvariant!)

Wir betrachten wieder das U(1)-symmetrische Modell und wollen nun aber lokale Eichtransformationen zulassen:  $\phi \mapsto \phi' = \phi \exp(-ig\Lambda(x))$ . Ursprünglich lautete unsere LAGRANGE-Funktion  $\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi)$ . Das Potential  $V$  ist natürlich wieder invariant! Wir wollen die kovariante Ableitung  $D$  so umdefinieren, dass gilt:

$$D\phi \xrightarrow{\text{Lokale Eichtransformation}} D'\phi' = (D\phi) \exp(-ig\Lambda(x)) \quad (11.41)$$

Dies erreicht man gerade durch  $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu(x)$  und der Forderung  $A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$ . Zusätzlich führt man einen kinetischen Term für  $A_\mu$  ein, welcher eichinvariant ist, nämlich  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  mit  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda^2 (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (11.42)$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:



1.)  $\mu^2 \geq 0$ : Keine spontane Symmetriebrechung

Dies entspricht der Quantenelektrodynamik für geladenes Skalarfeld mit Selbst-Wechselwirkung.

2.)  $\mu^2 < 0$ : Spontane Symmetrie-Brechung

Es liegt ein klassisches Minimum vor für:

$$\phi^\dagger \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda^2} \equiv \frac{v^2}{2} \quad (11.43)$$

Das Potential ist auch hier gegeben durch

$$V = \lambda^2 \left( \phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 + \text{irrelevante Konstante} \quad (11.44)$$

und wir machen denselben Ansatz wie beim GOLDSTONE-Modell (kleine Störung um klassisches Minimum):

$$\phi = \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \exp\left(i \cdot \frac{\xi(x)}{v}\right) \quad (11.45)$$

Die Exponentialfunktion entspricht einer lokalen Operator-Eichtransformation. (Diese Formulierung führt auf Zustände indefiniter Metrik, ist aber explizit renormierbar.)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu + igA_\mu)(v + \eta(x)) + (v + \eta(x)) \left( \frac{i}{v} \partial_\mu \xi \right) \right]^\dagger \left[ (\partial_\mu + igA_\mu)(v + \eta(x)) + (v + \eta(x)) \left( \frac{i}{v} \partial_\mu \xi \right) \right] \\ &\quad - V \left( \frac{(v + \eta)^2}{2} \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{2} [igA_\mu v + \partial_\mu \eta(x) + i\partial_\mu \xi]^\dagger [igA_\mu v + \partial_\mu \eta(x) + i\partial_\mu \xi] + \underbrace{-\frac{\mu^2}{2} \cdot \eta^2 - \frac{\lambda^2}{4} \cdot 6\eta^2 v^2}_{-|\mu^2|\eta^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{W.W.} = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi + gA_\mu v)^2 - |\mu^2|\eta^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{W.W.} \end{aligned} \quad (11.46)$$

Für das  $\eta$ -Feld hat man die Masse  $\sqrt{-2\mu^2}$ . Wegen des Terms  $igvA_\mu \partial^\mu \xi$  lässt sich die Masse des  $A$ - und  $\xi$ -Feldes nicht unmittelbar ablesen. Man müsste eigentlich alle Propagatoren aufschreiben und das Problem diagonalisieren. Besser noch wäre, die Massenmatrix (also alle bilinearen Terme) aufzuschreiben und zu diagonalisieren.

$$\begin{array}{c} A \quad \quad \xi \\ \text{~~~~~} \\ gv k_\mu \end{array}$$

Statt dessen führen wir eine Operator-Eichtransformation durch:

$$\phi \mapsto \phi' = \phi \cdot \exp\left(-i \frac{\xi(x)}{v}\right) = \frac{v + \eta(x)}{\sqrt{2}} \quad (11.47)$$

Die Phase des Feldes wird gewissermaßen „eingefroren“.

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{gv} \cdot \partial_\mu \xi(x) \quad (11.48)$$

$\mathcal{L}$  ist nach Konstruktion invariant unter solchen Transformationen. Wir drücken  $\mathcal{L}$  durch  $\phi' = \frac{v+\eta}{\sqrt{2}}$  und  $A'$  aus:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \cdot (\partial_\mu \eta)^2 - |\mu^2| \cdot \eta^2 + \frac{1}{2} \cdot g^2 \cdot v^2 \cdot A_\mu'^2 - \frac{1}{4} \cdot F_{\mu'\nu'} F^{\mu'\nu'} + \text{W.W.} \quad (11.49)$$

(Der Massenterm für  $A$  folgt auch direkt aus dem kinetischen Term von  $\phi'$ !) Das  $\xi$ -Feld wurde „weg-geeicht“.

$A'_\mu$  hat damit die Masse  $m_A = gv = g \cdot \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda^2}}$ . Bei dieser Eichung treten nur physikalische Felder auf; man spricht von einer **unitären Eichung**. Andererseits lässt sich die Renormierbarkeit der Theorie einfacher in der

ursprünglichen Eichung beweisen (renormierbare Eichung).  $\xi$  ist vom longitudinalen Anteil des  $A$  absorbiert worden. Die Zahl der **physikalischen** Freiheitsgrade (Teilchen) ist die gleiche für  $\mu^2 > 0$  und  $\mu^2 < 0$ : entweder zwei transversale Photonen, (masselos)  $\phi$  und  $\phi^*$  oder drei massive Vektorbosonen und  $\eta$ . Wir werden später zeigen, dass die Theorie in der entsprechenden Eichung manifest renormierbar ist, wenn wir zusätzlich  $\partial^\mu A_\mu = 0$  fordern (R-Eichung). Die Unitarität lässt sich jedoch nicht so einfach beweisen, jedenfalls nicht, wenn wir zu nicht-abelschen Theorien übergehen.

