

MITSCHRIEB ZU THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK I:

Prof. Dr. Steinhauser und Dr. Harlander

Vorlesung Sommersemester 2005

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 18. Oktober 2006

Mitschrieb der Vorlesung THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK I
von Herrn Prof. Dr. STEINHAUSER und Dr. HARLANDER im Sommersemester 2005
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
1.1	LAGRANGEDichten und Symmetrien	5
1.2	EULER-LAGRANGE-Gleichung für Felder	5
1.2.1	MINKOWSKI-Metrik und Vierervektoren	6
1.3	NOETHER-Theorem für Felder	7
1.3.1	Beispiele/Spezialfälle zum NOETHER-Theorem	8
1.3.2	Beispiel: reelles skalares Feld	8
1.4	LAGRANGE-Dichten	9
2	Feldquantisierung	11
2.1	Motivation	11
2.2	Wiederholung: Quantenmechanik	11
2.2.1	SCHRÖDINGER-Bild	11
2.2.2	HEISENBERG-Bild	11
2.3	Quantisierung des skalaren Felds	11
2.3.1	Kommutatoren, Erzeuger und Vernichter	12
2.4	Propagatoren	14
2.4.1	Anschauliche Interpretation zum FEYNMAN-Propagator	17
2.4.2	Zusammenfassung	18
2.5	Komplexes Skalarfeld	18
2.5.1	Beispiele von Teilchen-Antiteilchen-Paaren	19
3	Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feld)	21
4	Quantisierung von Spin-1-Feldern (Vektorfeldern)	25
4.1	Massives Vektorfeld	25
4.2	Masseloses Vektorfeld (Photonfeld)	26
4.3	FEYNMAN-Propagator für das Photonfeld	29
5	Störungstheorie, Feynman-Diagramme	31
5.1	Freie Theorie	31
5.2	Wechselwirkungsterme in der LAGRANGEDichte	31
5.2.1	Weitere Beispiele für Wechselwirkungen	32
5.3	Wechselwirkungsbild	32
5.4	Zeitentwicklung der Zustände – S-Matrix	32
5.5	Entwicklung der S-Matrix	33
5.6	WICK-Theorem	35
5.6.1	Berechnung von S-Matrix-Elementen $S_f = \langle f T\varphi_1 \dots \varphi_n i\rangle$	35
5.6.2	Modifikationen für DIRAC- und Vektorfelder	36
5.7	FEYNMAN-Regeln für Quantenelektrodynamik	40
5.7.1	Beispiel: Paarvernichtung	41
5.8	FEYNMAN-Amplitude für COMPTON-Streuung	41
5.9	Wirkungsquerschnitt	42
5.9.1	Streuexperiment	42
5.10	$2 \mapsto 2$ -Prozess	44
5.10.1	Ergänzende Bemerkung zum Wirkungsquerschnitt	44

6	Der Prozess $e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-$	47
6.1	Das Myon	47
6.2	Wirkungsquerschnitt für $e^+ + e^- \mapsto \mu^+ + \mu^-$	48
6.3	Wirkungsquerschnitt für $e^+ + e^- \mapsto$ Hadronen	50
6.4	Höhere Ordnungen in der Störungstheorie	51
	6.4.1 Korrekturen zum Photon-Propagator	52
6.5	Regularisierung	54
	6.5.1 Dimensionale Regularisierung	54

Kapitel 1

Einführung

1.1 Lagrangedichten und Symmetrien

Wir gehen aus von der LAGRANGEfunktion einer Kette von Masseteilchen:

$$L = a \sum_i \left[\frac{m \dot{q}_i^2}{2} - \frac{ka}{2} \left(\frac{q_i - q_{i+1}}{a} \right)^2 \right]$$

Hieraus folgt die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Teilchen:

$$\frac{m}{a} \ddot{q}_i - ka \frac{q_{i+1} - q_i}{a^2} + ka \frac{q_i - q_{i-1}}{a^2} = 0$$

Bilden wir den Grenzwert $a \mapsto 0$, so geht m/a über in die Massendichte μ . Darüber hinaus ist $\xi = (q_i - q_{i+1})/a$ proportional zur Kraft $k(q_{i+1} - q_i)$, wobei die Proportionalitätskonstante durch das YOUNGSche Modul y gegeben ist. Es gilt also:

$$\frac{q_i - q_{i+1}}{a} y = k(q_{i+1} - q_i) \xrightarrow{a \rightarrow 0} y = k \cdot a$$

Weiterhin gilt im Limes $a \mapsto 0$

$$q_i \mapsto q(x), \quad \frac{q_{i+1} - q_i}{a} \mapsto \frac{q(x+a) - q(x)}{a} \mapsto q'(x) \quad \text{und} \quad a \sum_i \mapsto \int dx$$

womit wir folgende LAGRANGEfunktion erhalten:

$$L = \int dx \left(\frac{1}{2} \mu \dot{q}(x)^2 - \frac{y}{2} q(x)^2 \right) = \int dx \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \xrightarrow{3 \text{ Dimensionen}} L = \int d^3x \mathcal{L}(q, \dot{q}, \vec{\nabla} q)$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet dann:

$$\mu \ddot{q} - y \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{q'(x+a) - q'(x)}{a} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\mu \ddot{q} - y q'' = 0}$$

x ist **keine** verallgemeinerte Koordinate, sondern ein Index. Man bezeichnet $q = q(t, \vec{x})$ als **Feld**.

1.2 Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

Wir betrachten eine LAGRANGEDichte der Form $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, \vec{\nabla} q, t, \vec{x})$ und berechnen die Variation der Wirkung S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L} \Rightarrow \delta S \stackrel{!}{=} 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla} q)} \delta (\vec{\nabla} q) \quad \text{mit} \quad \delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q, \quad \delta (\vec{\nabla} q) = \vec{\nabla} \delta q$$

Wir führen eine partielle Integration durch und lassen die Randterme fest, womit deren Variationen verschwinden, also $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ (für t). Weiterhin sei $q(t, \vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| \mapsto \infty$.

$$0 \stackrel{!}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} \right) \delta q \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\nabla} q} = 0}$$

Die HAMILTONDichte ist gegeben durch:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{q} - \mathcal{L} \text{ mit } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$$

Beispiel:

Wir gehen aus von folgender LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \dot{q}^2 - \frac{y}{2} q'^2$$

Mit

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \mu \dot{q} \text{ und } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = -y q'$$

folgt die Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\mu \ddot{q} - y q'' = 0}$$

1.2.1 Minkowski-Metrik und Vierervektoren

Im folgenden sei $\hbar = c = 1$. Der kontravariante Vierervektor ist gegeben durch $x^\mu = (t, \vec{x})$ und der metrische Tenor $g^{\mu\nu}$ des MINKOWSKIRAUMS lautet in Matrixdarstellung:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukte zwischen zwei Vierervektoren x und y sind definiert durch:

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Hierbei ist $x_\nu = x^\mu g_{\mu\nu} = (t, -\vec{x})$ der kovariante Vierervektor. Des weiteren sei:

$$\int d^4x = \int dt \int d^3x \text{ und } \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

In dieser Schreibweise wird das Feld $\phi(t, \vec{x})$ mit $\phi(x)$ und die LAGRANGEDichte mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ bezeichnet, womit wir die EULER-LAGRANGE-Gleichungen schreiben als:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0 \text{ mit } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)}}$$

Beispiel: Reelles skalares Feld ohne Wechselwirkung

Wir gehen aus von der LAGRANGEDichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

und schreibe mittels

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \text{ und } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \phi} = \partial^\mu \phi$$

die Bewegungsgleichung auf:

$$-m^2 \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 \Rightarrow \boxed{(\square + m^2)\phi = 0 \text{ mit } \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 = \partial_0^2 - \Delta}$$

Dies ist die aus der relativistischen Quantenmechanik bekannte KLEIN-GORDON-Gleichung.

1.3 Noether-Theorem für Felder

Wir betrachten N skalare Felder ϕ_i mit $i = 1, \dots, N$. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0$$

Zeige: Zu jeder Symmetrie des Wirkungsintegrals gegenüber einer kontinuierlichen Transformation existiert ein Erhaltungssatz, der aus der LAGRANGEDICHTE bestimmt werden kann.

Beweis:

i.) Wir gehen aus von folgenden Transformationen:

a.) Raum-Zeit-Transformationen: $x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$, $\phi'_i(x') = \phi_i(x) + \delta \phi_i(x)$

Im Falle von $x = x'$ spricht man auch von **inneren Symmetrien**.

Wir definieren punktweise Transformationen durch $\bar{\delta} \phi_i = \phi'_i(x') - \phi_i(x)$. Mittels einer TAYLOR-Entwicklung von $\phi'_i(x')$ erhalten wir:

$$\delta \phi_i(x) = \phi'_i(x) + \delta x_\nu \partial^\nu \phi_i(x) + O((\delta x_\nu)^2) - \phi_i(x) = \bar{\delta} \phi_i(x) + \delta x_\nu \partial^\nu \phi_i(x)$$

Analog gilt für die LAGRANGEDICHTE:

$$\delta \mathcal{L}(x) = \bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \delta x_\nu \partial^\nu \mathcal{L}(x)$$

ii.) Die Voraussetzung ist, dass die Wirkung invariant ist:

$$0 \stackrel{!}{=} \delta S = \int_{V'} d^4 x' \mathcal{L}'(x') - \int_V d^4 x \mathcal{L}(x) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta \mathcal{L}(x) \quad (*)$$

iii.) Volumenelement:

$$d^4 x' = |\partial_\nu x'^\mu| d^4 x = |\mathbf{1} + \partial_\nu \delta x^\mu| d^4 x = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4 x$$

(Wir berücksichtigen bei der Matrix nur Diagonalelemente.)

iv.) Wir wollen $\bar{\delta} \mathcal{L}$ zurückführen auf $\bar{\delta} \phi_i$:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \mathcal{L} &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \bar{\delta} \phi_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} (\partial_\mu \phi_i) = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \bar{\delta} \phi_i + \sum_i \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i \right) - \sum_i \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \bar{\delta} \phi_i = \\ &= \sum_i \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i \right) \end{aligned}$$

Die beiden anderen Terme fallen weg, wenn man die Bewegungsgleichung berücksichtigt.

v.) Einsetzen in Gleichung (*)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d^4 x \delta \mathcal{L}(x) + \int_V d^4 x (1 + (\partial_\mu \delta x^\mu)) \mathcal{L}(x) - \int_V d^4 x \mathcal{L}(x) \\ &= \int_V d^4 x \bar{\delta} \mathcal{L} + \delta x_\nu \partial^\nu \mathcal{L} + (\partial_\mu \delta x^\mu) \mathcal{L} = \int_V d^4 x \sum_i \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i \right) + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) = \\ &= \int_V d^4 x \partial_\mu \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i + \delta x^\mu \mathcal{L} \right) \end{aligned}$$

Hier folgt dann schlussendlich:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad \text{mit} \quad J^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \bar{\delta} \phi_i - \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial^\beta \phi_i - g^{\mu\beta} \mathcal{L} \right) \delta x_\beta$$

Dies ist eine Kontinuitätsgleichung und J^μ ein erhaltener Strom (analog zur Quantenmechanik $j^\mu = (\rho, \vec{j})$).

Man kann anstatt von einem erhaltenen Strom auch von einer erhaltenen Ladung sprechen:

$$Q := \int d^3x J^0$$

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{dJ^0}{dt} = - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \int d\vec{\sigma} \cdot \vec{J} = 0$$

Dies gilt, da man fordert, dass im Unendlichen die Felder schnell genug abfallen sollen (und damit auch der Strom).

1.3.1 Beispiele/Spezialfälle zum Noether-Theorem

a.) Betrachte $\delta x^\beta = 0$

Dann gilt $\delta\phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x)$ (innere Symmetrie). Hieraus ergibt sich folgender erhaltener Strom:

$$\partial_\mu \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta\phi_i = 0$$

b.) $x'_\mu = x_\mu + X_{\mu\nu} \delta\omega^\nu$

$$\delta\phi_i = \phi'_i(x') - \phi_i(x) =: \Phi_{i\nu} \delta\omega^\nu$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$J_\mu = \theta_{\mu\nu} \delta\omega^\nu \quad \text{mit} \quad \theta_{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \Phi_{i\nu} - \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \partial^\beta \phi_i - g_{\mu\beta} \mathcal{L} \right) X^\beta{}_\nu$$

Es gilt $\partial^\mu \theta_{\mu\nu} = 0$.

i.) $\Phi_{i\nu} = 0$, $X^\beta{}_\nu = g^\beta{}_\nu = \delta^\beta{}_\nu$

Dabei handelt es sich um Translationen von Raum-Zeit-Koordinaten, wobei weiter gilt:

$$T_{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \partial_\nu \phi_i - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$T_{\mu\nu}$ ist der Energie-Impuls-Tensor.

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad P_\nu = \int d^3x T_{0\nu}$$

Der Viererimpuls $T_{0\nu}$ ist erhalten.

1.3.2 Beispiel: reelles skalares Feld

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Leiten wir die LAGRANGEgleichungen ab:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$$

Daraus folgt die EULER-LAGRANGE-Gleichung:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + \frac{\lambda}{3!} \phi^3 = 0$$

Wie sieht der Energie-Impuls-Tensor aus?

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}$$

Es gilt tatsächlich $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, was als Übung nachgeprüft werden kann. Wir betrachten nun das Objekt T_{00} :

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \mathcal{H}$$

Dies ist die HAMILTONDichte, die man auch aus der LEGENDRE-Transformation erhalten hätte:

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \text{ mit } \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$$

Die HAMILTONfunktion ist dann gegeben durch:

$$P^0 = \int d^3x \mathcal{H} = H$$

1.4 Lagrange-Dichten

a.) Skalares Feld:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) \text{ mit } V = \frac{g}{3!} \phi^3 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

Wir wollen an dieser Stelle die Dimensionen diskutieren. Aus $[S] = 0$ ergibt sich $[\mathcal{L}] = 4$.

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \text{ mit } [x] = -1$$

Weiterhin ergibt sich $[m] = 1$, $[\phi] = 1$, $[\lambda] = 0$ und $[g] = 1$. (Führt man einen Term mit negativer Massendimension ein, so wird die Renormierbarkeit der Theorie zerstört (mehr dazu später).)

b.) Geladene skalare Felder (komplexes skalares Feld):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \frac{\lambda}{2} (\phi \phi^*)^2$$

(Der HIGGS-Mechanismus ist in einer solchen LAGRANGEDichte realisiert.) Man betrachtet ϕ und ϕ^* als voneinander unabhängig. Die LAGRANGEDichte ist invariant unter den Transformationen $\delta\phi = i\theta\phi$, $\delta\phi^* = -i\theta\phi^*$, was also eine Symmetrie darstellt. Aus dem NOETHER-Theorem folgt:

$$J_\mu = -i(\phi^* \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^* \phi))$$

c.) N skalare Felder:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^\top (\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} \Phi^\top \Phi + V(\Phi)$$

d.) DIRAC-Theorie:

Die Theorie beschreibt geladene Fermionen mit Masse m . Auch hier haben wir zwei unabhängige Felder, nämlich ψ und $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Die zugehörige LAGRANGEDichte hat die Form $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$, aus der die DIRACgleichung $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$ folgt, wie durch Nachrechnen gezeigt werden kann. \mathcal{L} ist invariant unter $\psi' = \exp(-i\alpha)\psi$, $\delta\psi = -i\alpha\psi$. Das NOETHER-Theorem sagt einen erhaltenen Strom voraus, nämlich $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. (Dieser Strom legt die Wechselwirkung zwischen Photon und Fermion fest.) Als Übung kann gezeigt werden, dass $\partial_\mu J^\mu = 0$ ist.

e.) Elektrodynamik

Man führt ein Viererpotential $A^\mu = (\phi, \vec{A})^\top$ ein und erhalten damit folgende LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

Daraus folgen die MAXWELLgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Kapitel 2

Feldquantisierung

2.1 Motivation

Warum benötigen wir (quantisierte) Felder?

- i.) Sowohl die KLEIN-GORDON-Gleichung als auch die DIRAC-Gleichung haben Zustände mit negativer Energie.
- ii.) Vielteilchensysteme
Wir benötigen einen Formalismus, mit dem wir die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beschreiben können.
- iii.) Elektrodynamik
Die klassischen Felder erfüllen einerseits die MAXWELL-Gleichungen, andererseits haben Photonen die MAXWELL-Gleichungen als Bewegungsgleichung. Welcher Zusammenhang besteht hier?
- iv.) Spin-Statistik-Relation
- v.) Die Quantenfeldtheorie stellt Werkzeuge zur Verfügung, um Streuprozesse zu berechnen. Diese Vorhersagen werden experimentell bestätigt.

2.2 Wiederholung: Quantenmechanik

2.2.1 Schrödinger-Bild

Hier sind Zustände $|\psi(t)\rangle_S$ zeitabhängig und die Operatoren O_S zeitunabhängig.

2.2.2 Heisenberg-Bild

Hier sind die Zustände zeitunabhängig. Dies erreicht man durch eine unitäre Transformation:

$$|\psi\rangle_H = \exp(iHt)|\psi(t)\rangle_S$$

Die Operatoren $O_H(t) = \exp(iHt)O_S \exp(-iHt)$ sind jedoch zeitabhängig.

Die Erwartungswerte in beiden Bildern sind natürlich gleich: ${}_S\langle\psi|O_S|\psi\rangle_S = {}_H\langle\psi|O_H|\psi\rangle$. Daraus erhalten wir die HEISENBERG-Bewegungsgleichung:

$$\boxed{i\frac{d}{dt}O_H = [O_H, H], \quad -i\vec{\nabla}O_H = [O_H, \vec{p}]}$$

2.3 Quantisierung des skalaren Felds

Das Ziel ist, dass die KLEIN-GORDON-Gleichung $(\square + m^2)\phi = 0$ weiterhin gelten. Wir interpretieren dazu ϕ als Operator und wollen dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen bestimmen (Teilcheninterpretation).

