

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK II

Prof. Dr. Zeppenfeld

Vorlesung Wintersemester 2005/2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK II
von Herrn Prof. Dr. ZEPPENFELD im Wintersemester 2005/2006
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Eichsymmetrien	5
1.1 Kopplung an das Photon, Eichtransformation	5
1.2 Verallgemeinerung auf nicht-abelsche Gruppen	6
1.3 $SU(N)$ -Matrizen	6
1.4 Nicht-abelsche Gruppen	7
1.4.1 Der Darstellungsbegriff	7
1.5 Eichtransformationen	8
1.6 LAGRANGEDichte für QCD ($SU(3)$ -Eichtheorie)	9
2 Pfadintegrale	11
2.1 Funktionale und Funktionalableitungen	12
2.1.1 Definition der Funktionalableitung	12
2.2 Verallgemeinerung auf Feldtheorie	14
2.2.1 Beispiel: Freies KLEIN-GORDON-Feld	14
2.3 Wechselwirkungen	15
2.3.1 ϕ^4 -Theorie	16
2.3.2 FEYNMAN-Graphen	16
2.3.3 Vier-Punkt-Funktionen	17
2.3.4 Komplexes skalares Feld	18
2.4 Pfadintegralformalismus für Fermionen	19
2.4.1 GRASSMANN-Algebra	19
2.4.2 Differentiation (von Polynomen)	19
2.4.3 Integration	20
2.5 Pfadintegrale für DIRAC-Felder	20
2.6 Pfadintegralformalismus für das Photonfeld	21
2.7 Wechselwirkende Felder in der Quantenelektrodynamik	22
2.8 Pfadintegralformalismus für die YANG-MILLS-Theorie	22
2.8.1 Wiederholung	22
2.8.2 Ableitung nach FADEEV und POPOV	24
2.9 Herleitung der FEYNMAN-Regeln der Quantenchromodynamik	26
2.9.1 Propagatoren	26
2.9.2 Vertizes	27
2.10 Eichboson-Propagator	31
2.10.1 Fermion-Schleife	31
3 Dimensionale Regularisierung	33
3.1 Energie-Dimensionen in $d \neq 4$	33
3.2 FEYNMAN-Parametrisierung	34
3.3 Zusammenhang von $1/\varepsilon$ mit der UV-Regularisierung	39
3.4 Photon-Propagator	39
3.5 Counter-Terme	40
3.6 Vakuum-Polarisation in der YANG-MILLS-Theorie	41
3.6.1 Fermion-Propagator in $O(\alpha)$	44
3.7 Vertexkorrekturen	45
3.7.1 Renormierung von Eichtheorien	47
3.7.2 Laufende Kopplung $g(\mu)$	47
3.7.3 Reduktionsformel für Photonen	49
3.7.4 Reduktionsformel für Fermionen	50
3.8 Vergleich mit S-Matrixelementen und LSZ	50

3.8.1	Renormierungsgruppengleichungen (renormalization group equations, RGE)	51
3.8.2	Laufende Kopplung	52
4	Spontane Symmetriebrechung	55
4.1	Beispiel: Ferromagnetismus	55
4.2	Beispiel: Feldtheorie (komplexes Skalarfeld)	56
4.3	GOLDSTONE-Theorem	57
4.4	Beispiel: Chirale Symmetriebrechung in der QCD	57
4.5	Spontane Brechung einer $O(N)$ -Symmetrie	58
4.6	Spontan gebrochene Eichsymmetrien	59
5	Das Standardmodell (SM)	61
5.0.1	Irreduzible Darstellungen der Fermionen	61
5.1	Spontane Symmetriebrechung	62
5.1.1	Wechselwirkung mit Fermionen	63

Kapitel 1

Eichsymmetrien

Die DIRAC-LAGRANGEDichte lautet:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$$

\mathcal{L}_0 ist symmetrisch bezüglich der $U(1)$; sie ist also invariant unter den Transformationen $\Psi(x) \mapsto \exp(-i\alpha)\Psi(x) = \Psi - i\alpha\Psi + O(\alpha^2)$. Der adjungierte Spinor $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$ transformiert sich wie folgt: $\bar{\Psi}(x) \mapsto \exp(i\alpha)\bar{\Psi}(x)$. Nach NOETHER gibt es zu jeder Symmetrie einen erhaltenen Strom der Form:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \frac{\delta \Psi}{\delta \alpha} + \frac{\delta \bar{\Psi}}{\delta \alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \bar{\Psi}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(-i\Psi) = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \text{ mit } \partial_\mu j^\mu = 0$$

1.1 Kopplung an das Photon, Eichtransformation

Hier gehen wir aus von folgender LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu$$

Wir führen nun eine Eichtransformation des externen Feldes A_μ durch und zwar $A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$. Die LAGRANGEDichte geht dann über in:

$$\mathcal{L}_\Psi \mapsto \mathcal{L}'_\Psi = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu - \underbrace{qj^\mu \partial_\mu \Lambda}_{q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\Lambda}$$

\mathcal{L}_Ψ ist nicht invariant! Deshalb müssen wir die Felder $\bar{\Psi}$ und Ψ variieren, um die Änderung von \mathcal{L}_Ψ auszugleichen. Der Trick ist, eine x -Abhängigkeit von α einzuführen, also $\alpha = \alpha(x)$.

$$i\partial_\mu\Psi \mapsto i\partial_\mu(\exp(-i\alpha)\Psi) = \exp(-i\alpha)i(\partial_\mu\Psi) + (\partial_\mu\alpha)\exp(-i\alpha)\Psi$$

Damit ergibt sich also $\mathcal{L}_0 \mapsto \mathcal{L}_0 + \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha$. Der zusätzliche Term in der LAGRANGEDichte hebt sich also weg für $\alpha(x) = q\Lambda(x)$. Die komplette Eichtransformation lautet:

$$\Psi(x) \mapsto \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \text{ mit } U(x) = \exp(-iq\Lambda(x))$$

$$\bar{\Psi}(x) \mapsto \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(x)$$

$$A_\mu(x) \mapsto A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{q}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Psi \mapsto \mathcal{L}'_\Psi &= \bar{\Psi}\gamma^\mu U^{-1}i\partial_\mu(U\Psi) - q\bar{\Psi}U^{-1}\gamma^\mu \left(UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{q}U\partial_\mu U^{-1} \right) U\Psi - m\bar{\Psi}U^{-1}U\Psi = \\ &= \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu(U^{-1}i(\partial_\mu U))\Psi - q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu + \bar{\Psi}\gamma^\mu(i(\partial_\mu U^{-1})U)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = \\ &= \mathcal{L}_\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu(U^{-1}U)\Psi = \mathcal{L}_\Psi \end{aligned}$$

Wir führen die minimale Substitution durch, nämlich $p_\mu \mapsto p_\mu - qA_\mu$ und $i\partial_\mu \mapsto i\partial_\mu - qA_\mu \equiv iD_\mu$. $D_\mu(x)$ ist die sogenannte kovariante Ableitung. „Kovariant“ bedeutet hier, dass diese sich genauso wie das Feld selbst transformiert:

$$\Psi(x) \mapsto U(x)\Psi(x) \text{ und } D_\mu\Psi(x) \mapsto U(x)(D_\mu\Psi(x))$$

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U \Psi \stackrel{!}{=} U D_\mu \Psi$$

Hieraus ergibt sich die transformierte kovariante Ableitung:

$$D'_\mu = U D_\mu U^{-1} = \exp(-iq\Lambda)(\partial_\mu + iqA_\mu) \exp(-iq\Lambda)$$

$$\partial_\mu + iqA'_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu + iq\partial_\mu \Lambda$$

$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu i D_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$ ist offensichtlich eichinvariant. Kommen wir nun zu der kinetischen Energie der Photonen:

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \text{ mit } F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Es ist möglich, $F^{\mu\nu}$ mittels der kovarianten Ableitung D^μ zu schreiben. Da $F^{\mu\nu}$ ein Tensor zweiter Stufe ist, machen wir folgenden Ansatz:

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - iqA_\mu, \partial_\nu - iqA_\nu] = -iq[\partial_\mu, A_\nu] - iq[A_\mu, \partial_\nu] = -iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

Hieraus ergibt sich also $F^{\mu\nu} = i/q[D^\mu, D^\nu]$. Nun können wir noch ausrechnen, wie sich $F^{\mu\nu}$ transformiert, da wir die Transformationseigenschaften der kovarianten Ableitung D^μ kennen:

$$\frac{i}{q}[UD^\mu U^{-1}, UD^\nu U^{-1}] = \frac{i}{q}U[D^\mu, D^\nu]U^{-1} = UF^{\mu\nu}U^{-1}$$

1.2 Verallgemeinerung auf nicht-abelsche Gruppen

Zur Beschreibung unserer bisherigen Modelle verwenden wir die LAGRANGEDICHTE $\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$. Ψ besteht aus N Feldern ψ_i , womit wir \mathcal{L}_Ψ auch folgendermaßen schreiben können:

$$\mathcal{L}_\Psi = \sum_j \bar{\psi}_j i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j - m \sum_j \bar{\psi}_j \psi_j$$

\mathcal{L}_Ψ weist $U(N)$ -Symmetrie auf. $U(N)$ ist die Gruppe der unitären $N \times N$ -Matrizen. Wir betrachten also folgende Transformation:

$$\psi_j \mapsto \sum_k U_{ik} \psi_k \equiv U_{ik} \psi_k$$

$$\Psi \mapsto U \Psi \text{ mit } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \text{ also } \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} U_{1k} \psi_k \\ U_{2k} \psi_k \\ \vdots \\ U_{Nk} \psi_k \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \mapsto \bar{\Psi} U^{-1} i \gamma^\mu \partial_\mu U \Psi - m \bar{\Psi} U^{-1} U \Psi = \mathcal{L}_\Psi$$

Betrachten wir folgende Beispiele:

1.) $\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$ SU(2)-Transformationen im Isospinraum, Proton-Neutron-Dublett

2.) $\Psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$ SU_L(2) (schwache Wechselwirkung auf linkshändige Fermionen)

3.) Quarks SU(3): $\Psi = (q_1, q_2, q_3)^\top$

Jedes q_i ist vierkomponentiger Spinor. Die LAGRANGEDICHTE besitzt eine SU(3)-Symmetrie.

1.3 SU(N)-Matrizen

Allgemein werden Elemente der SU(N) dargestellt durch

$$U = \exp\left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right) \text{ mit } \theta^a \in \mathbb{R}$$

Die $\lambda^a/2$ sind die Generatoren der Gruppe $SU(N)$. Speziell für die $SU(2)$ sind die λ^a gegeben durch die PAULI-Matrizen σ^1, σ^2 und σ^3 . θ^a ist ein dreikomponentiger Vektor. Damit ergibt sich ein Element aus der Gruppe $SU(2)$:

$$U = \exp\left(i\vec{\omega}\frac{\vec{\sigma}}{2}\right)$$

Kommen wir nun zurück zum allgemeinen U . Es gilt:

$$U^\dagger = \exp\left(-i\theta^a\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)^\dagger\right) \stackrel{!}{=} U^{-1} = \exp\left(-i\theta^a\frac{\lambda^a}{2}\right)$$

Hieraus folgt, dass die Generatoren hermitesch sein müssen, dass also $(\lambda^a)^\dagger = \lambda^a$ gilt. Für die $SU(N)$ muss außerdem $\det(U) = 1$ sein. Mit $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$ erhalten wir:

$$\det\left(\exp\left(i\theta^a\frac{\lambda^a}{2}\right)\right) = \exp\left(i\theta^a\text{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)\right) \stackrel{!}{=} 1$$

Daraus ergibt sich $\text{Sp}(\lambda^a) = 0$, also müssen die Generatoren der $SU(N)$ spurlos sein. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt allgemein $N^2 - 1$ Generatoren λ^a mit $\text{Sp}(\lambda^a) = 0$. Speziell für die $SU(3)$ sind dies die acht GELLMANN-Matrizen:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\lambda^a/2$ sind normiert durch:

$$\text{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

Beispielsweise gilt für die PAULI-Matrizen, welche multipliziert mit einem Faktor $1/2$ die Generatoren der Gruppe $SU(2)$ sind:

$$\text{Sp}(\sigma_i^2) = 2 \text{ und } \text{Sp}(\sigma_1\sigma_2) = \text{Sp}(i\sigma_3) = 0$$

Die Matrizen $\lambda^a/2$ genügen außerdem einer Vollständigkeitsrelation:

$$\frac{\lambda_{ij}^a}{2}\frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

Mit $\text{Sp}(\lambda^a/2) = 0$ überprüfen wir dies:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\lambda_{ii}^a}{2}\frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{ki} - \frac{1}{2N}\delta_{ii}\delta_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{kl} - \frac{1}{N}\delta_{kl} = 0$$

1.4 Nicht-abelsche Gruppen

1.4.1 Der Darstellungsbegriff

Sei G eine Gruppe mit den Elementen $g_1, g_2, \dots \in G$. Unter einer n -dimensionalen Darstellung von G verstehen wir eine Abbildung $G \mapsto \mathbb{C}^{(n,n)}$, $g \mapsto U(g)$, also von abstrakten Elementen der Gruppe auf komplexe $n \times n$ -Matrizen, so dass $U(g_1g_2) = U(g_1)U(g_2)$ gilt, die Gruppeneigenschaften also erhalten bleiben.

Ein $U \in SU(N)$ lässt sich schreiben als $U = \exp(i\theta^a T^a)$. Speziell für die $SU(2)$ lautet dies $U = \exp(i\vec{\omega} \cdot \vec{J})$ mit \vec{J} als Drehimpuls. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren T^a . Für den $SU(2)$ -Fall sind dies die Drehimpulsoperatoren J_i . Außerdem haben wir $N^2 - 1$ reelle Parameter θ^a , welche in der $SU(2)$ durch $\vec{\omega}$ gegeben sind. Die fundamentale Darstellung der $SU(2)$ lautet $J_i = \sigma_i/2$ und im allgemeinen Fall $T^a = \lambda^a/2$. Allgemein genügen die Generatoren folgender Kommutatorrelation:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

Im Falle der $SU(2)$ ist dies $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$. f^{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(N)$ -LIE-Algebra. Die f^{abc} sind total antisymmetrisch.

$$\text{Sp} \left(\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abe} \text{Sp} \left(\frac{\lambda^e}{2} \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abe} \cdot \frac{1}{2} \delta^{ec} = \frac{i}{2} f^{abc}$$

Wir benötigen nun die JACOBI-Identität, welche von den Generatoren erfüllt wird:

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0$$

Hieraus folgt durch Ausnutzung von beispielsweise $[T^b, T^c] = i f^{bck} T^k$:

$$0 = (-i f_{cl}^b)(-i f_{lk}^a) - (-i f_{lc}^a)(-i f_{lk}^b) + i f^{abl}(-i f_{ck}^l)$$

Über gleiche Indizes wird summiert analog zur Matrixmultiplikation. Die Strukturkonstanten definieren uns also $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ -dimensionale Matrizen $T_{lk}^a \equiv -i f_{lk}^a \equiv -i f^{alk}$.

$$0 = (T^b T^a)_{ck} - (T^a T^b)_{ck} + i f^{abc} (T^l)_{ck}$$

Wir haben also eine $N^2 - 1$ -dimensionale Darstellung der $SU(N)$ LIE-Algebra erhalten: $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$. Dies ist die sogenannte **adjungierte Darstellung**. $SU(N)$ -Darstellungen sind folgende:

- * $d = 1$: triviale Darstellung (Singulett)
- * $d = N$: fundamentale Darstellung ($\lambda^a/2$), antifundamentale Darstellung ($-\lambda^{a*}/2$)
- * $d = N^2 - 1$: adjungierte Darstellung

1.5 Eichtransformationen

Wir gehen aus von folgender LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \text{ mit } \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N)$$

\mathcal{L} ist invariant unter einer globalen $SU(N)$ -Transformation:

$$\Psi \mapsto \Psi' = \exp \left(-i\theta^a \frac{\lambda^a}{2} \right) \Psi = \left(1 - i\theta^a \frac{\lambda^a}{2} + O(\theta^2) \right) \Psi = U \Psi \text{ und } \bar{\Psi} \mapsto \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^{-1}$$

Bei einer solchen Symmetrie gibt es nach dem NOETHERtheorem erhaltene Ströme.

$$j^{\mu a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \frac{\delta \Psi}{\delta \theta^a} = \bar{\Psi} i \gamma^\mu \left(-i \frac{\lambda^a}{2} \right) \Psi = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \Psi$$

Die Anzahl der erhaltenen Ströme ist also gleich der Zahl der Generatoren. Sei $\theta^a = \theta^a(x)$ (lokale Symmetrie). Die Transformation von Ψ sei gegeben durch $\Psi' = U \Psi$. Es ist nun sinnvoll eine kovariante Ableitung einzuführen, die sich also genauso wie Ψ transformiert: $(D_\mu \Psi)' = U (D_\mu \Psi)$.

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U \Psi \Rightarrow \boxed{D'_\mu U = U D_\mu \Leftrightarrow D'_\mu = U D_\mu U^{-1}}$$

Wir machen den Ansatz $D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$ mit $A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + i/g U (\partial_\mu U^{-1})$. Betrachten wir zunächst infinitesimale Transformationen, also $U = 1 - i\theta^a \lambda^a/2 + O(\theta^2)$.

$$\frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} = \frac{i}{g} (1 + O(\theta^2)) \left(-i \partial_\mu \theta^a \frac{\lambda^a}{2} + O(\theta^2) \right) = \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a) \frac{\lambda^a}{2} + \dots$$

$U \partial_\mu U^{-1}$ ist eine spurlose $N \times N$ -Matrix, ebenso A_μ . Hieraus ergibt sich $A_\mu(x) = \lambda^a/2 A_\mu^a(x)$. Die Anzahl der Eichfelder A_μ^a ist gegeben durch die Anzahl der Generatoren, also $N^2 - 1$.

Beispiel:

- * SU(2): schwache Wechselwirkung, $N^2 - 1 = 3$ Eichbosonen W^+ , W^- , Z^0
- * SU(3): QCD, $N^2 - 1 = 8$ Gluonen

Die eichinvariante LAGRANGEDichte lautet also:

$$\mathcal{L}_\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi \text{ mit } D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a$$

Sie ist invariant unter $\Psi \mapsto U\Psi$, $A_\mu = A_\mu^a \lambda^a / 2 \mapsto UA_\mu U^{-1} + i/gU\partial_\mu U^{-1}$.

Wir wollen $F_{\mu\nu}$ definieren durch $F_{\mu\nu} \sim [D_\mu, D_\nu]$. Berechnen wir diesen Kommutator:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu - igT^a A_\mu^a, \partial_\nu - igT^b A_\nu^b] = -igT^a \partial_\mu A_\nu^a + igT^a \partial_\nu A_\mu^a + (-ig)^2 A_\mu^a A_\nu^b \underbrace{[T^a, T^b]}_{if^{abc}T^c} = \\ &= -igT^c \underbrace{[\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + gf^{abc}A_\mu^a A_\nu^b]}_{\equiv F_{\mu\nu}^c} \end{aligned}$$

Wir definieren damit $F_{\mu\nu} = T^a F_{\mu\nu}^a = i/g[D_\mu, D_\nu]$. Wie verhält sich $F_{\mu\nu}$ unter Eichtransformationen?

$$F_{\mu\nu} \mapsto F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] \Rightarrow \boxed{F'^{\mu\nu} = UF^{\mu\nu}U^{-1}}$$

Des weiteren betrachten wir folgendes Objekt:

$$\text{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \mapsto \text{Sp}(UF_{\mu\nu}U^{-1}UF^{\mu\nu}U^{-1}) = \text{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Dieses ist also eichinvariant.

$$\text{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = \text{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2}F_{\mu\nu}^a \frac{\lambda^b}{2}F^{\mu\nu b}\right) = F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \underbrace{\text{Sp}\left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2}\right)}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$$

Der Ausdruck ist also als kinetische Energie in unserer LAGRANGEDichte geeignet:

$$\mathcal{L}_{kin,A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = -\frac{1}{2}\text{Sp}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

1.6 Lagrangedichte für QCD (SU(3)-Eichtheorie)

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \text{ mit } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

Ψ ist das Quark-Feld. Die acht Felder A_μ^a beschreiben acht Gluonen.

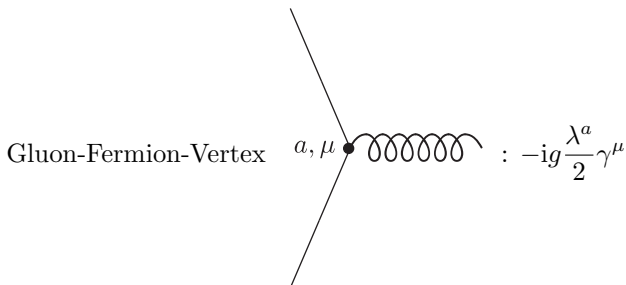
$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a$$

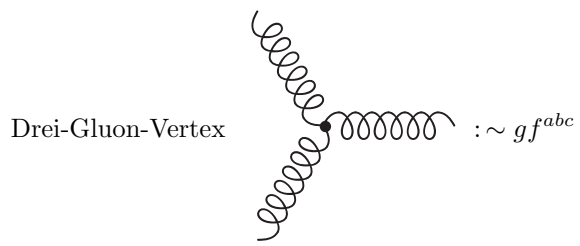
$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

Wechselwirkungsterme sind folgende:

$$\mathcal{L}_I = \bar{\Psi}i\gamma^\mu \left(-ig\frac{\lambda^a}{2}A_\mu^a\right)\Psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)gf^{abc}A^{\mu b}A^{\nu c} + g^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d}A^{\nu e}$$

Die entsprechenden FEYNMAN-Regeln erhält man aus $\exp\left(-i\int \mathcal{L}_I d^4x\right)$:





Kapitel 2

Pfadintegrale

Schauen wir uns zunächst der Einfachheit halber ein eindimensionales System, nämlich ein Teilchen der Masse m , an.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) \text{ mit } [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

Die Zustände seien gegeben durch:

$$|\psi\rangle_H \text{ und } |\psi, t\rangle_S = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) |\psi\rangle_H$$

In der Ortsbasis gilt $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$. Wir schieben nun den Einheitsoperator ein und erhalten:

$$|\psi, t\rangle_S = \int dq |q\rangle \langle q|\psi, t\rangle_S = \int dq |p\rangle \psi(q, t)$$

Außerdem definieren wir:

$$|q, t\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) |q\rangle$$

$$\psi(q, t) = \left\langle q \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right) \right| \psi \right\rangle_H = \langle q, t|\psi\rangle_H$$

Wir interessieren uns nun für die Zeitentwicklung $\psi(q_i, t_i) \mapsto \psi(q_f, t_f)$.

$$\psi(q_f, t_f) = \langle q_f, t_f|\psi\rangle_H = \int dq_i \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle \langle q_i, t_i|\psi\rangle_H = \int dq_i K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i)$$

Die gesamte Information über die Dynamik des Systems steckt also im Integrationskern $K(q_f, t_f; q_i, t_i) \equiv \langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle$. Man bezeichnet K oft auch als **Propagator**. Dieser Propagator hat jedoch nichts mit den Propagatoren aus dem letzten Semester zu tun!

Hier gilt $t_f - t_i = (n + 1)\tau$.

$$\langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle = \int \cdots \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f, t_f|q_n, t_n\rangle \langle q_n, t_n|q_{n-1}, t_{n-1}\rangle \cdots \langle q_1, t_1|q_i, t_i\rangle$$

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1}|q_j, t_j\rangle &= \left\langle q_{j+1} \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_{j+1} - t_j)\right) \right| q_j \right\rangle = \left\langle q_{j+1} \left| 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau + \dots \right| q_j \right\rangle = \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i}{\hbar} \dots = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}p(q_{j+1} - q_j)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\tau H(p, q_j)\right) \end{aligned}$$

Der Vorteil ist nun, dass in diesem Endergebnis keinerlei Operatoren mehr vorkommen. Damit ergibt sich weiter:

$$\langle q_f, t_f|q_i, t_i\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=0}^n dp_j \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left(\sum_{j=0}^n p_j \tau \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right) - \tau H(p_j, q_j) \right)\right)$$

Im Limes $n \mapsto \infty$ gilt $(q_{j+1} - q_j)/\tau \mapsto \dot{q}_j$ und $\sum_{j=0}^n \tau \mapsto \int dt$, womit wir erhalten:

$$\int \mathcal{D}p \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (p(t)\dot{q}(t) - H(p, q)) \right)$$

H ist quadratisch in p . Damit sind die dp_j -Integrale von der Form

$$\int dx \exp(-\alpha(x - \beta)^2)$$

womit sich ergibt:

$$\begin{aligned} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\frac{m}{2\pi i \tau \hbar} \right)^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j=1}^n dq_j \exp \left(\frac{i\tau}{\hbar} \sum_{j=0}^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right)^2 - V(q_j) \right] \right) = \\ &= \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{q}^2 - V(q) \right) \right) = \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}) \right) \text{ mit } q(t_i) = q_i, q(t_f) = q_f \end{aligned}$$

2.1 Funktionale und Funktionalableitungen

Unser Oszillator werde durch eine externe „Kraft“ J beeinflusst: $L(q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q}) + J(t)q(t)$. Was wir nun betrachten wollen, ist der Propagator in Anwesenheit einer äußeren Kraft:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle^J \equiv \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt [L(q, \dot{q}) + J(t)q(t)] \right)$$

Mathematisch gesehen ist dieses Pfadintegral eine Abbildung der Form $J \xrightarrow{F} F[J] \equiv \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle^J$. F ist eine Abbildung von einem Funktionenraum auf die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Solche Abbildungen heißen **Funktionale**.