Der Einbau von Fermionen ist klar:  $\bar{\psi}\not{\partial}\psi \mapsto \bar{\psi}\not{D}\psi$  (vergleiche auch die Diskussion von OKUN: 20.5)! Wir weisen außerdem darauf hin, dass die Masse des HIGGS-Bosons und des Vektorfeldes zwar unabhängig gewählt werden können (einerseits  $gv$  und andererseits  $|\mu^2|$ ), das aber dennoch  $m_H$  nicht drastisch größer als  $m_A$  sein sollte:

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} = \sqrt{2\lambda^2 v^2} = \sqrt{2}\lambda v \tag{11.50}$$

Ferner gilt  $m_A = gv$ . Daraus folgt:

$$m_H = \sqrt{2} \cdot \frac{\lambda}{g} \cdot m_A \tag{11.51}$$

Wenn man (wie in der S-W-Theorie)  $g \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3}$  postuliert und  $\lambda \lesssim O(1)$  (etwas großzügiger  $\frac{\lambda^2}{4\pi} = O(1)$ ) verlangt (sonst hat man einen stark wechselwirkenden skalaren Sektor und die Störungstheorie wird fraglich), so findet man  $m_H \lesssim (3-5) \cdot m_A$ . Ähnliche Überlegungen gelten auch für die S-W-Theorie. Bei etwa 300-1000 GeV erhält man auf alle Fälle wichtige Informationen über den HIGGS-Sektor.

### 11.3.3 Nicht-Abelsche Eichgruppen/Einschub über Lie-Gruppen

Eine ausführliche Darstellung findet sich beispielsweise im J.P.ELLIOT+P.G.DAWLER: „Symmetry in Physics“.  $L$  seien die Generatoren einer LIE-Gruppe. Es gilt  $[L^a, L^b] = iC_{abc}L^c$  für  $a, b, c = 1, \dots, N$ .  $C$  sind die sogenannten Strukturkonstanten, welche antisymmetrisch bezüglich aller Indizes sind. Außerdem erfüllen die  $C$  die JACOBI-Identität:

$$C_{abn}C_{ncd} + C_{bcn}C_{nad} + C_{can}C_{nbd} = 0 \tag{11.52}$$

(Die Indizes  $a, b$  und  $c$  werden hierbei zyklisch vertauscht.) Für die ABELSche Gruppe gilt  $C = 0$ . Wenn man Indexmengen  $A, B$  finden kann, so dass  $C_{abc} = 0 \forall a \in A, \forall b \in B$ , so lässt sich  $L^a$  in zwei Mengen von miteinander kommutierenden Generatoren zerlegen. Dann ist  $G$  das direkte Produkt zweier LIE-Gruppen. Wir werden im folgenden nur kompakte LIE-Gruppen betrachten:  $U\phi = \exp(-i\theta^\alpha L_\alpha)\phi$ , wobei  $\theta$  Element einer kompakten Menge ist (beispielsweise LORENTZ-Boost, Drehungen und Translationen sind ausgeschlossen). Unter dem **Rang** einer Gruppe versteht man die maximale Anzahl vertauschbarer Generatoren. Beispielsweise gilt  $\text{Rang}[\text{SU}(3)] = 2$ ; die vertauschbaren Generatoren sind  $\frac{2}{\sqrt{3}}Y$  und  $I_3$ . Noch zum Begriff der **Darstellung**: Dabei handelt es sich um eine Abbildung (Homomorphismus), welche Elemente einer Gruppe  $G$  auf eine Menge von Operatoren  $U(G)$ , welche auf einem linearen Vektorraum  $V$  wirken, abbildet. Die Dimension von  $V$  ist die Dimension der Darstellung. Eine **treue Darstellung** ist ein Isomorphismus, eine **entartete Darstellung** ist nicht treu. Die niedrigst-dimensionale treue Darstellung entspricht der **fundamentalen Darstellung**. Beispielsweise transformieren folgende Objekte unter der fundamentalen Darstellung:

- \* SU(2): Zweier-Spinoren
- \* O(n): Vektoren
- \* SU(3): Colour, Quark-Felder

Alle anderen Darstellungen können durch Ausreduktion der Produkt-Darstellungen erzeugt werden, wie zum Beispiel Mesonen:  $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$  oder Matrizen in drei Dimensionen:  $3 \otimes 3 = 1 \oplus 3 \oplus 5$ . Die **adjungierte Darstellung** wird durch die Strukturkonstanten selbst erzeugt (Dimension  $N$ ):  $(L^a)_{bc} = -iC_{abc}$  (Test: JACOBI-Identität). Nach dieser Darstellung werden sich die  $N$  Eichfelder transformieren.

Gewisse Polynome in den Generatoren vertauschen mit allen Generatoren der Gruppe; dies sind CASIMIR-Operatoren. Sie haben also den gleichen Wert für alle Zustände eines Multipletts und können somit zur Klassifikation der Multipletts verwendet werden. Wir betrachten folgende Beispiele:

- \* Drehgruppe:  $C_2 = L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \Rightarrow L(L+1)\mathbf{1}$
- \* Isospin:  $C_2 = \sum_{a=1}^3 I_a^2 = I(I+1)\mathbf{1}$

$$\star \text{ Fundamental-Darstellung: } C_2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\tau_i}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \mathbf{1}$$

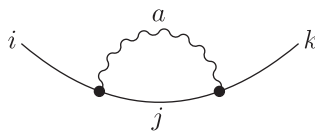
$$\star \text{ Adjungierte Darstellung: } C_2 = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk'} = 2\delta_{kk'}$$

$$\star \text{ SU(3): } C_2 = \sum_{a=1}^8 I_a^2$$

$$\star \text{ Fundamental-Darstellung: } \frac{1}{4} \sum_{a,j} \lambda_{ij}^a \lambda_{jk}^a = \frac{4}{3} \delta_{ik}$$

$$\star \text{ Adjungierte Darstellung: } \sum_{a,b} f_{abc} f_{abd} = 3\delta_{cd}$$

Also ist  $C_2(F) = \frac{4}{3}$  und  $C_2(A) = 3$ . Diese CASIMIR-Operatoren treten häufig bei der Berechnung von FEYNMAN-Diagrammen auf. Beispiel:



$$= \frac{1}{4} \lambda_{ij}^a \lambda_{jk}^a = C_2(F) \delta_{ik} \quad (11.53)$$