2.3.1 Kommutatoren, Erzeuger und Vernichter

a.) Vertauschungsrelation

Wir erinnern uns an die LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \text{ mit } \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}$$

Interpretiere ϕ und π als Operatoren und verlange, dass folgende Kommutatorrelationen erfüllt sind:

$$[\phi(x), \pi(y)]_{x_0=y_0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x_0=y_0} = [\pi(x), \pi(y)]_{x_0=y_0} = 0$$

Wir erkennen den Zusammenhang mit der Quantenmechanik: $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, $[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$.

b.) Lösung der KLEIN-GORDON-Gleichung (klassisch)

Allgemein macht man einen FOURIER-Ansatz um die KLEIN-GORDON-Gleichung $(\square + m^2)\phi(t, \vec{x}) = 0$:

$$\phi(t, \vec{x}) = \int d^3p \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \tilde{\phi}(t, \vec{p})$$

Damit erhält man die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\vec{p}|^2 + m^2) \right) \tilde{\phi} = 0$$

$$H_{HO} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\tilde{\phi}^2 = \omega \left(aa^\dagger + \frac{1}{2} \right) \text{ mit } \tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \text{ und } p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger)$$

Aus $[\tilde{\phi}, p] = i$ folgt durch Einsetzen $[a, a^\dagger] = 1$. Die Eigenzustände lauten nun $|n\rangle = (a^\dagger)^n|0\rangle$ und die Eigenwerte $E_n = (n + \frac{1}{2})\omega$.

c.) Erzeuger und Vernichter der KLEIN-GORDON-Gleichung:

In Analogie zu b.) führen wir FOURIER-Komponenten für ϕ (und π) ein:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left[\exp(ikx)a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx)a(\vec{k}) \right] \text{ mit } \omega \equiv \omega_{\vec{k}} \equiv k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}, kx = k_0x_0 - \vec{k} \cdot \vec{x} (*)$$

Die Eigenschaften dieses Objekts sind:

i.) $\phi = \phi^\dagger$ ist hermitesch.

ii.) a und a^\dagger sind Operatoren.

iii.) Bemerkung: $\int \frac{d^3k}{2\omega}$ ist LORENTZ-invariant

Wir berechnen den kanonischen Impuls:

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega} \left[ik_0 \exp(ikx)a^\dagger(\vec{k}) - ik_0 \exp(-ikx)a(\vec{k}) \right] = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left[i \exp(ikx)a^\dagger(\vec{k}) - i \exp(-ikx)a(\vec{k}) \right] \end{aligned} \quad (*)$$

Aus den Gleichungen (*) und (***) kann folgende Darstellung für a und a^\dagger abgeleitet werden:

$$a^\dagger(\vec{k}) = i \int d^3x (-i\omega\phi - \pi) \exp(-ikx)$$

Man kommt darauf, indem (*) und (***) einer Rücktransformation unterzieht:

$$\int d^3x \phi(x) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \frac{1}{2\omega} \left[\exp(i\omega t)a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-i\omega t)a(-\vec{k}) \right]$$

$$\int d^3x \pi(x) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) = \frac{i}{2} \left[\exp(i\omega t)a^\dagger(\vec{k}) - \exp(-i\omega t)a(-\vec{k}) \right]$$

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 2\omega(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = 0 = [a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k}')]$$

d.) Energie-Impuls-Tensor

$$\text{Vierer-Impuls} \sim \int d^3x (\text{Energie-Impuls-Tensor})^{(0\nu)}$$

$$p^\mu = \int d^3x \partial^0 \phi \partial^\mu \phi - g^{\mu 0} \mathcal{L} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{1}{2} k^\mu \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \right]$$

i.) Räumliche Komponenten:

Wir benutzen folgende Kommutatorrelation, wobei wir die δ -Funktion umschreiben:

$$[a^\dagger(\vec{k}), a(\vec{k})] = 2\omega(2\pi)^3 \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \Big|_{\vec{p}=0}$$

$$\vec{p} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \vec{k} a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \underbrace{\frac{1}{2} \int \frac{d^3k d^3x}{(2\pi)^3} \vec{k}}_{=0 \text{ (Symmetrie!)}}$$

ii.) Betrachte Energie-Operator

$$H = p^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{\omega}{2} \left[a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) \right] = \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \omega a^\dagger(\vec{k}) a(\vec{k}) + \text{Konstante}$$

Die Konstante entspricht der Vakuum-Energie, die für physikalische Prozesse irrelevant ist. Das Vorgehen ist, dass wir diese unendlich große Konstante subtrahieren, so dass das Vakuum die Energie Null hat. Der technische Trick ist die Normalordnung „:Operator:“. („Alle Erzeuger müssen nach links.“) Beispielsweise gilt : aa^\dagger := $a^\dagger a$:. Damit können wir den HAMILTON-Operator schreiben als:

$$:H := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{\omega}{2} : (a^\dagger a + a a^\dagger) := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \omega a^\dagger a$$

$\phi(x)$ und $a(\vec{k})$ erfüllen die HEISENBERG-Bewegungsgleichungen:

$$k_\mu a^\dagger(\vec{k}) = [P_\mu, a^\dagger(\vec{k})]$$

$$-k_\mu a(\vec{k}) = [P_\mu, a(\vec{k})]$$

$$\partial_\mu \phi(x) = [iP_\mu, \phi(x)]$$

Wir wollen nachrechnen, ob die erste Relation auch stimmt:

$$[P_\mu, a^\dagger(\vec{k})] = \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega} k'^\mu [a^\dagger(\vec{k}') a(\vec{k}'), a^\dagger(\vec{k})] = \int d^3k' k'^\mu a^\dagger(\vec{k}') \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') = k^\mu a^\dagger(\vec{k})$$

Die zweite Gleichung folgt analog und die dritte Gleichung aus den ersten beiden:

$$\begin{aligned} [iP_\mu, \phi] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[\exp(ikx) [iP_\mu, a^\dagger(\vec{k})] + \exp(-ikx) [iP_\mu, a(\vec{k})] \right] = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[\exp(ikx) i k_\mu a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx) (-i k_\mu) a(\vec{k}) \right] = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[\partial_\mu \exp(ikx) a^\dagger(\vec{k}) + \partial_\mu \exp(-ikx) a(\vec{k}) \right] = \partial_\mu \phi \end{aligned}$$

e.) Teilcheninterpretation:

i.) Vakuum-Zustand:

Den Vakuum-Zustand schreiben wir als $|0\rangle$, wobei dieser normiert sein soll: $\langle 0|0\rangle = 1$. Der Zustand entspricht einem System ohne Teilchen mit $E = 0$, $\vec{p} = \vec{0}$.

ii.) Wir wenden die Gleichung $k_\mu a^\dagger(\vec{k}) = [P_\mu, a^\dagger(\vec{k})]$ auf den Vakuumzustand an:

$$(P_\mu a^\dagger(\vec{k}) - a^\dagger(\vec{k}) P_\mu) |0\rangle = k_\mu a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$$

Aus $P_\mu |0\rangle = 0$ folgt, dass $a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$ Eigenzustand von P_μ mit Eigenwert k_μ ist.

iii.) $-k_\mu a(\vec{k}) = [P_\mu, a(\vec{k})]$

Dies ist die HEISENBERG-Gleichung für den Operator $a(\vec{k})$. Da das Vakuum nach Definition den Impuls Null besitzt, gilt:

$$-k_\mu a(\vec{k})|0\rangle = P_\mu a(\vec{k})|0\rangle$$

Hieraus ergibt sich, dass $-k_\mu$ Eigenwert zum Eigenzustand $a(\vec{k})|0\rangle$ ist. Dieser besitzt jedoch negative Energie, was wir nicht möchten. Deshalb fordern wir, dass $a(\vec{k})|0\rangle = 0$ ist. Die Gleichung definiert den Vakuumzustand $|0\rangle$ direkt als Zustand mit niedrigster Energie.

iv.) Interpretation:

Wir wenden den Operator $a^\dagger(\vec{k})$ auf das Vakuum an: $|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$. Dies ist ein 1-Teilchenzustand mit Impuls \vec{k} . Man erzeugt ein Teilchen im Impulsraum mit der Energie $k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. a^\dagger wirkt also als **Erzeugungsoperator** und a als **Vernichtungsoperator**. Wir können damit den gesamten HILBERT-Raum (\equiv FOCK-Raum) folgendermaßen konstruieren:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle$$

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1) \dots^\dagger(\vec{k}_n)|0\rangle$$

Das letztere ist ein Zustand im FOCK-Raum aus n Teilchen mit Impulsen \vec{k}_i .

v.) Teilchenzahloperator:

Dieser ist folgendermaßen definiert:

$$N = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$$

Wenden wir diesen Operator auf den Zustand $|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$ an, so erhält man:

$$N|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = n|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$$

Dies ergibt sich aus den Kommutatorrelationen und der Definition des Zustands $|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle$. Für den Impulsoperator P^μ ergibt sich:

$$P^\mu|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = (k_1^\mu + \dots + k_n^\mu)|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle \text{ mit } P^\mu = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} k^\mu a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$$

f.) Zusammenhang zwischen Spin und Statistik:

Teilchen gehorchen der BOSE-Statistik:

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = a^\dagger(\vec{k}_1)a^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = a^\dagger(\vec{k}_2)a^\dagger(\vec{k}_1)|0\rangle = |\vec{k}_2, \vec{k}_1\rangle$$

2.4 Propagatoren

 a.) Amplitude für Propagation eines Teilchens von y nach x :

$$D(x-y) = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$$

Wir interpretieren diesen Erwartungswert als Übergangsamplitude des Teilchens vom Punkt y zum Punkt x . Setzen wir die FOURIER-Darstellung von $\phi(x)$ und $\phi(y)$ explizit ein, so folgt unter Ausnutzung von $a(\vec{k})a^\dagger(\vec{k}') = a^\dagger(\vec{k}')a(\vec{k}) + (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$:

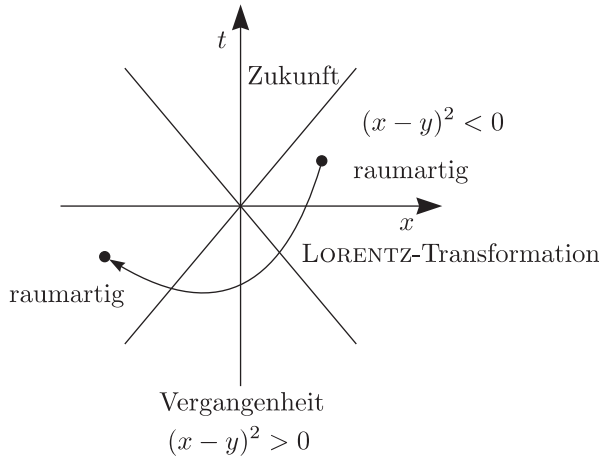
$$\begin{aligned} D(x-y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \langle 0| \left(a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) + a(\vec{k}) \exp(-ikx) \right) \times \\ &\quad \times \left(a^\dagger(\vec{k}') \exp(ik'y) + a(\vec{k}') \exp(-ik'y) \right) |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \exp(-ik(x-y)) \end{aligned}$$

$D(x-y)$ ist LORENTZINvariant, da das Integrationsmaß und natürlich auch das Vierer-Skalarprodukt in der Exponentialfunktion LORENTZINvariant sind.

b.) Frage: Kann die Messung an einem Punkt die Messung an einem anderen Punkt beeinflussen? Dies hängt mit der Kausalität zusammen. Dazu betrachten wir den Kommutator $[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x-y)$. Falls $\Delta = 0$, ist die Antwort dieser Frage „nein“, das heißt, die beiden Messungen können sich nicht beeinflussen. Falls $\Delta = 0$ für $(x-y)^2 < 0$ (raumartig getrennt) gilt, ist die Kausalität gewährleistet. Man spricht dann auch von **Mikrokausalität**. Bekannt ist, dass aus $x^0 = y^0$ folgt, dass $\Delta(x-y) = 0$ ist. Allgemein gilt:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \iint \frac{d^3k d^3k'}{(2\pi)^6 4\omega_k \omega_{k'}} \left[a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) + a(\vec{k}) \exp(-ikx), a^\dagger(\vec{k}') \exp(ik'y) + a(\vec{k}') \exp(-ik'y) \right] =$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\exp(-ik(x-y)) - \exp(ik(x-y))) = D(x-y) - D(y-x)$$



Aus $(x-y)^2 < 0$ folgt, dass es eine (kontinuierliche) LORENTZ-Transformation gibt, die $x-y$ in $-(x-y)$ überführt. Daraus folgt $D(y-x) = D(x-y)$ und damit $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, womit die Kausalität erfüllt ist. Für $(x-y)^2 > 0$ gibt es **keine** kontinuierliche LORENTZ-Transformation mit $(x-y) \mapsto -(x-y)$. Daraus ergibt sich $\Delta(x-y) \neq 0$.

c.) KLEIN-GORDON-Gleichung und FEYNMAN-Propagatoren

Das Ziel ist, die explizitere Berechnung des Kommutators $[\phi(x), \phi(y)]$ bzw. $D(x-y)$ und dessen Interpretation.

i.) KLEIN-GORDON-Propagator:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2\omega_k} \exp(-ik(x-y)) \Big|_{k^0=\omega_k} + \frac{1}{-2\omega_k} \exp(ik(x-y)) \Big|_{k^0=-\omega_k} \right]$$

mit $k(x-y) = k_0(x_0 - y_0) - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$

Wir wenden nun den Residuensatz rückwärts an:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{dk_0}{2\pi i} \frac{-1}{k^2 - m^2} \exp(-ik(x-y)) \text{ für } x^0 > y^0$$

Um zu zeigen, dass dies stimmt, schauen wir uns die Pole des Integranden an:

$$k_0^2 - (\vec{k}^2 + m^2) = \left(k_0 + \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \right) \cdot \left(k_0 - \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \right)$$

Der Integrationsweg wird in der unteren Halbebene geschlossen, damit der Integrand exponentiell unterdrückt wird. Für $x^0 < y^0$ wird der Integrationspfad oben herum geschlossen. Innerhalb des Gebiets liegen dann keine Pole, womit sich nach dem Residuensatz $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ ergibt.

Wir definieren nun den retardierten KLEIN-GORDON-Propagator:

$$D_R(x-y) := \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle$$

Die Behauptung ist, dass $D_R(x-y)$ die retardierte GREEN-Funktion der KLEIN-GORDON-Gleichung ist. Dass es die retardierte GREEN-Funktion ist, folgt aus der θ -Funktion.

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2)D_R(x-y) &= (\partial^2\theta(x^0 - y^0))\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + (\partial^\mu\theta(x^0 - y^0))(\partial_\mu\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle) + \\ &\quad + \theta(x^0 - y^0)(\partial^2 + m^2)\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \\ &= \partial_0\delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\phi(x), \phi(y)] | 0 \rangle + 2\delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = \\ &= \delta(x^0 - y^0)\langle 0 | [\pi(x), \phi(y)] | 0 \rangle = -i\delta^{(4)}(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

ii.) FEYNMAN-Propagator:

Die Idee ist, mit der KLEIN-GORDON-Gleichung zu starten. Diese lösen wir mittels FOURIER-Transformation:

$$(\partial^2 + m^2)D(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y)$$

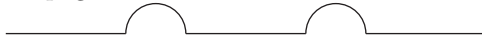
$$D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp(-ik(x-y)) \tilde{D}(k)$$

Daraus erhalten wir:

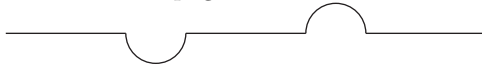
$$(-k^2 + m^2)\tilde{D} = -i \Rightarrow \tilde{D}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2} \Rightarrow D(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \exp(-ik(x-y))$$

Der Integrand hat Pole bei $k_0 = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$. Es gibt vier Möglichkeiten, unsere Kontur zu definieren.

i.) Propagator:



ii.) FEYNMAN-Propagator:



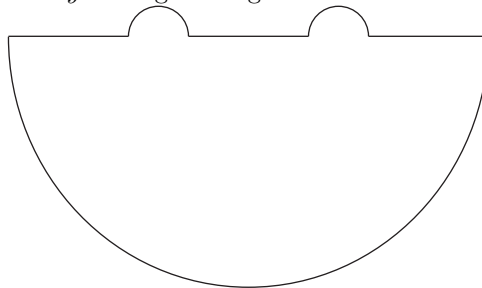
iii.) Bei den anderen beiden ist die Kausalität verletzt. Deswegen besitzen sie keine physikalische Bedeutung und werden nicht betrachtet.



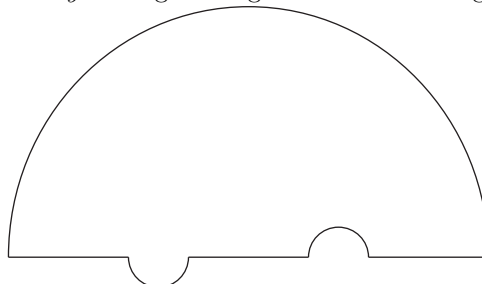
$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x-y))$$

Die Pole befinden sich bei $k^0 = \pm(\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} - i\epsilon)$. Durch Einführen des $i\epsilon$ können wir beschreiben, ob die Pole oben oder unten herum durchlaufen werden.

i.) $x^0 > y^0$: Integrationsgebiet unten herum geschlossen



ii.) $x^0 < y^0$: Integrationsgebiet oben herum geschlossen



$$D_F(x - y) = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle =: \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$$

Der Zeitordnungsoperator T wirkt auf das Produkt der beiden Felder.

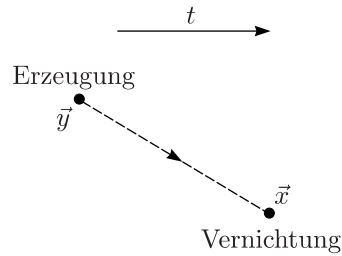
Zu D_F :

- * GREEN-Funktion der KLEIN-GORDON-Gleichung
- * FEYNMAN-Propagator der KLEIN-GORDON-Gleichung
- * D_F, \tilde{D}_F sind die FEYNMAN-Regeln für interne Propagatoren von FEYNMAN-Diagrammen.

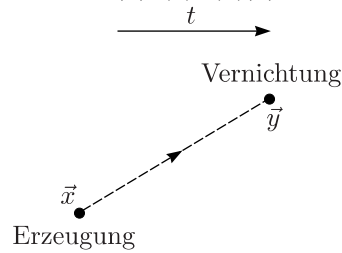
2.4.1 Anschauliche Interpretation zum Feynman-Propagator

- * $x^0 > y^0$: $\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle$

Ein Teilchen wird am Punkt \vec{y} erzeugt, wandert zum Punkt \vec{x} und wird dort vernichtet.