2.1.1 Definition der Funktionalableitung

Man betrachtet folgenden Limes mit einer Variation $\varepsilon \delta(x - y)$:

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[J(y) + \varepsilon \delta(x - y)] - F[J(y)]}{\varepsilon}$$

Als Beispiel betrachten wir folgendes lineare Funktional:

$$F[J] = \int dy G(y) J(y)$$

$$\frac{\delta F[J]}{\delta J(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int dy G(y) (J(y) + \varepsilon \delta(x - y)) - \int dy G(y) J(y) \right] = \int dy G(y) \delta(x - y) = G(x)$$

Betrachten wir nun die Funktionalableitung unseres Propagators in Anwesenheit einer äußeren Kraft:

$$\frac{\delta}{\delta J(t_1)} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle^J = \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt (L + qJ) \right) \frac{i}{\hbar} q(t_1) = \langle q_f, t_f | q(t_1) | q_i, t_i \rangle^J$$

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{i^2} \frac{\delta^2}{\delta J(t_1) \delta J(t_2)} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle &= \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int dt (L + qJ) \right) q(t_1) q(t_2) = \\ &= \int \cdots \int dq_1 \cdots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \cdots \langle q_j, t_j | q_j, t_j \rangle \cdots \langle q_k, t_k | q_k, t_k \rangle \cdots \times \\ &\quad \times \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \text{ mit } q(t_1) = q_j, q(t_2) = q_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle q_j, t_f | q_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle &= \left\langle q_j \left| q_j \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_j - t_{j-1}) \right) \right| q_{j-1} \right\rangle = \left\langle q_j \left| \hat{q} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_j - t_{j-1}) \right) \right| q_{j-1} \right\rangle = \\
 &= \left\langle q_j \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_j \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_j \right) \hat{q} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_j - t_{j-1}) \right) \right| q_{j-1} \right\rangle = \\
 &= \left\langle q_j, t_j \left| \exp \left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_j \right) \hat{q} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t_j \right) \right| q_{j-1}, t_{j-1} \right\rangle = \\
 &= \langle q_j, t_f | \hat{q}(t_f) | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wegen der Anordnung der Matrixelemente:

$$\left\langle q_f, t_f \left| \left\{ \begin{array}{l} \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) \text{ für } t_2 < t_1 \\ \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) \text{ für } t_2 > t_1 \end{array} \right\} \right| q_i, t_i \right\rangle = \langle q_f, t_f | T \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_i, t_i \rangle$$

Die Funktionableitung nach $J(t)$ führt zu Matrixelementen von zeitgeordneten Produkten von \hat{q} . Die Feldtheorie benötigt $Z[J] = \langle 0, T' = +\infty | 0, T = -\infty \rangle^J$. Hieraus ergibt sich:

$$\prod_k \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_k)} Z[J] \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0 \rangle$$

Wir versuchen nun, die Funktion $Z[J]$ zu konstruieren. Dazu betrachten wir eine Quelle $J(t)$ mit kompaktem Träger, das heißt $J(T) = 0$ für $T < t, T' > t'$. Sei nun $T < t$ und $T' > t'$:

$$\begin{array}{c}
 J=0 \quad t \quad t' \quad J=0 \\
 | \quad | \quad | \quad | \\
 \hline
 T \quad \quad \quad T'
 \end{array}$$

$$\langle Q', T' | Q, T \rangle^J = \int dq \int dq' \langle Q', T' | q', t' \rangle \langle q', t' | q, t \rangle^J \langle q, t | Q, T \rangle$$

Wir werten nun die einzelnen Matrixelemente aus:

$$\begin{aligned}
 \langle Q', T' | q', t' \rangle &= \left\langle Q' \left| \exp \left(-\frac{i}{\hbar} H T' \right) \sum_n |E_n\rangle \langle E_n| \exp \left(\frac{i}{\hbar} H t' \right) \right| q \right\rangle = \\
 &= \sum_n \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_n (T' - t') \right) \langle Q' | E_n \rangle \langle E_n | q' \rangle = \sum_n \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_n (T' - t') \right) \phi_n(Q') \phi_n^*(q')
 \end{aligned}$$

$$\langle q, t | Q, T \rangle = \sum_m \exp \left(\frac{i}{\hbar} E_m (T - t) \right) \phi_m(q) \phi_m^*(Q)$$

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \text{ mit } E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

Für $\omega \mapsto \omega - i\delta$ ergibt sich

$$\exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_n (T' - t') \right) = \exp \left(-i \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) (T' - t') \right) \left[\exp \left(-\frac{\delta}{\hbar} |T' - t'| \right) \right]^{n+\frac{1}{2}}$$

und für komplexe ω folgt:

$$V(q) = \frac{1}{2} m (\omega - i\delta)^2 q^2 = \frac{1}{2} m (\omega^2 - \delta^2) q^2 - i \underbrace{\delta m \omega}_{\equiv \varepsilon/2} q^2$$

Wir ersetzen also $V(q)$ durch $V(q) - i\varepsilon/2q^2$ und betrachten nun:

$$\lim_{\substack{T' \rightarrow -\infty \\ T' \rightarrow +\infty}} \langle Q', T' | Q, T \rangle^J = \lim_{\substack{T' \rightarrow -\infty \\ T' \rightarrow +\infty}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_0 (T' - T) \right) \phi_0(Q') \phi_0^*(Q) \underbrace{\int dq \int dq' \phi_0^*(q', t') \langle q', t' | q, t \rangle^J \phi_0(q, t)}_{\langle 0, t' | 0, t \rangle^J}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle^J &= \lim_{\substack{T' \rightarrow -\infty \\ T' \rightarrow +\infty}} \frac{\langle Q', T' | Q, T \rangle^J}{\exp \left(\frac{i}{\hbar} E_0 (T' - T) \right) \phi_0(Q) \phi_0^*(Q')} = \\
 &= N \int \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\mathcal{L}(q, \dot{q}) + J(t)q(t)] + \frac{i}{2} \varepsilon q^2 \right) = Z[J]
 \end{aligned}$$

Der Normierungsfaktor wird durch die Normierungsbedingung fixiert, nämlich $Z[0] = 1$.

2.2 Verallgemeinerung auf Feldtheorie

$q(t)$ besitzt einen Freiheitsgrad. Wir wollen nun übergehen zu $n = 1, \dots, N$ Freiheitsgraden von $q_n(t) = \phi(t, \vec{x}_n)$. Die verschiedenen Freiheitsgrade kann man nun identifizieren mit den Werten von Feldern an diskreten Raumpunkten (Abdeckung des Raumes durch Gitter.) \vec{x}_n seien die Gitterpunkte.

$$\int \mathcal{L} dt \mapsto \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$$

$$\int dt \left(Jq + \frac{i}{2} \varepsilon q^2 \right) \mapsto \sum_n J_n(t) \phi(t, \vec{x}_n) + \frac{i}{2} \varepsilon \phi(t, \vec{x}_n)^2 \mapsto \int d^4x \left[J(x) \phi(x) + \frac{i}{2} \varepsilon \phi^2(x) \right]$$

$$\mathcal{D}(q) \sim \prod_i dq_i \mapsto \prod_{i,n} d\phi(t_i, \vec{x}_n) \sim \mathcal{D}(\phi)$$

Hieraus erhalten wir das Vakuumfunktional für ein Feld ϕ :

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}(\phi) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + \frac{i}{2} \varepsilon \phi^2 + J(x) \phi(x) \right) \right) = \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle^J$$

Die Normierung $Z[0] = 1$ liefert den Normierungsfaktor N .

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \cdots \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \cdots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$$

Dies ist die grundlegende Struktur für beliebige Systeme. Das Vakuumfunktional

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi + \frac{i}{2} \varepsilon \phi^2 \right] \right) = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$$

ist außerdem Erzeugendenfunktional für n -Punkt-Funktionen:

$$Z[J] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i/\hbar)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) \tau(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ mit}$$

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \cdots \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} = \langle 0 | T \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle$$

Vergleiche dies mit TAYLOR-Reihe für $f(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$:

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^3 \cdots \sum_{i_n=1}^3 x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_n} a_{i_1 \dots i_n} \text{ mit } a_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} f(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=0}$$

2.2.1 Beispiel: Freies Klein-Gordon-Feld

Für das freie KLEIN-GORDON-Feld ist die klassische LAGRANGEDICHTE gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$\int d^4x \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) - \phi \square \phi - m^2 \phi^2 \right]$$

Die Oberflächenterme $\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi)$ spielen keine Rolle. Schlimmstenfalls stecken wir diese in den Normierungsfaktor N .

$$Z[J] = N' \int \mathcal{D}(\phi) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(\frac{1}{2} \phi(x) [\square + m^2 - i\varepsilon] \phi(x) - J(x) \phi(x) \right) \right)$$

Das Integrationsmaß $\mathcal{D}(\phi)$ ist invariant unter einer Translation der Freiheitsgrade, also $\phi \mapsto \phi + \phi_0$. Hieraus ergibt sich wegen

$$\int d^4x \phi_0 (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi = \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\varepsilon) \phi_0 + \text{Oberflächenterme}$$

im Exponenten:

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\phi + \phi_0) (\square + m^2 - i\epsilon) (\phi + \phi_0) - J(\phi + \phi_0) \right] = \\ & = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi + \phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0(\square - m^2 + i\epsilon)\phi_0 - J\phi - J\phi_0 \right] \end{aligned}$$

Wir wählen ϕ_0 so, dass $(\square + m^2 - i\epsilon)\phi_0(x) = J(x)$. Die Lösung ist gegeben durch:

$$\phi_0(x) = - \int d^4y \Delta_F(x-y)J(y) \text{ mit } \Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ik(x-y))}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Unter Ausnutzung von $\phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi_0 - J\phi = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}(\phi) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \phi(\square + m^2 - i\epsilon)\phi\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \left(\frac{1}{2}\phi_0(\square + m^2 - i\epsilon)\phi_0 - J\phi_0\right)\right) = \\ &= N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \frac{1}{2}J(x)\phi_0(x)\right) = \boxed{N' \exp\left(-\frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right)} \end{aligned}$$

Aus $Z[J]|_{J=0} = 1$ folgt nämlich $N' = 1$. Betrachten wir nun als erstes die Einpunktfunktion:

$$\langle 0|\phi(x_1)|0\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z[J] = Z[J] \left(- \int d^4y \Delta_F(x_1-y)J(y)\right) \Big|_{J=0} = 0$$

$$\tau(x_1, x_2) = \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} = i\Delta_F(x_1 - x_2)$$

Speziell gilt $\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = \tau(x_1, x_2)\tau(x_3, x_4) + \tau(x_1, x_3)\tau(x_2, x_4) + \tau(x_1, x_4)\tau(x_2, x_3)$ und allgemein:

$$\tau(x_1, \dots, x_{2n}) = \sum_{\text{Perm mod } 2^n} \tau(x_{p_1}, x_{p_2})\tau(x_{p_3}, x_{p_4}) \dots \tau(x_{p_{2n-1}}, x_{p_{2n}})$$

Vergleiche dies mit WICK-Theorem:

$$\langle 0|T\phi(x_1) \dots \phi(x_{2n})|0\rangle = \sum_{\text{Perm}} \langle 0|T\phi(x_{p_1})\phi(x_{p_2})|0\rangle \dots \langle 0|T\phi(x_{p_{2n-1}})\phi(x_{p_{2n}})|0\rangle$$

Der Pfadintegralformalismus und die kanonische Feldtheorie führen also auf dieselben Resultate!

2.3 Wechselwirkungen

Wir gehen aus von folgender LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}(m^2 - i\epsilon)\phi^2 - \frac{g}{n!}\phi^n(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW} \text{ mit } \mathcal{L}_{WW} = -\frac{g}{n!}\phi^n(x)$$

Unser Vakuumfunktional wollen wir folgendermaßen umschreiben:

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}(\phi(z))\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]\right)$$

Mit

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z_0[J] = N \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]\right)$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi]\right) = \\ &= N' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_{WW}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right) Z_0[J] \end{aligned}$$

N' ist gegeben durch $Z[0] = 1$. Damit gilt:

$$Z[J] = \frac{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right) Z_0[J]}{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right) Z_0[J] \Big|_{J=0}}$$

Berechne wechselwirkende n -Punkt-Funktionen:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle_{WW} &= \frac{\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right) Z_0[J] \Big|_{J=0}}{\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)}\right)\right) Z_0[J] \Big|_{J=0}} = \\ &= \frac{\left\langle 0 \left| T \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}(\hat{\phi}(z))\right) \right| 0 \right\rangle_{frei}}{\left\langle 0 \left| T \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}(\hat{\phi})\right) \right| 0 \right\rangle_{frei}} \end{aligned}$$

Der Nenner beschreibt die Vakuumgraphen; diese werden rausdividiert.

2.3.1 ϕ^4 -Theorie

Wir gehen aus von $\mathcal{L}_{WW} = -g/4!\phi^4$. Der erste nichttriviale Ausdruck ist der Propagator $\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle$. Die auftretende Exponentialfunktion wird nun entwickelt:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle &= \frac{\left\langle 0 \left| T \phi(x_1)\phi(x_2) \left(1 - \frac{ig}{4!} \int d^4z \phi^4(z) + \dots\right) \right| 0 \right\rangle_{frei}}{\left\langle 0 \left| T \left(1 - \frac{ig}{4!} \int d^4z \phi^4(z) + \dots\right) \right| 0 \right\rangle_{frei}} = \\ &= \frac{i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{ig}{4!} \left(i\Delta_F(x_1 - x_2) \int d^4z 3(i\Delta_F(0))^2 + \int d^4z 3 \cdot 4i\Delta_F(x_1 - z) \cdot i\Delta_F(x_2 - z) i\Delta_F(0) + \dots \right)}{1 - \frac{ig}{4!} \int d^4z 3(i\Delta_F(0))^2 + \dots} = \\ &= \frac{i\Delta_F(x_1 - x_2) \left(1 - \frac{ig}{4!} \int d^4z 3(i\Delta_F(0))^2\right) - \frac{ig}{2} \int d^4z i\Delta_F(x_1 - z) i\Delta_F(x_2 - z) i\Delta_F(0) + \dots}{1 - \frac{ig}{4!} \int d^4z 3(i\Delta_F(0))^2 + \dots} \end{aligned}$$

2.3.2 Feynman-Graphen

Propagator $i\Delta_F(x_1 - x_2)$:
 $x_1 \longrightarrow x_2$

Die FOURIERtransformierte lautet, wie wir schon wissen, $i/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$. Damit können wir den obigen Ausdruck mittels FEYNMAN-Graphen darstellen:

$$\left(x_1 \longrightarrow x_2 - \frac{ig}{2} \int d^4z \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} x_2 \right) \cdot \frac{1 - \frac{ig}{8} \int d^4z \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array}}{1 - \frac{ig}{8} \int d^4z \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array}}$$

In der Impulsraumdarstellung sieht dies folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 & - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip(x_1 - x))}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{g}{2} \Delta_F(0) \int d^4 z \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip_1(x_1 - z))}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip_2(z - x_2))}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots = \\
 & = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip(x_1 - x))}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \\
 & + \frac{g}{2} \Delta_F(0) (2\pi)^4 \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip_1 x_1)}{p_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{\exp(ip_2 x_2)}{p_2^2 - m^2 + i\epsilon} \delta^{(4)}(p_1 - p_2) = \\
 & = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip(x_1 - x_2))}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left(1 - \frac{g}{2} \Delta_F(0) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \dots \right) = \\
 & = \text{---} \rightarrow \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \\
 & + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} = \\
 & = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-ip(x_1 - x_2)) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \frac{g}{2} \Delta_F(0) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} = \\
 & = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-ip(x_1 - x_2)) \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon + \frac{g}{2} \Delta_F(0) + i\epsilon}
 \end{aligned}$$

Was wir hier erhalten haben, ist eine Massenrenormierung. Die physikalische Masse ist gegeben durch:

$$\boxed{m_{ren}^2 = m^2 - \frac{g}{2} \Delta_F(0) + O(g^2)}$$

2.3.3 Vier-Punkt-Funktionen

Sei ab jetzt $\hbar = 1$.

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_4) | 0 \rangle_{WW} & = \left\langle 0 \left| T \phi(x_1) \dots \phi(x_4) \left(1 - \frac{ig}{4!} \int d^4 z \phi^4(z) + \dots \right) \right| 0 \right\rangle = \\
 & = \text{---} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \\
 & + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \\
 & + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} + \text{---} \overset{\circlearrowleft}{\bullet} \text{---} = \\
 & = \tau(x_1, x_2) \tau(x_3, x_4) + \tau(x_1, x_3) \tau(x_2, x_4) + \tau(x_1, x_4) \tau(x_2, x_3) + \tau_c(x_1, x_2, x_3, x_4)
 \end{aligned}$$

τ_c sind die zusammenhängenden (connected) GREENfunktionen. Gesucht ist ein Erzeugendenfunktional $W[J]$ für zusammenhängende GREENfunktionen $\tau_c(x_1, \dots, x_n)$. Dieses ist bestimmt durch $Z[J] = \exp(iW[J])$. Wie

kann man das einsehen? Wegen $Z[0] = 1$ muss $W[0] = 0$ sein. Schauen wir uns darüber hinaus die Ableitungen an:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} Z = \frac{\delta W}{\delta J(x_1)} \exp(iW) \Rightarrow \left. \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0$$

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} Z = \frac{\delta W}{\delta J(x_1)} \frac{\delta W}{\delta J(x_2)} \exp(iW) - i \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \exp(iW)$$

Für $J = 0$ gilt:

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i\tau(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} Z \Big|_{J=0} &= \tau(x_1, x_3) \tau(x_2, x_4) + \tau(x_1 x_4) \tau(x_2 x_3) + \tau(x_1 x_2) \tau(x_3 x_4) + \\ &+ (-i) \cdot \frac{1}{i^2} \frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{i \delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right|_{J=0} = \tau_c(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Damit erzeugt $W[J] = -i \ln Z[J]$ die zusammenhängenden GREENfunktionen.

Beispiel: Freies Klein-Gordon-Feld

$$W[J] = -i \ln \left[\exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \Delta_F(x-y) J(x) J(y) \right) \right] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta_F(x-y) J(x) J(y)$$

Hieraus folgt, dass $\tau(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall n \geq 3$. Also ist nur die Zweipunktfunktion $\tau(x_1, x_2) \neq 0$. Dies ist gerade der Propagator, welcher zwei äußere Punkte x_1 und x_2 miteinander verknüpft. Da alle $\tau(x_1, \dots, x_n)$ für $n \geq 3$ verschwinden, gibt es keine zusammenhängenden GREENfunktionen und damit auch keine Streuung, was ja bei einem freien (also nicht wechselwirkenden) Feld nicht verwunderlich ist.

2.3.4 Komplexes skalares Feld

Hier ist die LAGRANGEDichte gegeben durch:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi$$

Setzen wir $\phi = 1/\sqrt{2}(\phi_1 + i\phi_2)$ und $\phi^\dagger = 1/\sqrt{2}(\phi_1 - i\phi_2)$, so ergibt sich:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)^2 - \frac{m^2}{2} \phi_i^2 \right]$$

$$Z_0[J, J^\dagger] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \left(i \left(\int \mathcal{L} d^4x + \int d^4x (J^\dagger \phi + \phi^\dagger J) \right) \right)$$

Entsprechend kann man dies auch mit J_1 und J_2 schreiben, die definiert sind durch $J = 1/\sqrt{2}(J_1 + iJ_2)$ und $J^\dagger = 1/\sqrt{2}(J_1 - iJ_2)$.

$$Z_0[J, J^\dagger] = \exp \left(-i \int d^4x d^4y J^\dagger(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)$$

Uns interessiert nun hier die $2n$ -Punkt-Funktion:

$$\langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \phi^\dagger(y_1) \dots \phi^\dagger(y_n) | 0 \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(x_2)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\dagger(x_n)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(y_n)} Z_0[J, J^\dagger] \Big|_{J=0=J^\dagger}$$

2.4 Pfadintegralformalismus für Fermionen

Aus dem vorherigen Semester wissen wir:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)|0\rangle &= iS_F(x_1 - x_2)_{\alpha\beta} \text{ mit } S_F(x, m)_{\alpha\beta} = (i\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial^\mu + m\delta_{\alpha\beta})\Delta_F(x, m) \sim \\ &\sim \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\exp(-ip(x_1 - x_2))}{\not{p} - m + i\epsilon} \end{aligned}$$

Ableitbar aus dem Pfadintegral ist das Vakuumfunktional für das DIRAC-Feld. Betrachten wir ein freies Feld:

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(i \int d^4x [\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\epsilon)\psi(x) + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta]\right) \text{ mit } \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = \exp\left(-i \int d^4x dy \bar{\eta}(x)S_F(x - y)\eta(y)\right) = \langle 0, \infty|0, -\infty\rangle^{\eta, \bar{\eta}}$$

$$\langle 0|T\psi_{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)\dots|0\rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)} Z_0 \Big|_{\eta=0}$$

Vertauschen wir zwei Felder, so müssen wir dies durch ein zusätzliches Minuszeichen ausgleichen:

$$\langle 0|T\psi_{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2)\dots|0\rangle = -\langle 0|T\psi_{\alpha_2}(x_2)\psi_{\alpha_1}(x_1)\dots|0\rangle = -\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \dots$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} = -\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}}$$

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi_{\alpha_1}(x_1)\psi_{\alpha_2}(x_2) \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right) &= \\ &= - \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \psi_{\alpha_2}(x_2)\psi_{\alpha_1}(x_1) \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right) \end{aligned}$$

Wir benötigen also die Analysis von antikommutierenden Objekten.

2.4.1 Grassmann-Algebra

Wir betrachten eine Menge von antikommutierenden Objekten C_i : $\{C_i, C_j\} = C_i C_j + C_j C_i = 0$. Hieraus ergibt sich $C_i^2 = 0$. Wir betrachten eine endlichdimensionale GRASSMANN-Algebra, das heißt $\{C_i\} = \{C_1, \dots, C_n\}$.

$$* \quad n = 1: f_1(C) = a + bC$$

$$* \quad n = 2: f_2(C_1, C_2) = a + b_1 C_1 + b_2 C_2 + c_{12} C_1 C_2$$

Für eine endlichdimensionale GRASSMANN-Algebra sind alle Funktionen nur Polynome.

2.4.2 Differentiation (von Polynomen)

$$\frac{\partial}{\partial C_1} f_2 = b_1 + c_{12} \left(\frac{\partial}{\partial C_1} C_1\right) C_2 = b_1 + c_{12} C_2$$

$$\frac{\partial}{\partial C_2} f_2 = b_2 + c_{12} \frac{\partial}{\partial C_2} C_1 C_2 = b_2 - c_{12} \left(\frac{\partial}{\partial C_2} C_2\right) C_1 = b_2 - c_{12} C_1$$

Hieraus folgt dann

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial C_2} \frac{\partial f_2}{\partial C_1} = c_{12} \text{ und } \frac{\partial}{\partial C_1} \frac{\partial f_2}{\partial C_2} = -c_{12}}$$

also antikommutieren die Ableitungen. Fassen wir nun die geltenden Rechenregeln zusammen:

$$\boxed{\left\{ \frac{\partial}{\partial C_i}, \frac{\partial}{\partial C_j} \right\} = 0 \text{ und } \left\{ \frac{\partial}{\partial C_i}, C_j \right\} = \delta_{ij}}$$

2.4.3 Integration

1.) Wir fordern Linearität. Dies bedeutet:

$$\int dC (a + bC) = a\alpha + b\beta$$

Die α und β müssen zunächst noch bestimmt werden.

2.) Des weiteren fordern wir Translationsinvarianz unter $C \mapsto C - \eta$.

$$\int dC (a + bC) = \int dC [a + b\eta + b(C - \eta)] = \int dC' (a + b\eta + bC') = (a + b\eta)\alpha + b\beta$$

Um also Translationsinvarianz für die Integration zu gewährleisten, muss $\alpha = 0$ gesetzt werden. β setzen wir als Normierungskonstante gleich 1.

$$\int dC_i = 0 \text{ und } \int dC_i C_j = \delta_{ij}$$

Hieraus resultiert schließlich:

$$\boxed{\int dC (a + bC) = b \text{ und } \frac{d}{dC}(a + bC) = b}$$

An dieser Stelle wollen wir nun die Integration von GAUSS-Funktionen betrachten:

$$I = \int d\bar{\eta} d\eta \exp(i\bar{\eta}M\eta) \text{ mit } \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \bar{\eta} = (\bar{\eta} : 1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_n) \text{ und } M \in \mathbb{C}^{(n,n)}$$

Betrachten wir zuerst den Fall $n = 2$.

$$\begin{aligned} I &= \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_1 d\eta_2 \left(1 + i\bar{\eta}M\eta + \frac{i^2}{2} \sum_{i,j} \bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j \sum_{l,m} \bar{\eta}_l M_{lm} \eta_m \right) = \\ &= \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_1 d\eta_2 \left(-\frac{1}{2} (\bar{\eta}_1 M_{11} \eta_1 \bar{\eta}_2 M_{22} \eta_2 + \bar{\eta}_1 M_{12} \eta_2 \bar{\eta}_2 M_{21} \eta_1) \cdot 2 \right) = \\ &= \int d\bar{\eta}_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_1 d\eta_2 \eta_2 \eta_1 \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1 \cdot (-1) \cdot (-M_{11} M_{22} + M_{12} M_{21}) = M_{11} M_{22} - M_{12} M_{21} = \det(M) \end{aligned}$$

„Normales“ GAUSS-Integral:

$$\int d^n z d^n \bar{z} \exp(-\bar{z}Mz) \stackrel{z=M^{-1}z'}{=} |\det M^{-1}| \int d^n z' d^n \bar{z}' \exp(-\bar{z}'z') = \frac{N}{\det(M)}$$

2.5 Pfadintegrale für Dirac-Felder

Wir gehen aus von einer α -dimensionalen GRASSMANN-Algebra $\{C(x)\}$.

$$\{C(x), C(y)\} = 0 \text{ und } \left\{ \frac{\partial}{\partial C(y)}, C(x) \right\} = \delta^{(4)}(x - y)$$

Damit wir Integrationsvariablen verschieben können (beispielsweise zur Integration von GAUSSschen Integralen) muss gelten:

$$\int dC(x) = 0 \text{ und } \int dC(x) C(x) = 1$$

Wir definieren uns nun über diese Eigenschaften ein Pfadintegral. Dann müssen wir verifizieren, dass die erhaltenen GREENSchen Funktionen mit denen der kanonischen Quantisierung übereinstimmen.

$$Z_0[\eta, \bar{\eta}] = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int d^4 x [\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\epsilon)\psi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)] \right]$$

Sei nun $S^{-1} \equiv i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\epsilon$ das Inverse des FEYNMAN-Propagators S . Wir betrachten den Integranden

$$Q(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi} S^{-1} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$$

und führen eine Translation der Integrationsvariablen ψ durch:

$$Q(\psi + \psi_n, \bar{\psi} + \bar{\psi}_n) = \bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\psi}_nS^{-1}\psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}S^{-1}\psi_n + \bar{\psi}\eta + \bar{\psi}_nS^{-1}\psi_n + \bar{\eta}\psi_n + \bar{\psi}_n\eta$$

Wähle $\bar{\psi}_n = -\bar{\eta}S$ und $\psi_n = -S\eta$ (Shift durch ein äußeres Feld). Mit dieser Wahl fallen einige Terme heraus und wir erhalten:

$$Q(\psi - S\eta, \psi_n - \bar{\eta}S) = \bar{\psi}S^{-1}\psi + \bar{\eta}SS^{-1}S\eta - \bar{\eta}S\eta - \bar{\eta}S\eta = \bar{\psi}S^{-1}\psi - \bar{\eta}S\eta$$

Damit geht unser Pfadintegral über in:

$$\begin{aligned} Z_0[\eta, \bar{\eta}] &= N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(i \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m + i\epsilon)\psi\right) \cdot \exp\left(-i \int d^4x \bar{\eta}S_F(x-y)\eta(y) d^4y\right) = \\ &= \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right) = \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_\alpha(x)S_F(x-y)_{\alpha\beta}\eta_\beta(y)\right) = \\ &= \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_{\eta, \bar{\eta}} \end{aligned}$$