Ferner gilt

$$\text{Tr}_R(L^a L^b) = \frac{\text{Dimension von } R}{\text{Dimension von } G} \cdot C_2(R) \cdot \delta^{ab} \quad (11.54)$$

für eine beliebige Darstellung  $R$ . Der Beweis ist klar und kann als Übung durchgeführt werden. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel. Für  $R = F$  und  $G = \text{SU}(3)$  erhält man:

$$\text{Tr}_F(L^a L^b) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \delta^{ab} = \frac{1}{2} \cdot \delta^{ab} \quad (11.55)$$

Betrachten wir folgende Anwendung bei FEYNMAN-Diagrammen:



$$\sim \text{Tr}_F(L^a L^b) = \frac{3}{8} \cdot C_2(F) \cdot \delta^{ab} = \frac{1}{2} \cdot \delta^{ab} \quad (11.56)$$



$$\sim ? \text{ (Aufgabe)} \quad (11.57)$$

### 11.3.4 Nichtabelsche Eichfelder

Wir betrachten die LAGRANGE-Dichte  $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \mathcal{L}(\phi', \partial\phi')$ . Diese ist invariant unter globalen Transformationen  $\phi \mapsto \phi' = U\phi$ , wobei  $U$  die unitäre Matrix  $\exp(-i\theta^a L_a)$  ist und  $L_a$  die Generatoren der Transformation (Für  $\text{SU}(2)$  beispielsweise PAULI-Matrizen). Hierbei gilt natürlich  $\partial\phi' = U\partial\phi$  (wegen  $\theta = \text{const.}$ ). Wir können wieder lokale Invarianz ( $\theta(x)$ !) erreichen, wenn wir  $\partial$  durch  $D$  ersetzen, so dass wiederum die Forderung

$$\boxed{D'\phi' = U(D\phi)} \quad (11.58)$$

erfüllt ist; es soll sich also  $D\phi$  wie  $\phi$  transformieren. Dies wird die Form von  $D$  und somit des Eichfeldes festlegen. Wir betrachten infinitesimale Transformationen:

$$\phi \mapsto \phi' = \phi - i\theta^a(x) L_a \phi = \phi + \delta\phi \quad (11.59)$$

Definiere  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ , wobei  $A_\mu = A_\mu^a L_a$ . Wie muss sich  $A$  transformieren? Achtung:  $[A, L] \neq 0$ ! Dazu fordern wir, dass sich  $D\phi$  wie  $\phi$  transformieren oder dass  $D$  invariant sein soll. Wir nehmen jetzt nur Terme mit, die linear in  $\delta$  sind:

$$\begin{aligned} \delta(D\phi) &= (\partial + ig(A + \delta A))(\phi + \delta\phi) - (\partial + igA)\phi = (\partial + igA) \underbrace{(-i\theta^a(x)L_a)\phi}_{\delta\phi} + ig\delta A\phi = \\ &= -i\theta^a(x)L_a \underbrace{(\partial + igA)\phi}_{D\phi} + ig \underbrace{\left( \delta A - i[A, \theta^a L_a] - \frac{1}{g}(\partial\theta^a(x)L_a) \right)}_{\text{Forderung: } =0} \phi \end{aligned} \quad (11.60)$$

Damit erhalten wir (wobei  $A = A^a L^a$ ):

$$\boxed{\delta A^a = \frac{1}{g}\partial\theta^a + C_{abc}A^b\theta^c} \quad (11.61)$$

$C_{abc}$  sind die Strukturkonstanten der nicht-abelschen Gruppe. Speziell für konstantes  $\theta^a$  transformiert sich  $A^a$  unter der adjungierten Darstellung. Insgesamt finden wir

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_i, D\phi_i) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(F^a)^{\mu\nu}} \quad \text{wobei } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a L^a - \partial_\nu A_\mu^a L^a + ig[A_\mu^a L^a, A_\nu^b L^b] \quad (11.62)$$

Für den letzten Term können wir auch schreiben:

$$i^2 g C_{abc} L^c A_\mu^a A_\nu^b \quad \text{oder } ig[A_\mu, A_\nu] \quad (11.63)$$

$A^a$  hat genau so viele Komponenten wie die Symmetrie-Gruppe Generatoren hat. In Komponenten-Schreibweise gilt:

$$\boxed{F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gC_{abc}A_\mu^b A_\nu^c} \quad (11.64)$$

Im  $F^a F^a$ -Term sind  $A^3$ - und  $A^4$ -Terme enthalten! Bereits eine reine YANG-MILLS-Theorie ohne Materie/äußere Quellen hat nicht-triviale Selbstwechselwirkungen (vergleiche Gravitation und MAXWELL-Gleichungen).

### 11.3.5 Spezialisierung auf SU(2)

Dies Dimension der Gruppe ist gleich drei; ein wichtiges Anwendungsbeispiel ist der „Isospin“.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad C_{abc} = \varepsilon_{abc} \quad (11.65)$$

Der Pfeil bezieht sich hier auf den inneren Symmetrie-Raum. Damit ist  $\vec{F}_{\mu\nu}$  gegeben durch:

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu - g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (11.66)$$

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ig\vec{A}_\mu \vec{T})\phi \quad (11.67)$$

Betrachten wir Beispiele für  $\vec{A}_\mu \vec{T}\phi$  (hat dieselbe Darstellung wie  $\phi$ ):

- 1.)  $\phi$  in der fundamentalen Darstellung:  $\phi = (\phi^\dagger, \phi^0)^\top$

$$T^i = \frac{\tau^i}{2} \Rightarrow \boxed{\vec{A}_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{pmatrix}} \quad (11.68)$$

- 2.)  $\phi$  in der adjungierten Darstellung:  $(T^i)_{jk} = \varepsilon_{ijk}$

$$\boxed{[(\vec{A} \cdot \vec{T})\vec{\phi}]_k = A_\mu^i \varepsilon_{ijk} \phi^j = (\vec{A} \times \vec{\phi})_k} \quad (11.69)$$

Wie bereits früher betont, liegt die Darstellung, unter welcher sich die Eichfelder transformieren, fest, nicht aber die der „Materie-Felder“. Anmerkung: Gelegentlich wird auch die Kopplungskonstante in der Felddefinition absorbiert, also  $gA \mapsto A$ ,  $F^2 \mapsto \frac{1}{g^2}F^2$  (Änderung der Propagatoren!)