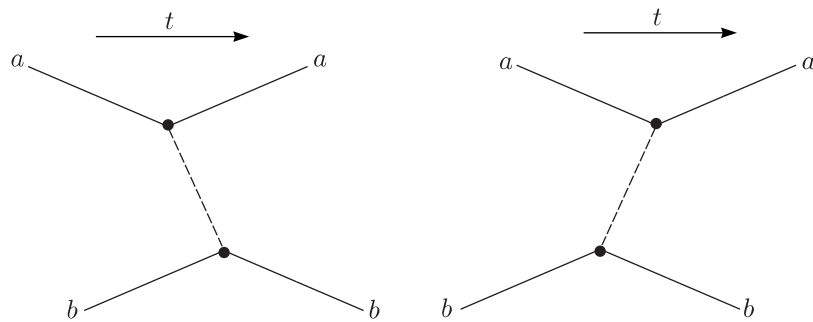


- * $y^0 > x^0$: $\langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$

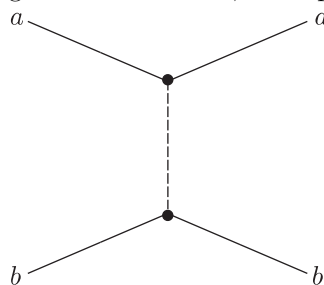


Hier wird ein Teilchen am Punkt \vec{x} erzeugt und am Punkt \vec{y} vernichtet.

Wir betrachten Streuprozesse $ab \mapsto ab$:



Die Aufspaltung ist nicht LORENTZinvariant. Der FEYNMAN-Propagator behandelt jedoch beide Diagramme zusammen; man spricht dann von „FEYNMAN-Diagrammen“.



2.4.2 Zusammenfassung

Für ein skalares reelles Feld forderten wir, dass $[\phi(x), \pi(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$ ist. Hieraus folgte:

- i.) ϕ ist hermitesch.
- ii.) ϕ erfüllt die KLEIN-GORDON- und die HEISENBERG-Gleichung
- iii.) Mikrokausalität

Die FOURIERkomponenten $a(\vec{k})$ und $a^\dagger(\vec{k})$ haben wir als Erzeuger und Vernichter interpretiert. Ein-Teilchen-Zustände konnten damit beschrieben werden durch $|\vec{k}\rangle = a^\dagger(\vec{k})|0\rangle$. Diese Zustände waren folgendermaßen normiert: $\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = (2\pi)^3 2\omega \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$. (Man spricht auch von uneigentlichen Zuständen, wenn sie durch eine δ -Funktion normiert sind.) Zum Schluss sind wir auf die (kausalen) Propagatoren $D_F(x - y)$ bzw. $\tilde{D}_F(k)$ gekommen. Damit ist die freie Theorie (also ohne Wechselwirkung) gelöst!

2.5 Komplexes Skalarfeld

Wir gehen wieder aus von der folgenden LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

- a.) Der Unterschied zum reellen Skalarfeld ist, dass ϕ nicht selbstadjungiert ist ($\phi \neq \phi^\dagger$). Insbesondere brauchen ϕ und ϕ^\dagger ihre eigenen Erzeuger und Vernichter.

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[a(\vec{k}) \exp(-ikx) + b^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) \right]$$

Das ist ein Feld, das Teilchen vom Typ a vernichtet und Teilchen vom Typ b erzeugt.

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \left[a^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx) + b(\vec{k}) \exp(-ikx) \right]$$

Wir fordern die gleichen Vertauschungsregeln wie beim reellen Fall, also $[\phi(x), \pi(y)]_{x^0=y^0} = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$. Hieraus folgen die Vertauschungsrelationen für die Erzeuger und Vernichter, nämlich $[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$ und analog für b . Des weiteren ergibt sich:

$$[a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b^\dagger(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = 0$$

a vernichtet und a^\dagger erzeugt Teilchen mit Ladung „+“; b vernichtet und b^\dagger erzeugt Teilchen mit Ladung „-“. Sie sind also jeweils für verschiedene Teilchensorten zuständig. (Später werden wir sehen, dass a, a^\dagger für Teilchen und b, b^\dagger für Antiteilchen verantwortlich sind.)

- b.) HAMILTONoperator

$$H = \int d^3x T^{00} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \omega (a^\dagger a + b^\dagger b)$$

Entsprechend führt man die Teilchenzahloperatoren ein:

$$N_a = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} a^\dagger a \quad \text{und} \quad N_b = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} b^\dagger b$$

- c.) Wir wollen den NOETHERstrom berechnen. Dazu benötigen wir eine Symmetrie. $\phi \mapsto \phi' = \exp(i\alpha)\phi$ lässt die LAGRANGEDichte $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$ invariant. Wir wenden also das NOETHER-Theorem an:

$$j_\mu(x) = i(\partial_\mu \phi^\dagger)\phi - i\phi^\dagger(\partial_\mu \phi) :$$

Die Ladung können wir über die nullte Komponente des Stroms berechnen:

$$Q = \int d^3x j_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} (a^\dagger a - b^\dagger b)$$

Wir haben also eine Größe, in der a und b nicht symmetrisch eingehen, was die beiden Teilchen unterscheidet. Da die Ladung nach dem NOETHER-Theorem erhalten ist, gilt $\frac{dQ}{dt} = 0$. Damit legt man fest, dass Teilchen vom Typ a die Ladung $+1$ und Teilchen vom Typ b die Ladung -1 haben. Wendet man Q auf Teilchen vom Typ a an, so folgt: $Q a^\dagger |0\rangle = +1 a^\dagger |0\rangle$. $a^\dagger |0\rangle$ ist damit Eigenzustand zum Operator Q mit Eigenwert $+1$. Analog gilt $Q b^\dagger |0\rangle = -1 b^\dagger |0\rangle$. Diese Betrachtungsweisen führen dazu, dass wir a als Teilchen und b als Antiteilchen interpretieren.

2.5.1 Beispiele von Teilchen-Antiteilchen-Paaren

- * π -Mesonen: π^+ , π^-
- * geladene Kaonen: K^0 , K^-
- * neutrale Kaonen: K^0 , \bar{K}^0 (siehe Strangeness)

d.) Propagator analog zum reellen Skalarfeld

$$D_F(x - y) = \langle 0|T\phi(x)\phi^\dagger(y)|0\rangle$$

Kapitel 3

Quantisierung von Spinorfeldern (Dirac-Feld)

a.) Die freie LAGRANGEDichte ohne Wechselwirkung ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi = \bar{\psi}(i(\partial_0\gamma^0 - \vec{\partial}\vec{\gamma}) - m)\psi \text{ mit } \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0, (\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$$

Wir berechnen den kanonisch konjugierten Impuls, wobei wir in Komponenten rechnen wollen:

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi_\alpha)} = i(\psi^\dagger)^\alpha = i(\psi^*)^\alpha$$

b.) Lösung der DIRAC-Gleichung vor der Quantisierung:

Wir führen eine Entwicklung nach ebenen Wellen durch.

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm 1} \left[\exp(ikx)\beta_s^*(\vec{k})v_s(\vec{k}) + \exp(-ikx)\alpha_s(\vec{k})u_s(\vec{k}) \right]$$

Es gilt $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$. v sind die Lösungen zu negativen und u die Lösungen zu positiven Frequenzen:

$$(\not{k} + m)v = 0, (\not{k} - m)u = 0$$

c.) Quantisierung:

Wir gehen über von α_s und β_s^\dagger zu den Operatoren a_s und b_s^\dagger . Damit erzeugt ψ ein Positron e^+ und vernichtet ein Elektron e^- . Außerdem fordert man die Antikommutatorrelationen:

$$\{\psi_\alpha(x), \pi^\beta(y)\} = i\delta_\alpha^\beta \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \text{ und } \{\psi_\alpha, \psi_\beta\} = 0 = \{\pi^\alpha, \pi^\beta\}$$

Daraus ergibt sich:

$$\{\psi_\alpha(x), (\psi^*)^\beta(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_\alpha^\beta \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

d.) Algebra für a und b :

$$\{a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs}(2\pi)^3 2\omega \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

r sei hierbei der Spinindex. Entsprechend gilt dies für b und außerdem ist $\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = \{b, b\} = \{b^\dagger, b^\dagger\} = 0$.

e.) Vierer-Impulsoperator:

Wir gehen aus vom Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial^\nu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\partial^\nu\bar{\psi} - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

Da unsere LAGRANGEDichte nicht von Ableitungen von $\bar{\psi}$ abhängt, verschwindet der zweite Term. Am Ende ergibt sich der Vierer-Impulsoperator vor der Normalordnung:

$$p^\mu = \int d^3x T^{0\mu} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm 1} k^\mu (b_s^\dagger b_s - a_s a_s^\dagger)$$

Hätte man für a, a^\dagger Kommutatorrelationen gefordert, so wäre $H = p^0$ nicht positiv definit und außerdem hätten Elektronen und Positronen unterschiedliche Beiträge zur Energie.

$$: p^\mu := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s=\pm 1} k^\mu (b_s^\dagger b_s + a_s^\dagger a_s)$$

: H : ist damit positiv definit.

f.) ψ, a, b erfüllen die HEISENBERG-Gleichungen:

$$\partial_\mu \psi(x) = i[p_\mu, \psi(x)]$$

$$[p_\mu, a_s^\dagger(\vec{k})] = k_\mu a_s^\dagger(\vec{k}) \text{ und } [p_\mu, a_s(\vec{k})] = -k_\mu a_s(\vec{k})$$

$$[p_\mu, b_s^\dagger(\vec{k})] = k_\mu b_s^\dagger(\vec{k}) \text{ und } [p_\mu, b_s(\vec{k})] = -k_\mu b_s(\vec{k})$$

Wir wollen uns dies an der zweiten Gleichung klar machen:

$$[p_\mu, a_s^\dagger(\vec{k})] = \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s'=\pm 1} k'_\mu [(b_{s'}^\dagger(\vec{k}') b_{s'}(\vec{k}') + a_{s'}^\dagger(\vec{k}') a_{s'}(\vec{k}')), a_s^\dagger(\vec{k})]$$

An dieser Stelle benutzen wir die nützliche Beziehung $[xy, z] = x\{y, z\} - \{x, z\}y$.

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{s'=\pm 1} k'_\mu a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \{a_{s'}(\vec{k}'), a_s^\dagger(\vec{k})\} = k_\mu a_s^\dagger(\vec{k})$$

g.) Konstruktion der Zustände:

Wir interpretieren den Ein-Teilchen-Zustand $a_s^\dagger|0\rangle = |\vec{k}, s\rangle$ als Elektron mit Impuls \vec{k} und Spin s . Der Vakuum-Zustand ist der Zustand mit $\vec{k} = \vec{0}$ und $s = 0$, also gilt $a_s|0\rangle = 0$. Zwei-Teilchen-Zustände werden konstruiert durch:

$$|\vec{k}_1, s_1; \vec{k}_2, s_2\rangle = a_{s_1}^\dagger(\vec{k}_1) a_{s_2}^\dagger(\vec{k}_2)|0\rangle = -a_{s_2}^\dagger(\vec{k}_2) a_{s_1}^\dagger(\vec{k}_1)|0\rangle = -|\vec{k}_2, s_2; \vec{k}_1, s_1\rangle$$

Das PAULIprinzip ist das Ergebnis der zweiten Quantisierung vom Spinorfeld. Spin-1/2-Teilchen gehorchen also der FERMI-Statistik.

h.) Fermionpropagator

Analog zum KLEIN-GORDON-Feld gilt, wobei wir hier den Antikommutator benutzen:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = iS_{\alpha\beta}(x-y) = (i\not{\partial} + m) \cdot i\Delta(x-y)$$

Dass dies gilt, können wir in einer kleinen Nebenrechnung erkennen:

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \sum_{s, s'} \left\{ \exp(ikx) v_{s_\alpha}(\vec{k}) b_s^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ikx) v_{s_\alpha}(\vec{k}) a_s(\vec{k}), \right. \\ &\quad \left. \exp(-iky') \bar{v}_{s'_\beta}(\vec{k}') b_{s'}(\vec{k}') + \exp(iky') \bar{u}_{s'_\beta}(\vec{k}') a_{s'}^\dagger(\vec{k}') \right\} = \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_s \left(u_{s_\alpha}(\vec{k}) \bar{u}_{s'_\beta}(\vec{k}) \exp(-ik(x-y)) + v_{s_\alpha}(\vec{k}) \bar{v}_{s'_\beta}(\vec{k}) \exp(ik(x-y)) \right) = \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_s \left((\not{k} + m)_{\alpha\beta} \exp(-ik(x-y)) + (\not{k} - m)_{\alpha\beta} \exp(ik(x-y)) \right) = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (\exp(-ik(x-y)) - \exp(+ik(x-y))) = \\ &= (i\not{\partial}_x + m)_{\alpha\beta} i\Delta(x-y) \end{aligned}$$

Der FEYNMAN-Propagator ist gegeben durch:

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x-y) := \langle 0|T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)|0\rangle = \langle 0|\theta(x^0 - y^0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle$$

Man beachte das Minuszeichen bei Spinorfeldern! Weiterhin ergibt sich:

$$(i\not{\partial} + m)_{\alpha\beta} i\Delta_F(x-y)$$

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) = \\ &\stackrel{\not{k}^2 \equiv k^2}{=} i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{k} - m + i\varepsilon} \exp(-ik(x-y)) \text{ mit } (i\not{\partial} - m)S_F(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y) \end{aligned}$$

* S_F ist die GREENSche Funktion der DIRAC-Gleichung

* Kausalität für $\{\psi, \bar{\psi}\}$

Kapitel 4

Quantisierung von Spin-1-Feldern (Vektorfeldern)

- * Was wir bisher abgedeckt haben, ist das Skalarfeld, das durch die KLEIN-GORDON-Gleichung beschrieben wurde und außerdem das DIRAC-Feld, das aus der DIRAC-Gleichung folgte.
- * Wir kennen aus der Elektrodynamik den klassischen Limes, nämlich die MAXWELLGleichungen. Jedoch erweist sich eine Quantisierung von Feldern, die durch die MAXWELLgleichungen definiert sind, als schwierig.
- * Das Problem liegt bei den Freiheitsgraden:
 $A^\mu = (\phi, \vec{A})^\top$ hat vier Freiheitsgrade. Das Photon hat jedoch nur zwei Freiheitsgrade. Wir müssen also aufpassen, damit die **nichtdynamischen** Freiheitsgrade (die nicht zum Photon beitragen) **nicht** quantisiert werden.

Wir wollen also folgendes bewerkstelligen:

- * Der erste Schritt besteht darin, ein massives Vektorfeld zu quantisieren. Dieses besitzt drei Freiheitsgrade. Beispiele für solche massiven Vektorfelder sind die W^\pm - und Z -Bosonen, also die Träger der schwachen Wechselwirkung. Der Grund für die Diskrepanz in der Anzahl der Freiheitsgraden ist eine innere Symmetrie (Eichinvarianz).

4.1 Massives Vektorfeld

A^μ besitzt vier Freiheitsgrade und das massive Vektorfeld drei. Es ist also eine Nebenbedingung erforderlich, um die Anzahl der Freiheitsgrade zu verringern.

- a.) Feldgleichungen (motiviert durch MAXWELL-Gleichungen)

Diese lassen sich bekanntlich kovariant schreiben, nämlich:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0 \text{ mit } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (*)$$

Diese Gleichung für das massive Vektorfeld heißt PROCA-Gleichung. Wir bilden die Vierer-Divergenz dieser Gleichung:

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu) = \partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$$

Ein symmetrischer Tensor kombiniert mit einem antisymmetrischen Tensor ergibt Null, womit der erste Ausdruck verschwindet. Man kann dies auch folgendermaßen einsehen:

$$\partial_\nu \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0$$

Hierbei wurden im ersten Summanden die Summationsindizes μ und ν vertauscht, was zulässig ist, da ja über alle Indizes getrennt summiert wird. Anschließend kann man die partiellen Ableitungen ∂_μ und ∂_ν (nach dem SCHWARZschen Satz) wieder vertauschen, womit der entstehende Ausdruck dem zweiten Summanden gleicht. Damit erhalten wir $m^2 \partial_\nu A^\nu = 0$. Mit $\partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 = \square$ folgt aus (*):

$$(\square + m^2) A^\nu = 0 \text{ mit } \partial_\nu A^\nu = 0$$

- i.) KLEIN-GORDON-Gleichung für jede Komponente von A^ν
 ii.) Durch $\partial_\nu A^\nu = 0$ reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf drei.
 iii.) LAGRANGE-Dichte: $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu$
 Aus dieser LAGRANGE-Dichte folgt die PROCA-Gleichung.

b.) Wir suchen die Struktur einer Lösung.

$$A_\nu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \exp(-ikx) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) \alpha(\vec{k}) + \text{h.c. mit } \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

$\varepsilon_\nu^{(\lambda)}$ ist der Polarisationsvektor. Diese Felder A_ν erfüllen die PROCA-Gleichung: $(\square + m^2)A^\nu = 0$. Aus der Bedingung $\partial_\nu A^\nu(x) \stackrel{!}{=} 0$ ergibt sich $k^\nu \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$. Damit gibt es drei linear unabhängige $\varepsilon_\nu^{(\lambda)}$. Im Ruhesystem des Teilchens gilt $k^\nu = (m, \vec{0})^\top$ und daraus folgt $\varepsilon_0^{(\lambda)} = 0$, damit $k^\nu \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) = 0$ erfüllt ist. Wir treffen nun folgende Wahl:

$$\varepsilon_\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_\nu^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varepsilon_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die kartesische Standardbasis. Alternativ ist auch folgende komplexe Basis möglich:

$$\varepsilon_\nu^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varepsilon_\nu^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die ersten beiden Vektoren beschreiben die zirkulare Polarisation. Es gilt nun $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\varepsilon^{(\lambda')\mu})^* = \varepsilon^{(\lambda)} \cdot \varepsilon^{(\lambda')\star} = -\delta^{\lambda\lambda'}$ für $\lambda, \lambda' = 1, 2, 3$.