Analog zum skalaren Fall interessieren wir uns nun für die Funktionalableitungen von Z_0 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(y)} \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right) &= \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta_\alpha(y))\right) \left(\frac{\delta}{\delta\eta} \int d^4x \bar{\psi}\eta\right) = \\ &= \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta_\alpha(y))\right) (-\bar{\psi}_\alpha(y)) \end{aligned}$$

Es ist ein Minuszeichen zu berücksichtigen, da wird die Funktionalableitung nach η zuerst durch Antikommutieren mit $\bar{\psi}$ vor η bringen müssen. Die Zwei-Punkt-Funktion erhält man durch:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(y_1) | 0 \rangle &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x_1)} \frac{-1}{i} \frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y_1)} Z_0[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=0=\bar{\eta}} = \\ &= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x_1)} \frac{\delta}{\delta\eta_\beta(y_1)} \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right) \Big|_{\eta=0=\bar{\eta}} = \\ &= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\alpha(x_1)} \left[i \int d^4x (\bar{\eta}(x)S_F(x-y_1))_\beta \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right) \right] \Big|_{\eta=0=\bar{\eta}} = \\ &= iS_F(x_1 - y_1) \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right) - i \int d^4x (\bar{\eta}(x)S_F(x-y_1))_\beta \times \\ &\quad \times \left(-i \int d^4y (S_F(x_1 - y)\eta(y))_\alpha\right) \exp\left(-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right) \Big|_{\eta=0=\bar{\eta}} = \\ &= \boxed{iS_F(x_1 - y_1)_{\alpha\beta}} \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur Vier-Punkt-Funktion, wobei wir auf die DIRAC-Indizes der Übersichtlichkeit halber verzichten wollen:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\psi(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(y_1)\bar{\psi}(y_2) | 0 \rangle &= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)} \frac{\delta}{\delta\eta(y_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(y_2)} Z_0[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \\ &= -\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_2)} \frac{\delta}{\delta\eta(y_2)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \frac{\delta}{\delta\eta(x_1)} Z_0[\eta, \bar{\eta}] \Big|_{\eta=0=\bar{\eta}} = \\ &= -[iS_F(x_1 - y_1)iS_F(x_2 - y_2) - (-i)^2S_F(x_2 - y_1)S_F(x_1 - y_2)] = \\ &= \boxed{-iS_F(x_1 - y_1)iS_F(x_2 - y_2) + iS_F(x_2 - y_1)S_F(x_1 - y_2)} \end{aligned}$$

2.6 Pfadintegralformalismus für das Photonfeld

Da das Photonfeld A_μ ein vierkomponentiges Vektorfeld ist, benötigen wir auch einen äußeren vierkomponentigen Strom $J = J_\mu(x)$. Machen wir also folgenden Ansatz für das Pfadintegral:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu\right]\right)$$

$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ ist schon eichinvariant. Wir verlangen zusätzlich Eichinvarianz für das Integrationsmaß $\mathcal{D}A_\mu$ und den $J \cdot A$ -Term, was äquivalent ist zu $\partial_\mu J^\mu = 0$. Wir betrachten also $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ und erhalten einen zusätzlichen Term:

$$\int d^4x J_\mu \partial^\mu \Lambda = \int d^4x [\partial^\mu (J_\mu \Lambda) - (\partial_\mu J^\mu) \Lambda] = 0$$

Der erste Term ist ein Oberflächenterm; dieser verschwindet für ein J mit kompaktem Träger. Damit gilt $\partial_\mu J^\mu = 0$. Betrachten wir nun den kinetischen Term $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \right) \partial_\mu A_\nu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \int d^4x \frac{1}{2} A_\nu \underbrace{(\square g^{\nu\varrho} - \partial^\varrho \partial^\nu)}_{(D^{-1})^{\nu\varrho}} A_\varrho$$

Dies ergibt sich wieder durch partielle Integration, wenn man Oberflächenterme vernachlässigt. Das Problem ist jetzt, dass der Differentialoperator $\square g^{\nu\varrho} - \partial^\varrho \partial^\nu$ nicht invertierbar ist. Dies kann man folgendermaßen einsehen:

$$(\square g^{\nu\varrho} - \partial^\varrho \partial^\nu)(A_\varrho + \partial_\varrho f) = J^\nu$$

f ist beliebig, denn $\square \partial^\nu f - \partial_\nu \partial^\varrho \partial_\varrho f = 0$, wenn $f \in C^3$. Für reine Eichfreiheitsgrade erhält man damit Eigenwerte 0. f ist nicht eindeutig bestimmt, womit der Operator nicht invertierbar ist. Das Problem wird durch die Eichfixierung (beispielsweise LORENTZ-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$) behoben.

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) = \int d^4x \frac{1}{2} A_\nu \square g^{\nu\varrho} A_\varrho$$

Der Operator $\square g^{\nu\varrho}$ ist nun invertierbar und das Inverse (GREENSche Funktion) ist gegeben durch:

$$D_{F_{\mu\nu}}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \exp(ik \cdot (x-y))$$

Um damit den wegen der Nicht-Invertierbarkeit störenden Term $-1/2 A_\nu \partial^\varrho \partial^\nu A_\varrho$ zu beseitigen, können wir den Term $1/2(\partial^\nu A_\nu)(\partial^\varrho A_\varrho)$ subtrahieren:

$$\begin{aligned} Z_0[J] &= N \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\varrho A^\varrho)^2 + J_\mu A^\mu \right] \right) = \\ &= \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J^\mu(x) D_{F_{\mu\nu}}(x-y) J_\nu(y) \right) \end{aligned}$$

2.7 Wechselwirkende Felder in der Quantenelektrodynamik

Teilchen	Feld	äußere Quelle
Photon	A_μ	J_μ
Elektron/Positron	$\psi, \bar{\psi}$	$\eta, \bar{\eta}$

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu \exp \left(i \int \mathcal{L}_{eff} d^4x \right) \text{ mit}$$

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{\psi} i \gamma^\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi - m \bar{\psi} \psi + J \cdot A + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta$$

$$\mathcal{L}_{WW} = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

$$Z[\eta, \bar{\eta}, A_\mu] = N \exp \left(i \int d^4z e \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta_\alpha(z)} \gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\beta(z)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^\mu(z)} \right) Z_0[\eta, \bar{\eta}] Z_0[J]$$

2.8 Pfadintegralformalismus für die Yang-Mills-Theorie

2.8.1 Wiederholung

Materiefelder:

$$1.) \text{ Skalare Felder: } \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix}$$

2.) Fermionfelder: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$

Eichtransformationen werden beschrieben durch $\psi(x) \mapsto U(x)\psi(x)$ mit $U \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ bzw. $\phi(x) \mapsto U(x)\phi(x)$ mit $U \in \mathbb{C}^{(m,m)}$. Allgemein kann man $U(x)$ in der folgenden Weise mit Generatoren T^a einer LIE-Gruppe parametrisieren:

$$U(x) = \exp(iT^a \theta^a(x)) \text{ wobei } [T^a, T^b] = if^{abc}T^c$$

Die kovariante Ableitung $D_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a$ transformiert sich analog zu den Feldern, nämlich $D_\mu \phi(x) \mapsto U(x)D_\mu \phi(x)$. Dabei hatten wir vorausgesetzt, dass

$$A_\mu(x) = T^a A_\mu^a \mapsto U(x)A_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

Mit diesen Objekten war es uns möglich, die Materie-LAGRANGEDichte hinzuschreiben:

$$\mathcal{L}_{Materie} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi)$$

Die kinetische Energie der YANG-MILLS-Felder selbst wurden konstruiert mittels des Feldstärketensors

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D^\mu, D^\nu] = T^a (F^a)^{\mu\nu} \text{ mit } F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$$

Damit konnten wir schreiben:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a (F^a)^{\mu\nu}$$

Kommen wir nun zum Pfadintegralformalismus:

$$Z[J_\mu^a] = \int \mathcal{D}(A_\mu) \exp\left(i \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a (F^a)^{\mu\nu} + J_\mu^a (A^a)^\mu\right)\right)$$

Wir hatten dabei folgendes Problem:

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right) = \int d^4x \frac{1}{2}A_\mu (\square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu$$

Der Differentialoperator $\square g^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu$ war nicht invertierbar, da er Nullmoden besitzt. Die Eichtransformationen $(\square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)\partial_\nu \Lambda \equiv 0$ entsprechen den Eigenvektoren mit Eigenwert 0.

$$\int d^N x \exp(-x^\top M x) = \int \prod_{i=1}^N dy_i \exp(-\lambda_i y_i^2)$$

Dieses Integral divergiert für $\lambda_i = 0$.

$$Z = \int \mathcal{D}(A_\mu) \exp(iS_{YM}, \delta(F^a(A_\mu)))$$

Wir wollen eine Eichbedingung einführen, nämlich $F^a(A_\mu = 0)$ (beispielsweise LORENTZzeichnung $\partial^\mu A_\mu^a(x) = 0$).

$$\delta(F[A]) \equiv \prod_{x,a} \delta(F^a(A(x)))$$

Das physikalische Endergebnis soll natürlich nicht von der speziell gewählten Eichung abhängen. Das Problem ist die JACOBI-Determinante. Betrachten wir zunächst den eindimensionalen Fall:

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) \text{ mit } f(x_0) = 0 \text{ als einzige Nullstelle}$$

In dem Vorfaktor der δ -Funktion steckt aber die Eichfixierung mit drin. Deshalb müssen wir folgenden Ansatz machen, so dass die Abhängigkeit von den Ableitungen verschwindet: $\det(F'[A])\delta(F[A])$.

2.8.2 Ableitung nach Fadeev und Popov

$$\Delta_F^{-1}[A] = \int \mathcal{D}U \delta(F[A^U]) \text{ mit } A_\mu^U = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

A_μ^U ist das Eichfeld, das mit $U(x)$ transformiert wurde. Integriert wird über alle Eichtransformationen.

$$\mathcal{D}U = \prod_x dU(x)$$

Das Maß beschreibt also eine Integration über die Eichgruppe, die beschrieben wird durch die $n^2 - 1$ reellen Koordinaten $\theta^a(x)$. In der Umgebung von $U = 1$ ($U = \exp(i\theta^a T^a)$) ist dieses Maß gegeben durch

$$dU = d^{N-1}\theta = \prod_{a=1}^{N^2-1} d\theta^a$$

Das Maß wird als so fortgesetzt, so dass Gruppenmultiplikationen dieses Maß invariant lassen. dU ist gruppeninvariant, also

$$\int d(UU') = \int dU$$

Es wurde gezeigt, dass für jede kompakte LIE-Gruppe ein solches Maß existiert. $\Delta_F[A]$ ist eichinvariant.

$$\Delta_F^{-1}[A^{U'}] = \int \mathcal{D}U \delta(F[A^{UU'}]) = \int \mathcal{D}U'' \delta(F[A^{U''}]) = \Delta_F^{-1}[A]$$

Wir schieben nun

$$1 = \Delta_F[A] \int \mathcal{D}U \delta(F[A^U])$$

in die Integration ein und erhalten:

$$Z = N \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A] \int \mathcal{D}U \delta(F[A^U]) \exp(iS_{YM}[A])$$

Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge und benennen in den eichinvarianten Objekten A und A^U um:

$$Z = N \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}(A_\mu) \Delta_F[A] \delta(F[A]) \exp(iS_{YM}[A])$$

Das verbleibende Integral hängt also nicht mehr von der Transformation U ab. Man kann also

$$N \int \mathcal{D}U \equiv N'$$

setzen und als neue Konstante betrachten.

$$\int \mathcal{D}U \delta(F[A^U]) = \int \mathcal{D}U \prod_{a=1}^{N^2-1} \delta(F^a[A^U])$$

entspricht an jedem Punkt x $N^2 - 1$ Integrationen über θ^a . Deshalb schreiben wir:

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}F \left| \det \left(\frac{\delta U}{\delta F} \right) \right|$$

Damit erhalten wir:

$$\Delta_F^{-1}[A] = \int \mathcal{D}U \delta(F) = \int \mathcal{D}F \left| \det \left(\frac{\delta U}{\delta F} \right) \right| \delta(F) = \left| \det \left(\frac{\delta U}{\delta F} \right) \right|_{F=0} \Rightarrow \boxed{\Delta_F[A] = \left| \det \left(\frac{\delta F}{\delta U} \right) \right|_{F=0}}$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\frac{\delta F}{\delta U} = \frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^b(x)} \frac{\delta A_\mu^b(x)}{\delta \theta^c(y)}$$

Was wir benötigen, ist die Variation von A unter infinitesimalen Eichtransformationen. Aus

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu U^{-1}(x) - i/g(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad U = 1 + iT^a\theta^a + O(\theta^{a2}) \quad \text{und} \quad [T^c\theta^c, A'_\mu T^a] = T^b i f^{cab}\theta^c A'_\mu$$

folgt:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= A'_\mu - A_\mu = i[T^c\theta^c, A_\mu] - \frac{(i)^2}{g} T^b \partial_\mu \theta^b = \frac{1}{g} T^b (\partial_\mu \delta^{bc} - g f^{abc} A_\mu^a) \theta^c = \frac{1}{g} T^b (\partial_\mu \delta^{bc} - ig(-if^{abc})A_\mu^a) \theta^c = \\ &= \frac{1}{g} T^b (\partial_\mu \delta^{bc} - ig T_{bc}^a A_\mu^a) \theta^c = (D_\mu)_{bc} \theta^c \stackrel{!}{=} T^b \delta A_\mu^b \end{aligned}$$

$(D_\mu)_{bc}$ ist die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung, also ein Differentialoperator. Hieraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleich:

$$\frac{\delta A_\mu^b(x)}{\delta \theta^c(y)} = \frac{1}{g} (D_\mu)_{bc} \delta^{(4)}(x-y)$$

$$\boxed{\frac{\delta F^a}{\delta \theta^c} = \frac{\delta F}{\delta U} = \frac{1}{g} \frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^b(x)} (D_\mu)_{bc} \delta^{(4)}(x-y)}$$

Dies gilt allgemein für jede beliebige Eichung. Schauen wir uns deshalb nun den Spezialfall der LORENTZEICHUNG an, also $F^a(x) = \partial^\mu A_\mu^a(x)$. Also ist

$$\frac{\delta F}{\delta U} = \frac{1}{g} (\partial^\mu D_\mu)_{bc} \delta^{(4)}(x-y)$$

ein lokaler Differentialoperator. Wir führen $N^2 - 1$ GRASSMANN-Felder η^a bzw. $\bar{\eta}^a$ ein:

$$\left| \det \left(\frac{\delta F}{\delta U} \right) \right| = N \int \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\eta \exp \left(-i \int d^4x \bar{\eta}^a(x) \frac{\delta F^a}{\delta A_\mu^b(x)} (D_\mu)_{bc} \eta^c \right)$$

η^a und $\bar{\eta}^a$ sind skalare GRASSMANN-Felder, welche die Funktionaldeterminante, die wir bei der Eichfixierung automatisch bekommen, parametrisieren. Dabei handelt es sich **nicht** um physikalische Felder! Man bezeichnet die η und $\bar{\eta}$ als FADEEV-POPOV-Geister. Damit sind wir fast beim endlichen Ausdruck für das Pfadintegral angelangt:

$$Z = N'' \int \mathcal{D}(A_\mu) \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \delta(F[A]) \exp \left(iS_{YM} - i \int d^4x \bar{\eta} \frac{\delta F}{\delta A_\mu} D_\mu \eta \right)$$

Was jetzt noch stört, um daraus FEYNMAN-Regeln herzuleiten, ist die Anwesenheit der δ -Funktion $\delta(F[A])$. Wir ersetzen das Integral durch ein Integral, von dem man konstante Funktionen $c^a(x)$ subtrahiert:

$$Z = N'' \int \mathcal{D}(A_\mu) \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} (\delta(F^a[A]) - c^a(x)) \exp \left(iS_{YM} - i \int d^4x \bar{\eta} \frac{\delta F}{\delta A_\mu} D_\mu \eta \right)$$

Mit einer geeigneten Gewichtsfunktion mittelt man nun über verschiedene $c^a(x)$ folgendermaßen:

$$\int \mathcal{D}c \exp \left(-\frac{i}{2\alpha} \int d^4x (c^a(x))^2 \right)$$

Damit ändert sich nur die Normierungskonstante.

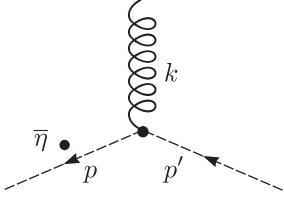
$$\boxed{Z = N \int \mathcal{D}[A_\mu] \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^\dagger \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{eff} \right) \quad \text{mit}$$

$$\mathcal{L}_{eff} = \underbrace{-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{YM}} - \underbrace{\frac{1}{2\alpha} (F^a[A])^2}_{\mathcal{L}_{GF}} - \underbrace{\bar{\eta}^a \frac{\partial F^a}{\partial A_\mu^b} D_\mu^{bc} \eta_c}_{\mathcal{L}_{FPG}} + \underbrace{\bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + V(\phi^\dagger \phi)}_{\mathcal{L}_{Materie}}$$

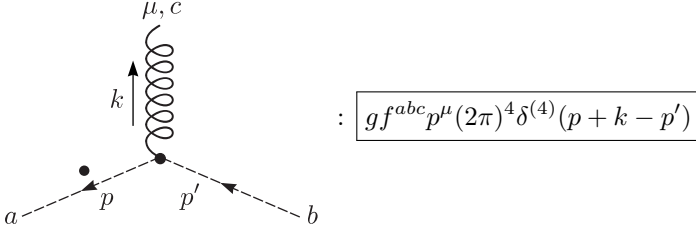
2.9.2 Vertizes

Betrachten wir zuerst Geistvertizes:

$$-igf^{abc}(\partial^\mu \bar{\eta}^a)\eta^b A_\mu^c$$

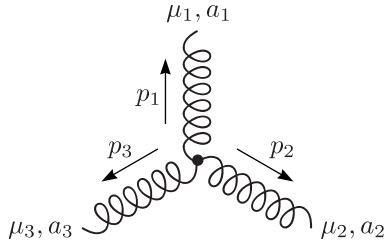


Die Felder werden in den Propagatoren absorbiert: $-igf^{abc}(ip^\mu)$.



$$: gf^{abc}p^\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p')$$

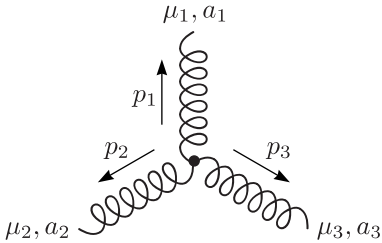
Die FEYNMAN-Regel für einen Drei-Gluon-Vertex erhalten wir, indem wir die Gluonen als äußere Gluonen ansehen und mit dem WICK-Theorem argumentieren.



Wir betrachten als Beispiele zwei Kontraktionen:

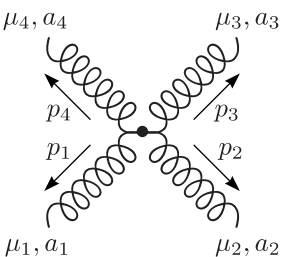
$$\begin{aligned} & -igf^{abc} \underbrace{A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu a} \cdot A^{a_1} \varepsilon_1 \cdot A^{a_2} \varepsilon_2 \cdot A^{a_3} \varepsilon_3}_{\text{Contract 1}} - igf^{abc} \underbrace{A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu a} \cdot A^{a_1} \varepsilon_1 \cdot A^{a_2} \varepsilon_2 \cdot A^{a_3} \varepsilon_3}_{\text{Contract 2}} + \dots = \\ & = -igf^{abc} \delta^{ba_1} \varepsilon_{1\mu} \delta^{ca_3} \varepsilon_{3\nu} (ip_2^\mu) \delta^{aa_2} \varepsilon_2^\nu - igf^{abc} \delta^{ba_1} \varepsilon_{1\mu} \delta^{ca_2} \varepsilon_{2\nu} (ip_3^\mu) \delta^{aa_3} \varepsilon_3^\nu + \dots = \\ & = gf^{a_2 a_1 a_3} \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{3\nu} (p_2^\mu) \varepsilon_2^\nu + gf^{a_3 a_1 a_2} \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} (p_3^\mu) \varepsilon_3^\nu + \dots = \\ & = -gf^{a_1 a_2 a_3} \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{3\nu} (p_2^\mu) \varepsilon_2^\nu + gf^{a_1 a_2 a_3} \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\nu} (p_3^\mu) \varepsilon_3^\nu + \dots = \\ & = gf^{a_1 a_2 a_3} (g^{\mu_2 \mu_3} (p_3^{\mu_1} - p_2^{\mu_1}) + \dots) \varepsilon_{1\mu_1} \varepsilon_{2\mu_2} \varepsilon_{3\mu_3} \end{aligned}$$

Berücksichtigt man alle Kontraktionen, so ergibt sich die vollständige FEYNMAN-Regel für einen Drei-Gluon-Vertex:



$$: -gf^{a_1 a_2 a_3} [g_{\mu_1 \mu_2} (p_1 - p_2)_{\mu_3} + g_{\mu_2 \mu_3} (p_2 - p_3)_{\mu_1} + g_{\mu_3 \mu_1} (p_3 - p_1)_{\mu_2}] \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3)$$

Für einen Vier-Gluon-Vertex folgt analog:

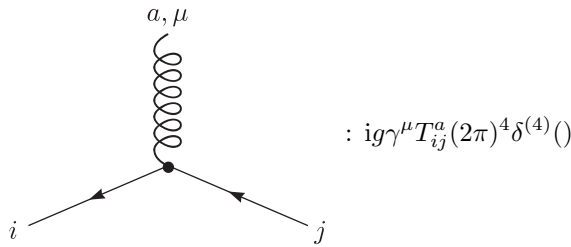


$$: -ig^2 [f^{a_1 a_2 b} f^{a_3 a_4 b} (g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + f^{a_1 a_3 b} f^{a_4 a_2 b} (g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4}) - f^{a_1 a_4 b} f^{a_2 a_3 b} (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4}))] \times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

Was uns nun noch fehlt, ist der Fermion-Eichboson-Vertex. Dazu betrachten wir folgenden Term:

$$i\mathcal{L}_{\text{FA}} = ig\bar{\psi}_i\gamma^\mu T_{ij}^a\psi_j A_\mu^a$$

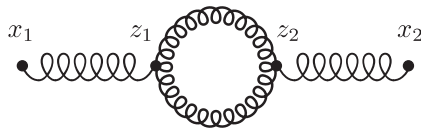
Hieraus ergeben sich direkt die FEYNMAN-Regeln. Da die Felder in die Propagatoren gesteckt werden, erhalten wir:



Weitere Regeln sind:

- * Minuszeichen für jede geschlossene Fermionschleife (ungerade Anzahl von Permutationen von Feldern)
- * Minuszeichen für jede Geistschleife
- * Es gibt keine externen Geister. Sie tauchen nur als Propagatoren innerhalb von Schleifen auf. (Sie waren ja nur ein mathematisches Hilfsmittel zur Parametrisierung der Funktionaldeterminante.)
- * Zählerfaktoren beachten!

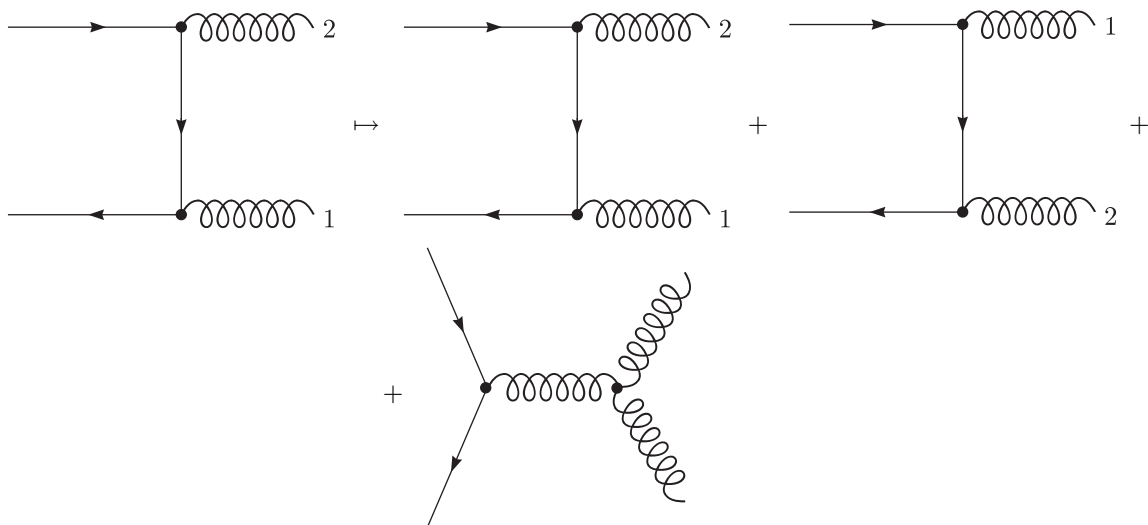
Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:



Von den FEYNMAN-Regeln ergeben sich 36 Terme. Wir argumentieren mittels des WICK-Theorems. Am Punkt x_1 haben wir ein Feld $A(x_1)$, am Punkt z_1 drei Felder $A^3(z_1)$, am Punkt z_2 wieder drei Felder $A^3(z_2)$ und am Punkt x_2 ein Felder $A(x_2)$. Um das FEYNMAN-Diagramm zu erzeugen, müssen wir das Feld $A(x_1)$ mit mit einem Feld $A(z_1)$ kontrahieren (drei Kontraktionen) und ein Feld $A(x_2)$ mit einem Feld $A(z_2)$ (drei Kontraktionen). Für die übrig bleibenden Felder $A^2(z_1)$ und $A^2(z_2)$ ergeben sich zwei Kontraktionen. Damit ergeben sich insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Konstraktionen. Wir müssen also einen Zählerfaktor $1/2$ berücksichtigen.

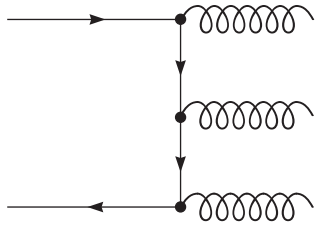
Beispiel:

Wir betrachten den Prozess $q\bar{q} \mapsto gg$. Im ersten Schritt betrachten wir $q\bar{q} \mapsto g$. Ein weiteres Gluon kann nun entweder an die beiden Fermionlinien oder an die bereits vorhandene Gluonlinie anknüpfen. Damit erhält man drei FEYNMAN-Graphen.