## 11.3.6 Spontane Brechung der lokalen SU(2)-Symmetrie

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} + \mathcal{L}(\phi_i, D\phi_i) \text{ mit } \mathcal{L}(\phi_i, D\phi_i) = |D_\mu\phi|^2 - V(\phi) \quad (11.70)$$

Das Potential  $V$  wird analog zum ABELschen Fall gewählt. Den einfachsten Fall erhält man für  $\phi$  in der „fundamentalen“ Darstellung:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \chi(x) \end{pmatrix} \quad (11.71)$$

Der Grundzustand ist:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (11.72)$$

Alle drei Transformationen sind gebrochen, auch Drehungen um die  $z$ -Achse:

$$\exp \left[ i\frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \exp \left( -i\frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11.73)$$

Der Spin zeigt zwar weiter in  $z$ -Richtung; der Zustand wird jedoch mit einem Phasenfaktor multipliziert! Alle drei Bosonen sind massiv. Die Massenterme des Eichfeldes rühren von der HIGGS-Eichboson-Wechselwirkung her.

$$(D\phi)^2 = \left| \left( \partial_\mu - ig\vec{A} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \right) \phi \right|^2 \Rightarrow \left| -ig\vec{A} \cdot \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{g^2}{4} \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \left| \vec{A} \cdot \vec{\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g^2 \cdot v^2}{4} \cdot (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \quad (11.74)$$

liefert den Massenterm für  $A$ . Es gilt  $\tau_i(0, 1)^T \neq 0 \forall i = 1, 2$  und  $3$ . In einer anderen Formulierung zerlegen wir  $\vec{A}$ ,  $\vec{\tau}$  nach Leiter-Operatoren:

$$\vec{A} \cdot \vec{\tau} = A^+ \tau^- + A^- \tau^+ + A_3 \tau_3 \text{ mit } A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 \pm iA_2) \text{ und } \tau_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_1 \pm i\tau_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (11.75)$$

Damit erhalten wir für den Massenterm:

$$\frac{g^2 \cdot v^2}{8} \cdot \left| \sqrt{2}A_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 = \boxed{\frac{g^2 \cdot v^2}{4} \left( A_+ A_- + \frac{1}{2} A_3^2 \right)} \quad (11.76)$$

$A_\pm$  entspricht einem komplexen Feld und wird das geladene W-Boson liefern. Aus dem reellen Feld  $A_3$  werden wir das Z-Boson erhalten. Die Masse der  $A_3$ -,  $A_+$ - und  $A_- (= A_+^*)$ -Felder ist  $\frac{g \cdot v}{2}$ . Die Unterscheidung von  $A_3$ ,  $A_+$  und  $A_-$  wird durch die Kopplung von  $A_\pm$  an das Photon möglich, welches die SU(2)-Symmetrie bricht. Anmerkung: Die Masse der Vektorbosonen wird erst durch die Wahl der Darstellung für  $\phi$  sowie durch  $V(\phi)$  festgelegt, wie man bereits an folgendem einfachen Beispiel sehen kann. Wählt man für  $\phi$  die adjungierte Darstellung  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ , so findet man als Minimum  $\vec{\phi}_{min} = (0, 0, v)^T$ ,  $D_\mu \vec{\phi} = (\partial_\mu + ig\vec{A} \times) \vec{\phi}$ . Der Massenterm ist

$$\frac{g^2}{2} [(\vec{A} \times \vec{\phi}_{min})]^2 = \frac{g^2 v^2}{2} (A_1^2 + A_2^2) \quad (11.77)$$

und  $A_3$  bleibt masselos.



# Kapitel 12

## Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung

### 12.1 Ansatz

Wir fordern, dass die Eichbosonen an erhaltene Ströme koppeln, dass linkshändige und rechtshändige Fermionen sich unter unterschiedlichen Darstellungen transformieren und dass es keine „harten“ Massenterme für Fermionen gibt. Dann kann man links- und rechtshändige Teilchen getrennt betrachten. (V- und A-Wechselwirkung erhalten die Helizität!) Massenterme für Fermionen und Eichbosonen werden über spontane Symmetriebrechung eingeführt. Wir beschränken uns zunächst auf Elektronen  $e$  und Neutrinos  $\nu$ ; Quarks betrachten wir später. Neben  $\vec{A}$  und  $B$  als SU(2)- und U(1)-Eichfelder treten folgende Felder auf:

- 1.) linkshändiges Neutrino und linkshändiges Elektron im Isospin-Dublett:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

- 2.) HIGGS-Dublett:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

und die Isospin-Singulets  $e_R$  und  $\nu_R$ . Letzteres wäre unnötig für  $m_\nu = 0$ . Bei  $L$  und  $\varphi$  handelt es sich um Isodoublets; diese haben Isospin 1/2 und tragen Hyperladung. Rechtshändige Elektronen  $e_R$  und Neutrinos  $\nu_R$  koppeln nicht an  $W^\pm$ ; also handelt es sich um Isospin-Singulets. Die sehr kleine Neutrinomasse  $m_\nu$  wollen wir im folgenden außer Acht lassen. Wir können damit für die Hyperladung schreiben (wobei diese immer für das ganze Multiplett gelten muss):

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad \text{mit } Y = \begin{cases} -1 & \text{für } L = (\nu_L, e_L)^\top \\ -2 & \text{für } e_R \\ 0 & \text{für } \nu_R \\ 1 & \text{für } \varphi = (\varphi^+, \varphi^-)^\top \end{cases} \quad (12.3)$$