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(\vec{k}) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right)$$

c.) Allgemeine Lösung in quantisierter Form

$$A_\nu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\exp(-ikx) \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) + \exp(ikx) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(\vec{k}) a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k}) \right)$$

$a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ erzeugt Teilchen mit Impuls \vec{k} und Polarisation λ . Hierbei gelten folgende Kommutatorrelationen:

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}')] = \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad \text{und} \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

$$\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle = \dots$$

4.2 Masseloses Vektorfeld (Photonfeld)

a.) Klassische Bewegungsgleichungen und Eichfreiheit

Aus der LAGRANGEDichte $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2$ mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ folgen die MAXWELL-Gleichungen. Die inhomogenen MAXWELL-Gleichungen sind gegeben durch $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. Die homogenen MAXWELL-Gleichungen lassen sich schreiben als $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$, wobei der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ aus dem gewöhnlichen Feldstärketensor durch $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ hervorgeht. Für $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ sind die homogenen Gleichungen automatisch erfüllt. Wir haben also eine Eichfreiheit, da A^ν nicht eindeutig festgelegt ist. $A_\mu(x)$ und $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$ führen zum gleichen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$. Für $\Lambda(x)$ können wir ein beliebiges skalares Feld einsetzen. (Wir dürfen also nur die physikalischen Freiheitsgrade quantisieren.) Wir wollen nun die Funktion $\Lambda(x)$ festlegen (Festlegung der Eichung, Eichfixierung).

i.) LORENTZ-Eichung:

Wir wählen Λ derart, dass $\partial_\mu A^\mu = 0$ erfüllt ist. Falls $\partial_\mu A^\mu = \Theta(x)$ gilt, muss sein:

$$\square \Lambda(x) \stackrel{!}{=} -\Theta(x) \Rightarrow \partial_\mu A'^\mu = 0$$

Hieraus folgt $\square \Lambda'(x) = 0$.

ii.) COULOMB-Eichung:

Fordere $A^0 = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Diese ist jedoch nicht kovariant.

iii.) Axiale Eichung: $A_z = 0$

Im folgenden werden wir die LORENTZ-Eichung verwenden.

b.) Erster Versuch der Quantisierung:

Die LAGRANGEDichte ist gegeben durch $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Wir fordern folgende Kommutatorrelation:

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} \stackrel{!}{=} -ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

Warum vor dem i ein Minuszeichen steht, werden wir später erklären. Aber:

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0$$

Die Nullkomponente Π^0 verschwindet. \mathcal{L} muss damit geändert werden.

c.) Zweiter Versuch der Quantisierung:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^2 - \frac{1}{2}\lambda(\partial_\mu A^\mu)^2$$

Betrachten wir zunächst die Feldgleichungen:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \lambda\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \Leftrightarrow \square A^\nu - (1 - \lambda)\partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

Wir erkennen die Ähnlichkeit zur KLEIN-GORDON-Gleichung. Nun berechnen wir den kanonischen Impuls:

$$\Pi^\mu = -\partial^0 A^\mu + \partial^\mu A^0 - \lambda g^{0\mu}(\partial_\nu A^\nu) \Rightarrow \Pi^0 = -\lambda\partial_\nu A^\nu \neq 0 \text{ falls } \lambda \neq 0 \text{ und } \partial_\nu A^\nu \neq 0$$

Im folgenden setzen wir $\lambda = 1$.

d.) Im dritten Versuch fordern wir nicht die LORENTZ-Eichung $\partial_\nu A^\nu = 0$, sondern $\partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0$, wobei $|\psi\rangle$ ein physikalischer Zustand ist. Wir betrachten folgenden Erwartungswert der geforderten Kommutatorrelation:

$$\langle \psi | [A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} | \psi \rangle = -ig_{\mu\nu}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \langle \psi | \psi \rangle$$

Dies ist jedoch wieder ein Widerspruch, da wegen $\Pi^0(y) = -\partial_\nu A^\nu$ die linke Seite $\equiv 0$ (für $\nu = 0$) ist.

e.) GUPTA-BLEULER-Formalismus

i.) Wir fordern $\partial_\mu A^{(+)\mu} |\psi\rangle = 0$ (**), wobei $A_\mu = A_\mu^{(+)} + A_\mu^{(-)}$ mit:

$$A_\mu^{(+)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) \exp(-ikx)$$

Dies ist der Anteil der positiven Frequenzen. (Wir verwenden die Notation, dass eine nach rechts laufende ebene Welle durch $\exp(-ikx)$ beschrieben wird.)

$$A_\mu^{(-)}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) \exp(ikx)$$

Hier werden die negativen Frequenzen berücksichtigt. Die Summation läuft über vier linear unabhängige Polarisierungen.

- Orthogonalität: $\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon^{(\lambda')\mu} = -\zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'}$ mit $\zeta^{(0)} = -1$, $\zeta^{(1)} = \zeta^{(2)} = \zeta^{(3)} = 1$
- Vollständigkeit: $\sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu}$

Wir betrachten ein bestimmtes Bezugssystem:

$$\varepsilon^{(0)\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varepsilon^{(\lambda)\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{\varepsilon}_\lambda \end{pmatrix} \text{ f\"ur } \lambda = 1, 2, 3$$

Wenn nur eine nullte Komponente vorhanden ist, spricht man von skalarer Polarisation ($\varepsilon^{(0)\mu}$). Es gilt $\vec{\varepsilon}_1 \perp \vec{\varepsilon}_2$; $\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_1 = \vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$, es handelt sich damit um transversale Polarisationen. Des weiteren ist $\vec{\varepsilon}_3 = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$, womit dies eine longitudinale Polarisation beschreibt.

Nun gehen wir zurück zur Forderung (**), welche äquivalent ist zu $\langle \psi | \partial_\mu A^{(-)\mu} = 0$, woraus $\langle \psi | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0$ folgt. Dies ist die LORENTZ-Bedingung für den Mittelwert.

ii.) Wir setzen die Entwicklung in

$$[A_\mu(x), \Pi_\nu(y)]_{x_0=y_0} = -ig_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

ein und erhalten:

$$[a^{(\lambda)}(\vec{k}), a^{\dagger(\lambda')}(\vec{k}')] = \zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2\omega \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')$$

Im Falle $\lambda = 0$ tauschen Erzeuger und Vernichter die Rollen (wegen Minuszeichen $\zeta^{(0)}$)! Gewohnerweise gilt $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$.

iii.) Interpretation:

Wir interpretieren $a^{(\lambda)}(\vec{k})$ als Vernichtungsoperator und $a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})$ als Erzeugungsoperator. $\lambda = 0$ beschreibt die skalare Polarisation, $\lambda = 3$ die longitudinale und $\lambda = 1, 2$ die transversale Polarisation.

- Vakuumzustand: $a^{(\lambda)}(\vec{k})|0\rangle = 0$
- Ein-Photonzustand: $a^{(\lambda)\dagger}(\vec{k})|0\rangle = |\vec{k}, \lambda\rangle$

iv.) Rechtfertigung der Interpretation:

Wir betrachten den normalgeordneten HAMILTON-Operator:

$$: H := \int d^3x : \Pi^\mu A_\mu - \mathcal{L} := \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{\lambda=0}^3 \omega_k \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)} a^{(\lambda)}$$

Wir wenden den HAMILTON-Operator auf einen Zustand $|\vec{k}', \lambda'\rangle$ an:

$$\begin{aligned} : H : |\vec{k}', \lambda'\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{(\lambda')\dagger}(\vec{k}') |0\rangle = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) (2\pi)^3 2\omega_k \zeta^{(\lambda)} \delta^{\lambda\lambda'} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') |0\rangle = \omega_k |\vec{k}, \lambda\rangle \end{aligned}$$

Es ist $\omega = |\vec{k}|$ und damit $\omega > 0$, womit der HAMILTON-Operator positiv definit ist.

v.) Problem: Es gibt Zustände mit negativer Norm!

$$\langle \vec{k}, \lambda | \vec{k}, \lambda \rangle = \langle 0 | a^{(\lambda)}(\vec{k}) a^{\dagger(\lambda)}(\vec{k}) | 0 \rangle = \zeta^{(\lambda)} < 0 \text{ f\"ur } \lambda = 0$$

Skalare Photonen haben damit Norm -1 . Aber aus $k_\mu \sum_{\lambda=0}^3 \varepsilon^{\mu(\lambda)} a^{(\lambda)} = \sum_{\lambda=0,3} k_\mu \varepsilon^{\mu(\lambda)} a^{(\lambda)}$ folgt:

$$\partial_\mu A^{(+)\mu} | \psi \rangle = 0 \Rightarrow a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k}) | \psi \rangle = 0$$

Dies ist eine Bedingung an longitudinale und skalare Photonen. GUPTA-BLEULER stellt jedoch keine Bedingung an die transversalen Photonen. Insbesondere gilt

$$\langle \psi | a^{\dagger(3)} a^{(3)} - a^{\dagger(0)} a^{(0)} | 0 \rangle = \langle \psi | a^{\dagger(3)} (a^{(3)} - a^{(0)}) | \psi \rangle = 0$$

was aus $a^{(3)}(\vec{k}) - a^{(0)}(\vec{k})|\psi\rangle = 0$ folgt. Außerdem wollen wir den Erwartungswert für die Energie betrachten:

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \left\langle\psi\left|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\sum_{\lambda=0}^3\omega_k\zeta^{(\lambda)}a^{(\lambda)\dagger}a^{(\lambda)}\right|\psi\right\rangle = \left\langle\psi\left|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\sum_{\lambda=1}^2\omega_k a^{(\lambda)\dagger}a^{(\lambda)}\right|\psi\right\rangle$$

Damit tragen nur die transversalen Anteile bei! Die GUPTA-BLEULER-Bedingung sorgt also dafür, dass in physikalischen Größen nur die physikalischen Freiheitsgrade beitragen. Analog kann man dies für andere physikalische Größen zeigen. (Aus $\partial_\mu A^{(+)\mu}|\psi\rangle = 0$ folgt, dass nur transversale Photonen zu beobachtbaren Größen beitragen.)

Bemerkungen:

- i.) Zwei zusätzliche Freiheitsgrade (longitudinal, skalar)
- ii.) Einer wird durch GUPTA-BLEULER untersagt.
- iii.) Der andere entspricht der zusätzlichen Eichfreiheit, die man trotz der LORENTZ-Bedingung noch hat, nämlich $A^\mu \mapsto A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ mit $\square\Lambda = 0$.
- iv.) Im Vakuum gibt es keine transversalen Photonen.
- v.) Beachte: Bei Streuprozessen spielen die skalaren und longitudinalen Photonen eine wichtige Rolle.

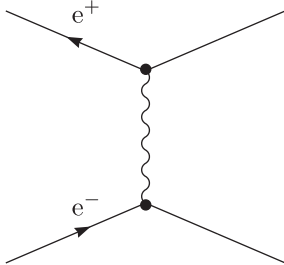
4.3 Feynman-Propagator für das Photonfeld

a.) Wir betrachten den Kommutator $[A^\mu(x), A^\nu(y)] =: iD^{\mu\nu}(x-y)$. FEYNMAN-Propagator:

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = -g^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x-y)) = \langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle$$

b.) Ziel: Interpretation analog zum skalaren Feld

Allerdings hat man es hier mit dem Austausch von vier Arten von Photonen zu tun, nämlich zwei transversale, ein longitudinales und ein skalares Photon.



c.) Betrachte FEYNMAN-Propagator im Impulsraum mit Bezugssystem 5.2.

$$n^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \epsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\mu - (n \cdot k)n^\mu}{\sqrt{(n \cdot k)^2 - k^2}}$$

Wir schauen uns nun den FEYNMAN-Propagator im Impulsraum an:

$$\begin{aligned} D_F^{\mu\nu}(k) &= -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=0}^3 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} = \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\sum_{\lambda=1}^2 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} + \frac{(k^\mu - (n \cdot k)n^\mu)(k^\nu - (n \cdot k)n^\nu)}{(n \cdot k)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right] = \\ &= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[\sum_{\lambda=1}^2 \zeta^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda)\mu} \epsilon^{(\lambda)\nu} + \underbrace{\frac{n^\mu n^\nu}{(n \cdot k)^2 - k^2}}_{D_{F,C}^{\mu\nu}} k^2 + \underbrace{\frac{k^\mu k^\nu - k \cdot n (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(n \cdot k)^2 - k^2}}_{D_{F,R}^{\mu\nu}} \right] \end{aligned}$$

Der erste Term beschreibt den Austausch von transversalen Photonen; dies haben wir bereits betrachtet. Hieraus folgt also:

$$D_F^{\mu\nu} = D_{F,T}^{\mu\nu} + D_{F,C}^{\mu\nu} + D_{F,R}^{\mu\nu}$$

i.) $D_{F,C}^{\mu\nu} = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{|\vec{k}|^2} \exp(-ikx) = g^{\mu 0} g^{\nu 0} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x_0)$

Dies entspricht einem instantanen COULOMB-Potential.

ii.) $D_{F,R}^{\mu\nu}$ verschwindet, da das Photon an erhaltenen Strom koppelt. Es gilt also $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$. Im Impulsraum gilt analog $k_\mu j^\mu(k) = 0$.

Kapitel 5

Störungstheorie, Feynman-Diagramme

5.1 Freie Theorie

Bisher haben wir uns mit einer freien Theorie beschäftigt, in der \mathcal{L} nur quadratische Terme in den Feldern enthält. Daraus ergaben sich mittels der EULER-LAGRANGE-Gleichung homogene, lineare Feldgleichungen, die man exakt durch FOURIER-Entwicklung lösen konnte. Dies führte dann zur Berechnung des FEYNMAN-Propagators. Beispielsweise wird ein reelles skalares Feld beschrieben durch die KLEIN-GORDON-Gleichung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2 \Rightarrow (\square + m^2)\phi = 0$$

Der FEYNMAN-Propagator ist definiert durch:

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \exp(-ik(x-y))$$

Dies ist gewissermaßen die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, dass sich ein Teilchen von \vec{x} nach \vec{y} ausbreitet. Aber: Felder ohne Wechselwirkung sind nicht nachweisbar! Im folgenden werden wir deshalb die Wechselwirkung zwischen Feldern mit in die Betrachtung einbeziehen. (Beispielsweise interessieren wir uns für die Photon-Elektron-Wechselwirkung.) Das Problem dabei ist jedoch, dass eine exakte Lösung (bisher) nicht mehr möglich ist. Wir werden die Wechselwirkungsphänomene also mittels der Störungstheorie auf eine Beschreibung durch freie Felder zurückführen.

5.2 Wechselwirkungsterme in der Lagrangedichte

Wir spalten die LAGRANGEDICHTE auf in eine freie LAGRANGEDICHTE und eine LAGRANGEDICHTE, welche die Wechselwirkung beschreibt: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$. \mathcal{L}_0 ist quadratisch in den Feldern und \mathcal{L}_W enthält Monome mit mehr als drei Feldern.

Beispiel: Elektrodynamik

Klassisch wechselwirken elektromagnetische Felder mit dem elektrischen Strom: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$. j^ν wird beispielsweise durch Elektronen hervorgerufen. Man konstruiert damit einen Wechselwirkungsterm zwischen Photonen (A_μ) und Elektronen (ψ). Die Bedingung ist, dass \mathcal{L} ein LORENTZ- bzw. DIRAC-Skalar ist. (Kandidaten dafür sind beispielsweise $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, ...) Damit führen wir den Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_W = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, wobei e eine „Kopplungskonstante“ ist und die Stärke der Wechselwirkung beschreibt.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + \text{Eichfixierung}$$

Der erste Term ist der kinetische Term für ein Photon, der zweite der kinetische Term für ein DIRAC-Feld. Die EULER-LAGRANGE-Gleichungen zu \mathcal{L} lauten:

$$(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi(x) = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi =: j^\nu$$

Die zweite Gleichung ist also von der Form, die wir aus der Elektrodynamik kennen. Wir können also $j^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ als NOETHERSTROM (aus Kapitel I4 (d)) interpretieren. Dies ist der erhaltene Strom für eine DIRAC-Theorie. Die beiden Gleichungen sind gekoppelte nichtlineare Feldgleichungen! Wie kann man diese lösen??

Nebenbemerkung:

\mathcal{L}_{QED} ist invariant unter „lokaler Eichtransformation“. Man kann $\psi(x)$ ersetzen durch $\exp(i\alpha(x))\psi(x)$ mit $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ und gleichzeitig $A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$. Durch diese Eichtransformation ist die Quantenelektrodynamik charakterisiert. In der Quantenchromodynamik hat man das Feld $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)^\top$ und fordert, dass \mathcal{L}_{QCD} invariant ist unter folgender Transformation:

$$\Psi \mapsto \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

\vec{T} sind acht 3×3 -Matrizen.

5.2.1 Weitere Beispiele für Wechselwirkungen

* ϕ^4 -Theorie: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$

* YUKAWA-Theorie (Skalar \Leftrightarrow Fermion):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi^{frei} + \mathcal{L}_\psi^{frei} - g\bar{\psi}\psi\phi$$

* Skalare Elektrodynamik:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi]^* (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi$$

Bisher haben wir nur kubische und quartische Terme in \mathcal{L}_W betrachtet. Wie es auch höhere Potenzen wie beispielsweise ϕ^6 ? Die Antwort ist, dass Produkte aus Feldern in \mathcal{L} mit Massendimension > 4 **nicht renormierbar** sind. Sie führen nämlich zu Observablen, die von einem Cut-Off abhängen. (Äquivalent: Bei Wechselwirkungstermen muss die Massendimension der Kopplungskonstanten immer ≥ 0 sein.) Wir erinnern uns:

$$[\phi] = 1, [A_\mu] = 1, [\psi] = \frac{3}{2}, [x] = -1, [\partial_\mu] = 1, \dots$$

Analog ist eine Vier-Fermion-Wechselwirkung der Form $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ mit der Massendimension sechs nicht renormierbar!

5.3 Wechselwirkungsbild

Genauso wie die LAGRANGEDichte können wir den HAMILTONoperator schreiben als Summe aus freiem Operator und einem Operator, der die Wechselwirkung beschreibt: $H = H_0 + H_W$. Wir wollen nun SCHRÖDINGER-, HEISENBERG- und Wechselwirkungsbild miteinander vergleichen:

Bild	Zustände	Operatoren
SCHRÖDINGERbild	$i\partial_t \psi\rangle^S = H \psi\rangle^S$	$i\partial_t O^S = 0$
HEISENBERGBild	$i\partial_t \psi\rangle^H = 0$	$i\partial_t O^H = [O^H, H]$
Wechselwirkungsbild	$i\partial_t \psi\rangle^W = H_W \psi\rangle^W$	$i\partial_t O^W = [O^W, H_0]$

Dies gilt insbesondere für $O = \pi, \phi, A_\mu, \dots$. Im Wechselwirkungsbild erfüllen die Operatoren die Bewegungsgleichung der freien Theorie. Daraus folgt, dass die Feldoperatoren wie zuvor eine FOURIER-Zerlegung haben! Beispielsweise gilt für den Feldoperator des Skalarfelds (vergleiche II.3.(c)):

$$\phi^W(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[\exp(ikx)a^\dagger(\vec{k}) + \exp(-ilx)a(\vec{k}) \right] \text{ mit } \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

Im folgenden werden wir auf den Index „W“ verzichten, da wir immer im Wechselwirkungsbild arbeiten werden.