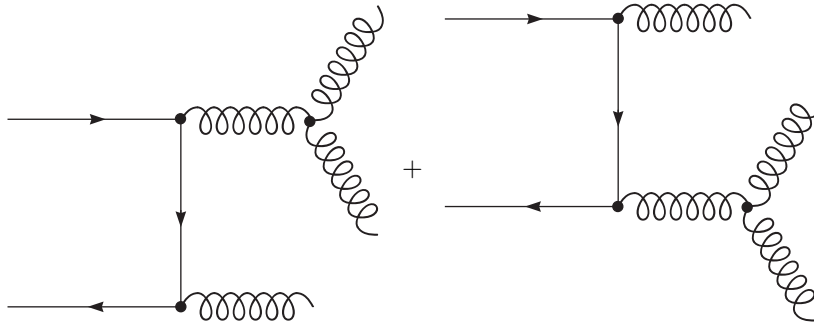


Dies sind die Graphen der niedrigsten Ordnung Störungstheorie. Die Amplitude \mathcal{M} ist proportional zu g^2 . Um die theoretische Beschreibung zu verbessern, müssen wir höhere Ordnungen betrachten. Betrachten wir g^3 , so haben wir den neuen Prozess $q\bar{q} \mapsto ggg$.

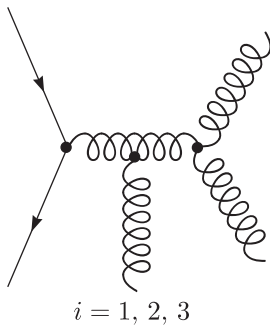
a.) 6 Permutationen:



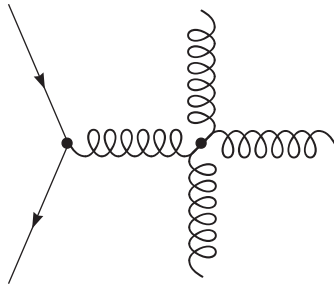
b.) 3+3 Permutationen:



c.) 3 Permutationen:

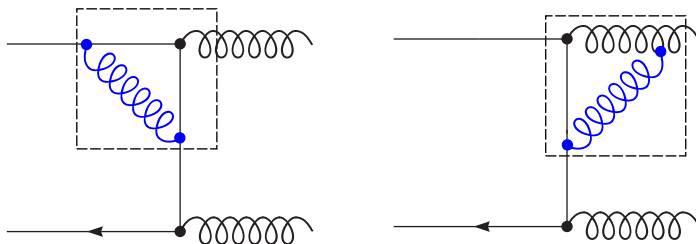


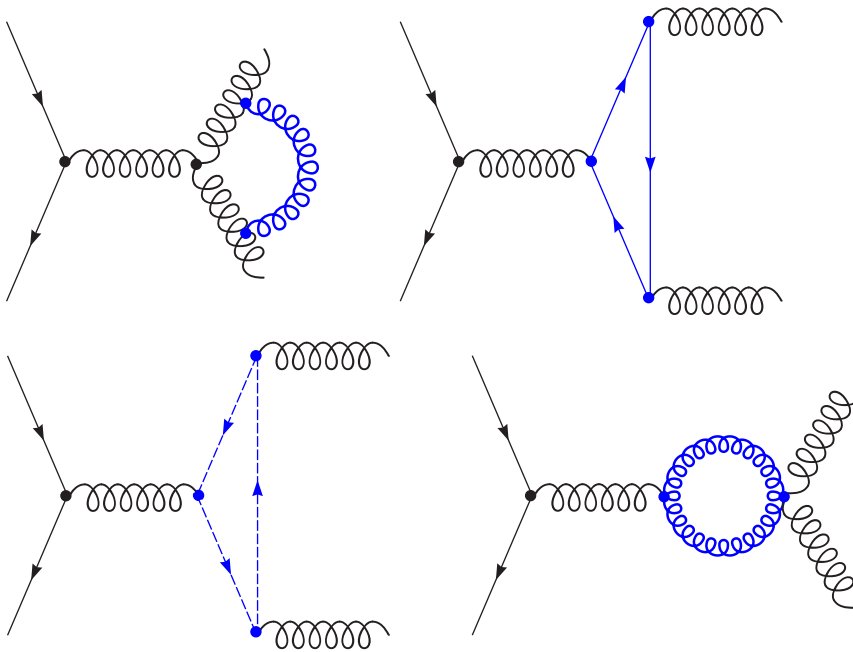
d.) 1 Permutation:



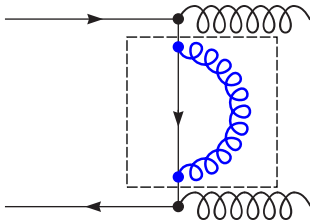
Wir wollen nun Schleifenkorrekturen näher betrachten.

* Vertexkorrekturen:

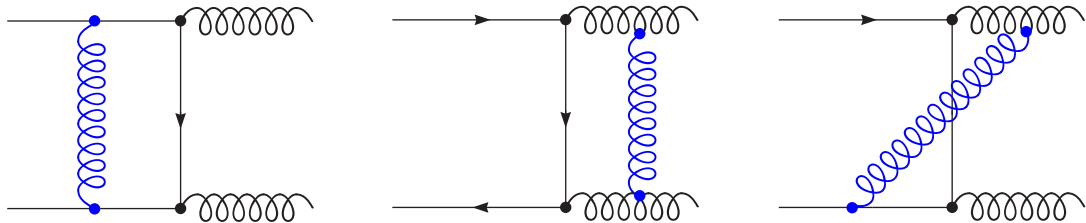




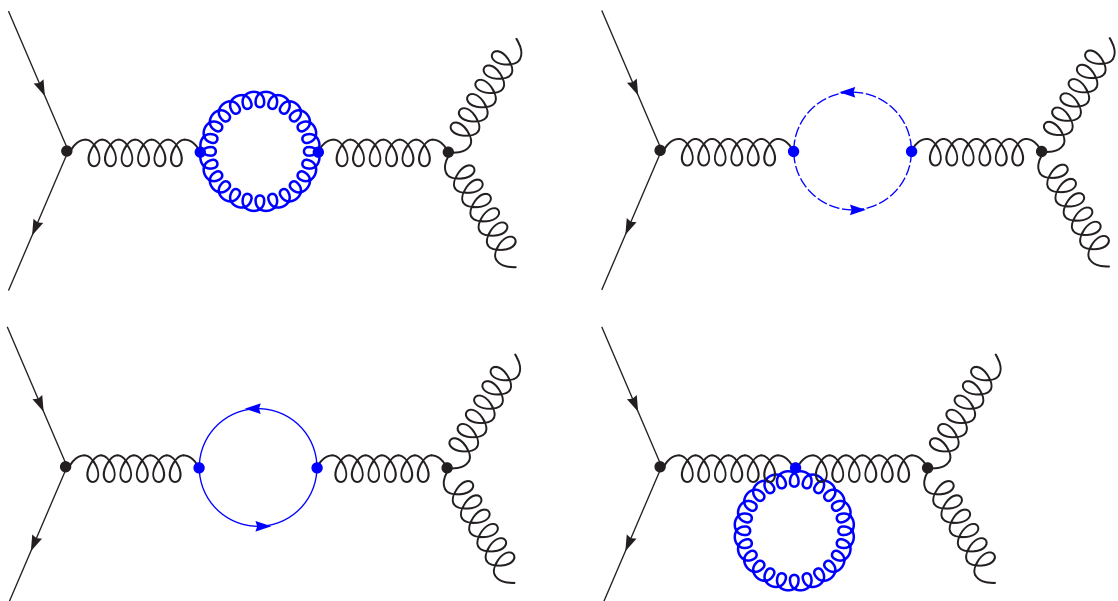
* Propagatorkorrekturen:



* Boxkorrekturen:

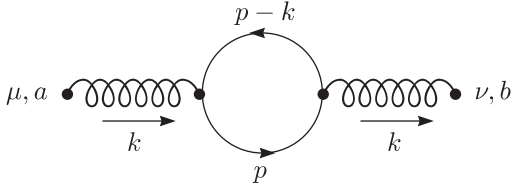


* Gluon-Propagator-Korrekturen



2.10 Eichboson-Propagator

2.10.1 Fermion-Schleife



$$D_{\mu\sigma}^{(0)}(k)\bar{\omega}^{\sigma e,ab}D_{\nu}^{(0)}(k) \text{ mit } D_{\mu\nu}^{(0)}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} + (\alpha - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{\sigma e,ab} &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left[ig\gamma^\sigma T^a \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i\epsilon} ig\gamma^e T^b \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} \right] = \\ &= -g^2 \text{Sp}(T^a T^b) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left[\gamma^\sigma \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^e \frac{1}{\not{p} - m} \right] \text{ mit „}m\text{“} = m - i\epsilon \end{aligned}$$

Der Farbfaktor $\text{Sp}(T^a T^b)$ hängt von der gewählten Darstellung, die man verwendet, ab. Wir wollen den allgemeinen Fall betrachten $\text{Sp}(T^a T^b) = T_f \delta^{ab}$. Wie kann man nun den Koeffizienten T_f bestimmen? Wir setzen $a = b$ und summieren darüber:

$$\text{Sp}(T^a T^a) = T_f \delta^{aa} = (N^2 - 1)T_f$$

$T^a T^a$ ist nun gerade der CASIMIR-Operator $C_2(f)\mathbf{1}$. Damit ergibt sich nun, indem wir die Spur ausführen:

$$T_f = \frac{d_f C_2(f)}{N^2 - 1}$$

d_f ist die Dimension der jeweiligen Darstellung. Für Quarks verwendet man die fundamentale Darstellung, welche die Dimension $d_f = 3 = N$ besitzt. Damit erhalten wir:

$$C_2(f) = \frac{N^2 - 1}{2N} = \frac{4}{3} \text{ und } T_f = \frac{N \cdot \frac{N^2 - 1}{2N}}{N^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

In der adjungierten Darstellung gilt $C_2(f) = N$ und nun:

$$T_f = \frac{(N^2 - 1) \cdot N}{N^2 - 1} = N$$

Für die QED folgt $g^2 \text{Sp}(T^a T^b) \mapsto e^2 Q_f^2$ (Elektron: $Q_f = -1$, up-Quark: $Q_f = +2/3$).

$$\bar{\omega}^{\sigma e,ab}(k) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{Sp}(T^a T^b) & \text{für QCD} \\ Q_f^2 & \text{für QED} \end{array} \right\} \cdot \bar{\omega}^{\sigma e}(k)$$

Es bleibt nun noch das vierdimensionale Integral zu berechnen.

$$\bar{\omega}^{\sigma e}(k) = -g^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left(\gamma^\sigma \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^e \frac{1}{\not{p} - m} \right) \sim \int \frac{d^4p}{p^2}$$

Dieses Integral ist UV-divergent. Wir müssen also die Theorie im folgenden abändern. PAULI-VILLARS-Regularisierung:

$$\text{Sp}(m) \mapsto \sum_{s=0}^S C_s \text{Sp}(m_s)$$

Für $s = 0$ definieren wir $C_0 \text{Sp}(m_0) \equiv \text{Sp}(m)$. Die höheren Terme wählen wir so, dass die Divergenzen verschwinden, indem wir irgendwelche Koeffizienten negativ wählen. Ganz am Schluss setzen wir $m_1, m_2 \mapsto \infty$!

Kapitel 3

Dimensionale Regularisierung

Die Idee ist, dass Schleifenintegrale in Dimensionen $\neq 4$ häufig wohldefiniert sind. Wir betrachten also die Schleifenintegrale als eine Funktion der Raum-Zeit-Dimension d . Schauen wir uns folgendes Beispiel an. Wir können die Fakultät ausdrücken durch die EULERSche Γ -Funktion:

$$n! = \Gamma(n+1) \text{ mit } \Gamma(z) = \int_0^\infty dt \exp(-t)t^{z-1}$$

Die Eigenschaft, welche die Γ -Funktion auszeichnet, ist $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Analog gilt nämlich auch $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot \Gamma(n)$. Die Γ -Funktion ist definiert für $\text{Re}(z) > 0$. Wir spalten die Γ -Funktion folgendermaßen auf:

$$\Gamma(z) = \int_\alpha^\infty dt \exp(-t)t^{z-1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\alpha dt t^{n+z-1} = \int_\alpha^\infty dt \exp(-t)t^{z-1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{\alpha^{n+z}}{n+z}$$

Wähle $\alpha = 1$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt \exp(-t)t^{z-1} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$$

Diese Darstellung definiert uns eine analytische Fortsetzung auf die gesamte komplexen Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. (Sie ist auch bekannt unter dem Namen WEIERSTRASS-Darstellung.) Die Γ -Funktion hat also einfache Polstellen bei negativen ganzen Zahlen.

3.1 Energie-Dimensionen in $d \neq 4$

Schauen wir uns den FEYNMAN-Propagator an:

$$D_{\mu\nu} = D_{\mu\nu}^{(0)} + D_{\mu\rho}^{(0)} \omega^{\rho\sigma} D_{\sigma\nu}^{(0)} = \left[\frac{1}{E^2} \right] + \left[\frac{1}{E^2} \right] \cdot [E^\#] \cdot \left[\frac{1}{E^2} \right] \Rightarrow [\omega^{\rho\sigma}] = [E^2]$$

In einer beliebigen Anzahl von Dimensionen gilt:

$$[\omega^{\rho\sigma}] = \left[g^2(d) d^d p \frac{1}{p^2} \right] = [E^\#] \cdot [E^{d-2}] = [E^2] \Rightarrow [g^2(d)] = [E^{4-d}]$$

Allgemein ist die Wirkung dimensionslos.

$$S = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)^2 + g A^2 \partial A + g^2 A^4 + \bar{\psi} \partial \psi + g \bar{\psi} A \psi \right]$$

Die kinetischen Terme legen die Energiedimension der Felder fest. Mit $d^d x = [E^{-d}]$, $[\partial_\mu] = [E]$ ergibt sich:

$$[d^d x (\partial A)^2] = [E^{-d+2}] \cdot [A^2] \Rightarrow [A] = [E^{\frac{d-2}{2}}] \text{ und ebenso } [\psi] = [E^{\frac{d-1}{2}}]$$

Überprüfen wir nun die Kopplungen:

$$[d^d x g A^2 \partial A] = [g] \cdot [E^{-d+1+3\frac{d-2}{2}}] \Rightarrow [g] = [E^{\frac{4-d}{2}}]$$

Das gleiche Ergebnis ergibt sich für die Terme $g^2 A^4$ und $g\bar{\psi}A\psi$. Wir können damit eine dimensionslose Kopplungskonstante einführen durch:

$$g(d) = g\mu^{\frac{4-d}{2}}$$

Stromerhaltung:

$$\omega^{\sigma e} = \text{FT}\langle 0|T\bar{\psi}(x)\gamma^\sigma\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma^e\psi(0)|0\rangle(i g)^2$$

Es gilt $\partial_\sigma J^\sigma = 0$, was der Bedingung $k_\sigma \omega^{\sigma e} = 0$ entspricht.

$$\begin{aligned} k_\sigma \bar{\omega}^{\sigma e} &= -g^2(d) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Sp} \left(\not{k} \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^e \frac{1}{\not{p} - m} \right) = \\ &= -g^2(d) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Sp} \left[((\not{p} - m) - (\not{p} - \not{k} - m)) \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^e \frac{1}{\not{p} - m} \right] = \\ &= -g^2(d) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Sp} \left(\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^e - \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^e \right) \end{aligned}$$

Was wir benötigen, ist, dass die Substitution $p - k \mapsto p$ erlaubt sein muss, ohne dass Oberflächenterme auftreten.

3.2 Feynman-Parametrisierung

D_1 und D_2 seien die beiden Nenner in $\bar{\omega}^{\sigma e}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1 D_2} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[x D_1 + (1-x) D_2]^2} = \int_0^1 dx \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x D_1 + (1-x) D_2} \cdot \frac{1}{D_2 - D_1} \right) = \\ &= \frac{1}{D_2 - D_1} \left[\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2} \right] = \frac{1}{D_1 D_2} \end{aligned}$$

Diese Integralidentität erlaubt uns, ein Produkt von zwei Propagatoren durch die Summe der beiden Ausdrücken. Dies macht jedoch eine zusätzliche Integration erforderlich. Die allgemeine Form der FEYNMAN-Parametrisierung lautet folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} \dots D_n^{a_n}} &= \frac{\Gamma(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \dots \int_0^1 dx_n \delta(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n) \times \\ &\quad \times \frac{x_1^{a_1-1} \cdot x_2^{a_2-1} \cdot \dots \cdot x_n^{a_n-1}}{[D_1 x_1 + D_2 x_2 + \dots + D_n x_n]^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}} \end{aligned}$$

Damit können wir $\omega^{\sigma e}(k)$ folgendermaßen umschreiben:

$$\omega^{\sigma e}(k) = -g^2 \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}(\gamma^\sigma (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^e (\not{p} + m))}{[-(p-k)^2 x - p^2(1-x) + m^2]^2}$$

Benötigt wird:

$$I_d(q, a) = \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-p^2 + 2p \cdot q + M^2]^a}$$

In unserem Falle hier gilt $q = kx$ und $M^2 = m^2 - k^2 x - i\epsilon$. p^μ im Zähler erhält man durch Differentiation des Masterintegrals I_d :

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} I_d(q, a) = \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(-a) \cdot 2p^\mu}{[-p^2 + 2pq + M^2]^{a+1}}$$

Wir wollen nun das Masterintegral ausrechnen. Dazu machen wir die Substitution $p - q \mapsto p$. Damit gilt:

$$-p^2 + 2pq + M^2 = -(p-q)^2 + q^2 + M^2 = p^2 + q^2 + M^2 = p^2 + \widetilde{M}^2$$

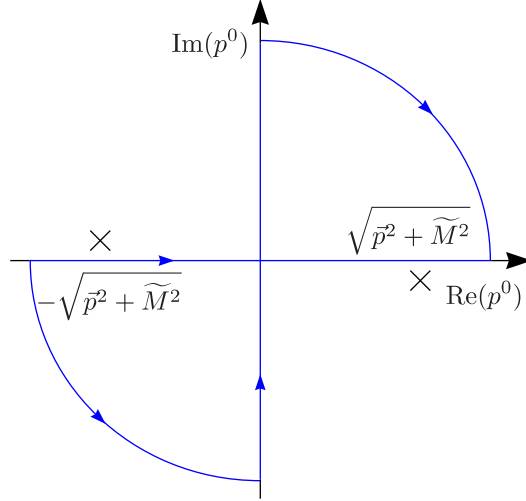
Damit gilt:

$$I_d(q, a) = \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-p^2 + \widetilde{M}^2 - i\epsilon]^a}$$

Was uns jetzt noch stört, ist das Minuszeichen vor der nullten Komponente von p , welches von der MINKOWSKI-Metrik herrührt.

$$-p^2 + \widetilde{M}^2 - i\epsilon = -p^{0^2} + \vec{p}^2 + \widetilde{M}^2 - i\epsilon$$

Der Nenner verschwindet bei $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + \widetilde{M}^2} \mp i\epsilon$. Wir betrachten den Fall $\widetilde{M}^2 > 0$.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \mapsto \int_{-i\infty}^{+i\infty} \underset{p_0 = ip_0^E}{=} i \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0^E$$

Man bezeichnet dieses Vorgehen als WICK-Rotation. Unser Integral geht damit über in:

$$I_d(q, a) = i\mu^{4-d} \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p_E^2 + \widetilde{M}^2]^a} = i\mu^{4-d} \cdot \frac{1}{(2\pi)^d} \int d\Omega_d \int_0^\infty dp_E p_E^{d-1} \frac{1}{[p_E^2 + \widetilde{M}^2]^a}$$

Den Winkelanteil berechnen wir mit folgendem Trick:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi})^d &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) \right)^d = \int d^d x \exp\left(-\sum_{i=1}^d x_i^2\right) = \int d\Omega_d \int_0^\infty dx_E \exp(-x_E^2) x_E^{d-1} = \\ &= \int d\Omega_d \int_0^\infty 2x_E dx_E \exp(-x_E^2) x_E^{d-2} \cdot \frac{1}{2} \stackrel{y=x_E^2}{=} \int d\Omega_d \frac{1}{2} \int_0^\infty dy \exp(-y) y^{\frac{d}{2}-1} = \int d\Omega_d \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also:

$$\boxed{\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}} \text{ mit den Spezialfällen } \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline d & 1 & 2 & 3 \\ \hline \int d\Omega_d & 2 & 2\pi & 4\pi \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_d(q, a) &= i\mu^{4-d} \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{[p_E^2 + \widetilde{M}^2]^a} = i\mu^{4-d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty dp_E \frac{p_E^{d-1}}{[p_E^2 + \widetilde{M}^2]^a} = \\ &= \frac{i\pi^{\frac{d}{2}} \mu^{4-d}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) (2\pi)^d} \int_0^\infty dp_E^2 \frac{(p_E^2)^{\frac{d-2}{2}}}{[p_E^2 + q^2 + \widetilde{M}^2]^a} \end{aligned}$$

Für $q^2 + M^2 > 0$ und $t = p_E^2/(q^2 + M^2)$ können wir das Integral auf folgende Form bringen:

$$I_d(q, a) = \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{(\mu^2 \cdot 4\pi)^{\frac{4-d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^\infty dt t^{\frac{d-2}{2}} (1+t)^{-a} (q^2 + M^2)^{-a+\frac{d}{2}}$$

Des weiteren gilt folgende Identität:

$$\int_0^\infty dt t^{x-1} (1+t)^{-x-y} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

In unserem Falle lesen wir $x = d/2$ und $y = a - d/2$ ab. Somit ergibt sich:

$$I_d(q, a) = \frac{i}{16\pi^2} \frac{(4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(a - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)} (q^2 + M^2)^{\frac{d}{2}-a} = \boxed{\frac{i}{16\pi^2} \cdot (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)} (q^2 + M^2)^{\frac{d}{2}-a}}$$

Kommen wir nun wieder zur Berechnung von $\omega^{\sigma\ell}(k)$:

$$\omega^{\sigma\ell}(k) = -g^2 \int_0^1 dx \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp}(\gamma^\sigma(\not{p} - \not{k} + m)\gamma^\ell(\not{p} + m))}{[-p^2 + 2p \cdot kx + m^2 - k^2x - i\epsilon]^2}$$

Schauen wir uns den Nenner an:

$$[-p^2 + 2p \cdot kx + m^2 - k^2x - i\epsilon]^2 = [-(p - kx)^2 + m^2 - k^2x(1-x) - i\epsilon]^2$$

Machen wir die Substitution $p' = p - kx$, also letztendlich die Verschiebung der Integrationsvariablen $p \mapsto p + kx$, so ergibt sich:

$$\omega^{\sigma\ell}(k) = -g^2 \int_0^1 dx \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Sp}(\gamma^\sigma(\not{p} - \not{k}(1-x) + m)\gamma^\ell(\not{p} + \not{k}x + m))}{[-p^2 + m^2 - k^2x(1-x) - i\epsilon]^2}$$

Berechnen wir die Spur im Zähler:

$$\text{Sp}(\gamma^\sigma(\not{p} - \not{k}(1-x) + m)\gamma^\ell(\not{p} + \not{k}x + m)) = \text{Sp}[(\gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma^\ell\gamma_\nu)(p^\mu p^\nu - k^\mu k^\nu x(1-x) + p^\mu k^\nu x + p^\nu k^\mu(x-1))] + \text{Sp}(\gamma^\sigma\gamma^\ell)m^2$$

Die beiden Terme proportional zu p^μ bzw. p^ν fallen bei der Integration weg, weil sie mit dem Nenner eine ungerade Funktion produzieren. Für die γ -Matrizen in d Dimensionen gilt $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_d$ und außerdem $g^\mu_\mu = d$. Damit ist $\gamma^\mu\gamma_\mu = 1/2\{\gamma^\mu, \gamma_\mu\} = g^\mu_\mu\mathbf{1}_d = d\mathbf{1}_d$. Weiterhin benötigen wir:

$$\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma_\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\alpha\}\gamma_\mu - \gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma_\mu = 2g^{\mu\alpha}\gamma_\mu - \gamma^\alpha d = (2-d)\gamma^\alpha$$

Es ist $\text{Sp}(\mathbf{1}_d) = f(d)$ gleich der Dimension der γ -Matrizen in d -Dimensionen. Es gilt $f(d) = 4$ für $d = 4$ und $f(d) = 2$ für $d = 2, 3$. Darüber hinaus benötigen wir folgende Relationen der γ -Matrizen:

$$\text{Sp}(\gamma^\sigma\gamma^\ell) = \frac{1}{2}\text{Sp}(\{\gamma^\sigma, \gamma^\ell\}) = f(d)g^{\sigma\ell} \text{ und } \text{Sp}(\gamma^\sigma\gamma_\mu\gamma^\ell\gamma_\nu)g^{\mu\nu} = \text{Sp}(\gamma^\sigma(2-d)\gamma^\ell) = (2-d)f(d)g^{\sigma\ell}$$

$$\text{Sp}(\gamma^\sigma\not{k}\gamma^\ell\not{k}) = f(d)[2k^\sigma k^\ell - g^{\sigma\ell}k^2]$$

Mit dem Integral

$$\boxed{\mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{[-p^2 + M^2]^2} = \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \cdot \frac{M^2}{\frac{d}{2}-1}}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}}}$$

das ein Spezialfall eines der Integrale ist, die auf dem aktuellen Übungszettel gezeigt werden sollen, erhalten wir weiter:

$$\omega^{\sigma\ell} = -g^2 \int_0^1 dx \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) (m^2 - kx(1-x) - i\epsilon)^{\frac{d}{2}-2} f(d) \left[(2-d)g^{\sigma\ell} \frac{m^2 - k^2x(1-x)}{d-2} + (k^2g^{\sigma\ell} - 2k^\sigma k^\ell)x(1-x) + m^2g^{\sigma\ell} \right]$$

Der $1/(d-2)$ -Pol hebt sich weg. $\omega^{\sigma\ell}$ ist somit konvergent in $d=2$. Außerdem fallen die Terme $\sim m^2$ weg, was eine Folge der Eichsymmetrie ist. Für den Ausdruck in der eckigen Klammer folgt weiter $2(k^2 g^{\sigma\ell} - k^\sigma k^\ell)x(1-x)$. Damit gilt $\omega^{\sigma\ell} k_\sigma \sim k_\mu(k^2 g^{\sigma\ell} - k^\sigma k^\ell) = 0$. Setze $d = 4 - 2\varepsilon$ und $2 - d/2 = \varepsilon$. Als vorläufiges Endergebnis erhalten wir dann:

$$\omega^{\sigma\ell}(k) = -i \frac{g^2}{16\pi^2} f(4-2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - k^2 x(1-x) - i\epsilon} \right)^\varepsilon \cdot 2x(1-x) [k^2 g^{\sigma\ell} - k^\sigma k^\ell] = -i(k^2 g^{\sigma\ell} - k^\sigma k^\ell) \omega(k^2)$$

Mit $\alpha = g^2/4\pi$ (QED: $e^2/4\pi = \alpha$, QCD: $g_s^2/4\pi = \alpha_s$) können wir $\omega(k^2)$ schreiben als:

$$\omega(k^2) = \frac{\alpha}{2\pi} f(4-2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - k^2 x(1-x) - i\epsilon} \right)^\varepsilon$$