$Y$  ist die doppelte mittlere Ladung eines Multipletts. Der Ansatz ist so gewählt, dass  $Q(\varphi^0) = Q(0, 1)^\top = 0$  ist. Das Vakuum ist somit invariant unter der Transformation, welche durch  $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$  erzeugt wird. Das zugehörige Eichboson ist masselos. Die LAGRANGE-Dichte hat folgende Form:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}\vec{G}_{\mu\nu}\vec{G}^{\mu\nu}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{i\bar{L}\not{D}L}_{\textcircled{3}} + \underbrace{i\bar{e}_R\not{D}e_R}_{\textcircled{4}} + \underbrace{|D_\mu\varphi|^2}_{\textcircled{5}} - \underbrace{\frac{\lambda^2}{2}\left(|\varphi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2}_{\textcircled{6}} - \underbrace{f_e(\bar{L}e_R\varphi^- + \bar{e}_RL\varphi^+)}_{\textcircled{7}} \quad (12.4)$$

Dies ist die allgemeinste SU(2)- $\otimes$ -U(1)-invariante Dichte ohne Neutrino-Massen-Term.  $\vec{G}_{\mu\nu}$  ist das Eichfeld, welches zur Isospin-Transformation gehört.  $D$  ist die kovariante Ableitung, welche für die diversen Felder  $L$ ,

$e_R$ ,  $\varphi$  zu kinetischen Termen und zur Eichboson-Materie-Kopplung führt. Wenn man eine Produktgruppe hat, also  $SU(2) \otimes U(1)$ , so hat man auch zwei Kopplungskonstanten, welche wir  $g$  und  $g'$  nennen wollen:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\vec{A}_\mu\vec{T} - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \text{ wobei } T_i = \left\{ \begin{array}{c} \tau_i \\ \varepsilon_{ijk} \end{array} \right\} \text{ für Isospin } T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right\} \quad (12.5)$$

Die Feldstärken sind in komponentenunabhängiger Schreibweise gegeben durch

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu] \quad (12.6)$$

oder auch

$$\vec{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g\vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu \quad (12.7)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (12.8)$$

Betrachten wir die sieben Terme in der obigen LAGRANGE-Dichte:

- ① Kinetischer Term des  $A$ -Feldes und Selbst-Wechselwirkung
- ② Kinetischer Term des  $B$ -Feldes
- ③ Kinetischer Term des linkshändigen Leptons, liefert auch  $(V-A)$ -Kopplung (Vektor  $(\gamma_\mu)$ -Axial-Vektor  $(\gamma_\mu\gamma_5)$ -Kopplung) an  $\vec{A}_\mu$  und an  $B_\mu$
- ④ Kinetischer Term des rechtshändigen Leptons, Kopplung an  $B_\mu$
- ⑤ Kinetischer Term des  $\varphi$ -Feldes, enthält Kopplungen von  $\varphi$  an  $\vec{A}$  und  $B$   
Über spontane Symmetriebrechung liefert dieser Term die Massen der Eichbosonen.
- ⑥ Selbst-Wechselwirkung des HIGGS-Feldes und Ursprung der spontanen Symmetriebrechung mit  $\varphi_0 = \left(0, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^T$
- ⑦ YUKAWA-Term  
Dieser beschreibt die **skalare** Wechselwirkung zwischen links- und rechtshändigen Leptonen und dem HIGGS-Feld. Über spontane Symmetriebrechung erhält man Massenterme für das Elektron und die Wechselwirkung zwischen Elektron und HIGGS-Boson.

## 12.2 Konsequenzen

### 12.2.1 Massenverhältnisse der Eichbosonen, „Mischungswinkel“

Wegen der drei gebrochenen Symmetrie-Transformationen erwarten wir drei massive und ein masseloses Eichboson. Andererseits koppeln **alle vier** Eichfelder an das HIGGS-Feld! Wir wenden  $D$  auf  $\left(0, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)^T$  an; dazu zerlegen wir den Term nach  $A^+$ ,  $A^-$  und  $A_3$ , wobei  $\tau^+$  als Aufsteigeoperator fungiert:

$$\tau^+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \tau_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.9)$$

$$D\varphi \Rightarrow \left(-i\frac{g}{2}\vec{A}_\mu \cdot \vec{\tau} - i\frac{g'}{2}YB\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\frac{v}{\sqrt{2}} \left[(-gA_3 + g'B) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2}gA^- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \quad (12.10)$$

Daraus folgt der Massenterm:

$$\frac{v^2}{8}(g^2 + g'^2) \left(\frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}A_3 - \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}B\right)^2 + \frac{v^2}{4}g^2A^+A^- \quad (12.11)$$

Um den ersten Term zu diagonalisieren, führen wir eine geeignete Linearkombination von  $A_3$  und  $B$  ein:

$$Z \equiv A_3 \cos \theta_w - B \sin \theta_w, \quad A \equiv B \cos \theta_w + A_3 \sin \theta_w \text{ wobei } \frac{g}{\bar{g}} = \cos \theta_w, \frac{g'}{\bar{g}} = \sin \theta_w \text{ mit } \bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}$$



(12.12)

Dies lässt sich nach  $A_3$  und  $B$  auflösen:

$$A_3 = Z \cos \theta_w + A \sin \theta_w, \quad B = -Z \sin \theta_w + A \cos \theta_w \quad (12.13)$$

Der Index „w“ steht für „weak“. Außerdem verwenden wir aus historischen Gründen die Bezeichnung  $W^\mp \equiv A^\pm$ . Damit können wir den obigen Massenterm umschreiben in:

$$\bar{g}^2 \frac{v^2}{8} Z^2 + g^2 \frac{v^2}{4} WW^* \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_Z = \bar{g} \frac{v}{2}, m_W = g \cdot \frac{v}{2}, \frac{m_W}{m_Z} = \frac{g}{g'} = \cos \theta_w} \quad (12.14)$$

Diese Massen-Beziehung ist natürlich ganz spezifisch für die gewählte HIGGS-Struktur!