5.4 Zeitentwicklung der Zustände – S-Matrix

Bemerkung: Bislang wurde **keine** wechselwirkende Feldtheorie exakt gelöst (für $D = 4$). Wir werden dies also näherungsweise lösen, was uns zur Störungstheorie führt. Wir lösen das ganze als Potenzreihe in der

Kopplungskonstanten. Die Vermutung/Hoffnung/Erfahrung ist, dass die Reihe konvergiert. Damit ist eine Approximation durch die führenden Terme möglich. Beispiel: Das magnetische Moment des Elektrons ist:

$$g_e = 2 + \frac{\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \dots \approx 2,002\,319\,304\,373\,7(82) \pm 4 \cdot 10^{-12}$$

Eine noch genauere Rechnung ergibt:

$$g_e = 2 + 2a \text{ mit } a = \frac{\alpha}{\pi} - 0,32 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,18 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1,51 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 = 0,0011596521866$$

Experimentell bestimmt man $a = 0,0011596521884(43)$; die Abweichung zur Theorie beträgt dann $4 \cdot 10^{-11}$! Unser Ziel ist, Streu-Experimente zu beschreiben. Die Wechselwirkung soll nur über einen endlichen Zeitraum $[T_1, T_2]$ wirken und die asymptotischen Zustände $|\psi(t \mapsto -\infty)\rangle$ und $|\phi(t \mapsto +\infty)\rangle$ erfüllen die „freie“ Bewegungsgleichung mit $H_W = 0$. Beispiel:

$$|\phi(-\infty)\rangle \longrightarrow \text{Wechselwirkungsgebiet} \longrightarrow |\phi(\infty)\rangle$$

Die Wechselwirkung soll nur zwischen T_1 und T_2 stattfinden. (Was wir also nicht behandeln werden, sind Wechselwirkungs Zustände.) Seien $|n\rangle$ die Eigenzustände von H_0 , dann kann man schreiben:

$$|\phi(-\infty)\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \text{ mit } \sum_n |a_n|^2 = 1$$

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_n b_n |n\rangle \text{ mit } \sum_n |b_n|^2 = 1$$

Der Zustand wird geändert, aber dessen Norm bleibt gleich. Dies entspricht einer Drehung im Raum der Zustände. Es gibt also eine unitäre Transformation S mit $|\phi(\infty)\rangle = S|\phi(-\infty)\rangle$. Wir werden uns nun mit der Bestimmung der sogenannten S-Matrix S auseinandersetzen.

5.5 Entwicklung der S-Matrix

Wir gehen aus von der SCHRÖDINGERgleichung:

$$i\partial_t |\phi(t)\rangle = H_W |\phi(t)\rangle \text{ mit der Anfangsbedingung } |\phi(-\infty)\rangle = |i\rangle$$

Diese Differentialgleichung können wir in einen Integralgleichung umschreiben und bestimmen daraus eine iterative Lösung, indem wir $|\phi(t)\rangle$ mit $t = t_1, t_2, \dots$ immer wieder in die Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |\phi(t_1)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |i\rangle + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_2) |\phi(t_2)\rangle = \\ &= |i\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_W(t_1) H_W(t_2) \dots H_W(t_n) |i\rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_1 \dots \int_{-\infty}^t dt_n T [H_W(t_1) \dots H_W(t_n)] |i\rangle \end{aligned}$$

T ist der Zeitordnungsoperator, den wir schon im Kapitel II 3.2 (c,ii) gesehen haben. Für $t \mapsto \infty$ ist der obige Ausdruck die S-Matrix:

$$S = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_W(t) \right) \right] = T \left[\exp \left(i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_W(x) \right) \right]$$

Dies gilt, falls H_W keine Ableitungen enthält. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch das Matrixelement:

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | \phi(+\infty) \rangle = \left\langle f \left| \left(1 + i \int d^4x T \mathcal{L}_W(x) + \frac{(i)^2}{2!} T \int d^4x \int d^4y \mathcal{L}_W(x) \mathcal{L}_W(y) + \dots \right) \right| i \right\rangle$$

In der Quantenelektrodynamik haben wir beispielsweise LAGRANGEDichten der Form $\mathcal{L}_W \sim e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$, welche Wechselwirkungen beschreiben. Es ist also zu berechnen:

$$\langle f|T(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu)(\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu)\dots|i\rangle$$

Wir benötigen Matrixelemente der Form $\langle f|T\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)|i\rangle$, wobei die $\varphi_i(x_i)$ allgemein Quantenfelder im Wechselwirkungsbild sein sollen. Außerdem lassen wir zu, dass φ sowohl bosonische als auch fermionische Felder sein können: $\varphi_i \in \{\psi, A_\mu, \phi, \dots\}$. Die Zeitentwicklung funktioniert analog zu freien Feldern. Wir schreiben:

$$\varphi_i(x_i) = \varphi_i^{(+)}(x_i) + \varphi_i^{(-)}(x_i)$$

Vergleiche Kapitel II, 5.2 (e).

$$\varphi_i^{(+)}(x_i) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a_i(\vec{k}) \exp(-ikx_i) \text{ und } \varphi_i^{(-)}(x_i) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} b_i^\dagger(\vec{k}) \exp(ikx_i) \text{ mit } \omega_k = k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

(+) steht für positive (-) für negative Frequenzen. Es sei nun im folgenden $\varphi_i \equiv \varphi_i(x_i)$.

$$:\varphi_i^{(+)}\varphi_j^{(-)} := \begin{cases} -\varphi_j^{(-)}\varphi_i^{(+)} & \text{falls } \varphi_i, \varphi_j \text{ Fermion-Felder} \\ +\varphi_j^{(-)}\varphi_i^{(+)} & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad :\varphi_i^{(-)}\varphi_j^{(+)} := \varphi_i^{(-)}\varphi_j^{(+)}$$

Sei $x_1^0 > x_2^0$:

$$\varphi_1\varphi_2 = (\varphi_1^{(+)} + \varphi_1^{(-)})(\varphi_2^{(+)} + \varphi_2^{(-)}) = \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(+)} + \varphi_1^{(-)}\varphi_2^{(-)} + \varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)}$$

Hier sind alle Terme normalgeordnet bis auf den letzten. Diesen schreiben wir unter Verwendung des Kommutators um, nämlich $\varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)} = [\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}]_{\pm} \pm \varphi_2^{(-)}\varphi_1^{(+)}$. Damit gilt:

$$\varphi_1\varphi_2 =: \varphi_1\varphi_2 : + \begin{cases} \{\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}\} & \text{falls } \varphi_1, \varphi_2 \text{ Fermion-Felder} \\ [\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}] & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls φ_1, φ_2 bosonisch sind, können wir auch schreiben:

$$\mathbb{C} \ni [\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}] = \langle 0|[\varphi_1^{(+)}, \varphi_2^{(-)}]|0\rangle = \langle 0|\varphi_1^{(+)}\varphi_2^{(-)}|0\rangle = \langle 0|\varphi_1\varphi_2|0\rangle \stackrel{x_1^0 > x_2^0}{\equiv} \langle 0|T\varphi_1\varphi_2|0\rangle$$

Dies gilt analog, falls φ_1, φ_2 fermionisch sind, was als Übung gezeigt werden kann. Im Falle $x_1^0 < x_2^0$ vertauschen wir die Indizes 1 mit 2 und erhalten dieselbe Gleichung:

$$\varphi_2\varphi_1 =: \varphi_2\varphi_1 : + \langle 0|T\varphi_2\varphi_1|0\rangle$$

1.) φ_1, φ_2 seien Fermionen:

$$T(\varphi_1\varphi_2) = -\varphi_2\varphi_1 = -: \varphi_2\varphi_1 : - \langle 0|T\varphi_2\varphi_1|0\rangle =: \varphi_1\varphi_2 : + \langle 0|T\varphi_1\varphi_2|0\rangle$$

2.) φ_1 oder φ_2 sei ein Boson:

Dann erhält man ein analoges Ergebnis.

Schlussendlich folgt:

$$T(\varphi_1\varphi_2) =: \varphi_1\varphi_2 : + \langle 0|T\varphi_1\varphi_2|0\rangle \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \text{ und } \forall x_1, x_2$$

Beachte: Die φ_i verhalten sich wie freie Felder. Das bedeutet, dass $\langle 0|T\varphi_i(x)\varphi_j(y)|0\rangle = D_F^i(x-y)$ (FEYNMAN-Propagator für Felder vom Typ i). Andererseits gilt, falls φ_1, φ_2 unterschiedliche Felder sind: $\langle 0|T\varphi_1\varphi_2|0\rangle = 0$. Wir führen nun folgende Abkürzung ein:

$$\underbrace{\varphi_1\varphi_2}_{\square} \equiv \langle 0|T\varphi_1\varphi_2|0\rangle$$

Man spricht dabei auch von der „WICK-Kontraktion“. Im Falle von drei Feldern gilt:

$$\underbrace{\varphi_1\varphi_2\varphi_3}_{\square} \equiv \begin{cases} -\underbrace{\varphi_1\varphi_3\varphi_2}_{\square} & \text{falls } \varphi_2, \varphi_3 \text{ Fermionfelder} \\ +\underbrace{\varphi_1\varphi_3\varphi_2}_{\square} & \text{sonst} \end{cases}$$

Allgemein gilt

$$\varphi_1 \dots \varphi_k \dots \varphi_l \dots \varphi_n = (-1)^p \underbrace{\varphi_k \varphi_l}_{\text{}} \varphi_1 \dots \varphi_n$$

falls p die Anzahl der fermionischen Vertauschungen ist.

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 \dots \varphi_n) &= \varphi_1 \dots \varphi_n + : \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n : + \dots + \\ &+ : \varphi_1 \dots \varphi_k \dots \varphi_l \dots \varphi_n + \dots + : \varphi_1 \dots \varphi_{k_1} \dots \varphi_{l_1} \dots \varphi_{k_2} \dots \varphi_{l_2} \dots \varphi_k + \dots = \\ &=: \varphi_1 \dots \varphi_n : + \text{alle Kontraktionen} \end{aligned}$$

Betrachten wir folgendes Beispiel für $n = 4$:

$$\begin{aligned} T(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) &= \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \\ &+ : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : + : \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 : \end{aligned}$$

Betrachten wir außerdem den Vakuumerwartungswert für $\varphi_i \equiv \varphi(x_i)$, das heißt, gleiche bosonische Felder:

$$\langle 0 | \varphi_1 \dots \varphi_n | 0 \rangle = 0$$

$$\langle 0 | T(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) D_F(x_3 - x_4) + D_F(x_1 - x_4) D_F(x_2 - x_3) + D_F(x_1 - x_3) D_F(x_2 - x_4)$$

5.6 Wick-Theorem

5.6.1 Berechnung von S-Matrix-Elementen $S_f = \langle f | T \varphi_1 \dots \varphi_n | i \rangle$

Die Auswertung von $\langle f | S | i \rangle$ mit $S = T \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_W(x) \right)$ führt auf Matrixelemente der Form $\langle f | T \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) | i \rangle$. Über das WICK-Theorem reduziert man dies auf normalgeordnete Produkte und Propagatoren.

$$T \varphi_1 \dots \varphi_n = : \varphi_1 \dots \varphi_n : + \sum : \varphi_1 \dots \varphi_i \dots \varphi_k \dots \varphi_n : + \dots \text{(alle Kontraktionen)}$$

Zunächst betrachten wir ein reelles Skalarfeld ϕ .

$$|i\rangle = |\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1) a^\dagger(\vec{p}_2) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle \text{ und analog für } |f\rangle$$

Man zerlegt dann das Skalarfeld in Komponenten, die nur Erzeuger und Vernichter enthalten, also:

$$\phi = \phi^{(+)} + \phi^{(-)} \text{ mit } \phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k} a(\vec{p}) \exp(-ipx) \equiv \int_p a(\vec{p}) \exp(-ipx) \text{ und } \phi^{(-)}(x) = \int_p a^\dagger(\vec{p}) \exp(ipx)$$

$$\text{wobei } \omega = p_0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

Hierbei gilt offensichtlich $\phi^{(+)}(x) |0\rangle = 0$, da $\phi^{(+)}$ nur Vernichter enthält.

$$[\phi^{(+)}(x), a^\dagger(\vec{p})] = \int_{p'} [a(\vec{p}') \exp(-ip'x), a^\dagger(\vec{p})] = \int_{p'} \exp(-ip'x) [a(\vec{p}'), a^\dagger(\vec{p})] = \int_{p'} \exp(-ip'x) \delta(\vec{p} - \vec{p}') = \exp(-ipx)$$

Hieraus ergibt sich unter Verwendung des oben berechneten Kommutators:

$$\phi^{(+)} |\vec{p}\rangle = \phi^{(+)} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = \exp(-ipx) |0\rangle$$

$$\begin{aligned} \phi^{(+)} |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_k\rangle &= \phi^{(+)}(x) a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_k) |0\rangle = \\ &= a^\dagger(\vec{p}_1) \phi^{(+)}(x) a^\dagger(\vec{p}_2) \dots a^\dagger(\vec{p}_k) |0\rangle + \exp(-ip_1x) a^\dagger(\vec{p}_2) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) |0\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \phi^{(+)}(x) a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_k) \dots a^\dagger(\vec{p}_k) |0\rangle \text{ mit } \phi^{(+)}(x) a^\dagger(\vec{p}) \equiv \exp(-ipx) \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\phi^{(+)}(x_1) \dots \phi^{(+)}(x_N) |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_N\rangle = 0 \text{ für } N > n$$

Ein typischer Term aus dem Wick-Theorem ist:

$$\langle f | : \phi \dots \phi : | i \rangle = \langle f | \phi^{(+)} \dots \phi^{(+)} | i \rangle + \langle f | \phi^{(-)} \phi^{(+)} \dots \phi^{(+)} | i \rangle + \dots + \dots \langle f | \underbrace{\phi^{(-)} \dots \phi^{(-)}}_{N_-} \underbrace{\phi^{(+)} \dots \phi^{(+)}}_{N_+} | i \rangle + \dots$$

Ein solcher Ausdruck ist nur $\neq 0$, wenn $N_+ \leq n_i$ und $N_- \leq n_f$ ist, wobei n_i und n_f die Anzahl der Teilchen im Anfangszustand $|i\rangle$ bzw. im Endzustand $|f\rangle$ ist. Falls $N_+ < n_i$ und $N_- < n_f$, gilt:

$$\langle f | \phi^{(-)} \dots \phi^{(-)} \phi^{(+)} \dots \phi^{(+)} | i \rangle \sim \langle f' | i' \rangle \text{ nur } \neq 0 \text{ falls } |i'\rangle = |f'\rangle$$

Einige Teilchen sind von der Wechselwirkung unbetroffen. Dies wird hier jedoch nicht betrachtet. Im folgenden werden wir nur Terme mit $N_- = n_f$ und $N_+ = n_i$ betrachten.

5.6.2 Modifikationen für Dirac- und Vektorfelder

Zur Erinnerung:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a(\vec{p}) \exp(-ipx) + a^\dagger(\vec{p}) \exp(ipx))$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} (a_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) \exp(-ipx) + b_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) \exp(ipx))$$

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_\lambda (c_\lambda(\vec{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \exp(-ikx) + c_\lambda^\dagger(\vec{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(\vec{k}) \exp(ikx))$$

$$\text{mit } A^{(+)} = c_\lambda(\vec{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \exp(-ikx) \text{ und } A^{(-)} = c_\lambda^\dagger(\vec{k}) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(\vec{k}) \exp(ikx)$$

Analog zu vorher erhält man:

$$\underbrace{\psi^{(+)}(x) a_s^\dagger(\vec{p})}_{\square} = u_s(\vec{p}) \exp(-ipx)$$

$$\underbrace{\psi^{(+)}(x) b_s^\dagger(\vec{p})}_{\square} = \bar{v}_s(\vec{p}) \exp(-ipx)$$

$$\underbrace{a_s(\vec{p}) \bar{\psi}^{(-)}(x)}_{\square} = \bar{u}_s(\vec{p}) \exp(ipx)$$

$$\underbrace{b_s(\vec{p}) \bar{\psi}^{(-)}(x)}_{\square} = v_s(\vec{p}) \exp(ipx)$$

$$\underbrace{A_\mu^{(+)} c_\lambda^\dagger(\vec{k})}_{\square} = \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \exp(-ikx)$$

$$\underbrace{c_\lambda(\vec{k}) A_\mu^{(-)}}_{\square} = \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(\vec{k}) \exp(ikx)$$

Außerdem ist zu beachten:

$$\psi^{(+)}(x) a_s^\dagger(\vec{p}_1) a_t^\dagger(\vec{p}_2) |0\rangle = \underbrace{\psi^{(+)}(x) a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle}_{\square} - \underbrace{\psi^{(+)}(x) a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle}_{\square}$$

Beispiel: QED

Wir gehen aus von:

$$\mathcal{L}_W = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = -e\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi_\beta A_\mu = -e\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta\gamma^\mu_{\alpha\beta}A_\mu$$

Wir unterdrücken im folgenden den Spinindex und betrachten den Prozess $e^- + e^- \mapsto e^- + e^-$.

$$|i\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2)|0\rangle \text{ und } |f\rangle = a^\dagger(\vec{p}_3)a^\dagger(\vec{p}_4)|0\rangle$$

Bei diesem Prozess sind vier Teilchen beteiligt, daher benötigen wir mindestens vier ψ 's im T-Produkt, um $N_+ = n_i$ und $N_- = n_f$ zu erfüllen. Wir müssen also mindestens \mathcal{L}_W^2 betrachten.

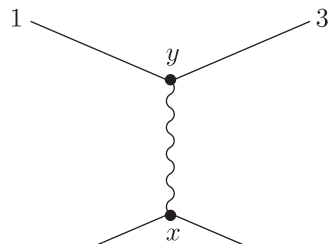
$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + \left\langle f \left| iT \int d^4x \mathcal{L}_W(x) \right| i \right\rangle + \frac{i^2 e^2}{2!} \int d^4x \int d^4y \langle f | T(\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu)(\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu) | i \rangle + \dots$$

- 1.) Die A_μ 's müssen WICK-kontrahiert sein, weil es keine Photonen im äußeren Zustand gibt. (Sonst stehen sie im Normalprodukt und dieses verschwindet.)

$$\langle 0 | A_\mu A_\nu | 0 \rangle = 0 \text{ und } \langle 0 | \underbrace{A_\mu A_\nu} | 0 \rangle \neq 0$$

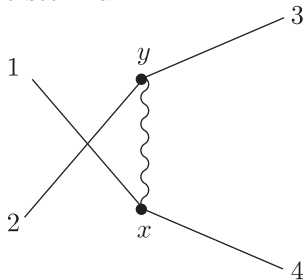
- 2.) Kein ψ darf WICK-kontrahiert sein, da wir für die äußeren Zustände vier ψ 's benötigen.