Eine TAYLOR-Entwicklung in ε reicht! Mit den Entwicklungen $f(4-2\varepsilon) = 4 + 4c\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $\Gamma(\varepsilon) = 1/\varepsilon - \gamma + O(\varepsilon)$ und $z^\varepsilon = \exp(\varepsilon \ln(z)) = 1 + \varepsilon \ln(z) + O(\varepsilon^2)$ ergibt sich unter Beachtung von $z = \mu^2/(m^2 - k^2 x(1-x))$:

$$f(4-2\varepsilon) \Gamma(\varepsilon) (4\pi z)^\varepsilon = 4(1 + c\varepsilon) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma \right) (1 + \varepsilon \ln(4\pi) + \varepsilon \ln(z)) = 4 \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + c + \ln(4\pi) + \ln(z) \right) + O(\varepsilon)$$

Schlussendlich folgt unter Ausnutzung des Integrals

$$\int_0^1 dx x(1-x) = \frac{1}{6}$$

das endgültige Ergebnis:

$$\omega(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + c + \ln(4\pi) + \ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(1 - \frac{k^2}{m^2 - i\epsilon} x(1-x)\right) \right]$$

Bei der Berechnung des Integrals bietet es sich an, die Integrationsvariable etwas anders zu wählen:

$$x(1-x) = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1-y^2}{4} \text{ mit } y = 2x - 1$$

Außerdem schreiben wir $\beta^2 = 1 - 4m^2/k^2$ und erhalten weiter:

$$\omega(k^2) = \omega(0) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dy \frac{1-y^2}{4} \ln\left(\frac{y^2 - \beta^2}{1 - \beta^2}\right)$$

Dies ist völlig in Ordnung, wenn k^2 negativ ist. Für positive k^2 kann jedoch das Argument des Logarithmus negativ werden. Dann fügen wir über $m^2 \mapsto m^2 - i\epsilon$ einen kleinen Imaginärteil hinzu.

$$\frac{k^2}{m^2} \mapsto \frac{k^2}{m^2 - i\epsilon} \triangleq \frac{k^2 + i\epsilon}{m^2}$$

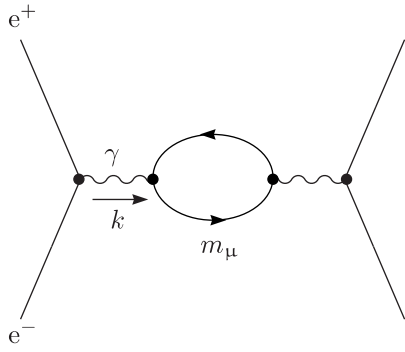
$$\omega(k^2) = \omega(0) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dy \frac{1-y^2}{4} \ln\left(\frac{y^2 - \beta^2}{1 - \beta^2} - i\epsilon\right)$$

Wegen $x(1-x) < 1/4$ tritt $\text{Im}(\omega(k^2 + i\epsilon)) \neq 0$ nur für $k^2 > 4m^2$ auf. Für $k^2 < 0$ und damit $\beta > 1$ gilt:

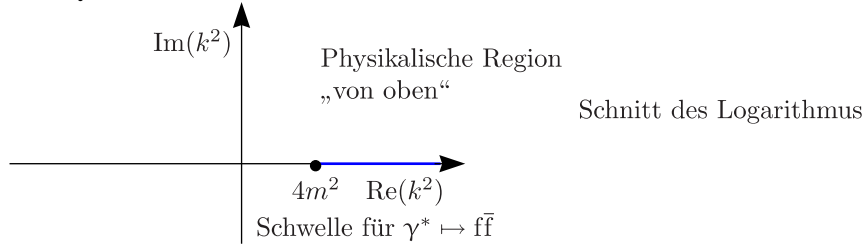
$$\omega(k^2) = \omega(0) - \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{3\beta - \beta^3}{2} \ln\left(\frac{\beta+1}{\beta-1} + p^2 - \frac{8}{3}\right) \right]$$

Für $k^2 > 4m^2$ ist $\beta^2 = 1 - 4m^2/k^2 \in [0, 1)$.

$$\text{Im}(\omega(k^2)) = \frac{\alpha}{3} \frac{3\beta - \beta^3}{2}$$



Ein Imaginärteil tritt oft dann auf, wenn die Schwelle überschritten wird, die zur Produktion von virtuellen Teilchen in der Schleife ausreicht. Es ist also $\text{Im}(\omega) \neq 0$ für $s > 4m^2$, wobei $s = k^2$ die Schwerpunktsenergie zum Quadrat ist.



Vergleiche mit dem Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \mapsto f\bar{f}$ mit $m_e = 0$ und $m_f = m$.

$$\sigma(e^+e^- \mapsto f\bar{f}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \frac{\beta(3-\beta^2)}{2} = \frac{4\pi\alpha}{s} \text{Im}(\omega(s+i\epsilon))$$

Dies gilt in allen Ordnungen Störungstheorie aufgrund der Unitarität der zugrundeliegenden quantenmechanischen Theorie, also der S-Matrix. Man kann S in der Form $S = \mathbf{1} + iT$ schreiben, wobei S die Transfermatrix ist. Für $T = 0$ findet keine Streuung statt.

$$SS^\dagger = \mathbf{1} = (\mathbf{1} + iT)(\mathbf{1} - iT^\dagger) = \mathbf{1} + \underbrace{i(T - T^\dagger) + TT^\dagger}_{\stackrel{!}{=} 0}$$

Damit muss folgendes gelten:

$$-i(T - T^\dagger) \equiv 2\text{Im}(T) = TT^\dagger$$

Wir betrachten nun das Diagonalelement dieser Gleichung zwischen e^+e^- -Zuständen:

$$\langle e^+e^- | 2\text{Im}(T) | e^+e^- \rangle = \langle e^+e^- | T \mathbf{1} T^\dagger | e^+e^- \rangle = \sum_n \langle e^+e^- | T | n \rangle \langle n | T^\dagger | e^+e^- \rangle = \sum_n \langle e^+e^- | T | n \rangle \langle e^+e^- | T | n \rangle^* =$$

$$= \sum_n |\langle e^+e^- | T | n \rangle|^2 = \int_{|n\rangle=|f\bar{f}\rangle} \left| \begin{array}{c} e^+ \\ | \\ e^- \end{array} \right| \begin{array}{c} f \\ | \\ \bar{f} \end{array} \right|^2 d\phi_2 + \dots =$$

$$= 2s\sigma(e^+e^- \mapsto f\bar{f}) = 2\text{Im} \left(\begin{array}{c} e^+ \\ | \\ e^- \end{array} \right) \begin{array}{c} f \\ | \\ \bar{f} \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) \sim e^2 \text{Im}(\omega(k^2 + i\epsilon))$$

3.3 Zusammenhang von $1/\varepsilon$ mit der UV-Regularisierung

Beispiel: Pauli-Villars

$$\omega(k^2, m) \mapsto \omega(k^2, m) + \sum_s c_s \omega(k^2, M_s) = \omega_{PV}(k^2) \text{ f\u00fcr } M_s \text{ „gro\u00df“}$$

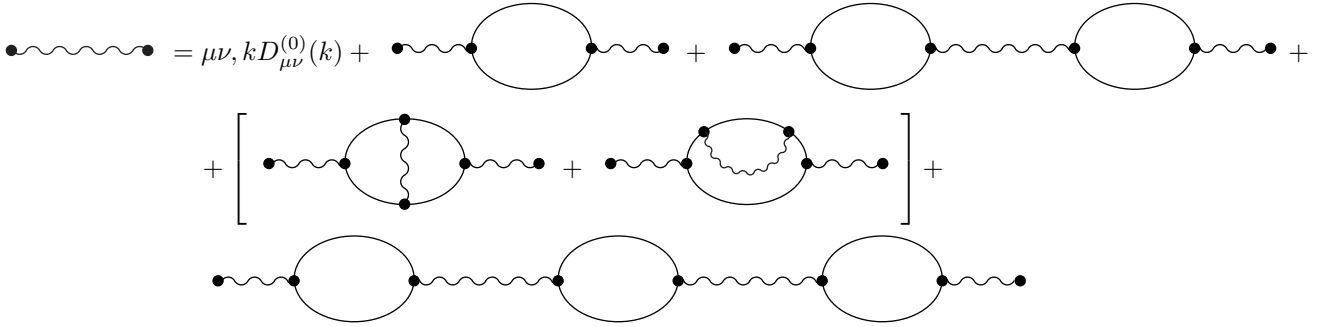
Unter der Bedingung $\sum_s c_s = -1$ verschwindet der $1/\varepsilon$ -Pol. Damit folgt:

$$\omega_{PV}(k^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right) + \sum_s c_s \ln\left(\frac{\mu^2}{M_s^2}\right) - 6 \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x)\right) \right]$$

Die einfachste Realisierung der Bedingung $\sum_s c_s = -1$ funktioniert mit $c_1 = -1$ und $M_1 = \Lambda$ als der Cutoff-Skala.

$$\omega(0) = \frac{\alpha}{3\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) = \frac{\alpha}{3\pi} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + c + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2}\right) \right] \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + c + \ln(4\pi) \stackrel{\Delta}{=} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)}$$

3.4 Photon-Propagator



Wir vernachl\u00e4ssigen die Beitr\u00e4ge in den eckigen Klammern:

$$D^{(0)} + D^{(0)}\omega D^{(0)} + D^{(0)}(\omega D^{(0)})^2 + \dots = D^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} (\omega D^{(0)})^n = D^{(0)}(1 - \omega D^{(0)})^{-1}$$

$$D_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$$

$$\omega_{\mu\nu} = -i(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \omega(k^2)$$

Um die Matrix $1 - \omega D^{(0)}$ zu invertieren, f\u00fchren wir longitudinale und transversale Projektoren ein.

$$\Pi_T^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \text{ und } \Pi_L^{\mu\nu} = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

Man erkennt, dass $\Pi_T^2 = \Pi_T$, $\Pi_L^2 = \Pi_L$ und au\u00dferdem $\Pi_L \Pi_T = \Pi_T \Pi_L = 0$ gilt. Au\u00dferdem gilt $\Pi_T^\mu{}_\nu + \Pi_L^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu$. Damit ergibt sich

$$D_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (\Pi_T \mu\nu + \alpha \Pi_L \mu\nu) \text{ und } \omega_{\mu\nu} = -ik^2 \Pi_T \mu\nu \omega(k^2)$$

$$1 - \omega D^{(0)} = 1 - (-ik^2) \omega \Pi_T \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (\Pi_T + \alpha \Pi_L) = 1 + \omega \Pi_T = \Pi_L + (1 + \omega) \Pi_T$$

woraus schlie\u00dflich folgendes resultiert:

$$(1 - \omega D^{(0)})^{-1} = \Pi_L + \frac{1}{1 + \omega} \Pi_T$$

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(k) &= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} (\Pi_T + \alpha \Pi_L) \left(\Pi_T \frac{1}{1 + \omega} + \Pi_L \right) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(\Pi_T \frac{1}{1 + \omega} + \alpha \Pi_L \right) = \\ &= \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 + \omega(k^2)} \left[g^{\mu\nu} + [\alpha(1 + \omega) - 1] \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] \end{aligned}$$

Es ändert sich also die Normierung, worin die Physik steckt. Die Änderung des Eichparameters hat keine physikalische Bedeutung. Setzen wir im folgenden $\alpha' := \alpha(1 + \omega)$. $D^{\mu\nu}$ steht zwischen erhaltenen Strömen:

$$iD^{\mu\nu}(k) \stackrel{\text{effektiv}}{=} \frac{g^{\mu\nu}}{k^2(1 + \omega(k^2))} \stackrel{\wedge}{=} \text{F.T.} \langle 0|T A^\mu(x) A^\nu(y)|0 \rangle$$

Was passiert im Limes, dass der Abstand zwischen x und y gegen unendlich geht? Dann gehen die wechselwirkende Felder über in die freien Felder, wobei sich aber die Normierung ändern kann: $A^\mu \mapsto \sqrt{Z_3} A_{out}^\mu$. Dies ist analog zu Störungstheorie in der Quantenmechanik, wo man die Wellenfunktionen immer wieder normieren muss. Große Abstände entsprechen wegen der FOURIER-Transformation Impulsen $k \mapsto 0$.

$$iD^{\mu\nu}(k) \xrightarrow{k \mapsto 0} \text{F.T.} Z_3 \langle 0|T A_{in}^\mu(x) A_{in}^\nu(y)|0 \rangle \mapsto Z_3 \frac{g^{\mu\nu}}{k^2} \Big|_{k^2 \mapsto 0}$$

Dies gilt wegen der FEYNMANregeln. Durch Vergleich erhalten wir:

$$\boxed{Z_3 = \frac{1}{1 + \omega(0)}}$$

Bis zur Ordnung α gilt:

$$\frac{1}{1 + \omega(k^2)} = Z_3 \frac{1 + \omega(0)}{1 + \omega(k^2)} = Z_3 \frac{1}{1 + \omega(k^2) - \omega(0)}$$

Die Differenz $\omega(k^2) - \omega(0)$ ist nun das renormierte $\omega_{ren}(k^2)$.

$$\omega_{ren}(k^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x) \right)$$

Z_3 trägt zur Ladungsrenormierung bei. Ladung wird gemessen durch COULOMB-Wechselwirkung. Die Ladungsverteilung sei $e_0 j^{\mu=0}$. Im Impulsraum und elektrostatischen Grenzfall gilt:

$$G \sim \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \omega(k^2)} \quad \text{und} \quad Z_3 G_{ren} = Z_3 \frac{1}{k^2} \frac{1}{1 + \omega(k^2) - \omega(0)}$$

$$e_0 j^0(\vec{x}) G(\vec{x} - \vec{y}) e_0 j^0(\vec{y}) = e_0^2 Z_3 j^0(\vec{x}) G_{ren}(\vec{x} - \vec{y}) j^0(\vec{y}) \quad \text{mit} \quad G(\vec{x} - \vec{y}) \sim \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} (1 + \alpha \dots)$$

Die messbare Ladung ist $e = e_0 \sqrt{Z_3}$.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{e_0^2 Z_3}{4\pi} = \frac{1}{137,0\dots}$$

Die Divergenzen tauchen also nur noch auf als Verhältnis der messbaren Ladungen e zu den sogenannten „nackten Ladung“, die eine theoretische Größe ist und experimentell nicht zugänglich ist. Z_3 ist also nicht alleine messbar. Wirkungsquerschnitte, etc. als Funktion von α , m_e sind endlich.

3.5 Counter-Terme

$$\mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_{cl}(e, m, \dots) + \delta\mathcal{L}$$

$\delta\mathcal{L}$ sind quantenmechanische Korrekturen. Wir wählen:

$$\delta\mathcal{L}_{F^2} = -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\delta\mathcal{L}$ liefert einen extra Beitrag, nämlich

$$\omega_{\sigma\rho}(k) \mapsto \omega_{\sigma\rho}(k) - (Z_3 - 1) i(g_{\sigma\rho} k^2 - k_\sigma k_\rho) = \text{diagramm} + \text{diagramm}$$

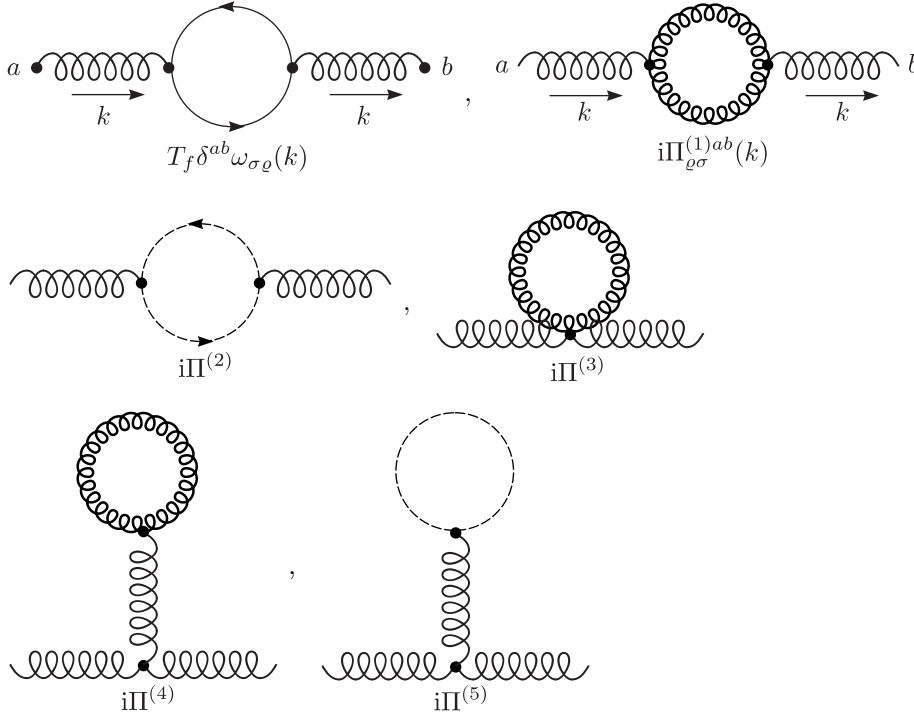
Damit gilt $\omega(k^2) \mapsto \omega(k^2) + (Z_3 - 1) = \omega(k^2) - \omega(0) = \omega_{ren}(k^2)$. Counter-Terme sind eine andere Art und Weise, die Renormierung darzustellen. Für $m = 0$ ist $\omega(0)$ problematisch, denn

$$\omega(k^2) \sim \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left(-\frac{k^2}{\mu^2} x(1-x) \right)$$

divergiert für $k^2 = 0$. Wähle also $k^2 = -M^2$ als Renormierungspunkt, also $\omega_{ren}(k^2) = \omega(k^2) - \omega(-M^2)$.

3.6 Vakuum-Polarisation in der Yang-Mills-Theorie

Wir benötigen die verbleibenden FEYNMANgraphen zur Vakuum-Polarisation in der YANG-MILLS-Theorie.

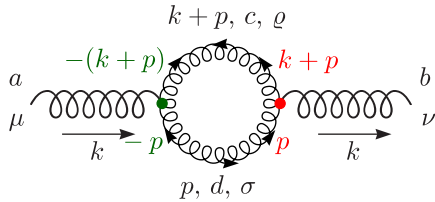


In dimensionaler Regularisierung gilt:

$$I_a = \int d^d p \frac{1}{(p^2)^\alpha} \equiv 0$$

$$0 = \int d^d k \frac{\partial}{\partial k_\mu} \left(\frac{k_\mu}{(k^2)^\alpha} \right) = \int d^d k \left[\frac{d}{(k^2)^\alpha} - \alpha k_\mu \frac{2k^\mu}{(k^2)^{\alpha+1}} \right] = I_a (d - 2\alpha) \text{ für } \text{Re}(\alpha) > \frac{d}{2} + 1$$

$I_a = 0$ impliziert somit $\Pi^{(3)} = \Pi^{(4)} = \Pi^{(5)} = 0$. Wir wollen nun $(\omega^{(1)})_{\mu\nu}^{ab}$ berechnen:



$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(1)ab} &= \frac{1}{2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (-g f^{acd}) [g_{\mu\rho}(-2k-p)_\sigma + g_{\sigma\rho}(k+2p)_\mu + g_{\sigma\mu}(-p+k)_\rho] \times \\ &\quad \times (-g f^{bdc}) [g_{\nu\sigma'}(k-p)_{\rho'} + g_{\sigma'\rho'}(2p+k)_\nu + g_{\rho'\nu}(-2k-p)_{\sigma'}] \times \\ &\quad \times \frac{-i}{(k+p)^2 - i\epsilon} \left[g^{\rho\rho'} + (\alpha-1) \frac{(k+p)^\rho (k+p)^{\rho'}}{(k+p)^2} \right] \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[g^{\sigma\sigma'} + (\alpha-1) \frac{p^\sigma p^{\sigma'}}{p^2} \right] \end{aligned}$$

Wir wählen der Einfachheit halber $\alpha = 1$ (FEYNMAN-Eichung):

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(1)ab} &= \frac{g^2}{2} (-i f^{acd}) (-i f^{bdc}) \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k+p)^2 - i\epsilon} \frac{1}{p^2 - i\epsilon} \times \\ &\quad \times [k_\mu k_\nu (d-6) + (k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu)(2d-3) + p_\mu p_\nu (4d-6) + g_{\mu\nu}(4k^2 + (k+p)^2 + p^2)] \end{aligned}$$

Das „ d “ rührt von Spuren des metrischen Tensors her, also beispielsweise $g^\mu{}_\mu = d$. Schauen wir uns als erstes den Farbanteil an.

$$(-i f^{acd})(-i f^{bdc}) = (F^a)_{cd}(F^b)_{dc} = \text{Sp}(F^a F^b)$$

Für ein Teilchen in der adjungierten Darstellung gilt $\text{Sp}(F^a F^b) = N\delta^{ab}$ (N wegen $\text{SU}(N)$ -Theorie). Also ergibt sich weiter:

$$\omega_{\mu\nu}^{(1)ab} = \frac{g^2}{2}\delta^{ab} N\mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k+p)^2 + i\epsilon} \frac{1}{p^2 + i\epsilon} \cdot [k_\mu k_\nu (d-6) + (k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu)(2d-3) + p_\mu p_\nu (4d-6) + g_{\mu\nu} 4k^2]$$

An dieser Stelle verwenden wir wieder die FEYNMAN-Parametrisierung und substituieren außerdem $p' = p + kx$:

$$\frac{1}{(k+p)^2 p^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[p^2 - 2k \cdot px + k^2 x^2]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(p+kx)^2 - k^2 x^2 + k^2 x]^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[p'^2 + k^2 x(1-x) + i\epsilon]^2}$$

Die Substitution $p = p' - kx$ impliziert, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer folgende Form annimmt:

$$k_\mu k_\nu (d-6) + k_\mu k_\nu (6-4d)x(1-x) + p'_\mu p'_\nu (4d-6) + 4k^2 g_{\mu\nu}$$

Einsetzen der Masterintegrale ergibt dann:

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu}^{(1)ab} &= \frac{g^2}{2}\delta^{ab} N \int_0^1 dx \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \frac{1}{[-k^2 x(1-x)]^{\frac{4-d}{2}}} \times \\ &\quad \times \left(k_\mu k_\nu (d-6) + x(1-x)(6-4d) + (4d-6) \frac{g_{\mu\nu}}{d-2} (-k^2 x(1-x)) + 4k^2 g_{\mu\nu} \right) \end{aligned}$$

Der Pol $\sim 1/(d-2)$ hebt sich gegen den Pol in der Geistschleife weg. Wir haben also keine quadratische Divergenz in der Summe! Bevor wir nun eine TAYLOR-Entwicklung machen, schauen wir uns zuerst das x -Integral an. Diese Integrale sind von folgender Form:

$$\int_0^1 dx [x(1-x)]^{a-1} \text{ mit } a-1 = -\varepsilon, -\varepsilon+1$$

Dieses Integral ist gerade gegeben durch die EULERSche β -Funktion, also:

$$B(a, a) = \frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} \text{ für } \begin{cases} a = 1 - \varepsilon \\ a = 2 - \varepsilon \end{cases}$$

Mit $\Gamma(1+x) = 1 - \gamma x + O(x^2)$ und $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ ergibt sich dann:

$$B(a, a) = \begin{cases} 1 + 2\varepsilon + O(\varepsilon^2) & \text{für } a = 1 - \varepsilon \\ \frac{1}{6}(1 + \frac{5}{3}\varepsilon + O(\varepsilon^2)) & \text{für } a = 2 - \varepsilon \end{cases}$$

Mit $d = 4 - 2\varepsilon$ ergibt sich also für unsere Schleife:

$$\omega_{\mu\nu}^{(1)ab} = i \frac{g^2}{32\pi^2} N \delta^{ab} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2} \right)^\varepsilon \left[k^2 g_{\mu\nu} \left(\frac{19}{6} + \varepsilon \frac{58}{9} \right) - k_\mu k_\nu \left(\frac{11}{3} + \varepsilon \frac{67}{9} \right) + O(\varepsilon^2) \right]$$

Es fällt auf, dass – im Gegensatz zur Fermionschleife – die Vorfaktoren von $k^2 g_{\mu\nu}$ und $k_\mu k_\nu$ nicht dieselben sind (nicht transversal!). Schauen wir uns deshalb den Beitrag der Geist-Schleife an, welcher in den Übungen berechnet wurde:

$$\omega_{\mu\nu}^{(2)ab} = i \frac{g^2}{32\pi^2} N \delta^{ab} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2} \right)^\varepsilon \left[k^2 g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{6} + \varepsilon \frac{4}{9} \right) + k_\mu k_\nu \left(\frac{1}{3} + \varepsilon \frac{5}{9} \right) + O(\varepsilon^2) \right]$$

Addieren wir beide Beiträge, so folgt:

$$\omega^{(1)} + \omega^{(2)} = i \frac{g^2}{32\pi^2} N \delta^{ab} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2} \right)^\varepsilon \left[k^2 g_{\mu\nu} \left(\frac{10}{3} + \varepsilon \frac{62}{9} \right) - k_\mu k_\nu \left(\frac{10}{3} + \varepsilon \frac{62}{9} \right) \right]$$

Die Summe ist also wirklich wieder transversal! Schließlich geben wir den gesamten YANG-MILLS-Beitrag an als:

$$\omega_{\mu\nu}^{YMab}(k) = -i(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \omega_{YM}(k^2)$$

$\omega_{YM}(k^2)$ sieht unter Verwendung von

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) \text{ und } \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2}\right)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2}\right) + O(\varepsilon^2)$$

folgendermaßen aus:

$$\omega_{YM}(k^2) = -N \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2}\right) \right] \frac{5}{3} + \frac{31}{9} \right)$$

Der fermionische Beitrag hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \omega_f(k^2) &= T_f \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \frac{4}{3} + c \frac{4}{3} - 8 \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(\frac{m^2 - k^2 x(1-x)}{\mu^2}\right) \right) \stackrel{m \rightarrow 0}{=} \\ &= T_f \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right] \frac{4}{3} + c \frac{4}{3} - 8 \int_0^1 dx x(1-x) \left[\ln\left(\frac{-k^2}{\mu^2}\right) + \ln(x(1-x)) \right] \right) \end{aligned}$$

Wir interessieren uns nun für den Gesamtbeitrag zu $\omega(k^2)$ für n_f leichte Fermionen (beispielsweise $n_f = 5$ für u, d, s, c, b). Typischerweise rechnet man mit $n_f = 4$ bzw. 5 und nimmt das b- und das t-Quark explizit in der Rechnung mit.

$$\omega(k^2) = \omega^{YM} + n_f \omega_f = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \ln\left(-\frac{k^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) \left(\frac{2}{3}n_f - \frac{5}{3}N \right) + n_f \left(\frac{2}{3}c + \frac{10}{9} \right) - \frac{31N}{9} \right]$$

Die Renormierung funktioniert ähnlich zur QED. Wir definieren

$$Z_3 = \frac{1}{1 + \omega(-M^2)}$$

mit der Renormierungsskala M . Damit gilt $\omega_{ren}(k^2) = \omega(k^2) - \omega(-M^2)$. Mittels einer TAYLOR-Entwicklung folgt wieder:

$$Z_3 = 1 - \omega(-M^2) = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2n_f}{3} - \frac{5N}{3} \right) + \underbrace{\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) \left[\frac{2}{3}n_f - \frac{5N}{3} \right] + \text{const.}}_{\text{const.}} \right]$$

Setze M^2 so, dass const. eine einfache Form hat. (Dies läuft unter dem Namen „Wahl des Renormierungsschemas“.) Es gibt nun zwei solcher Schemata, nämlich:

- 1.) MS (minimal subtraction): const. = 0 und $c = 0$
- 2.) $\overline{\text{MS}}$ (modified minimal subtraction): const. = $\left(\frac{2n_f}{3} - \frac{5N}{3}\right) (-\gamma + \ln(4\pi)) + \frac{2}{3}n_f c$

Mit $\overline{\text{MS}}$ folgt:

$$\omega_{ren}^{\overline{\text{MS}}}(k^2) = \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\ln\left(\frac{\mu^2}{-k^2}\right) \left(\frac{2}{3}n_f - \frac{5}{3}N \right) + \frac{10n_f}{9} - \frac{31N}{9} \right]$$

Für $c = 0$ ergibt sich:

$$Z_3^{\overline{\text{MS}}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \right) \left(\frac{5N}{3} - \frac{2n_f}{3} \right)$$

Man kann also die Konstante c in Z_3 stecken. Die Diskussion über die Dimension der γ -Matrizen hätte man sich deshalb sparen können!

$$Z_3^{\text{MS}} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{5N}{3} - \frac{2n_f}{3} \right)$$

F_2 und F_m sind Konstanten, die vom Renormierungsschema abhängen. Die Divergenzen verschwinden also, wenn wir die Felder und die Masse renormieren. Bei einer Theorie für masselose Fermionen verschwindet dann auch der Counterterm der Masse. Bei einer ϕ^4 -Theorie mit masselosen Feldern wird jedoch die Masse durch Quantenkorrekturen wieder eingeführt. Dies liegt daran, dass für Fermionen eine weitere Symmetrie existiert (links- und rechtshändige masselose Fermionen mischen nicht).