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{m_A = 0} \quad (12.15)$$

$A$  ist damit masselos und das Vakuum ist invariant unter  $U(1)$ !

## 12.3 Kopplungen der neutralen Eichbosonen an Ladung und Isospin

Wir gehen aus von

$$-igT_3 A_3 - ig' \frac{Y}{2} B \quad (12.16)$$

und eliminieren  $Y$  über  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ . Wir ersetzen außerdem  $A_3$  und  $B$  durch  $A$  und  $Z$  sowie  $g$  und  $g'$  durch  $\bar{g}$  und  $\sin \theta_w$  entsprechend den vorherigen Gleichungen. Damit erhalten wir:

$$-i\bar{g} [\sin \theta_w \cos \theta_w (QA) + (T_3 - Q \sin^2 \theta_w)Z] \quad (12.17)$$

Da nach Konstruktion linkshändige und rechtshändige Teilchen die gleiche Ladung haben, koppeln links- und rechtshändige Teilchen also gleich stark an das  $A$ -Feld. Elektromagnetische Wechselwirkung erhält Parität. Das Vakuum hat Ladung 0 wegen  $Q(0,1)^\top = 0$ . Als erste Relation zwischen den Kopplungskonstanten ergibt sich:

$$\boxed{\bar{g} \sin \theta_w \cos \theta_w = e = \sqrt{4\pi\alpha} \text{ mit } \bar{g} = \sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (12.18)$$

$$\left( = g \cdot \sin \theta_w = g' \cdot \cos \theta_w \Rightarrow g^2 g'^2 = (g^2 + g'^2) \cdot e^2 = \frac{e^4}{\sin^2 \theta_w \cdot \cos^2 \theta_w} \right) \quad (12.19)$$

Wir haben zwei Kopplungskonstanten  $g$  und  $g'$  entsprechend der Gruppenstruktur  $SU(2) \otimes U(1)$ . Wenn die Theorie invariant unter einer einfachen Gruppe ist, welche  $SU(2) \otimes U(1)$  enthält, dann gäbe es nur **eine** Kopplungskonstante und  $\frac{g'}{g}$  wäre als CLEBSCH-GORDON-Koeffizient festgelegt.

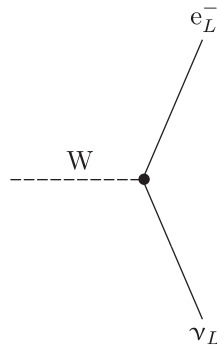
## 12.4 $M_W$ , $v$ und Fermi-Kopplung $G_F$

Die einzige dimensionsbehaftete Größe in der effektiven LAGRANGE-Funktion ist der Vakuum-Erwartungswert des HIGGS-Feldes  $v$ . Also sind  $G_F$ ,  $M_W$  und  $M_Z$  proportional zu  $v$ . Betrachten wir nun die f-f̄-W-Kopplung:

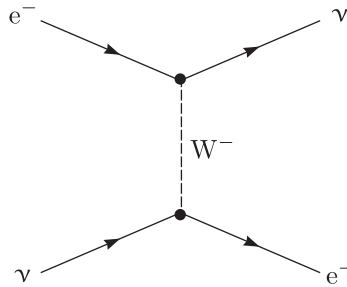
$$-i\frac{g}{2} \bar{L} \vec{A} \cdot \vec{\tau} L \Rightarrow -i\frac{g}{2} (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) (\mathcal{A}_+ \tau_- + \mathcal{A}_- \tau_+) \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} [+A_3 \tau_3] \text{ mit } \tau_+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau_- = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.20)$$

Den  $A_3$ -Term lassen wir außer Acht, da er keinen Übergang zwischen  $e_L$  und  $\nu_L$  liefert und erhalten:

$$-i\frac{g}{2} \sqrt{2} (\bar{e}_L \mathcal{A}_+ \nu_L + \bar{\nu}_L \mathcal{A}_- e_L) = \boxed{-i\frac{g}{2} \sqrt{2} (\bar{e}_L \mathcal{W}_- \nu_L + \bar{\nu}_L \mathcal{W}_+ e_L)} \quad (12.21)$$



Im Niederenergie-Limes tragen nur virtuelle W-Bosonen bei. Dies führt auf eine effektive Wechselwirkung der Form:



Für die Amplitude ergibt sich:

$$A = \left( \frac{g \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \bar{e}_L \gamma^\beta \nu_L \cdot \frac{g_{\beta\alpha} - \frac{k_\beta k_\alpha}{M_W^2}}{M_W^2 - k^2} \cdot \bar{\nu}_L \gamma^\alpha e_L \quad (12.22)$$

Es gilt  $\frac{k_\alpha k_\beta}{M^2} \mapsto 0$ , da  $k^2 \ll M_W^2$  ist. Außerdem können wir mit

$$\bar{\nu}_L \gamma^\alpha e_L = \bar{\nu} \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \gamma^\alpha \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) e \quad (12.23)$$

die Amplitude schreiben als:

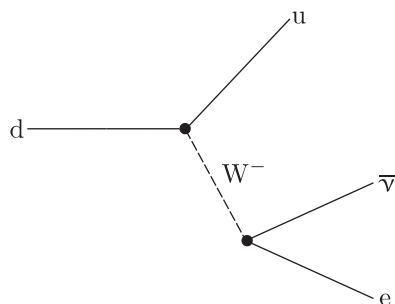
$$A = \left( \frac{g \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot M_W^2} \cdot (\bar{e} \gamma^\beta \cdot (1 - \gamma_5) \nu) \cdot (\bar{\nu} \gamma_\beta \cdot (1 - \gamma_5) e) \quad (12.24)$$

Aus historischen Gründen definiert man:

$$\left( \frac{g \cdot \sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot M_W^2} = \boxed{\frac{g^2}{8 \cdot M_W^2} \equiv \frac{G_F}{\sqrt{2}}} \quad (12.25)$$