- 3.) Mögliche Terme sind daher:



a.) Erster Term: 2 4

- b.) Zweiter Term: Durch eine fermionische Vertauschung bekommt man ein relatives Minuszeichen zum ersten Fall.



c.) Dritter Term:
Dieser entspricht dem ersten Term mit $x \leftrightarrow y$.

d.) Vierter Term:
Dieser entspricht dem zweiten Term mit $x \leftrightarrow y$.

Man erhält damit einen zusätzlichen Vorfaktor 2, welcher den Vorfaktor $\frac{1}{2!}$ aus der Entwicklung der S-Matrix weghebt.

Nun betrachten wir das ganze in Formeln:

$$(1)+(3) = -e^2 \int d^4x \int d^4y \bar{u}(\vec{p}_4) \exp(ip_4x) \gamma^\mu u(\vec{p}_2) \exp(-ip_2x) \bar{u}(\vec{p}_3) \exp(ip_3y) \gamma^\nu u(\vec{p}_1) \exp(-ip_1y) iD_{F\mu\nu}(x-y)$$

$$iD_{F\mu\nu}(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ik(x-y))}{k^2 + i\varepsilon} (-g_{\mu\nu}) = \langle 0 | T \underbrace{A_\mu(x) A_\nu(y)} | 0 \rangle \equiv \underbrace{A_\mu(x) A_\nu(y)}$$

(vergleiche mit Kapitel II 5.3 (ohne Faktor i))
 Durch Ausführen der Integrationen erhalten wir:

$$\int d^4x \mapsto (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 - k) \text{ und } \int d^4y \mapsto (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 - p_1 + k)$$

Dadurch wird die Impulserhaltung an den „Vertizes“ beschrieben (siehe später). Wir können nun das k -Integral noch ausführen:

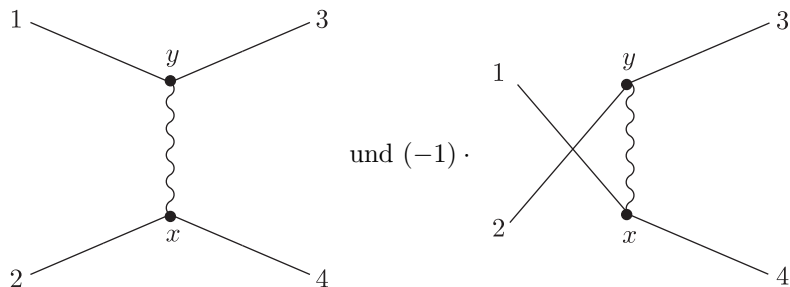
$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_4 - p_2 - k) \delta^{(4)}(p_3 - p_1 + k) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

Dies beschreibt die Gesamtimpulserhaltung! Damit folgt schlussendlich:

$$(1) + (3) = -e^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \bar{u}(\vec{p}_4) \gamma^\mu u(\vec{p}_2) \bar{u}(\vec{p}_3) \gamma^\nu u(\vec{p}_1) \cdot \frac{i}{k^2 + i\epsilon} (-g_{\mu\nu}) \text{ mit } k = p_1 - p_3 = p_2 - p_4$$

(2) + (4) funktioniert analog mit $1 \leftrightarrow 2$.

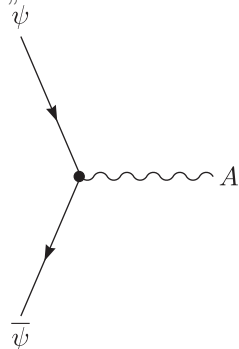
Nichtkontrahierte Felder liefern keinen Beitrag wegen $\langle 0 | : \phi \dots \phi : | 0 \rangle = 0$. Es sind **alle** Kontraktionen der Felder untereinander (Propagatoren) und mit äußeren Teilchen ($\exp(\pm ipx)$, $u(p)$, $\varepsilon_\mu(p)$) zu bilden. In der Ordnung e^2 hatten wir folgende Beiträge erhalten:



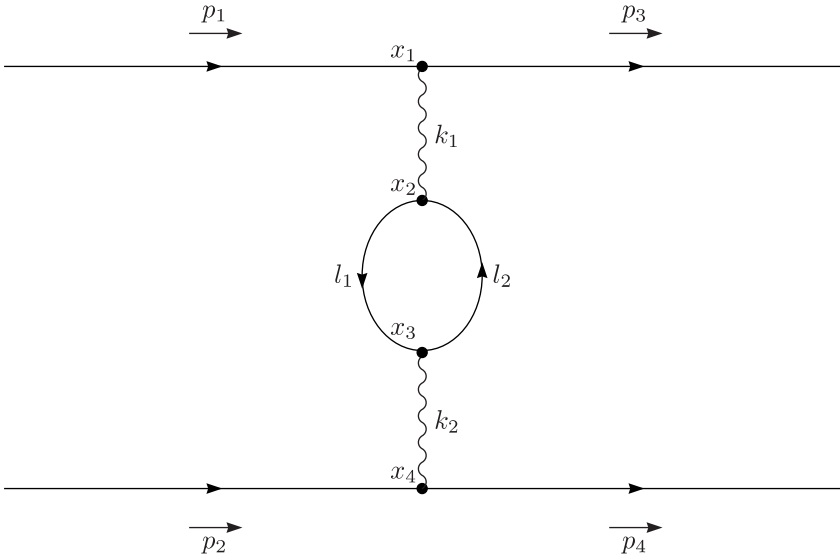
Die Ordnung e^3 verschwindet. Erst wieder die Ordnung e^4 liefert einen Beitrag:

$$\langle 0 | a_4 a_3 (\bar{\psi}(x_1) \psi(x_1) A(x_1)) (\bar{\psi}(x_2) \psi(x_2) A(x_2)) (\bar{\psi}(x_3) \psi(x_3) A(x_3)) (\bar{\psi}(x_4) \psi(x_4) A(x_4)) a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$$

Wir wollen nun die Kontraktionen graphisch betrachten. Wir repräsentieren die vier Terme $\bar{\psi}\psi A$ durch vier „Vertizes“



und erhalten damit folgendes FEYNMAN-DIAGRAMM:



Die Schleife entspricht folgendem Ausdruck:

$$(\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2)A(x_2))(\bar{\psi}(x_3)\psi(x_3)A(x_3)) = AA\bar{\psi}_\alpha\psi_\alpha\bar{\psi}_\beta\psi_\beta = AA(-1)\bar{\psi}_\beta\psi_\alpha\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta$$

α und β sind Spinorindizes. Da das letztere eine Zahl $\in \mathbb{C}$ ist, können wir auch die Spur dieser Zahl bilden:

$$AA(-1) \cdot \text{Sp}(\bar{\psi}_\beta\psi_\alpha\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta) = AA \cdot \text{Sp}(S_{F,\beta\alpha}S_{F,\alpha\beta}) = AA(-1) \cdot \text{Sp}(S_F(x_1 - x_2) \cdot S_F(x_3 - x_2))$$

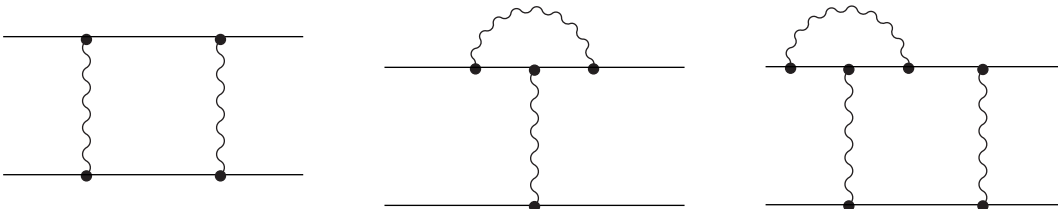
Der Ausdruck $(-1)\text{Sp}$ entspricht einer geschlossenen Fermionschleife. Wir müssen folgende Integrationen ausführen:

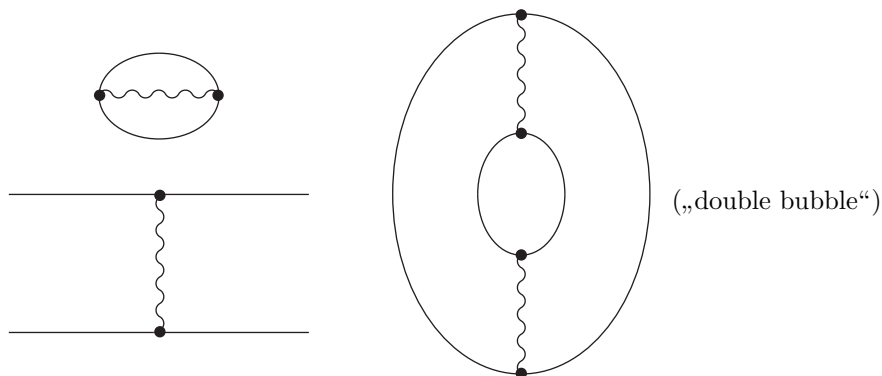
$$\int d^4x_1 \dots \int d^4x_4 \underbrace{\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4}}_{\text{Propagatoren}} \exp(-i(p_1 - p_3)x_1) \exp(-i(p_2 - p_4)x_4) \exp(-ik_1(x_2 - x_1)) \times \\ \times \exp(-ik_2(x_2 - x_4)) \exp(-il_1(x_2 - x_3)) \exp(-il_2(x_3 - x_2)) \cdot \text{Funktionen von } k_1, k_2, l_1, l_2, p_1, p_2, p_3, p_4$$

Führen wir die Integrationen über x_1, x_2, x_3 und x_4 aus, so ergibt sich:

$$\int d^4k_1 d^4k_2 d^4l : 1 d^4l_2 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 - k_1) \delta^{(4)}(p_2 - p_4 - k_2) \delta^{(4)}(k_2 - l_1 + l_2) \delta^{(4)}(k_1 + l_1 - l_2) = \\ = \int d^4l_1 d^4l_2 \delta^{(4)}(p_1 - p_3 + l_1 - l_2) \delta^{(4)}(p_2 - p_4 - l_1 + l_2) = \\ = \int d^4l_1 \delta^{(4)}(p_2 - p_4 - l_1 + p_1 - p_3 + l_1) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \int \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4}$$

Für jede geschlossene Schleife muss über den jeweiligen Schleifenimpuls integriert werden (in diesem Falle l_1). Betrachten wir nun weitere Kontraktionen zur Ordnung e^4 :

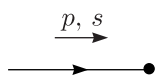




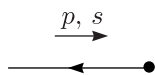
5.7 Feynman-Regeln für Quantenelektrodynamik

* Einlaufende Teilchen:

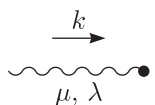
➤ Elektron e^- : $u_s(p) \hat{=} \psi a_s^\dagger$



➤ Positron e^+ : $\bar{v}_s(p) \hat{=} \bar{\psi} b_s^\dagger$

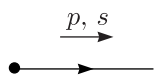


➤ Photon γ : $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}) \hat{=} A_\mu c_\lambda^\dagger$

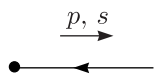


* Auslaufende Teilchen:

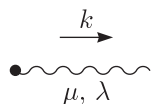
➤ Elektron e^- : $\bar{u}_s(p) \hat{=} a_s \bar{\psi}$



➤ Positron e^+ : $v_s(p) \hat{=} b_s \psi$

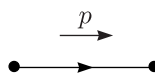


➤ Photon γ : $(\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}))^* \hat{=} c_\lambda A_\mu$

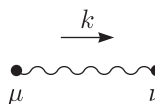


* Propagatoren:

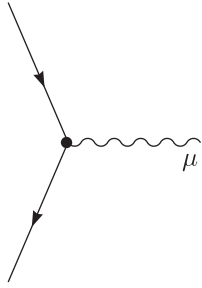
➤ Elektron/Positron e: $\frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \hat{=} \psi \bar{\psi}$



➤ Photon γ : $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \hat{=} A_\mu A_\nu$



* Vertex $e\bar{e}\gamma$: $-ie\gamma^\mu \stackrel{\Delta}{=} -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$



- * Impulserhaltung an jedem Vertex
- * Multipliziere mit $(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)$
- * $\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}$ für jede geschlossene Schleife
- * (-1) und Spurbildung für jede Fermionschleife
- * (-1) bei Vertauschung von äußeren Fermionen

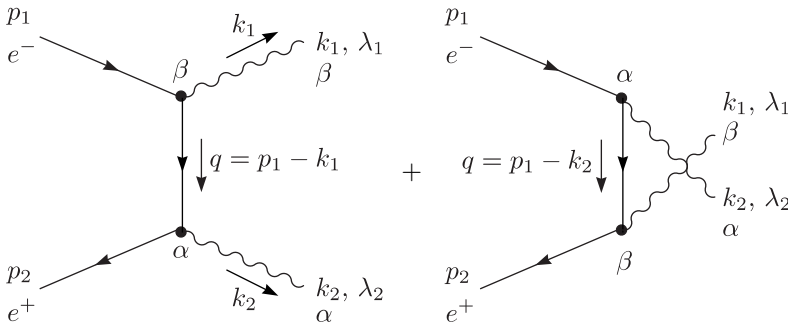
Schreibe $S = 1 + iT$.

$$\langle f|T|i\rangle \equiv (2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\mathcal{M}_{fi}$$

\mathcal{M}_{fi} ist die FEYNMAN-Amplitude. Man erhält diese durch Verbinden der äußeren Teilchen durch Vertizes und Propagatoren (Summe aller Möglichkeiten). (Ohne Beweis: Man betrachtet nur zusammenhängende Diagramme!) Schreibe den mathematischen Ausdruck gemäß FEYNMAN-Regeln, wobei Fermionlinien **entgegen** der Fermion-Richtung (\longrightarrow) durchlaufen werden.

5.7.1 Beispiel: Paarvernichtung

Wir betrachten den Prozess $e^+ + e^- \mapsto \gamma + \gamma$.

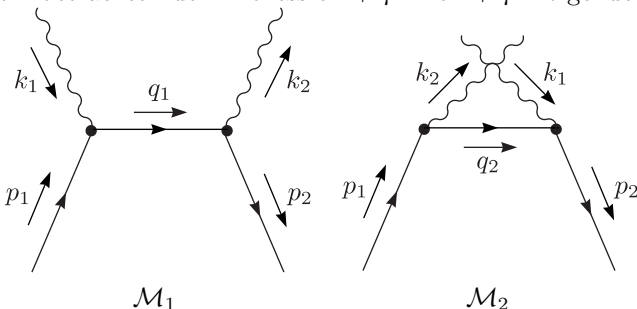


$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \text{ mit } \mathcal{M}_1 = \bar{v}(p_2)(-ie\gamma^\alpha)\frac{i}{\not{q} - m + i\varepsilon}(-ie\gamma^\beta)u(p_1)(\varepsilon_\alpha^{(\lambda_2)}(k_2))^*(\varepsilon_\beta^{(\lambda_1)}(k_1))^*$$

$\mathcal{M}_2 = \text{Übung!}$

5.8 Feynman-Amplitude für Compton-Streuung

Wir betrachten den Prozess $e^- + \gamma \mapsto e^- + \gamma$. Folgende FEYNMAN-Diagramme sind relevant:



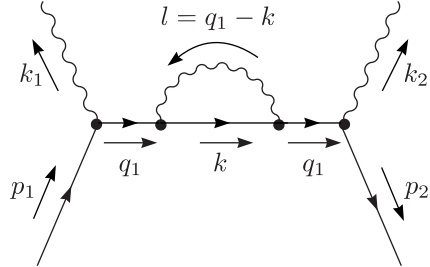
$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$$

Die Beiträge berechnen wir mittels der FEYNMAN-Regeln:

$$\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p_2)(-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{q}_1 - m} (-ie\gamma^\nu) u(p_1) \cdot \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(k_1) (\varepsilon_\mu^{(\lambda')}(k_2))^* \text{ mit } q_1 = p_1 + k_1$$

$$\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p_2)(-ie\gamma^\mu) \frac{i}{\not{q}_2 - m} (-ie\gamma^\nu) u(p_2) \cdot (\varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k_2))^* \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_1) \text{ mit } q_2 = p_2 - k_1$$

Ein Beitrag vierter Ordnung ist durch folgendes Diagramm mit einer Schleife gegeben:

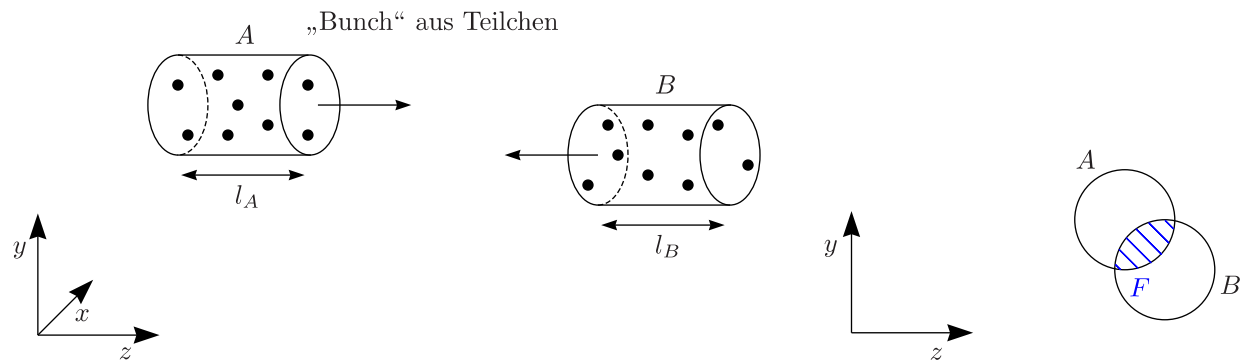


Hier ist die Amplitude gegeben durch:

$$\mathcal{M} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_2) \gamma^\mu \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\beta \frac{i}{\not{q}_1 - m} \gamma^\nu u(p_1) \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \frac{-ig^{\alpha\beta}}{(q_1 - k)^2} \cdot (-ie)^4$$

5.9 Wirkungsquerschnitt

5.9.1 Streuexperiment



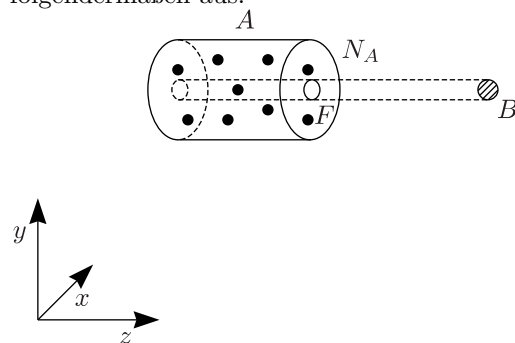
Für die Anzahl der Ereignisse \$N\$ gilt:

$$N_{event} \sim \varrho_A l_A \varrho_B l_B \cdot F$$

Der Proportionalitätsfaktor \$\sigma\$ ist der „Wirkungsquerschnitt“. Umformen:

$$\sigma = \frac{N_{event} \cdot F}{(\varrho_A l_A F)(\varrho_B l_B F)} = \frac{N_{event} \cdot F}{N_A \cdot N_B}$$