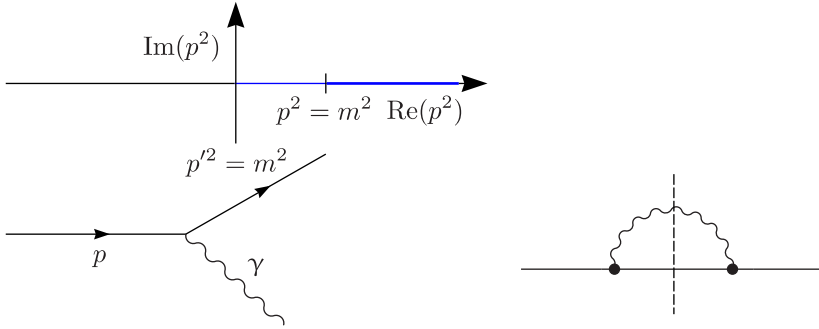
Die endlichen Terme (F_2, F_m) hängen vom Renormierungsschema ab. Im $\overline{\text{MS}}$ setzt man einfach $F_2 = F_m = 0$. Günstiger ist jedoch das $\overline{\text{MS}}$, in dem $F_2 = F_m = -\gamma + \ln(4\pi)$ setzt. (Das zweite Schema benutzt man vor allem in der QCD.) Darüber hinaus gibt es auch noch die „On-Shell-Renormierung“. Hier wird F_2 und F_m so gewählt, dass der renormierte Propagator auf der Massenschale übergeht in den freien Propagator:

$$iS_F^{\text{ren}}(p) = \frac{i}{\not{p} - m' - \Sigma_{\text{ren}}(p)} \xrightarrow{\not{p} \rightarrow m, p^2 = m^2} \frac{i}{\not{p} - m}$$

Dies liefert uns folgende Bedingung:

$$\Sigma(p)|_{\not{p}=m} = \text{Massenverschiebung} = -\delta m$$

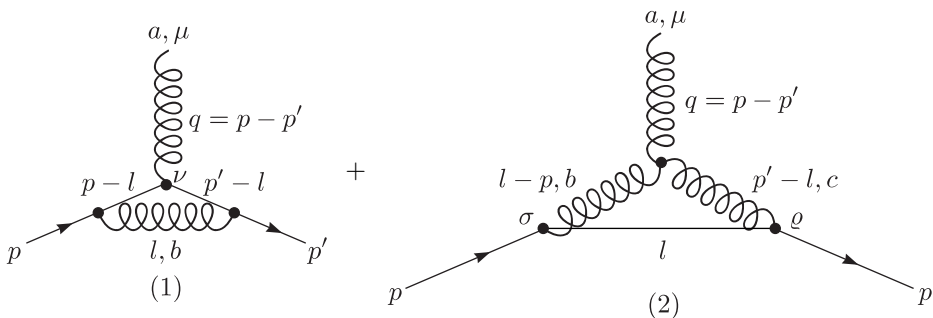
$(\partial/\partial \not{p})\Sigma(p)|_{\not{p}=m}$ ändert das Residuum des $1/(\not{p} - m)$ -Pols. Damit erhält man eine endliche Renormierung der Wellenfunktion mit dem Faktor $Z_2 = 1 + K_2$. Schauen wir uns die Selbstenergie in der komplexen Ebene an:



Das Problem ist eine infrarote Singularität von höheren Ableitungen $d^n/dp^n \Sigma(p)$ bei $p^2 = m^2$. Man benötigt dann eine infrarote Regularisierung, beispielsweise durch $m_\gamma > 0$, klein gegen die experimentelle Auflösung. Dann lässt sich die On-Shell-Renormierung so durchführen wie beschrieben. Auch möglich ist dimensionale Regularisierung durch $d = 4 - 2\epsilon > 4$, um die infraroten Probleme in den Griff zu bekommen. Die On-Shell-Renormierung ist relativ weit verbreitet in der elektroschwachen Theorie. Im folgenden wollen wir jedoch das $\overline{\text{MS}}$ weiter benutzen.

3.7 Vertexkorrekturen

Wir betrachten im wesentlichen folgende FEYNMAN-Diagramm:



Die Gesamtstruktur sieht nun folgendermaßen aus (in $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen):

$$iS_F(p') i g \mu^\epsilon \Lambda^{\nu, a}(p, p', q) iS_F(p) i D^{\mu\nu}(q)$$

$$i g \mu^\epsilon \Lambda^{\mu, a(1)} = (\mu^\epsilon)^3 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} i g \gamma^\sigma T^b \frac{i}{\not{p}' - \not{l} - m + i\epsilon} i g \gamma^\mu T^a \frac{i}{\not{p} - \not{l} - m + i\epsilon} i g \gamma^\sigma T^b \frac{-i}{l^2 + i\epsilon} \left(g_{\rho\sigma} + (\alpha - 1) \frac{l_\rho l_\sigma}{l^2} \right) =$$

$$\stackrel{\alpha \equiv 1}{=} g \mu^\epsilon g^2 \mu^{2\epsilon} T^a T^b \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\rho (\not{p}' - \not{l} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{l} + m) \gamma_\rho}{l^2 [(p' - l)^2 - m^2] [(p - l)^2 - m^2]}$$

Schauen wir uns als erstes wieder den Farbfaktor an:

$$\begin{aligned}
 T^b T^a T^b &= T^a T^b T^b + [T^b, T^a] T^b = C_2 T^a - i f^{abc} T^c T^b = C_2 T^a - i f^{abc} \left(\frac{1}{2} [T^c, T^b] + \frac{1}{2} \{T^c, T^b\} \right) = \\
 &= C_2 T^a - i f^{abc} \cdot \frac{1}{2} i f^{cbe} T^c = C_2 T^a - \frac{1}{2} i f^{cab} i f^{cbe} T^e = C_2 T^a - \frac{1}{2} (F^c F^c)_{ae} T^e = C_2 T^a - \frac{1}{2} N \delta_{ae} T^e = \\
 &= T^a \left(-\frac{N}{2} + C_2(f) \right)
 \end{aligned}$$

Als nächstes geht es darum, das Integral auszurechnen. Wir haben hier drei Propagatoren und betrachten für den ersten die allgemeine Potenz a :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{[l^2]^a} \frac{1}{(p' - l)^2 - m^2} \frac{1}{(p - l)^2 - m^2} = \\
 &= \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)\Gamma(1)\Gamma(1)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(1-x-y)^{a-1}}{[l^2 - 2l \cdot (p'x + py) + (p^2 - m^2)x + (p'^2 - m^2)y]^{a+2}}
 \end{aligned}$$

Wir schauen uns nun nur den divergenten Term (unter Vernachlässigung der Masse m) an. Unter Ausnutzung von

$$l_\alpha l_\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma_\rho = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} l^2 \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma_\mu \gamma^\beta \gamma_\rho = \frac{1}{4} l^2 \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha \gamma_\rho = \frac{1}{4} l^2 (2-d)^2 \gamma^\mu$$

folgt dann:

$$\begin{aligned}
 i g \mu^\varepsilon \Lambda^{\mu,a} &= g \mu^\varepsilon \left(-\frac{N}{2} + C_2 \right) g^2 \mu^{2\varepsilon} (-1) \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\rho \not{l} \gamma^\mu \not{l} \gamma_\rho}{l^2 (p' - l)^2 (p - l)^2} = \\
 &= -g \mu^\varepsilon \left(-\frac{N}{2} + C_2 \right) T^a g^2 \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(2-d)^2 \gamma^\mu}{(p' - l)^2 (p - l)^2} = \\
 &= -g \mu^\varepsilon \left(-\frac{N}{2} + C_2 \right) T^a g^2 \frac{i}{16\pi^2} (4\pi \mu^2) \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + O(\varepsilon) \right)
 \end{aligned}$$

Der erste Beitrag ist also von folgender Form:

$$\Lambda^{\mu,a(1)} = \frac{g^2}{16\pi^2} \left(-\frac{N}{2} + C_2 \right) T^a \gamma^\mu \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + O(\varepsilon) \right)$$

Wir geben außerdem den zweiten Beitrag (ohne Rechnung) an:

$$\Lambda^{\mu,a(2)} = \frac{g^2}{16\pi^2} N T^a \frac{3}{2} \gamma^\mu \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + \dots \right)$$

Durch Addition erhalten wir die gesamte Vertexkorrektur:

$$\Lambda^{\mu,a} = \frac{g^2}{16\pi^2} (N + C_2(f)) T^a \gamma^\mu \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln(4\pi) + O(\varepsilon) \right)$$

(Es folgen weitere endliche Terme.) Diese Struktur werden wir im Renormierungsprogramm weiter benötigen. Die Divergenzstruktur ist rein proportional zu γ^μ . Dies ist der Ausdruck für die SU(N) YANG-MILLS-Theorie. Im QED-Fall ist $N = 0$ und $C_2(f) = q_f^2$ mit $T^a = q_f = 2/3, -1/3, -1$. Der $1/\varepsilon$ -Term wird in $\mathcal{L}_{Counter}$ absorbiert:

$$\mathcal{L}_{Counter} = g \mu^\varepsilon K_1 \bar{\psi} \gamma^\mu T^a A_\mu^a \psi$$

Damit ist der volle Vertex, inklusive $\mathcal{L}_{counter}$, gegeben durch:

$$i g \mu^\varepsilon (\gamma^\mu + \Lambda^\mu + K_1 \gamma^\mu) T^a \Rightarrow K_1 = -\frac{g^2}{16\pi^2} [N + C_2(f)] \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_1 \right)$$

Mit diesem zusätzlichen Counterterm haben wir nun endliche Beiträge für die Vertizes.

3.7.1 Renormierung von Eichtheorien

$$\mathcal{L}_{kl} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + g\mu^\varepsilon\bar{\psi}\not{A}\psi + \mathcal{L}_{Geist} + \mathcal{L}_{3A,4A}$$

Zusätzlich benötigen wir:

$$\mathcal{L}_{counter} = -\frac{K_3}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + iK_2\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (K_2m + (1 + K_2)\delta m)\bar{\psi}\psi - \frac{K_\alpha}{2}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + g\mu^\varepsilon K_1\bar{\psi}\not{A}\psi + \dots$$

Auf Einschleifenniveau macht es keinen Unterschied, ob wir 1 oder $1 + K_2$ vor δm hinschreiben, weil $K_2 = O(g^4)$. Man muss nun mit einer renormierten LAGRANGEDichte rechnen, die der Summe dieser beiden Terme entspricht, um endliche Resultate zu erhalten.

$$\mathcal{L}_{ren} = \mathcal{L}_{kl} + \mathcal{L}_{counter} = -\frac{1 + K_3}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + i(1 + K_2)\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (1 + K_2)(m + \delta m)\bar{\psi}\psi + g\mu^\varepsilon(1 + K_1)\bar{\psi}\not{A}\psi + \dots$$

Wir haben hier nun globale Faktoren $(1 + K_3)$, $(1 + K_2)$, \dots vor den Feldern. Wir definieren nun „nackte“ Felder:

$$\psi_0 := \sqrt{1 + K_2}\psi = \sqrt{Z_2}\psi, A_0^{\mu,a} = \sqrt{1 + K_3}A^{\mu,a} = \sqrt{Z_3}A^{\mu,a}, m_0 := m + \delta m$$

Außerdem definieren wir eine „nackte“ Kopplung, so dass der letzte Term $g\bar{\psi}_0\not{A}_0\psi_0$ lautet. Dies erreichen wir durch:

$$g_0 = g\mu^\varepsilon \frac{1 + K_1}{(1 + K_2)\sqrt{1 + K_3}} = g\mu^\varepsilon \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}}$$

Mit diesen Definitionen haben wir nun eine Struktur der renormierten LAGRANGEDichte, welche zu der von \mathcal{L}_{kl} analog ist.

$$\mathcal{L}_{ren} = -\frac{1}{4}F_{0\mu\nu}^a F_0^{\mu\nu,a} + i\bar{\psi}_0\not{\partial}\psi_0 - m_0\bar{\psi}_0\psi_0 + g_0\bar{\psi}_0\not{A}_0\psi_0 + \dots$$

Durch die Reskalierung der Felder und Kopplung sind nun die Counterterme enthalten. Dann bekommen wir endliche Resultate. Man kann sich die nackten Felder ψ_0 , A_0^μ , g_0 , m_0 als Felder und Parameter im UV-Bereich, also bei asymptotisch hohen Energieskalen, vorstellen. ψ , A^μ , g und m sind die physikalischen Felder und Parameter bei experimentell zugänglichen Energien.

3.7.2 Laufende Kopplung $g(\mu)$

Wir Renormierungskonstanten sind gegeben durch:

$$Z_1 = 1 + K_1 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}[N + C_2(f)]\left(\frac{1}{\varepsilon} + F_1\right) + \dots$$

$$Z_2 = 1 + K_2 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(f)\left(\frac{1}{\varepsilon} + F_2\right) + \dots$$

In der QED kürzt sich Z_1/Z_2 gerade weg, da dann $N = 0$ ist.

$$Z_3 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{2n_F}{3} - \frac{5N}{3}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} + F_3\right)$$

$$\frac{m_0}{m} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}3C_2(f)\left(\frac{1}{\varepsilon} + F_m\right)$$

Die F_i sind die zusätzlichen endlichen Terme, die vom Renormierungsschema abhängen. n_F ist die Anzahl der Quarks in der fundamentalen Darstellung der QCD. Haben wir es mit andere Darstellungen zu tun, so gibt es eine Umrechnungsformel. Ein DIRAC-Fermion in der Oktett-Darstellung ist äquivalent zu sechs verschiedenen Quarks in der fundamentalen Darstellung.

$$n_F = \sum_f C_2(f) \frac{2d_f}{d_{adj}}$$

Die $U(1)$ -irreduzible Darstellung hat die Dimension $d_f = 1$, die adjungierte Darstellung (Photonen) ist die triviale Darstellung. In der QED gilt also:

$$n_F = \sum_f q_f^2 \cdot 2 \text{ mit } C_2(f) = q_f^2$$

Wir wollen also nun

$$g_0 = g\mu^\varepsilon \frac{Z_1}{Z_2\sqrt{Z_3}}$$

berechnen, wobei wir formal die TAYLOR-Entwicklung bis zur Ordnung g^2 .

$$\begin{aligned} g_0 &= g\mu^\varepsilon \left(1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left[N + C_2(f) - C_2(f) - \frac{2n_F}{6} + \frac{5N}{6} \right] \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_g \right) + O(g^4) \right) = \\ &= g\mu^\varepsilon \left[1 - \frac{g^2}{96\pi^2} (11N - 2n_F) \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_g \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

In der QED gilt:

$$e_0 = e\mu^\varepsilon \left[1 + \frac{e^2}{24\pi^2} \frac{n_F}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_e \right) + \dots \right]$$

Im QCD-Fall haben wir $N = 3$ und n_F ist gleich 5 oder 6. Also ist die Korrektur negativ, während sie im QED-Fall positiv ist. Wir leiten das ganze nach μ ab. Dabei ist zu beachten, dass g implizit von μ und g_0 nicht von μ abhängt. Gesucht ist $\mu dg/d\mu$ für die physikalische Kopplung $g(\mu)$:

$$\mu \frac{dg_0}{d\mu} = 0 = \mu\varepsilon\mu^{\varepsilon-1}g \left[1 - \frac{g^2}{96\pi^2}(11N - 2n_F) \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_g \right) \right] + \mu^\varepsilon \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} \left[1 - \frac{3g^2}{96\pi^2}(11N - 2n_F) \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_g \right) + \dots \right]$$

Dies können wir nun nach $\mu dg/d\mu$ auflösen:

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = -\varepsilon g \left[1 - (1-3) \frac{g^2}{96\pi^2}(11N - 2n_F) \left(\frac{1}{\varepsilon} + F_g \right) + \dots \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{g^3}{48\pi^2}(11N - 2n_F) + O(g^4) = \beta(g)$$

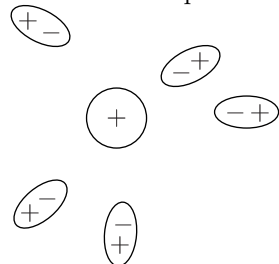
Dies ist der erste Term in der sogenannten β -Funktion. In der YANG-MILLS-Theorie haben wir:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{48\pi^2}(11N - 2n_F) + \dots$$

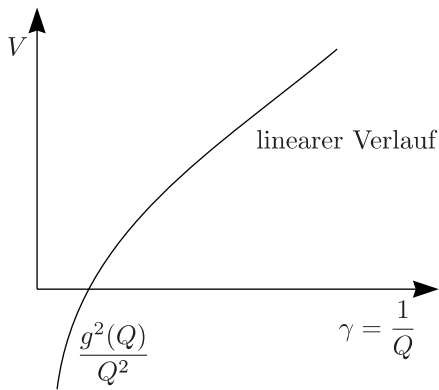
und in der QED:

$$\beta(g) = \frac{e^3}{12\pi^2} \frac{n_F}{2} + \dots$$

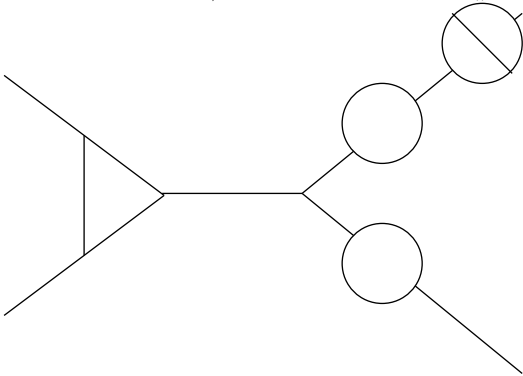
Die β -Funktion in der YANG-MILLS-Theorie ist in der Umgebung für $g = 0$ negativ (wenn wir nicht zuviele Fermionen einführen) und in der QED positiv wird. Wir müssen also zwei Fälle unterscheiden. $\beta(g) > 0$ impliziert, dass für ansteigende μ auch g größer wird. Die Effekte Kopplung wächst also bei großen Energieskalen an. Genau das passiert bei der QED.



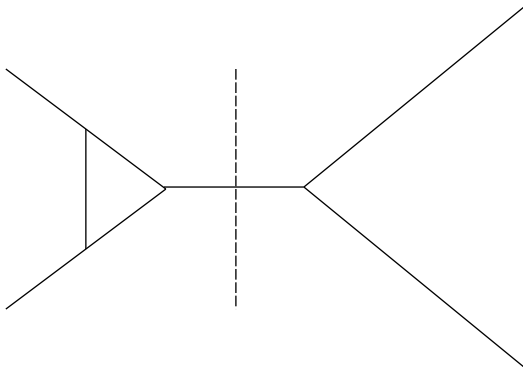
Die effektive Ladung wird zu kleinen Abständen hin immer größer. Für $\beta(g) < 0$ wird die effektive Kopplung bei ansteigendem μ kleiner. Man spricht dann von **asymptotischer Freiheit** in der YANG-MILLS-Theorie (QCD). In der QCD wird für kleine μ ($\mu \approx 0,2 \text{ GeV}$) $g(\mu)$ groß. Dann treten nicht-perturbative Effekte auf. Gitterrechnungen weisen folgendes Verhalten auf:



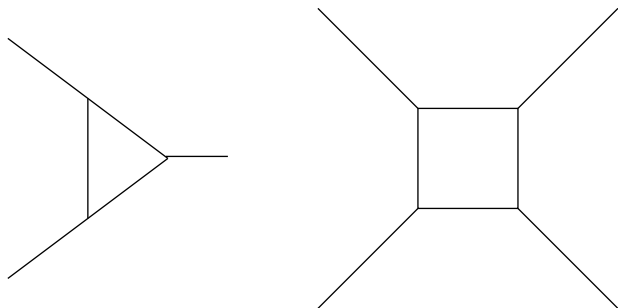
Die GREENfunktion ist gegeben durch $\langle 0|T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)|0\rangle_c$. Durch das WICK-Theorem zerfällt dies in Produkte von einfacheren GREENfunktionen. Deshalb interessieren wir uns nur für zusammenhängende GREENfunktionen, was durch den Index „c“ gekennzeichnet wird.



1.) Amputierte (truncated) GREENfunktion:



2.) Ein-Teilchen-irreduzible (one particle irreducible, 1PI) GREENfunktion:



Um den Zusammenhang mit der laufenden Kopplungskonstanten zu verstehen, betrachten wir die 1PI.

3.7.3 Reduktionsformel für Photonen

1.) Einlaufendes Photon: $\langle \text{out}|a_r^\dagger(k)_{in}|\text{in}\rangle$

$$-\frac{i}{\sqrt{Z_3}} = \int d^4x \exp(-ik \cdot x) \vec{\square}_x \langle \text{out}|\varepsilon_r(k) \cdot A(x)|\text{in}\rangle$$

Das freie Feld kann also durch das wechselwirkende Feld ausgedrückt werden.

2.) Auslaufendes Photon: $\langle \text{out} | a_r(k)_{\text{out}} | \text{in} \rangle$

$$-\frac{i}{\sqrt{Z_3}} \int d^4x \exp(ik \cdot x) \vec{\square}_x \langle \text{out} | \varepsilon_r^*(k) \cdot A(x) | \text{in} \rangle$$

3.7.4 Reduktionsformel für Fermionen

1.) Einlaufendes Elektron:

$$\langle \text{out} | b_{\text{in}}^\dagger(\varphi, \lambda) | \text{in} \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z_2}} \int d^4x \langle \text{out} | \bar{\psi}(x) | \text{in} \rangle (-i\not{\partial}_x - m) u(\varphi, \lambda) \exp(-ipx)$$

2.) Auflaufendes Elektron:

$$\langle \text{out} | b_{\text{out}}(\varphi, \lambda) | \text{in} \rangle = -\frac{i}{\sqrt{Z_3}} \int d^4x \bar{u}(\varphi, \lambda) \exp(ipx) (i\not{\partial}_x - m) \langle \text{out} | \psi(x) | \text{in} \rangle$$

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \text{F.T.} \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle \text{ mit } \sum_{i=1}^n p_i = 0$$

Für die Propagatoren $G^{(2)}(p_i, -p_i)$ gilt:

$$G_{\text{trunc}}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \prod_{k=1}^n [G^{(2)}(p_k, -p_k)]^{-1} G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$$

Die Vertexfunktion $\Gamma^{(n)}$ ist eine 1PI-GREENSche Funktion. Für den Fall $n = 2$ gilt:

$$\Gamma^{(2)}(p) = iG^{(2)}(p, -p)|_{\text{trunc}} = iG^{(2)}(p, -p)^{-1} [= \not{p} - m - \Sigma(p) \text{ für Fermionen}]$$

Für den Fall $n = 3$ gilt:

$$\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, -p_1, -p_2) = g\mu^\varepsilon (\gamma^\mu T^a + \Lambda^{\mu,a}(p_1, p_2))$$

i.) Nackte Felder: $\mathcal{L}_{\text{ren}} = \mathcal{L}(\varphi_0)$

ii.) Physikalische Felder + Counterterme: $\mathcal{L}_{\text{ren}}(\varphi) + \mathcal{L}_{\text{Counter}}$

$$G_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = \text{F.T.} \langle 0 | T \varphi_0(x_1), \dots, \varphi_0(x_n) | 0 \rangle \stackrel{\varphi_0 = \sqrt{Z}\varphi}{=} Z^{\frac{n}{2}} \text{F.T.} \langle 0 | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | 0 \rangle = Z^{\frac{n}{2}} G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$$

Für zusammenhängende GREENfunktionen gilt immer noch derselbe Zusammenhang. Für amputierte GREENfunktionen bekommt man für jedes äußere Teilchen einen zusätzlichen Faktor $1/\sqrt{Z}$:

$$G_0^{(n)}|_{\text{trunc}} = \prod_{k=1}^n [G_0^{(2)}]^{-1} G_0^{(n)} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{Z} [G^{(2)}]^{-1} Z^{\frac{n}{2}} G^{(2)} = Z^{-\frac{n}{2}} G^{(n)}|_{\text{trunc}}$$

Diese Beziehung gilt auch für Vertexfunktionen:

$$\boxed{\Gamma_0^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)}$$

3.8 Vergleich mit S-Matrixelementen und LSZ

$$i\mathcal{M} = \prod_{\text{externe Teilchen}} \frac{1}{\sqrt{Z}} \underbrace{(\square + m^2)^{-1}}_{[G^{(2)}]^{-1}} \underbrace{G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n)}_{Z^{\frac{n}{2}} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)} = \prod_{\text{externe Teilchen}} G_{\text{trunc}}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$1/\sqrt{Z}$ ist der Wellenfunktionsfaktor. Wir wollen die globalen Eigenschaften der Vertexfunktion verstehen. Die $\Gamma_0^{(n)}$ hängen vom Satz der äußeren Impulse p_i ab. Weiterhin hängen sie von den nackten Parameter in der LAGRANGEDichte und von ε ab:

$$\Gamma_0^{(n)}(p_i, m_0, g_0, \varepsilon) = Z^{-\frac{n}{2}} \Gamma^{(n)}(p_i, m, g, \mu, \varepsilon) \text{ mit } Z = Z\left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon\right)$$

Es spielt also eine weitere Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ rein. Z steht für Z_2 (Elektronen, Quarks) und Z_3 (Photonen, Gluonen). Für die Schemata $\overline{\text{MS}}$ und $\overline{\text{MS}}$ tritt keine m/μ -Abhängigkeit auf, sondern nur für die Onshell-Renormierung, wenn also das Residuum des wechselwirkenden Propagators auf der Massenschale gleich 1 ist.