Diese Wechselwirkung ist universell; sie trägt ganz allgemein bei für Übergänge zwischen  $(\mu \bar{\nu}_\mu)$ ,  $(\tau \bar{\nu}_\tau)$  und  $(u \bar{d})$ . Insbesondere führt sie auch zum  $\beta$ -Zerfall  $n \mapsto p + e + \bar{\nu}$ .

$$(udd) \mapsto (uud) + e + \bar{\nu} \quad (12.26)$$



Man setzt nun  $G_F \equiv G_\mu$ , wobei sich  $G_\mu$  aus der Lebensdauer des  $\mu$  bestimmen lässt:

$$\tau_\mu^{-1} = \Gamma_\mu = \frac{G_F^2 \cdot m_\mu^5}{192\pi^3} \cdot (1 + \text{kleine Massen- und Strahlungskorrekturen}) \quad (12.27)$$

Andererseits ist  $M_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$  und somit  $v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} = 246 \text{ GeV}$ . Man kann die Kopplungskonstante  $g = \frac{e}{\sin\theta_w}$  sowie  $M_W$ ,  $M_Z$  aus  $\theta_w$ ,  $\alpha$  und  $G_M$  bestimmen. ( $\sin\theta_w$  kann in Nieder-Energie-Neutrino-Streuxperimenten gemessen werden.)

$$M_W^2 = \frac{\sqrt{2} \cdot g^2}{8G_F} = \frac{4\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{2}}{8 \cdot \sin^2\theta_w \cdot G_F} \Rightarrow M_W = \sqrt{\frac{\alpha \cdot \pi}{\sqrt{2} \cdot G_F}} \cdot \frac{1}{\sin\theta_w} = \frac{37,3 \text{ GeV}}{\sin\theta_w} \approx \frac{37,3 \text{ GeV}}{\sqrt{0,22}} \approx \boxed{80 \text{ GeV}} \quad (12.28)$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos\theta_w} \approx \boxed{90 \text{ GeV}} \quad (12.29)$$

### 12.4.1 Allgemeine Diskussion für beliebige Darstellung des Higgsfeldes

Vergleiche ECKER, SCHLADMING auf Seite 82!

$$\mathcal{L}_s = (D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi - V(\phi) \quad (12.30)$$

Das Minimum des Potentials liegt bei  $\phi^0 = \frac{v}{\sqrt{2}}$ . Da  $\mathcal{L}_s$  Isospin-invariant ist, kann man stets  $v$  als Eigenvektor von  $T_3$  wählen. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist nicht gebrochen und damit ergibt sich:

$$Qv = 0 \Rightarrow \frac{Y}{2}v = -T_3v \quad (12.31)$$

Kommen wir zum Massenterm:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}v^+ \left( g\vec{T} \cdot \vec{W} - g'T_3B \right) \cdot \left( g\vec{T} \cdot \vec{W} - g'T_3B \right) v = \\ & = \frac{1}{2}v^+ \left[ g(T^+W^- + T^-W^+ + T^3W_3) - g'T_3B \right] \cdot \left[ g(T^+W^- + T^-W^+ + T^3W_3) - g'T_3B \right] \end{aligned} \quad (12.32)$$

Es gilt  $v^+T^+T^+v = 0$ ,  $v^+T^-T^-v = 0$  und  $v^+(T^\pm - T^3)v = 0$ . ( $v^+$  steht für transponiertes  $v$ !) Dies ist evident, wenn  $v$  Eigenzustand zu  $T_3$  ist. Damit ergibt sich:

$$\frac{g^2}{2}W^+W^-v^+ (T^+T^- + T^-T^+)v + \frac{1}{2}(gW^3 - g'B)(gW^3 - g'B)v^+T_3^2v \quad (12.33)$$

Unter anderem mit  $T^+T^- + T^-T^+ = \vec{T}^2 - T_3^2$  erhalten wir:

$$\frac{g^2}{2}W^+W^-v^+v [t(t+1) - t_3^2] + \frac{g^2}{2\cos^2\theta_w}ZZt_3^2v^+v = \frac{g^2}{2}v^2 ([t(t+1) - t_3^2]W^+W^- + t_3^2Z^2) \quad (12.34)$$

Für mehrere HIGGS-Felder gilt  $v \mapsto v_i$ ,  $t \mapsto t_i$  und  $t_3 \mapsto t_3^i$ .

$$M_W^2 = \frac{g^2}{2} \cdot \sum_i [t_i(t_i+1) - t_3^i] |v_i|^2; \quad M_Z = \frac{g^2}{\cos^2\theta_w} \cdot \sum_i (t_3^i)^2 \cdot |v_i|^2 \quad (12.35)$$

$$\rho \equiv \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cdot \cos^2\theta_w} = \frac{\sum_i [t_i(t_i+1) - (t_3^i)^2] \cdot |v_i|^2}{2 \cdot \sum_i (t_3^i)^2 \cdot |v_i|^2} \quad (12.36)$$

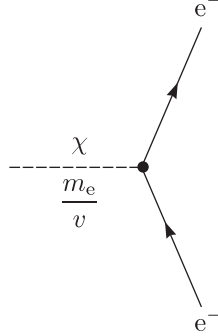
Also wird  $\rho = 1$  auch reproduziert, wenn mehrere HIGGS-Dubletts auftreten.

## 12.5 Elektron-Masse und Higgs-Kopplung

Wir gehen aus von der YUKAWA-Kopplung:

$$\begin{aligned}
 f_e \left[ (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot e_R + \bar{e}_R \cdot \begin{pmatrix} 0, \frac{v+\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right] &= f_e \left( \frac{v+\chi}{\sqrt{2}} \right) \cdot (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) = \\
 &= f_e \left( \frac{v+\chi}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left( \bar{e} \left( \frac{1+\gamma_5}{2} \right) \left( \frac{1+\gamma_5}{2} \right) e + \bar{e} \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) e \right) = \\
 &= f_e \left( \frac{v+\chi}{\sqrt{2}} \right) \bar{e} e = m_e \left( 1 + \frac{\chi}{v} \right) \bar{e} e \Rightarrow \boxed{m_e = \frac{f_e \cdot v}{\sqrt{2}}}
 \end{aligned} \tag{12.37}$$

Die Kopplung von  $\chi$  an das Elektron ist proportional zu  $m_e$ . Fermionen mit kleiner Masse koppeln schwach an HIGGS-Teilchen!