\$N_{A,B}\$ ist die Anzahl der Teilchen im **effektiven** Bereich. Sei \$N_B = 1\$. Dann sieht unser Streuexperiment folgendermaßen aus:



$$\sigma = \frac{N_{event}}{N_A} \cdot F$$

Falls B eine Stahlkugel ist, gilt $N_A = N_{event}$ und damit $\sigma = F$. Sonst ist dies die effektive Querschnittsfläche der aus dem Bunch A herausgestreuten Teilchen.

$$\sigma = \frac{N_{ev}}{\frac{N_A}{F}} = \frac{\frac{N_{event}}{T}}{j_A} = \frac{\text{Anzahl der Ereignisse pro Zeit } T}{\text{einlaufende Stromdichte}}$$

Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche. In natürlichen Einheiten ist dies $1/\text{Masse}^2$. Temporär wollen wir das ganze auf ein endliches Volumen $V = a^3$ normieren. Dann sind die Impulse nicht mehr kontinuierlich, sondern $\vec{p} = \frac{2\pi}{a}\vec{n}$ mit $\vec{n} \in \mathbb{Z}^3$. Ein-Teilchen-Zustände waren für $V = \mathbb{R}^3$ folgendermaßen normiert:

$$\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \langle 0 | a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') = 2p^0 \int_V d^3x \exp(i(\vec{p} - \vec{p}') \cdot \vec{x})$$

Für $\vec{p} = \vec{p}'$ und $V < \infty$ folgt $\langle \vec{p} | \vec{p} \rangle = 2p^0 \cdot V$. Betrachten wir nun die Streuung von zwei Teilchen: $|i\rangle := |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \mapsto |f\rangle := |\vec{p}_f\rangle$ mit $|\vec{p}_f\rangle = |\vec{p}_{f_1}, \dots, \vec{p}_{f_{N_f}}\rangle$. Die Übergangswahrscheinlichkeit ist:

$$w_{fi} = \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0 V^2} |\langle f | T | i \rangle|^2 \prod_{j=1}^{N_f} \frac{1}{2p_{f_j}^0 V} \text{ mit } p_{f_j}^0 = \sqrt{\vec{p}_{f_j}^2 + m_{f_j}^2} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V} \vec{n}_{f_j}^2 + m_{f_j}^2}$$

N Wiederholungen des Streuexperimentes im Zeitraum T für auf:

$$\frac{\text{Anzahl der Ereignisse}}{\text{Zeit}} = \frac{1}{T} \cdot N \sum_{\vec{n}_{f_1}} \dots \sum_{\vec{n}_{f_{N_f}}} w_{fi}$$

Dies ist eine Summe über alle beliebigen Streureaktionen. Wir berechnen nun zuerst das Betragsquadrat der Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned} |\langle f | T | i \rangle|^2 &= [(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i)]^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \int d^4x \exp(i(P_f - P_i)x) |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \int d^4x = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot T \cdot V \end{aligned}$$

Die Stromdichte ist gegeben durch:

$$j = \frac{|\vec{v}| \cdot N}{V} = \frac{|\vec{p}_1|}{p_1^0} \cdot \frac{N}{V} \text{ mit } p_1 = (p_1^0, \vec{p}_1), p_2 = (m_2, \vec{0})$$

Daraus ergibt sich dann für den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{j_A \cdot T} = \frac{N}{T} \cdot \frac{p_1^0 \cdot V}{|\vec{p}_1| \cdot N} \cdot \frac{1}{4p_1^0 p_2^0 V^2} T \cdot V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \cdot \sum_{\vec{n}_f} \left(\prod_f \frac{1}{2p_f^0 V} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 = \\ &= \frac{1}{4|\vec{p}_1| m_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \sum_{\vec{n}_f} \prod_f \frac{1}{2p_f^0 V} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \end{aligned}$$

Wir gehen an dieser Stelle wieder über ins Kontinuum:

$$\sum_{\vec{n}_f} \frac{1}{2p_f^0 V} \xrightarrow{V \mapsto \mathbb{R}^3} \int \frac{d^3n_f}{2p_f^0 V} \stackrel{\vec{p} = \frac{2\pi}{a}\vec{n}}{=} \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 \cdot 2p_f^0}$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist gegeben als:

$$d\sigma = \frac{1}{4|\vec{p}_1| m_2} \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3 2p_f^0}}_{\text{dLIPS}} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

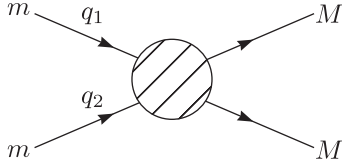
Dies gilt in einem System, in dem eins der beiden Teilchen ruht. „LIPS“ steht für „LORENTZ-invarianter Phasenraum“ (LORENTZinvariant phase space). Formen wir den „Flussfaktor“ weiter um:

$$4|\vec{p}_1| m_2 = 4\sqrt{(E_1^2 - m_1^2)m_2^2} = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \text{ mit } p_1 = (E_1, p_1), p_2 = (m_2, \vec{0})$$

Hieraus folgt:

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \text{ dLIPS}$$

5.10 2 → 2-Prozess



Wir betrachten den Spezialfall $q_1^2 = q_2^2 = m^2$ und wählen als Bezugssystem das Schwerpunktsystem:

$$q_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ v_i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -v_i \end{pmatrix}$$

\sqrt{s} ist die Schwerpunktsenergie und v_i die Geschwindigkeit.

$$q_1^2 = m^2 = \frac{s}{4}(1 - v_i^2) \Rightarrow v_i = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}$$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{1}{2} [(q_1 + q_2)^2 - q_1^2 - q_2^2] = \frac{1}{2}(s - m^2 - m^2) = \frac{1}{2}(s - 2m^2)$$

Hieraus ergibt sich dann der Flussfaktor:

$$\frac{1}{4\sqrt{(q_1 \cdot q_2)^2 - m^4}} = \frac{1}{2s\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}}} = \frac{1}{2v_i s}$$

Wir berechnen nun noch den LORENTZ-invarianten Phasenraum:

$$\int d\text{LIPS} = \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1^0} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)$$

Mit $\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) \equiv \delta^{(4)}(p_1^0 + p_2^0 - \sqrt{s}) \cdot \delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$ und $p_{1/2}^0 = \sqrt{\vec{p}_{1/2}^2 + M^2}$ folgt nach Integration über \vec{p}_2 :

$$p_2^0 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + M^2} = p_1^0 =: p^0, \quad \vec{p} := \vec{p}_1$$

$$\int d\text{LIPS} = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{d^3p}{(p^0)^2} \delta(2p^0 - \sqrt{s}) = \frac{1}{32\pi^2} \int d\Omega \int dp \frac{p^2}{p^2 + M^2} \delta\left(\sqrt{p^2 + M^2} - \frac{\sqrt{s}}{2}\right)$$

Machen wir die Substitution $x = \sqrt{p^2 + M^2}$ und $dx = \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + M^2}}$, so folgt:

$$\int d\text{LIPS} = \frac{1}{32\pi^2} \int d\Omega \int dx \frac{\sqrt{x^2 - M^2}}{x} \delta\left(x - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) = \frac{1}{32\pi^2} \int d\Omega \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} \quad \text{mit} \quad \sqrt{1 - \frac{4M^2}{s}} =: v_f$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben durch:

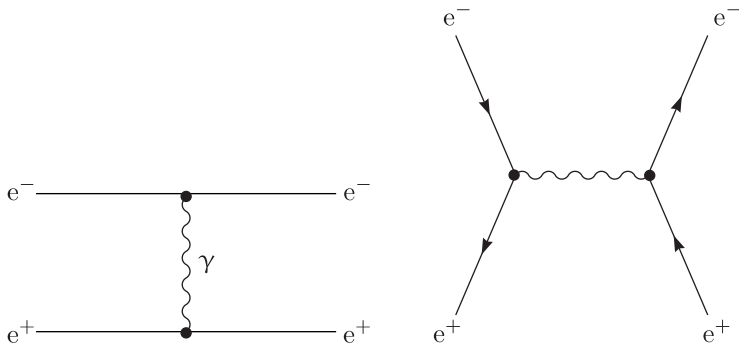
$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{v_f}{v_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2}$$

5.10.1 Ergänzende Bemerkung zum Wirkungsquerschnitt

Üblicherweise wird der Wirkungsquerschnitt in der Einheit „barn“ gemessen. Hierbei gilt:

$$\frac{1}{\text{GeV}^2} = 0,389 \cdot 10^{-3} \text{ barn}$$

Die Anzahl der Ereignisse ist mit dem Wirkungsquerschnitt verknüpft über $N = L \cdot \sigma$, wobei L die sogenannte Luminosität ist. Üblicherweise wird die Luminosität gemessen über einen sehr genau bekannten Referenzwirkungsquerschnitt, den man in der Theorie genau berechnet hat. Beispielsweise benutzt man bei Elektron-Positron-Collidern den Wirkungsquerschnitt der BHABBA-Streuung $e + e^- \mapsto e^+ e^-$.



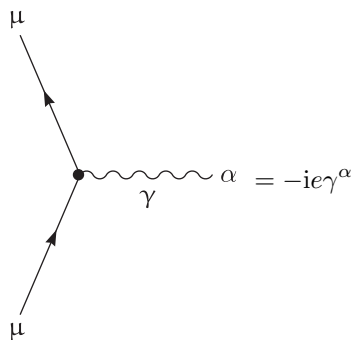
Die Luminosität ist also grob gesagt ein Maß für den einlaufenden Strom. Beispielsweise wurde für das LEP (1993-1998) eine integrierte Luminosität L von $\approx 200 \frac{1}{\text{pb}}$ gemessen.

Kapitel 6

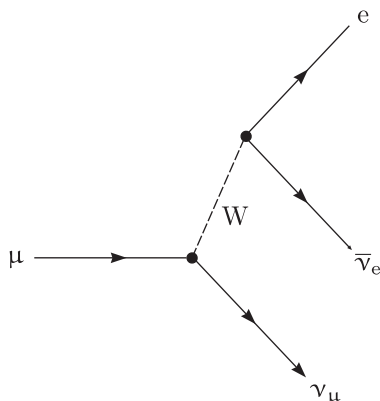
Der Prozess $e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-$

6.1 Das Myon

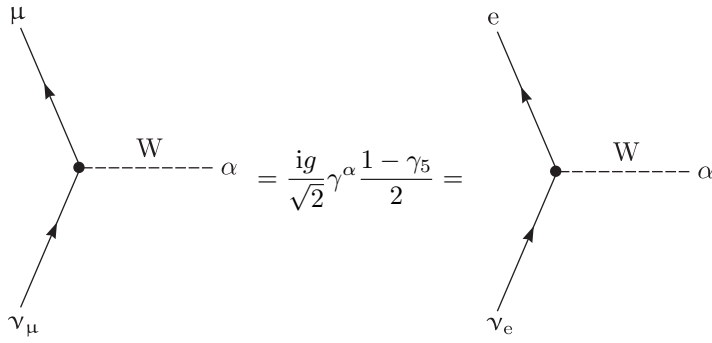
- * Manchmal wird das Myon als „schwerer Bruder“ des Elektrons bezeichnet.
Die Masse des Myons ist $105,6 \text{ MeV}$, was etwa $200m_e$ entspricht.
- * Alle anderen fundamentalen Eigenschaften (Quantenzahlen, Wechselwirkungen, usw.) sind identisch.
- * Versuche, das Myon als angeregten Zustand des Elektrons zu interpretieren, scheitern kläglich.
- * Insbesondere: Wechselwirkung mit Photon



- * Beachte aber, dass das Myon instabil ist. Der Zerfall findet über die „schwache Wechselwirkung“ statt nach dem Schema $\mu^- \mapsto e^- + \bar{\nu}_e \nu_\mu$. $\bar{\nu}_e$ ist ein Anti-Elektron-Neutrino und ν_μ ein Myon-Neutrino. Es gilt $m_{\nu_{e/\mu}} \approx 0$.



- * Für verregnete Ferientage:
Betrachten wir die FEYNMAN-Regeln der schwachen Wechselwirkung (Auszug).



$$\frac{ig}{\sqrt{2}}\gamma^\alpha \frac{1-\gamma_5}{2} = -i \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} \text{ mit } M_W = 80,4 \text{ GeV}$$

$$g^2 = \frac{M_W^2 G_F}{\sqrt{2}} \text{ mit } G_F = 1,16637 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{GeV}^2}$$

Daraus kann man Γ_μ berechnen und erhält folgendes Ergebnis:

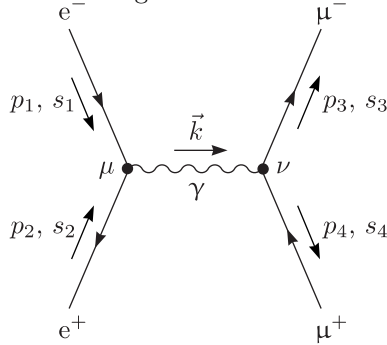
$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 \cdot m_\mu^5}{192\pi^3} = 3,001 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}$$

Die Lebensdauer ergibt sich durch:

$$\frac{\hbar}{\Gamma_\mu} = \frac{6,582 \cdot 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s}}{3,001 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}} \approx 2,19 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

6.2 Wirkungsquerschnitt für $e^+ + e^- \mapsto \mu^+ + \mu^-$

Wir benötigen nur ein FEYNMAN-Diagramm:



Der Impuls des Photons lautet $k = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$; außerdem bezeichnet wir $u_1 = u(p_1, s_1)$ etc. Mit den FEYNMAN-Regeln ergibt sich das Matrixelement dieses Diagramms:

$$\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{v}_2^\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu u_1^\beta \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}_3^\delta \gamma_{\delta\epsilon}^\nu v_4^\epsilon$$

Nun benötigen wir M^* :

$$M^* = (ie)^2 \bar{v}_4^\sigma \gamma_{\sigma\tau}^{\nu'} u_3^\tau \frac{ig_{\mu'\nu'}}{k^2 - i\epsilon} \bar{u}_1^\eta \gamma_{\eta\omega}^{\mu'} v_2^\omega$$

Wir berechnen den **unpolarisierten** Wirkungsquerschnitt; wir mitteln also über die Polarisierungen im Anfangs- und summieren über die Polarisierungen im Endzustand:

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2$$

Wir verwenden nun zwei Relationen, die wir auf dem sechsten Übungsblatt gezeigt haben:

$$\sum_{s=\pm\frac{1}{2}} u^\alpha(p, s) \bar{u}^\beta(p, s) = (\not{p} + m)^{\alpha\beta} \text{ und } \sum_{s=\pm\frac{1}{2}} v^\alpha(p, s) \bar{v}^\beta(p, s) = (\not{p} - m)^{\alpha\beta}$$

Damit ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4k^4} (\not{p}_2 - m_e)^{\omega\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p}_1 + m_e)^{\beta\eta} \gamma_{\eta\omega}^{\mu'} g^{\mu\nu} g^{\mu'\nu'} (\not{p}_3 + m_\mu)^{\tau\delta} \gamma_{\delta\epsilon}^\nu (\not{p}_4 - m_\mu)^{\epsilon\sigma} \gamma_{\sigma\tau}^{\nu'} = \\ &= \frac{e^4}{4k^4} \text{Sp}[(\not{p}_2 - m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu] \cdot \text{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma^\nu] \end{aligned}$$

Nun müssen wir die Spuren berechnen:

$$\text{Sp}((\not{p}_3 + m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma^\nu) = \text{Sp}(\not{p}_3\gamma^\mu\not{p}_4\gamma^\nu) - m_\mu^2 \text{Sp}(\gamma^\mu\gamma^\nu)$$

Die Spuren von einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen verschwinden. Weiter folgt mittels dem dritten Übungsblatt:

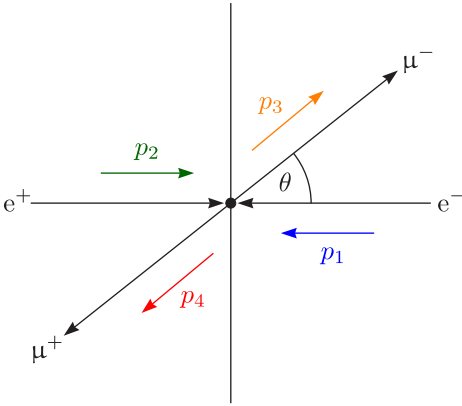
$$4(p_3^\mu p_4^\nu + p_3^\nu p_4^\mu - (p_3 \cdot p_4)g^{\mu\nu} - m^2 g^{\mu\nu})$$

Im folgenden setzen wir die Elektronenmasse $m_e = 0$. Man macht dabei einen Fehler der Ordnung $m_e^2/m_\mu^2 = 1/200^2$. Analog berechnet man $\text{Sp}(\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu)$. Daraus ergibt sich dann:

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4k^4} \cdot 16 [2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2)]$$

Wir wählen das Schwerpunktsystem mit \sqrt{s} als Schwerpunktsenergie:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \sin \theta \cos \phi \\ \beta \sin \theta \sin \phi \\ \beta \cos \theta \end{pmatrix} \text{ und } p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \sin \theta \cos \phi \\ -\beta \sin \theta \sin \phi \\ -\beta \cos \theta \end{pmatrix} \text{ mit } \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s^2}}$$



Wir berechnen nun die einzelnen Größen, die wir benötigen:

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2}, k^2 = (p_1 + p_2)^2 = s$$

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = \frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta) \text{ und } p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = \frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta)$$

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \cdot s^2 [1 + \beta^2 \cos^2 \theta + (1 - \beta^2)]$$

Verwendet haben wir hier $\frac{m_\mu^2}{s} = \frac{1}{4}(1 - \beta^2)$. Damit ergibt sich der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{unpol} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{v_f}{v_i} \left(\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2\right) = \frac{e^4}{64\pi^2 s} \beta [2 + \beta^2(\cos^2 \theta - 1)]$$

Der totale Wirkungsquerschnitt folgt durch Integration über den Raumwinkel Ω :

$$\int d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \theta$$

Mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ folgt der integrale Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

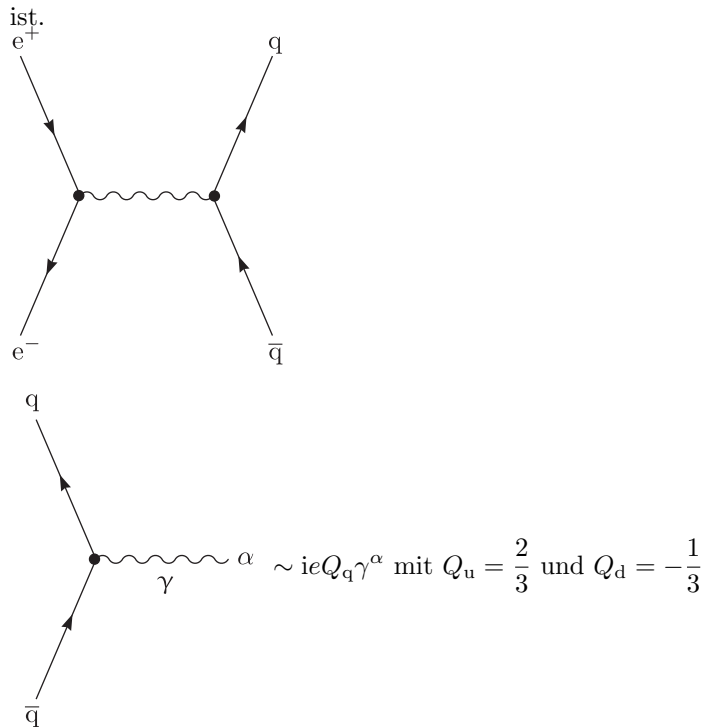
Betrachten wir beispielsweise die Streuung bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 90 \text{ GeV}$, so ergibt sich:

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{1}{137}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{90}\right)^2 \cdot 0,389 \cdot 10^{-3} \text{ barn} \approx \boxed{11 \text{ pb}}$$

6.3 Wirkungsquerschnitt für $e^+ + e^- \mapsto \text{Hadronen}$

- * Hadronen sind Teilchen, die an der „starken Wechselwirkung“ teilnehmen. Diese sind beispielsweise p, n, π , η , ρ , usw.
- * Diese sind zusammengesetzt aus Quarks und Gluonen.