3.8.1 Renormierungsgruppengleichungen (renormalization group equations, RGE)

Wir schauen uns an, was passiert, wenn wir μ reskalieren. Die Gruppenstruktur kommt durch die Skalentransformation zustande. (Beispielsweise bilden die Skalentransformationen $\mu \mapsto \exp(s)\mu$ eine nichtkompakte Gruppe.) Die $\Gamma_0^{(n)}$ sind μ -unabhängig, womit $d/d\mu\Gamma_0^{(n)}$ verschwindet.

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_0^{(n)} = 0 = -\frac{n}{2} Z^{-\frac{n}{2}-1} \mu \left(\frac{d}{d\mu} Z \right) \Gamma^{(n)} + Z^{-\frac{n}{2}} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma^{(n)}(p, m, g, \mu, \varepsilon)$$

$$0 = -\frac{n}{2} Z^{-\frac{n}{2}} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z + Z^{-\frac{n}{2}} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{dg}{d\mu} \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma^{(n)}(p, m, g, \mu, \varepsilon)$$

Wir definieren nun folgende Größen:

$$\beta \left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon \right) = \mu \frac{dg}{d\mu}, \quad \gamma_i \left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon \right) = \mu \frac{d}{d\mu} \ln \sqrt{Z_i} \text{ für } i = 2, 3 \text{ und } m\gamma_m \left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon \right) = \mu \frac{dm}{d\mu}$$

Diese hängen nicht vom betrachteten $\Gamma^{(n)}$ ab; sie sind universell. Die entsprechende Differentialgleichung sieht also nun folgendermaßen aus:

$$\left[-n\gamma \left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon \right) + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \gamma_m \left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial m} + \beta \left(g, \frac{m}{\mu}, \varepsilon \right) \frac{\partial}{\partial g} \right] \Gamma^{(n)}(p_i, m, g, \mu, \varepsilon) = 0$$

Wir betrachten den Limes $\varepsilon \mapsto 0$. (Dies ist möglich, weil beispielsweise die renormierten Vertexfunktionen $\Gamma^{(n)}$ für $\varepsilon \mapsto 0$ endlich sind.) Damit folgt die Renormierungsgruppengleichung:

$$\boxed{\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + m\gamma_m(g) \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(g) \right] \Gamma^{(n)} = 0}$$

Wir benötigen die explizite Form von β , γ_i :

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11N}{3} - \frac{2n_F}{3} \right) + O(g^5)$$

Speziell für die QCD ($N = 3$) gilt:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(11 - \frac{2}{3}n_F \right) - \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} \left(102 - \frac{38}{3}n_F \right) + \dots$$

$$\gamma_2(g) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(f)\alpha + O(g^5)$$

Die β -Funktion hängt in den ersten beiden Termen nicht vom Renormierungsschema oder der Eichung ab, wohl aber die γ -Funktion. Für die FEYNMAN-Eichung ist $\alpha = 1$ zu setzen.

$$\gamma_3(g) = \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{2n_F}{3} - N \frac{13 - 3\alpha}{6} \right) + \dots \text{ und } \gamma_m = -\frac{3g^2}{8\pi^2} C_2(f) + \dots$$

Wir wollen nun die Renormierungsgruppengleichung lösen. Betrachten wir hierzu:

$$Z_2 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_2(f) \left(\frac{\alpha}{\varepsilon} + F_2 \right)$$

Die allgemeine Form lautet:

$$Z_i = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{c_i}{\varepsilon} + F_i \right) + \dots \text{ mit } g = g_0 \mu^{-\varepsilon}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i(g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu \frac{d}{d\mu} \ln \sqrt{Z_i} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2Z_i} \mu \frac{d}{d\mu} \left(1 - \frac{g_0^2 \mu^{-2\varepsilon}}{16\pi^2} \left[\frac{c_i}{\varepsilon} + F_i \right] + \dots \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2Z_i} \left(-\frac{g_0^2}{16\pi^2} (-2\varepsilon) \mu^{-2\varepsilon-1} \left(\frac{c_i}{\varepsilon} + F_i \right) \right) = \frac{g^2}{16\pi^2} c_i + O(g^4) \end{aligned}$$

Betrachte die Energiedimension von $G^{(n)} = G^{(n_2, n_3)}$ von n_2 (Anti)quarks und n_3 Gluonen.

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i p_i \right) G^{(n_2, n_3)}(p_i) = \prod_{i=1}^{n_2+n_3} \int d^4 x_i \exp(\pm i p_i \cdot x_i) \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \bar{\psi}(x_{n_2}) A_{\mu_1}(y_1) \dots A_{\mu_{n_3}}(y_{n_3}) | 0 \rangle$$

Wir interessieren uns für die Energiedimension von $G^{(n_2, n_3)}(p_i)$.

$$E^{-4} E^{d_G(n_2, n_3)} = E^{-4(n_2 + n_3)} E^{\frac{3}{2}n_2 + n_3} \Rightarrow d_G(n_2, n_3) = 4 - \frac{5}{2}n_2 - 3n_3$$

Für Propagatoren gilt $d_G(n_2 = 2, n_3 = 0) = -1$ ($i/(\not{p} - m)$) und $d_G(n_2 = 0, n_3 = 2) = -2$ ($i/p^2[g^{\mu\nu} \dots]$). Betrachten wir nun die amputierten GREENfunktionen:

$$G_{\text{trunc}}^{(n_2, n_3)} = \prod_{i=1}^{n_2 + n_3} [G^{(2)}]^{-1} G^{(n_2, n_3)}$$

$$E^{d_\Gamma(n_2, n_3)} = E^{\frac{n_2}{2}} E^{2n_3} E^{4 - \frac{5}{2}n_2 - 3n_3} \Rightarrow d_\Gamma(n_2, n_3) = 4 - \frac{3}{2}n_2 - n_3 := D$$

Dabei handelt es sich um die Energiedimension der Vertexfunktion. Wie hängen nun die $\Gamma^{(n)}(p_i, m, g, \mu, \varepsilon)$ mit den $\Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu, \varepsilon)$ zusammen, wobei t ein Skalierungsfaktor ist?

$$\Gamma^{(n)} = m^{d_\Gamma(n)} F\left(\frac{p_i \cdot p_j}{m^2}, \frac{\mu^2}{m^2}, \varepsilon\right)$$

$$\Gamma^{(n)}(tp_i) = \underbrace{m^{d_\Gamma(n)}}_{\left(\frac{m}{t}\right)^{d_\Gamma} t^{d_\Gamma}} F\left(\frac{p_i \cdot p_j}{\frac{m^2}{t^2}}, \frac{\frac{\mu^2}{t^2}}{\frac{m^2}{t^2}}, \varepsilon\right) = t^{d_\Gamma(n_2, n_3)} \Gamma^{(n)}\left(p_i, \frac{m}{t}, g, \frac{\mu}{t}, \varepsilon\right) = \Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu, \varepsilon)$$

Wir betrachten nun die logarithmische Ableitung der Vertexfunktion nach dem Skalierungsfaktor t :

$$t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu, \varepsilon) = \left(D - m \frac{\partial}{\partial m} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right) \Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu, \varepsilon)$$

Es ist möglich die Ableitung $\mu \partial / (\partial \mu)$ durch

$$\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} - n \gamma \quad \text{mit } n \gamma \equiv n_2 \gamma_2 + n_3 \gamma_3$$

zu ersetzen (siehe Renormierungsgruppengleichung) und erhalten:

$$0 = \left[-t \frac{\partial}{\partial t} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + m(\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial m} + D - n \gamma\right] \Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu, \varepsilon)$$

Diese Differentialgleichung (GELL-MANN-LOW-Gleichung) beschreibt, wie sich alle Vertexfunktionen unter Reskalierung der Variablen verhalten. Klassisch, für $m = 0$ gilt $\Gamma^{(n)}(tp_i) = t^D \Gamma^{(n)}(p_i)$. Lösen können wir die Gleichung mit einem geeigneten Ansatz:

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu) = f(t) \Gamma^{(n)}\left(p_i, \frac{m(t)}{t}, g(t)\right)$$

Mit dem Ansatz gehen wir in die Gleichung ein:

$$t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu) = t \frac{df}{dt} \Gamma^{(n)}\left(p_i, \frac{m(t)}{t}, g(t)\right) + f(t) \left[\left(t \frac{dm}{dt} - m(t)\right) \frac{\partial}{\partial m} + t \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial}{\partial g} \right] \underbrace{\Gamma^{(n)}\left(p_i, \frac{m(t)}{t}, g(t)\right)}_{\frac{1}{f(t)} \Gamma^{(n)}(tp_i, m, g, \mu)}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$t \frac{dg}{dt} = \beta(g), \quad t \frac{dm}{dt} = m \gamma_m \quad \text{und} \quad \frac{t}{f} \frac{df}{dt} = D - n \gamma$$

3.8.2 Laufende Kopplung

Wir müssen nun die gewöhnlichen Differentialgleichungen lösen. Dazu schreiben wir die erste Gleichung geeignet um:

$$\frac{dg}{d \ln(t)} = \beta(g)$$

Dabei handelt es sich nun um eine nichtlineare Differentialgleichung für $g(t)$. Zur Lösung benötigen wir noch die Funktion $\beta(g)$:

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left(\frac{11N}{3} - \frac{2}{3}n_F \right) + \dots = -\frac{g^3}{16\pi^2}\beta_0 - \frac{g^5}{(16\pi^2)^2}\beta_1 - \dots$$

Wir lösen die Gleichung für den führenden g^3 -Term. Dazu definieren wir $\alpha_s(t) = g^2(t)/(4\pi)$ (analog zur Feinstrukturkonstanten).

$$\frac{d}{d(\ln(t))} = t \frac{d}{dt} \frac{1}{\alpha_s(t)} = t \frac{d}{dt} \left(\frac{4\pi}{g^2} \right) = -\frac{8\pi}{g^3} t \frac{dg}{dt} = -\frac{8\pi}{g^3} \beta(g) = -\frac{8\pi}{g^3} \left(-\frac{g^3}{16\pi^2} \right) \beta_0 + \dots = \frac{\beta_0}{2\pi} + \dots$$

Damit haben wir also für $1/\alpha_s(t)$ eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Wir erhalten dann:

$$\frac{1}{\alpha_s(t)} = \frac{1}{\alpha_s(1)} + \frac{\beta_0}{2\pi} \ln(t) \Rightarrow \alpha_s(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s(1)} + \beta_0 \ln(t)} = \frac{\alpha_s(1)}{1 + \frac{\alpha_s(1)}{2\pi} \beta \ln(t)}$$

t ist das Verhältnis von zwei Energieskalen, also $t = Q/Q_0$, wobei Q_0 die Referenzskala ist.

$$\alpha_s(t) \equiv \alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s(Q_0)}{1 + \frac{\alpha_s(Q_0)}{4\pi} \beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)}$$

Im Nenner steht also eine lineare Funktion von $\ln(Q^2)$, die für eine bestimmte Referenzskala Q_0 verschwindet. Wir wählen als Q_0 also die Nullstelle Λ des Nenners. Dann gilt

$$\frac{1}{\alpha_s(1)} \equiv \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \left(\frac{Q_0}{\Lambda} \right)$$

und damit:

$$\alpha_s(Q) = \frac{1}{\frac{\beta_0}{2\pi} \ln \left(\frac{Q_0}{\Lambda} \right) + \frac{\beta_0}{2\pi} \ln \left(\frac{Q}{Q_0} \right)} = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{Q}{\Lambda} \right)} = \frac{4\pi}{\beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}$$

1.) Für die Referenzskala Q_0 wird im allgemeinen die Z-Masse genommen, weil man das α_s bei der Z-Masse sehr genau experimentell messen kann. Nimmt man die höheren Korrekturen mit, so ergibt sich $\alpha_s(1) \equiv \alpha_s(m_Z) = 0,119 \pm 0,002$.

2.) Bestimme aus Daten $\alpha_s(Q)$ die Skala $\Lambda = \Lambda_{QCD}$ (100 bis 200 MeV). Λ_{QCD} hängt sehr stark davon ab, in welcher Ordnung Störungstheorie man rechnet und zusätzlich noch von n_F .

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_F) \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)}$$

Als nächstes betrachten wir die zweite Differentialgleichung:

$$\frac{d \ln(f)}{d \ln(t)} = \frac{t}{f} \frac{df}{dt} = D - n\gamma(g(t)) \Rightarrow \ln(f(t)) - \ln(f(1)) = \int_0^{\ln(t)} (D - n\gamma(g(t'))) d \ln(t')$$

Um das Integral zu berechnen, führen wir eine Substitution durch:

$$dg(t') = \frac{dt'}{t'} \beta(g) = d \ln(t') \beta(g) \text{ und } d \ln(t') = \frac{dg(t')}{\beta(g(t'))}$$

$$f(t) = f(1)t^D \exp \left(-n \int_{g(1)}^{g(t)} dg \frac{\gamma(g)}{\beta(g)} \right)$$

Mittels der Störungsentwicklungen für $\gamma(g)$ und $\beta(g)$, also

$$\gamma_i(g) = \frac{\gamma_i^{(0)}}{16\pi^2} g^2 + \frac{\gamma_i^{(1)}}{(16\pi^2)^2} g^4 + \dots \text{ und } \beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \beta_0 - \frac{g^5}{(16\pi^2)^2} \beta_1 + \dots$$

$$\begin{aligned}
 -n_i \int_{g(1)}^{g(t)} \frac{\gamma_i(g')}{\beta(g')} dg' &= n_i \int_{g(1)}^{g(t)} \left(\frac{1}{g} \frac{\gamma_i^{(0)}}{\beta_0} + \frac{g}{16\pi^2} \left(\frac{\gamma_i^{(1)}}{\beta_0} - \frac{\gamma_i^{(0)}\beta_1}{\beta_0^2} \right) + \dots \right) = \\
 &= \frac{1}{2} n_i \left(\frac{\gamma_i^{(0)}}{\beta_0} \ln \left(\frac{g^2(t)}{g^2(1)} \right) + \frac{g^2(t) - g^2(1)}{16\pi^2} \left(\frac{\gamma_i^{(1)}}{\beta_0} - \frac{\gamma_i^{(0)}\beta_1}{\beta_0^2} \right) + \dots \right) = \\
 &= \frac{1}{2} n_i \left[\frac{\gamma_i^{(0)}}{\beta_0} \ln \left(\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(1)} \right) + \frac{\alpha_s(t) - \alpha_s(1)}{4\pi} \left(\frac{\gamma_i^{(1)}}{\beta_0} - \frac{\gamma_i^{(0)}\beta_1}{\beta_0^2} + \dots \right) \right]
 \end{aligned}$$

Mit $f(1) = 1$ ergibt sich dann:

$$f(t) = t^D \exp \left(\sum_i \frac{n_i}{2} \frac{\gamma_i^{(0)}}{\beta_0} \ln \left(\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(1)} \right) + \dots \right) = \boxed{t^D \prod_i \left(\frac{\alpha_s(t)}{\alpha_s(1)} \right)^{\frac{n_i \gamma_i^{(0)}}{2\beta_0}} (1 + O(\alpha_s))}$$

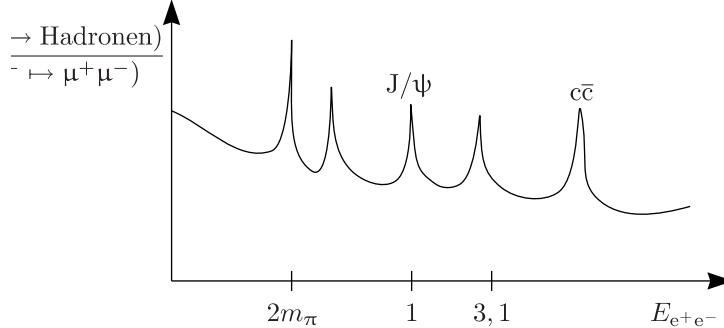
Wir haben hier also Quantenkorrekturen nur naiven Skalierung der GREENfunktion berechnet. Analog dazu erhalten wir:

$$\boxed{m(t) = m(1) \exp \left(\int_{g(1)}^{g(t)} \frac{\gamma_m(g)}{\beta(g)} dg \right)}$$

$$\Gamma^{(n)}(tp_i, m_i, g, \mu) = f(t) \Gamma^{(n)} \left(p_i, \frac{m(t)}{t}, g(t), \mu \right) \text{ mit } g(t) = \sqrt{4\pi\alpha_s(t)}$$

$$\boxed{f(t) = t^{4 - \frac{3}{2}n_2 - n_3} \left(\frac{\alpha_s(Q^2 = t^2 Q_0^2)}{\alpha_s(Q_0^2)} \right)^{\frac{n_2 \gamma_2^{(0)} + n_3 \gamma_3^{(1)}}{2\beta_0}} (1 + \dots)}$$

Dies ist eine Aufsummation der führenden $\alpha_s(Q_0) \ln(Q^2/Q_0^2)$ -Korrekturen. Die Störungstheorie beschreibt Mittelwerte über verschiedene Resonanzen hinweg, nicht jedoch die Resonanzen selbst.



Kapitel 4

Spontane Symmetriebrechung

Eine Symmetrie ist eine Invarianz von \mathcal{L} und H . Dies ist der Fall, wenn

$$[Q^a, H] = 0 \text{ mit } Q^a = \int d^3\vec{x} j^{0a}(x)$$

gilt, wobei Q^a die Generatoren der Symmetriegruppe G sind. Angenommen, wir haben ein Multiplett von Feldern:

$$\exp(iQ^a\theta^a)\phi_i(x)\exp(-iQ^a\theta^a) = R_{ij}(\theta)\phi_j(x)$$

Die Darstellungsmatrizen R_{ij} beschreiben, wie sich die verschiedenen Komponenten des Feldmultipletts untereinander vermischen. Man versteht also unter einer Symmetrie die Invarianz von H unter Transformationen und das wohlspezifizierte Transformationsverhalten der Felder. Teilchen werden beschrieben durch Zustände im FOCKraum.

$$|p, i\rangle = \int f_p(x)\phi_i(x) d^3\vec{x}|0\rangle$$

Unter welchen Bedingungen verhalten sich diese Einteilchenzustände genauso wie die Felder selbst? Wann transformieren sie sich also mit den Darstellungsmatrizen der Symmetriegruppe? Führen wir eine Symmetrietransformation der Einteilchenzustände durch:

$$|p, i\rangle' = \exp(i\theta^a Q_a)|p, i\rangle = \int f_p(x)U\phi_i(x)U^\dagger d^3\vec{x}U|0\rangle = \int f_p(x)R_{ij}(\theta)\phi_j(x) d^3\vec{x}U|0\rangle \stackrel{!}{=} R_{ij}(\theta)|p, j\rangle$$

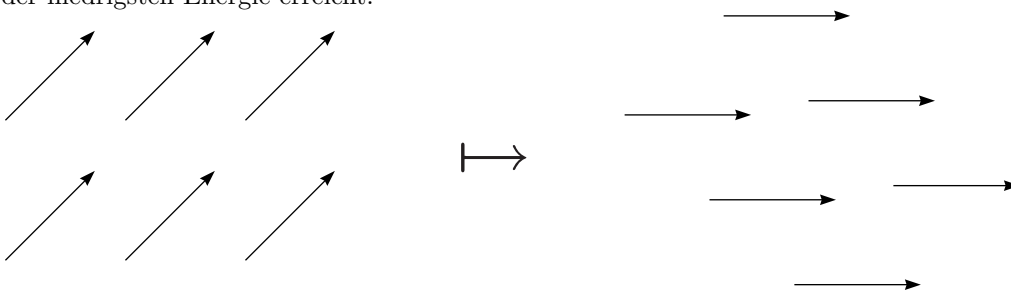
Damit dies gilt, muss sich der Vakuumzustand trivial transformieren, also $U|0\rangle = |0\rangle$. Bei spontaner Symmetriebrechung ist $\exp(i\theta^a Q_a)|0\rangle \neq |0\rangle$.

4.1 Beispiel: Ferromagnetismus

Dabei handelt es sich um ein System wechselwirkender Spins:

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij}\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

Das Skalarprodukt der Spinoperatoren bildet unter Rotationen ein Singulett, es ist also rotationsinvariant. Der Grundzustand eines Ferromagneten ist dadurch ausgezeichnet, dass bei genügend niedriger Temperatur (unterhalb der CURIE-Temperatur) die Spins alle in dieselbe Richtung zeigen. Dann wird nämlich der Zustand der niedrigsten Energie erreicht.



Der Grundzustand ist nicht invariant unter Rotation. Bei Drehung des Systems entsteht ein neuer Grundzustand, der natürlich dieselbe Energie besitzt, aber sich vom ersten unterscheidet. Der Grundzustand ist somit entartet. Die Tatsache, dass eine bestimmte Richtung ausgezeichnet ist, bricht die Symmetrie; wir haben es also mit spontaner Symmetriebrechung zu tun. Die Rotationssymmetrie wird spontan gebrochen.

4.2 Beispiel: Feldtheorie (komplexes Skalarfeld)

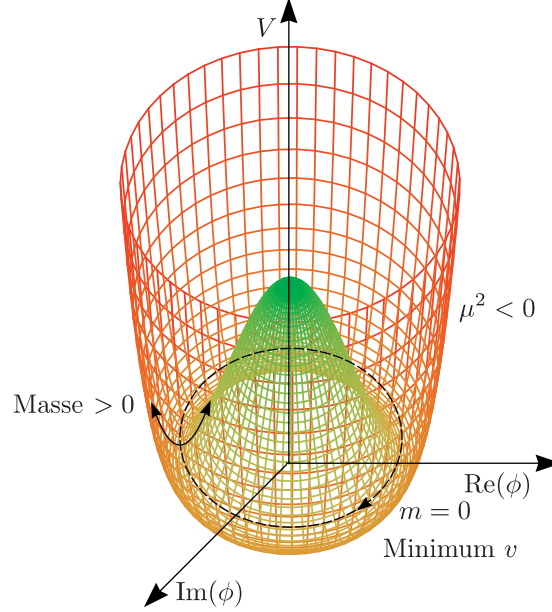
Die LAGRANGEDichte für ein komplexes Skalarfeld lautet:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \text{mit} \quad -V(\phi) = -\mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

Nimmt man höhere Potenzen hinzu, so bekommt man Probleme mit der Renormierung. \mathcal{L} ist invariant unter der Transformation $\phi \mapsto \exp(i\alpha)\phi$, also besteht eine U(1)-Symmetrie. Wir interessieren uns für den Grundzustand, betrachten also konstante Felder am Minimum von V . Dazu leiten wir das Potential V ab:

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = \mu^2 \phi + 2\lambda (\phi^* \phi) \phi \Rightarrow \phi = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu^2 > 0 \\ \phi^* \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} & \text{für } \mu^2 < 0 \end{cases}$$

λ muss auf jeden Fall positiv sein, weil sonst das System instabil wäre. Schauen wir uns das ganze graphisch an:



Bei $\phi = 0$ liegt ein lokales Maximum und ein globales Minimum bei $|\phi| = v = \sqrt{-\mu^2/2\lambda}$. Teilchen entsprechen harmonischen Oszillatoren für die Entwicklung um das Minimum des Potentials. Im linken Fall hat man zwei Teilchen (mit verschiedener Ladung) der Masse $\mu^2 > 0$. Im rechten Bild sind alle Minima durch die Symmetrietransformation miteinander verknüpft. Fluktuationen in Richtung der Minima besitzen Steigung Null. Diese entsprechen masselosen Teilchen (GOLDSTONE-Bosonen). Fluktuationen senkrecht zu dieser Richtung entsprechen Teilchen mit Masse $m > 0$ (HIGGS-Bosonen). Bei Entwicklung um das Maximum bei $\phi = 0$, würde man Teilchen mit negativer Masse (Tachyonen) erhalten. Dort ist die Krümmung des Potentials nämlich negativ.

$$\beta = \frac{|\vec{p}|}{E} = \frac{|\vec{p}|}{\sqrt{\vec{p}^2 - |\mu^2|}} > 1$$

Wir müssen also um das Minimum bei $\phi = v$ entwickeln (mit Fluktuationen φ_1 und φ_2):

$$\phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1 \right) + i\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}}$$

$$\phi^* \phi = v^2 + \sqrt{2}v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$$

Das Potential können wir nun folgendermaßen schreiben:

$$V = \lambda(\phi^* \phi - v^2)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad \text{mit} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

$$V = \lambda \left(\sqrt{2}v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

Damit folgt die LAGRANGEDichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - 2\lambda v^2 \varphi_1^2 - \sqrt{2}v\lambda \varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$$

Die in den Feldern quadratischen Terme liefern uns die Massen. Die ϕ^3 - und ϕ^4 -Terme sind Wechselwirkungsterme. Wir haben also zwei verschiedene Teilchen. φ_1 beschreibt ein Teilchen mit Masse $m = 2v\sqrt{\lambda}$ und φ_2 ein masseloses Teilchen (GOLDSTONE-Boson).

4.3 Goldstone-Theorem

Sei $\phi_i(x)$ ein Satz von Operatoren mit nichttrivialem Transformationsverhalten unter einer Symmetriegruppe G . Das Transformationsverhalten ist gegeben durch:

$$[Q^a, \phi_i(x)] = T_{ij}^a \phi_j(x) \text{ mit } Q^a = \int d^3\vec{y} j^{0a}(y), \partial_\mu j^{\mu a} = 0$$

T^a sind die Darstellungsmatrizen der Generatoren. Wenn der Vakuumerwartungswert $\langle 0|\phi_j(x)|0\rangle$ eines dieser nichttrivial transformierenden Feldern ungleich Null ist, dann existieren masselose Anregungen.

Beweis:

mit $\langle 0|\phi_j|0\rangle \neq 0$ gibt es T^a mit $0 \neq \langle 0|T_{ij}^a \phi_j|0\rangle$, weil unser Satz von Generatoren T^a linear unabhängig ist. Damit gilt:

$$0 \neq \langle 0|T_{ij}^a \phi_j|0\rangle = \langle 0|[Q^a, \phi_i]|0\rangle$$

Damit existiert ein Ladungsoperator Q und ein Feld $\phi(x)$ mit $\langle 0|[Q, \phi(x)]|0\rangle \neq 0$ ist. Daraus ergibt sich $Q|0\rangle \neq 0$, das Vakuum hat also eine Ladung $\neq 0$; es transformiert sich nichttrivial unter Symmetrietransformationen.