Wir hätten natürlich auch für das rechtshändige Neutrino einen kinetischen und einen HIGGS-Term (mit sehr kleinem  $f_\nu$ ) vorsehen können. Beachte hierbei, dass sich die Konfiguration  $\varepsilon_{ij}\varphi_j^c$  ebenfalls unter der fundamentalen Darstellung der SU(2) transformiert.  $\varepsilon_{ij}$  ist der zweidimensionale antisymmetrische  $\varepsilon$ -Tensor, welchen man als Matrix schreiben kann:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \varepsilon_{ij}\varphi_j^c = \begin{pmatrix} \varphi_2^* \\ -\varphi_1^* \end{pmatrix} \tag{12.38}$$

Also ist  $\bar{L}_i \varepsilon_{ij} \varphi_j^c \sim \bar{\nu}_L \cdot \frac{v}{\sqrt{2}}$  ebenfalls ein SU(2)-Singulett und kann an ein rechtshändiges Neutrino-Feld gekoppelt werden. Dies würde zu einer kleinen Neutrino-Masse führen! Der Einbau von schweren Leptonen verläuft analog; lediglich mit anderer Lepton-HIGGS-Kopplungsstärke. Unterschiede: Für d und u werden rechtshändige Felder eingeführt (SU(2)-Singuletts). Diese besitzen eine andere Ladung und damit eine andere Kopplung an  $A$  und  $Z$ .

Führt man ein  $\nu_R$  als SU(2)-Singulett ein, so hat man die gleiche Struktur wie vorher und man erhält Massenterme der Form  $\bar{\nu}_R \nu$ . Analog funktioniert dies für  $u_R$  als Singulett; man erhält  $\bar{u} u$ .

Die Einführung von Quarks verläuft völlig analog:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & u_R & d_R \\
 I = \frac{1}{2} & I = 0 & I = 0 \\
 Y = \frac{1}{3} & Y = \frac{4}{3} & y = -\frac{2}{3}
 \end{array}$$

Es muss natürlich immer gelten:  $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ .

## 12.6 Vektor- und Axial-Kopplungen des $Z_0$ an Fermionen

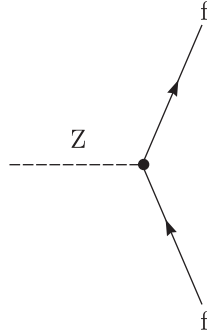
$$i\bar{L}\not{D}L + i\bar{e}_R\not{D}e_R \Rightarrow -i\bar{g}\bar{L}(T_3 - Q\sin^2\theta_w)Z^\mu\gamma_\mu L - i\bar{g}\bar{e}_R(T_3 - Q\sin^2\theta_w)Z^\mu\gamma_\mu e_R \tag{12.39}$$

Dies gilt für die Leptonen. Es ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}
 &-i\bar{g} \left[ (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} - \sin^2\theta_w \left( (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma_\mu \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} - \sin^2\theta_w \bar{e}_R \gamma_\mu e_R \right) \right] Z^\mu = \\
 &= -i\bar{g} \left[ \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma_\mu \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \nu - \frac{1}{2} \bar{e} \gamma_\mu \left( \frac{1-\gamma_5}{2} \right) e + \sin^2\theta_w \underbrace{(\bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R)}_{\bar{e} \gamma_\mu e} \right] Z^\mu
 \end{aligned} \tag{12.40}$$

Die allgemeine Form für beliebige Fermionen lautet:

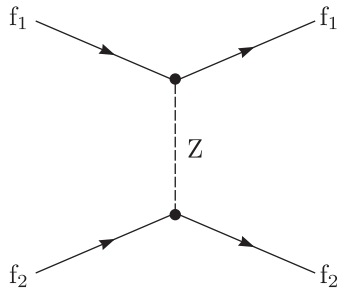
$$\boxed{-i \cdot \frac{\bar{g}}{4} \cdot \left[ -2I_3^f \bar{f} \cdot \gamma_\mu \gamma_5 \cdot f + \left( 2 \cdot I_3^f - 4 \cdot Q_f \cdot \sin^2 \theta_w \right) \bar{f} \gamma_\mu f \right] Z^\mu} \quad (12.41)$$



Dies liefert beispielsweise den Z-Zerfall! Bei niedrigen Energien hat man eine effektive Kopplung:

$$\left( \frac{\bar{g}}{4} \right)^2 \cdot \frac{1}{M_Z^2} \cdot \left[ -2I_3^{f_1} \bar{f}_1 \cdot \gamma_\mu \gamma_5 \cdot f_1 + \left( 2 \cdot I_3^{f_1} - 4 \cdot Q_{f_1} \cdot \sin^2 \theta_w \right) \bar{f}_1 \gamma_\mu f_1 \right] \times \quad (12.42)$$

$$\times \left[ -2I_3^{f_2} \bar{f}_2 \cdot \gamma_\mu \gamma_5 \cdot f_2 + \left( 2 \cdot I_3^{f_2} - 4 \cdot Q_{f_2} \cdot \sin^2 \theta_w \right) \bar{f}_2 \gamma_\mu f_2 \right]$$



Der Axial-Teil ist bei niedrigen Energien festgelegt durch

$$\frac{\bar{g}^2}{16 \cdot M_Z^2} = \frac{\bar{g}^2 \cdot \cos^2 \theta_w}{16 \cdot M_W^2} = \frac{g^2}{16 \cdot M_W^2} = \frac{G_F}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad (12.43)$$

und kann nicht zur Bestimmung von  $\sin^2 \theta_w$  dienen. (Diese Formel wird später benötigt!) Der Ausdruck in der Klammer (Vektoranteil) gilt bei kohärenter Streuung auch für Nukleonen und sogar für Kerne (keine Renormierung).