Wenn wir den Wirkungsquerschnitt des Prozesses $e^+ + e^- \mapsto \text{Hadronen}$ berechnen, dann werden wir feststellen, dass dieser bis zur ersten Ordnung identisch mit dem Wirkungsquerschnitt für den Prozess $e^+ + e^- \mapsto q + \bar{q}$



Man erzählt dann unter Berücksichtigung der drei Farben der Quarks:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sum_q Q_q^2 \cdot 3$$

$$R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \mapsto \text{Hadronen})}{\sigma(e^+ + e^- \mapsto \mu^+ + \mu^-)} = 3 \cdot \sum_q |Q_q|^2$$

Beachte, dass für $2m_s < \sqrt{s} < 2m_c$ gilt:

$$R = 3 \cdot [Q_u^2 + Q_d^2 + Q_s^2] = 3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = 2$$

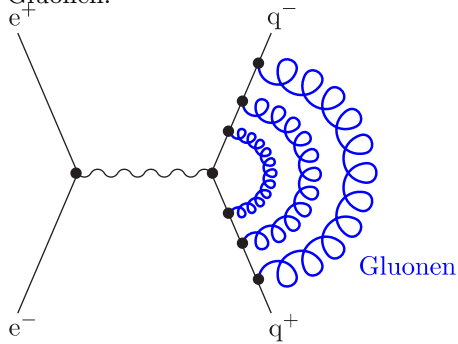
Für $2m_c < \sqrt{s} < 2m_b$ folgt

$$R = 2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}$$

und für $2m_b < \sqrt{s} < 2m_t$:

$$R = \frac{11}{3}$$

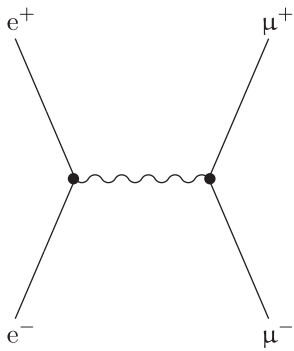
Korrekturen ergeben sich beispielsweise dadurch, indem man berücksichtigt, dass zwischen dem auslaufenden Quark-Antiquark-Paar die starke Wechselwirkung wirken kann. Dies funktioniert mittels des Austausches von Gluonen:



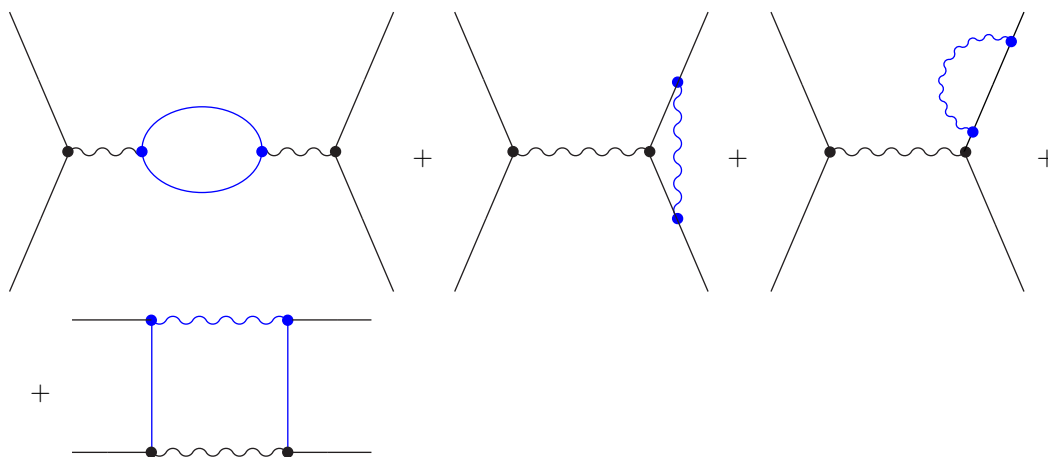
6.4 Höhere Ordnungen in der Störungstheorie

Wir betrachten den Prozess $e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-$.

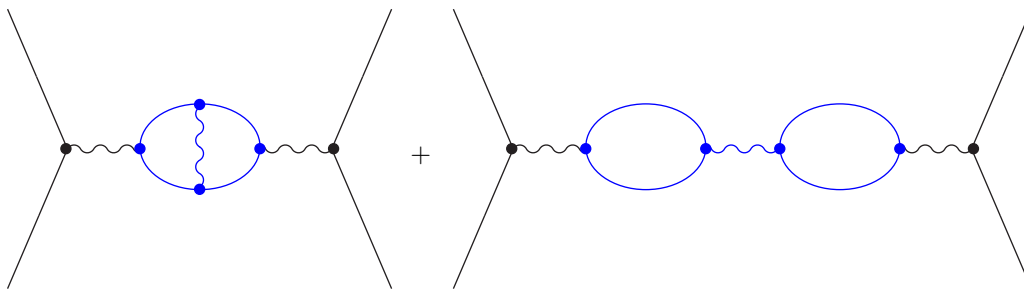
* $O(e^2)$:



* $O(e^4)$:



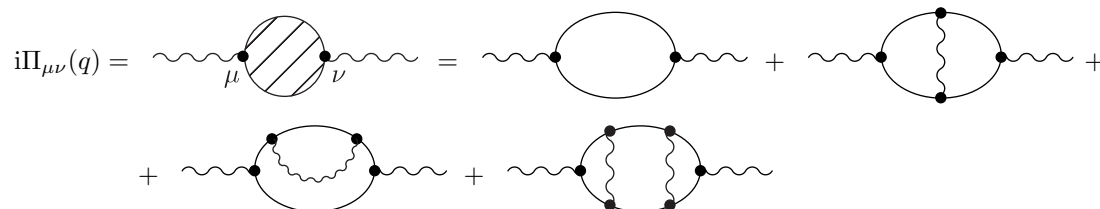
* $O(e^6)$:



6.4.1 Korrekturen zum Photon-Propagator

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots = \\
 & = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\varrho}}{q^2 + i\epsilon} i\Pi_{\varrho\sigma}(q) \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \frac{-ig_{\mu\varrho}}{q^2 + i\epsilon} i\Pi_{\varrho\alpha}(q) \frac{-ig_{\alpha\beta}}{q^2 + i\epsilon} i\Pi_{\beta\sigma}(q^2) \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2 + i\epsilon} + \dots
 \end{aligned}$$

Die Vakuum-Polarisation kann man durch folgende FEYNMAN-Diagramme beschreiben:



Sie lässt sich schreiben als:

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \exp(iqx) \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle \text{ mit } j_\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

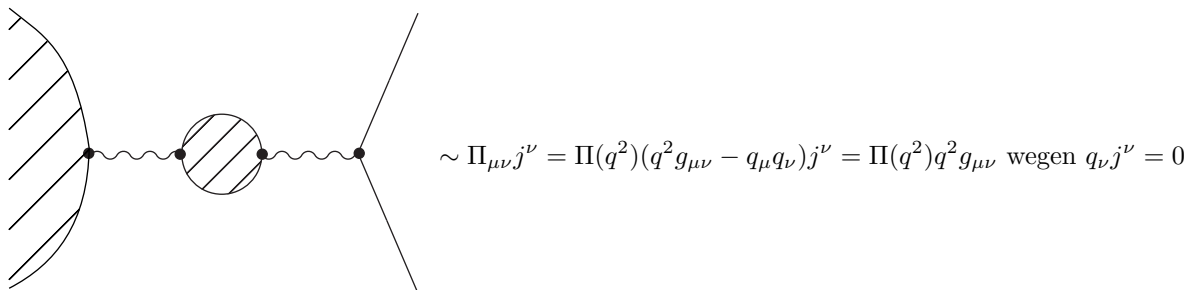
Wegen $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt $q_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ (*). Wir schreiben den Polarisationstensor $\Pi^{\mu\nu}$ um, indem wir eine Kovarianzzerlegung machen:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = Ag_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu$$

Wegen (*) gilt $A = -Bq^2 \equiv q^2\Pi(q^2)$. Damit lässt sich $\Pi_{\mu\nu}(q)$ mittels einer skalaren Größe ausdrücken:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2)$$

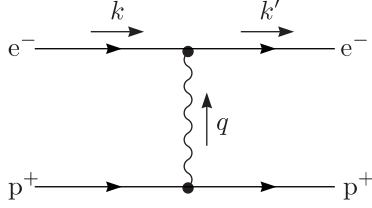
Beachte aber, dass $\Pi_{\mu\nu}$ immer an einen erhaltenen Strom koppelt.



$q_\nu j^\nu = 0$ rührt von $\partial_\nu j^\nu = 0$ her. Die $q_\mu q_\nu$ -Terme liefern also keinen Beitrag. Damit folgt mittels der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} [1 + q^2\Pi(q^2) + (q^2\Pi(q^2))^2 + \dots] = \\
 & = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2(1 - \Pi(q^2)) + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

Intermezzo: Das COULOMB-Potential erhält man aus dem nicht-relativistischen Limes der niedrigsten Ordnung der Elektron-Proton-Wechselwirkung:



$$k = (E, \vec{k}) = (m, \vec{k}) + O(\vec{k}^2) \text{ und } k' = (E', \vec{k}') = (m, \vec{k}') + O(\vec{k}'^2)$$

$$q = k' - k = (0, \vec{k}' - \vec{k}) + O(\vec{k}^2)$$

Die FEYNMAN-Amplitude, die sich aus obigem FEYNMAN-Diagramm ergibt, ist proportional zu $e^2/q^2 = -e^2/\vec{q}^2 = -V(\vec{q})$. Durch FOURIERtransformation ergibt sich das Potential im Ortsraum:

$$V(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\vec{q}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}) = \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{\alpha}{r}$$

Dies ist das bekannte COULOMB-Potential. Die Vakuumpolarisation bewirkt eine Modifikation des COULOMB-Potentials. Im Limes $q^2 \mapsto 0$ wird die elektrische Ladung modifiziert:

$$\frac{e^2}{q^2(1 - \Pi(0))} \equiv \frac{e_R^2}{q^2}$$

Der Effekt von $\Pi(0)$ ist nicht physikalisch:

- * e_R bezeichnet man als „physikalische Ladung“.
- * Den Parameter e , der in der LAGRANGEDichte auftaucht, ist die „nackte Ladung“.

Effekte bei endlichen q^2 sind physikalisch und führen zu einer Änderung des $1/r$ -Verhaltens des COULOMB-Potentials:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{q^2(1 - \Pi(q^2))} &= \frac{e_R^2(1 - \Pi(0))}{q^2(1 - \Pi(q^2))} = \frac{e_R^2}{q^2(1 - \Pi(q^2))(1 + \Pi(0))} = \frac{e_R^2}{q^2(1 + \Pi(0) - \Pi(q^2) - \Pi(q^2)\Pi(0))} = \\ &= \frac{e_R^2}{q^2(1 + \Pi(0) - \Pi(q^2))} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{\Pi(q^2)\Pi(0)}{1 + \Pi(0) - \Pi(q^2)}} \right] = \\ &= \frac{e_R^2}{q^2(1 + \Pi(0) - \Pi(q^2))} \left[1 + \frac{\Pi(q^2)\Pi(0)}{1 + \Pi(0) - \Pi(q^2)} + \dots \right] = \\ &= \frac{e_R^2}{q^2(1 - \Pi(q^2) + \Pi(0))} (1 + O(e^2)) \equiv \frac{e_R^2}{q^2(1 - \hat{\Pi}(q^2))} \end{aligned}$$

Wir berechnen $\hat{\Pi}(q^2)$:

Wir betrachten den Integrationsbereich großer k :

$$\Pi_{\mu\nu} \sim \int d^4k \frac{k^\mu k^\nu}{k^4}$$

Das Integral ist für $k \mapsto \infty$ quadratisch divergent. Man spricht im Falle einer Divergenz für große k von einer UV-Divergenz (Ultraviolett-Divergenz). Auch ist

$$\int d^4k \frac{1}{k^4}$$

divergent und zwar logarithmisch. Physikalische Größen müssen jedoch endlich sein, weshalb die Divergenzen in $\hat{\Pi} = \Pi(q^2) - \Pi(0)$ wegfallen müssen.

6.5 Regularisierung

Bei der Regularisierung versucht man, die Divergenz zu parametrisieren. Man führt beispielsweise einen Abschneideparameter (Cut-Off) Λ ein. Bei einer logarithmischen Divergenz ist das Integral $\sim \ln(\Lambda)$ und bei einer quadratischen Divergenz $\sim \lambda^2$.

6.5.1 Dimensionale Regularisierung

Die Idee ist, das Integral in $D < 4$ Raum-Zeit-Dimensionen zu berechnen. Das Integral

$$\int \frac{d^D k}{k^n}$$

ist UV-konvergent für $D < n$. Es ist zu beachten, dass in D Dimensionen $a_\mu b^\mu = a \cdot b$ gleich bleibt; es gilt jedoch $g_\mu^\mu = D$. Entsprechend folgt aus $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, dass $\gamma^\mu \gamma_\mu = D$ ist und damit $\gamma^\mu \not{\gamma}_\mu = (2 - D)\not{1}$ (vergleiche Aufgabe 10b). Außerdem folgte aus Aufgabe 22: $[e] = \frac{D}{2} - 2$. Statt der dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten, wählen wir geschickt $\mu^{\frac{D}{2}-2} \cdot e$ mit $[\mu] = 1$. Betrachten wir nach diesen Vorbemerkungen nun das folgende D -dimensionale Integral (aus Aufgabe 31):

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} (m^2 - i\varepsilon)^{\frac{D}{2} - n}$$

Mit Γ ist die Γ -Funktion gemeint, für die $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ und $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt. Man beachte, dass die rechte Seite auch für $D \in \mathbb{C}$ definiert ist! Damit ist ein kontinuierlicher Limes $D \mapsto 4$ möglich. Wir schreiben nun $D = 4 - 2\varepsilon$ und entwickeln um $\varepsilon = 0$. Dazu betrachten wir beispielsweise den Fall $n = 1$ und verwenden:

$$a^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln(a) + O(\varepsilon^2) \text{ und } \Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + O(\varepsilon) \text{ mit } \gamma_E = \Gamma'(1) \approx 0,577$$

Hieraus folgt:

$$\mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} = \frac{i}{16\pi^2} m^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 1 - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + O(\varepsilon) \right]$$

Also gilt:

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{Sp}((\not{k} + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{q} + m)\gamma^\nu)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2)$$

$$\begin{aligned} i\Pi(q^2) &= \frac{1}{q^2} \frac{1}{D-1} e^2 \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\text{Sp}((\not{k} + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{q} + m)\gamma_\mu)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - m^2 + i\varepsilon)} = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} e^2 \left[\frac{4}{3\varepsilon} + \frac{4}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + F(q^2, m^2) \right] \text{ mit } F(q^2, m^2) = 8 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - x(1-x) \frac{q^2}{m^2} \right] \end{aligned}$$

$$\Pi(q^2 = 0) = i \frac{e^2}{16\pi^2} \left(\frac{4}{3\varepsilon} + \frac{4}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) \right)$$

Damit resultiert:

$$\hat{\Pi}(\bar{q}^2) = \Pi(\bar{q}^2) - \Pi(0) = \frac{\alpha}{4\pi} F(q^2, m^2)$$

Dieses Ergebnis ist glücklicherweise endlich! Für kleine \bar{q}^2 gilt näherungsweise, wobei wir $\ln(1-x) = -x + O(x^2)$ ausnutzen:

$$\begin{aligned} F(\bar{q}^2, m^2) &\approx 8 \int_0^1 dx x(1-x) \left[-x(1-x) \frac{\bar{q}^2}{m^2} \right] + O(\bar{q}^4) = -8 \frac{\bar{q}^2}{m^2} \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 + O(\bar{q}^4) = \\ &= -8 \frac{\bar{q}^2}{m^2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 + O(\bar{q}^4) = -\frac{4}{15} \frac{\bar{q}^2}{m^2} + O(\bar{q}^4) \end{aligned}$$

$$\hat{\Pi}(\bar{q}^2) = -\frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\bar{q}^2}{m^2} + O(\bar{q}^4)$$

Hieraus ergibt sich folgende Korrektur des Potentials:

$$V(\vec{q}) = \frac{e_R^2}{\vec{q}^2 \left(1 - \frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\vec{q}^2}{m^2}\right)} = \frac{e_R^2}{\vec{q}^2} + \frac{1}{15} \frac{\alpha}{\pi} \frac{e^2}{m^2} + O(\vec{q}^2)$$

Durch FOURIER-Transformation erhält man schlussendlich:

$$\boxed{V(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{15} \frac{4}{m^2} O(\vec{r})}$$

Dies ist das bekannte Ergebnis der LAMB-Shift!