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}[Q(t), \phi(x)] = 0$$

Da es auf den Punkt x nicht ankommt, wählen wir speziell den Nullpunkt. Hieraus folgt $\langle 0|[Q(t), \phi(0)]|0\rangle = C \neq 0$ (zeitunabhängig). Sei $j^0(y) = \exp(-iP \cdot y)j^0(0)\exp(iP \cdot y)$ mit P^μ als Impulsoperator. Wir nehmen an, dass die Translationssymmetrie nicht spontan gebrochen ist:

$$\begin{aligned} C &= \sum_n \int d^3\vec{y} \langle 0|\exp(-iP \cdot y)j^0(0)\exp(iP \cdot y)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)|n\rangle \langle n|\exp(-iP \cdot y)j^0(0)\exp(iP \cdot y)|0\rangle = \\ &= \sum_n \int d^3\vec{y} [\langle 0|j^0(0)\exp(iP_n \cdot y)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle - \langle 0|\phi(0)|n\rangle \langle n|\exp(-iP_n \cdot y)j^0(0)|0\rangle] = \\ &= (2\pi)^3 \sum_n [\langle 0|j^0(0)|n\rangle \langle n|\phi(0)|0\rangle \exp(iE_n t) - \langle 0|\phi(0)|n\rangle \langle n|j^0(0)|0\rangle \exp(-iE_n t)] \delta^{(3)}(\vec{P}_n) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir folgendes verwendet:

$$\int d^3\vec{y} \exp(\pm i\vec{P}_n \cdot \vec{y}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_n)$$

Da $\exp(-iE_n t) = \exp(-iM_n t)$ kann der Beitrag zu $C = \text{const.}$ nur von $M_n = 0$ kommen. Der Vakuumzustand $|n\rangle = |0\rangle$ trägt nicht bei, weil sich dann beide Terme gegenseitig wegheben. Es gibt also einen Zustand $|n\rangle \neq |0\rangle$ mit $M_n = 0$ und $\langle n|\phi(0)|0\rangle \neq 0 \neq \langle n|j^0(0)|0\rangle$.

4.4 Beispiel: Chirale Symmetriebrechung in der QCD

Oder: Warum ist $0 \approx m_\pi \approx 10^{-2}m_p^2$? Da Pionen und Protonen nur u- und d-Quarks enthalten, schauen wir uns nur den Sektor mit diesen beiden Flavours an. Es gilt $m_{u,d} \approx O(5 \text{ MeV}) \ll \Lambda_{QCD}$. Schauen wir uns die LAGRANGEDICHTE im Limes verschwindender up- und down-Massen an:

$$\mathcal{L} = \bar{u}i\not{D}u + \bar{d}i\not{D}d$$

Schreiben wir $\psi = (u, d)$, so können wir dies in einen links- und rechtschiralen Anteil aufspalten:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \text{ und } \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$$

Damit folgt:

$$\mathcal{L} = \sum_{\tau=L,R} \bar{u}_\tau i\not{D}u_\tau + \bar{d}_\tau i\not{D}d_\tau$$

Hierbei besteht nun eine $SU(2)$ -Symmetrie:

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \mapsto \exp\left(i\theta_L \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \mapsto \exp\left(i\theta_R \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}$$

Die Links- und Rechts-Terme kann man einzeln betrachten (zwei separate $SU(2)$ -Symmetrien). Die Symmetrie der LAGRANGEDichte ist $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -symmetrisch. Es gibt also zwei erhaltene Ströme:

$$(\bar{u}, d)\gamma^\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} (1 \pm \gamma_5) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Addiert bzw. subtrahiert man diese beiden Ströme, so erhält man einen Vektorstrom und einen Axialvektorstrom:

$$V_\mu^i = (\bar{u}, \bar{d})\gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\mu^i = (\bar{u}, \bar{d})\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\sigma^i}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

Es kann nicht sein, dass die Felder selbst einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert haben. Die QCD produziert einen Vakuumerwartungswert

$$\langle 0 | \bar{u}(x)u(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}(x)d(x) | 0 \rangle \neq 0$$

Also ist die $SU(2)$ -Symmetrie zwischen beiden erhalten. Wegen

$$\int d^4y A_\mu^i(y), \bar{u}(0)u(0) \neq 0$$

Die masselosen Anregungen sind die π^+ , π^- und π^0 .

$$\pi^+ / \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^i(y) | \pi^j(k) \rangle &\neq 0 = \langle 0 | \exp(iP \cdot y) A_\mu^i(0) \exp(-iP \cdot y) | \pi^j(k) \rangle = \langle 0 | A_\mu^i(0) \exp(-ik \cdot y) | \pi^j(k) \rangle = \\ &= \exp(-ik \cdot y) \langle 0 | A_\mu^i(0) | \pi^j(k) \rangle = if_\pi \delta^{ij} \exp(-iky) k_\mu \end{aligned}$$

Dies ist die Grundlage, um die Lebensdauer für Pionen auszurechnen. f_π ist die Zerfallskonstante des Pions.

4.5 Spontane Brechung einer $O(N)$ -Symmetrie

Wir schauen uns eine LAGRANGEDichte an, die N reelle skalare Felder beinhaltet:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_i)(\partial^\mu \phi_i) - V\left(\sum_{i=1}^N \phi_i^2\right) \quad \text{mit} \quad \left(\sum_{i=1}^N \phi_i^2\right) = V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})$$

\mathcal{L} ist symmetrisch bezüglich einer $O(N)$ -Transformation $\phi_i \mapsto O_{ij}\phi_j$, wobei die O orthogonale $N \times N$ -Matrizen sind. (Die $U(1)$ -Gruppe (Rotationen in der komplexen Ebene) ist übrigens isomorph zur $O(2)$ (Rotationen im zweidimensionalen reellen Raum).) Wir betrachten das Minimum von V bei $|\vec{\phi}| = v$, beispielsweise sei $V = \lambda(\phi^2 - v^2)^2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \\ v + \varphi_N \end{pmatrix}$$

$$\phi^2 = v^2 + 2v\varphi_N + \sum_{i=1}^N \varphi_i^2$$

φ_N ist extra ausgezeichnet; die restlichen $N - 1$ Felder sind immer noch invariant unter Rotationen ($n - 1$ -dimensionale Rotation). Für das Potential gilt nun:

$$V = \lambda \left(2v\varphi_N + \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \right)^2 = \lambda 4v^2 \varphi_N^2 + 4\lambda v \varphi_N \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \right)^2$$

Die kinetische Energie ändert sich nicht. Die kubischen und höheren Terme beschreiben Wechselwirkungen der Felder. Der Term, welcher quadratisch in φ_N ist, ist der Massenterm. Aus diesem können wir die Masse von φ_N ablesen:

$$\frac{m_N^2}{2} \stackrel{!}{=} 4\lambda v^2 \Rightarrow m_N^2 = 8\lambda v^2$$

Dabei handelt es sich um ein massives HIGGS-Boson. Die restlichen Felder sind masselos: $m_i = 0$ für $i = 1, \dots, N-1$. Dies sind die GOLDSTONE-Bosonen. Die Symmetrie wird also von der Gruppe $G = O(N)$ auf die Gruppe $H = O(N-1)$ heruntergebrochen. Die Anzahl der Generatoren der $O(N)$ ist $N(N-1)/2$. (Die Generatoren der $O(N)$ sind antisymmetrische Matrizen, deren Diagonalelemente verschwinden. Eine solche Matrix hat dann $N(N-1)/2$ voneinander unabhängige Einträge (beispielsweise in der oberen oder unteren Dreiecksmatrix).) Damit können wir die Anzahl der gebrochenen Generatoren berechnen:

$$\frac{N(N-1)}{2} - \frac{(N-1)(N-2)}{2} = \frac{N-1}{2}(N - (N-2)) = N-1$$

Im allgemeinen ist die Anzahl der GOLDSTONE-Bosonen gleich der Anzahl der gebrochenen Generatoren, also $\dim(G) - \dim(H)$.

Beispiel:

Unabhängige Transformationen für links- und rechtshändige Quarks $G = SU(2)_L \times SU(2)_R$ wurde gebrochen auf die vektorielle $SU(2)_V$ (da links- und rechtshändige Quarks gleichermaßen eingehen). Aus $\dim(G) = 6$ und $\dim(H) = 3$ ergeben sich drei GOLDSTONE-Bosonen π^+ , π^- und π^0 .

4.6 Spontan gebrochene Eichsymmetrien

Wir betrachten als Beispiel die U(1)-Symmetrie. Im einfachsten Fall haben wir ein komplexes skalares Feld ϕ . Wir wollen lokale Transformationen betrachten, also $\phi(x) \mapsto \exp(-ie\Lambda(x))\phi(x)$ und $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\Lambda$. Die Standard-LAGRANGE-Dichte ist dann gegeben durch:

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - ieA_\mu)^*\phi][(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi] - \mu^2\phi^*\phi - \lambda\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \text{ mit } (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi)$$

(Um zu quantisieren, müssen wir noch einen Eichfixierungsterm einführen.) $\mu^2 < 0$ führt zu spontanen U(1)-Brechung.

$$\langle 0|\phi|0\rangle = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$$

Fluktuationen beschreiben wir durch:

$$\phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \left(v + \frac{H(x)}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\chi(x)}{v}\right)$$

Die neuen Effekte treten nun in der kinetischen Energie auf:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\varphi_1 + i\partial_\mu\varphi_2) + ieA_\mu v + \frac{e}{\sqrt{2}}A_\mu(-\varphi_2 + i\varphi_1) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\varphi_1 - \frac{e}{\sqrt{2}}A_\mu\varphi_2 + i\left(\partial_\mu\varphi_2 + eA_\mu v + \frac{e}{\sqrt{2}}A_\mu\varphi_1\right) = \\ &= \exp\left(i\frac{\chi}{\sqrt{2}v}\right) \left[\partial^\mu + ie\left(A_\mu + \frac{\partial_\mu\chi}{\sqrt{2}ev}\right)\right] \left(v + \frac{H}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Diese Kombination ist äquivalent zu einer Eichtransformation. Also bezeichnen wir

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\left(\frac{\chi}{\sqrt{2}ev}\right)$$

und erhalten die kinetische Energie:

$$(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + e^2 A'_\mu A'^\mu \left(v + \frac{H}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \underbrace{(ev)^2 A'_\mu A'^\mu}_{\frac{m_A^2}{2} A'_\mu A'^\mu} + \underbrace{e^2 A'_\mu A'^\mu \left(\sqrt{2}vH + \frac{H^2}{2}\right)}_{\text{Wechselwirkungsterme}}$$

Damit folgt also für LAGRANGEDICHTE:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + (ev)^2 A'_\mu A'^\mu + e^2 A'_\mu A'^\mu \left(\sqrt{2}vH + \frac{H^2}{2} \right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 2v^2\lambda H^2 - \sqrt{2}v\lambda H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4$$

Wir lesen auf den Massentermen $m_A^2 = 2e^2v^2$ und $m_H^2 = 4v^2\lambda$ ab. Es tritt also ein massives Photon (Eichboson) und ein massives skalares Feld auf. Das GOLDSTONE-Boson entpuppt sich als Eichfreiheitsgrad, der nicht zur Physik beiträgt. Betrachten wir dazu die Anzahl der Freiheitsgrade. Für eine ungebrochene U(1)-Symmetrie haben wir ein masseloses Photon. Dieses besitzt zwei physikalische Freiheitsgrade, nämlich zwei transversale Polarisierungen. Die unphysikalischen skalare und longitudinale Polarisierung tragen im GUPTA-BLEULER-Formalismus nicht bei. Ein geladenes Teilchen ϕ^\pm besitzt zwei reelle Freiheitsgrade. Für die gebrochene U(1)-Symmetrie haben wir ein massives Photon mit drei Freiheitsgraden (mit longitudinaler Polarisierung) und ein massives reelles HIGGS-Boson mit einem Freiheitsgrad. Es sind also keine Freiheitsgrade verloren gegangen.

Kapitel 5

Das Standardmodell (SM)

Es liegt die Eichsymmetrie $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ vor. $SU(3)$ beschreibt die QCD (ungebrochen). Der elektroschwache Sektor wird durch das Produkt $SU(2) \times U(1)$ beschrieben. Die entsprechenden Eichbosonen in der QCD sind die acht Gluonen und im elektroschwachen sind dies die W^+ , W^- , Z und das Photon γ . Da das Photon natürlich masselos bleiben soll (sonst wären die MAXWELL-Gleichungen nicht mehr gültig), muss die Symmetrie $SU_L(2) \times U_Y(1)$ auf eine verbleibende $U(1)_{em}$ heruntergebrochen werden. Materiefelder sind die sechs Quarks und sechs Leptonen. Bei den Quarks haben wir es mit drei Dubletts (wegen Isospin, $SU(2)$) zu tun:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Ebenso transformieren Leptonen als Dubletts unter Isospintransformationen:

$$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

Wir haben also drei Familien (auch Generationen genannt) mit identischen Quantenzahlen. Die Massen unterscheiden die Familien, die Eichwechselwirkungen jedoch nicht. Deshalb reicht es für die Eichwechselwirkung, nur eine Familie zu betrachten. Um diese Wechselwirkung zu spezifizieren, müssen wir die Transformationseigenschaften angeben.

5.0.1 Irreduzible Darstellungen der Fermionen

	SU(3)	SU _L (2)	U _Y (1): Y
$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	3	2	1/6
u_R	3	1	2/3
d_R	3	1	-1/3
$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	1	2	-1/2
e_R	1	1	-1

Die schwache Wechselwirkung wirkt nicht auf rechtshändige Fermionen. Infolgedessen transformieren sich diese als Singulett. Wir haben nun folgenden Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung und Hyperladung (man erhält dies aus der Symmetriebrechung):

$$Q = I_3 + Y \quad \left(\text{andere Konvention: } Q = I_3 + \frac{Y}{2} \right)$$

Für ν_e gilt $Q = 0 = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ und für e_L $Q = -1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. Die Indizes der Felder werden unterdrückt. Volle Schreibweise:

$$Q : Q_{\alpha ic} \text{ mit } \alpha = 1, \dots, 4; i = 1, 2 \text{ und } c = 1, 2, 3$$

α sind Spinorindizes, i sind $SU(2)$ -Indizes und c sind $SU(3)$ -Indizes. Damit ist der Ausdruck \not{Q}_L zu verstehen als

$$\not{Q}_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5)_{\beta\varrho} Q_{L\varrho ic}$$

$$T^a Q_L \stackrel{\Delta}{=} T_{c_1 c_2}^a Q_{L\alpha i c_2}$$

Die Indizes, über die nicht multipliziert wird, werden also normalerweise weggelassen (e_R : e_α mit $\alpha = 1, \dots, 4$).

Die Darstellungen unter $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ legen die Wechselwirkungen mit den Eichfeldern über kovariante Ableitungen fest: $\psi = Q, u_R, L, e_R, \dots$

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ig_s T^a G_\mu^a - ig \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig' Y B_\mu \right) \psi$$

Damit erhalten wir die entsprechende wechselwirkende LAGRANGEDICHTE:

$$\mathcal{L}_f = \sum_{\substack{\psi=Q, u_R, d_R, \\ L, e_R, \nu_R}} \bar{\psi} i \not{D} \psi$$

Das Problem ist, dass wir keine Massenterme ohne weiteres hinschreiben können. Aus $\gamma_0 P_L = P_R \gamma_0$ folgt $\bar{\psi} P_L = \bar{\psi} P_R$ und somit:

$$m \bar{\psi} \psi = m \bar{\psi} (P_L + P_R) \psi = m \psi^\dagger \gamma_0 (P_L + P_R) \psi = m (\bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R) \text{ mit } P_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 - \gamma_5), P_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_4 + \gamma_5)$$

Die Lösung des ganzen ist der HIGGS-Mechanismus. Man kann die Dublett mit dem HIGGS-Dublett $\phi = (\phi^+, \phi^0)$ multiplizieren, wobei $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = (0, v/\sqrt{2})$. $\bar{Q} \phi d_R$ transformiert sich wie ein Singulett unter Isospin. $\bar{Q} \phi d_R$ transformiert sich dann immer noch wie ein Isospinsingulett. Für die Hyperladung gilt $-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$. Man bekommt dann durch solche Terme den Übergang von links- zu rechtshändigen Feldern. Es wird also ein HIGGS-Feld mit Hyperladung $\frac{1}{2}$ benötigt.

5.1 Spontane Symmetriebrechung

Im Standardmodell führt man ein HIGGS-Feld als Dublett der $SU(2)$ ein:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$$

Für die Ladung muss $Q = T_3 + Y$ gelten, woraus mit $T_3 = \pm \frac{1}{2} Y_\phi = \frac{1}{2}$ folgt. Als erstes müssen wir die kovariante Ableitung dieses Feldes betrachten:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig' \frac{1}{2} B_\mu \right) \phi$$

Für das Dublett-Feld ist die LAGRANGEDICHTE gegeben durch:

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \lambda \left(\phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right)^2$$

Das Minimum des Potentials liegt bei $|\phi| = v/\sqrt{2}$. Analog zum $U(1)$ -Fall führen wir eine unitäre Eichung durch.

$$\phi = \exp \left(i \frac{\chi^i(x) \tau^i}{2} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Wenn keine Fluktuationen vorliegen, haben wir den Vakuumerwartungswert. Der exponentielle Vorfaktor beschreibt die GOLDSTONE-Bosonen W_L und Z_L . Für Loop-Rechnungen benötigt man den Vorfaktor, zum Verständnis der Physik jedoch nicht.

$$\begin{aligned} D_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \left[g \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + g' B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu H \end{pmatrix} - \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -gW_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix} (v + H) \end{aligned}$$

Mittels der Abkürzungen

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \text{ und } Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (-g' B_\mu + gW_\mu^3)$$

erhalten wir für den kinetischen Term:

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W_\mu^+ W_\mu^- \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 + v^2 \frac{g^2 + g'^2}{8} Z_\mu Z^\mu \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2$$

$(\partial_\mu H)^2$ ist die kinetische Energie des HIGGS-Feldes. Damit können wir die Massenterme identifizieren, wobei wir beachten, dass die W_μ^\pm komplexe Felder und Z_μ ein reelles Feld ist:

$$|D_\mu\phi|^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \left(m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{m_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu\right) \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2$$

Wir führen eine orthogonale Transformation der Basis $\{B_\mu, W_\mu^3\}$ zu einer neuen Basis $\{Z_\mu, A_\mu\}$ durch nach folgendem Schema:

$$A_\mu = \sin(\theta_W) W_\mu^3 + \cos(\theta_W) B_\mu \quad \text{und} \quad Z_\mu = \cos(\theta_W) W_\mu^3 - \sin(\theta_W) B_\mu$$

Durch Vergleich mit $Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(-g' B_\mu + g W_\mu^3)$ lässt sich der Winkel θ_W mittels der Kopplungskonstanten g und g' schreiben:

$$\sin(\theta_W) = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \text{und} \quad \cos(\theta_W) = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$$

Die kinetischen Terme in kanonischer Form sind nun gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{gauge}^{kin} = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu}$$

Aus dem Massenterm können wir die Massen der Eichfelder direkt ablesen.

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad \text{und} \quad m_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2} v}{2} = m_W \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{g} = \frac{m_W}{\cos(\theta_W)}$$

Aus sehr genauen Messungen hat man $m_W = 80,42 \text{ GeV}$ und $m_Z = 91,188 \text{ GeV}$ bestimmt. θ_W ist der sogenannte WEINBERG-Winkel.

$$\sin^2(\theta_W)|_M = 1 - \left(\frac{m_W}{m_Z}\right)^2 = 0,222, \quad \sin^2(\theta_W)|_{\overline{MS}} = 0,231$$

Man erkennt, dass sich Massenmessung und Kopplungsmessung durch radiative Korrekturen unterscheiden.

5.1.1 Wechselwirkung mit Fermionen

Wir betrachten zunächst den Fall linkshändiger Dubletts mit beliebiger Hyperladung.

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i - ig' Y B_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - ig' Y B_\mu$$

Schauen wir uns die Diagonalterme an, wobei wir beachten, dass für ein Isospin-Dublett $T_3 = \pm 1/2$ ist. Darüber hinaus führen wir wieder einen Basiswechsel nach $\{Z_\mu, A_\mu\}$ durch:

$$\begin{aligned} -i(gT_3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu) &= -igT_3 [\cos(\theta_W) Z_\mu + \sin(\theta_W) A_\mu] + g' Y [\cos(\theta_W) A_\mu - \sin(\theta_W) Z_\mu] = \\ &= -iA_\mu [gT_3 \sin(\theta_W) + g' Y \cos(\theta_W)] - iZ_\mu [gT_3 \cos(\theta_W) - g' Y \sin(\theta_W)] \end{aligned}$$

Aus

$$g \sin(\theta_W) = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = g' \cos(\theta_W)$$

folgt weiter:

$$\begin{aligned} -iA_\mu g \sin(\theta_W) (T_3 + Y) - iZ_\mu \left(T_3 e \frac{\cos(\theta_W)}{\sin(\theta_W)} - \underbrace{Q - T_3}_Y e \frac{\sin(\theta_W)}{\cos(\theta_W)} \right) &= \\ = -iA_\mu e (T_3 + Y) - iZ_\mu e \left[T_3 \left(\frac{\cos(\theta_W)}{\sin(\theta_W)} + \frac{\sin(\theta_W)}{\cos(\theta_W)} \right) - Q \frac{\sin(\theta_W)}{\cos(\theta_W)} \right] &= \\ = -iA_\mu e (T_3 + Y) - iZ_\mu \frac{e}{\sin(\theta_W) \cos(\theta_W)} [T_3 - Q \sin^2 \theta_W] & \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass wir wegen $Q = T_3 + Y$ den Ausdruck $g \sin(\theta_W)$ mit der Elementarladung e identifizieren können. Damit ist es möglich, die Kopplungen g und g' auszurechnen:

$$g = \frac{e}{\sin(\theta_W)} \quad \text{und} \quad g' = \frac{e}{\cos(\theta_W)}$$

Das Photon koppelt also linear zur Ladung. Für die gesamte fermionische LAGRANGEDichte ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Fermion} = & \sum_{\psi} \bar{\psi} i \not{D} \psi = \bar{u} \left(i \not{\partial} + e \frac{2}{3} \mathcal{A} \right) u + \bar{d} \left(i \not{\partial} - e \frac{1}{3} \mathcal{A} \right) d + \bar{e} (i \not{\partial} - e \mathcal{A}) e + \bar{\nu} i \not{\partial} \nu + \\ & + \underbrace{\frac{e}{\sin(\theta_W) \cos(\theta_W)} \left[\bar{u} \mathcal{Z} \left(\frac{1}{4} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) - \frac{2}{3} \sin^2(\theta_W) \right) u + \bar{d} \mathcal{Z} \left(-\frac{1}{4} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) + \frac{1}{3} \sin^2(\theta_W) \right) d + \right.}_{\text{neutrale Ströme}} \\ & \left. + \bar{e} \mathcal{Z} \left(-\frac{1}{4} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) + \sin^2(\theta_W) \right) e + \bar{\nu} \mathcal{Z} \frac{1}{4} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) \nu \right]}_{\text{neutrale Ströme}} + \\ & + \underbrace{\frac{e}{\sqrt{2} \sin(\theta_W)} \left(\bar{u} \mathcal{W}^+ \frac{1}{2} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) d + \bar{d} \mathcal{W}^- \frac{1}{2} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) u + \bar{\nu} \mathcal{W}^+ \frac{1}{2} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) e + \bar{e} \mathcal{W}^- \frac{1}{2} (\mathbf{1}_4 - \gamma_5) \bar{\nu} \right)}_{\text{geladene Ströme}} \end{aligned}$$

Elektrische Ladung unterscheidet nicht zwischen links- und rechtshändigen Teilchen, weshalb wir in den ersten vier Summanden kein γ^5 benötigen.

Ein Fermionmassenterm hat die Form $m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L)$. Dies können wir so nicht hinschreiben, weil links- und rechtshändige Fermionen unterschiedliche Quantenzahlen haben. Um aus \bar{Q}_L und d_R insgesamt unter $SU(2)$ ein Singulett zu machen, benötigen wir ein skalares Dublettfeld (weil beide Spin 1/2 haben). Die Hyperladung von d_R ist $-\frac{1}{3}$ und die von \bar{Q}_L ist $-\frac{1}{6}$. ϕ muss damit die Hyperladung $\frac{1}{2}$ haben, damit die gesamte Hyperladung verschwindet. Da die LAGRANGEDichte reell sein soll, machen wir schließlich folgenden Ansatz:

$$\mathcal{L}_Y = \Gamma_d \bar{Q}_L \phi d_R + \Gamma_d^* \bar{d}_R \phi^+ Q_L$$

Dasselbe machen wir für das up-Quark. Hier muss ϕ die Hyperladung $-\frac{1}{2}$ haben.

$$\mathcal{L}_Y = \Gamma_u \bar{Q}_L \phi_c u_R + \Gamma_u^* \bar{u}_R \phi_c^+ Q_L \quad \text{mit} \quad \phi_c = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix}$$

Führen wir die unitäre Eichung durch:

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_c = \begin{pmatrix} \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit

$$(\bar{u}_L, \bar{d}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} d_R = \bar{d}_L d_R \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}}$$

folgt dann:

$$\mathcal{L}_Y = \Gamma_d \bar{d}_L d_R \frac{v+H}{\sqrt{2}} + \text{c.c.} + \Gamma_u \bar{u}_L u_R \frac{v+H}{\sqrt{2}} + \Gamma_e \bar{e}_L e_R \frac{v+H}{\sqrt{2}}$$

Aus den Massentermen können wir direkt wieder die Massen ablesen:

$$m_d = \frac{\Gamma_d v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{\Gamma_u v}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad m_e = \frac{\Gamma_e v}{\sqrt{2}}$$

Die YUKAWA-Kopplungskonstante sind allgemein komplexe 3×3 Matrizen im Generationenraum. Hieraus folgt eine 3×3 -Massenmatrix $M_f^{ij} = M_f^{ij} v / \sqrt{2}$.

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{i,j} M^{ij} \bar{f}^i f^j \left(1 + \frac{H}{v} \right) + \text{c.c.}$$

Hier treten Mischungsterme auf. M^{ij} kann jedoch diagonalisiert werden. Man macht also einen Basiswechsel: $f_L^i = (U_L^f)_{ij} f_L^j$ bzw. $f_R^i = (U_R^f)^{ij} f_R^j$:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{i,j} (U_L^{f\dagger} M U_R^f)^{ij} \bar{f}_L^i f_L^j \left(1 + \frac{H}{v}\right) \quad \text{mit } U_L^{d\dagger} M_d U_R^d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$$

Dies stellt eine biunitäre Transformation der Matrix M_f da, also mit unterschiedlichen Transformationsmatrizen U_L und U_R . Somit wird auch die Wechselwirkung mit dem HIGGS-Feld transformiert:

$$\mathcal{L}_Y = \sum_f m_f \bar{f} f \left(1 + \frac{H}{v}\right)$$

Somit ist die HIGGS-Wechselwirkung flavourdiagonal. Das HIGGS-Boson zerfällt nur in Quarks gleichen Flavours.