

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK III

Prof. Dr. Zeppenfeld

Vorlesung Sommersemester 2006

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 26. April 2008

Mitschrieb der Vorlesung THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK III
von Herrn Prof. Dr. ZEPPENFELD im Sommersemester 2006
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Spontan gebrochene Eichsymmetrien	5
1.1 Pfadintegralquantisierung in allgemeiner Eichung	6
1.2 Erweiterung um Fermionen	9
1.3 Spontan gebrochene nichtabelsche Eichtheorien	10
1.3.1 Beispiel: Standardmodell	10
1.3.2 Quantisierung	11
1.4 CP-Verletzung im geladenen Strom	13
1.4.1 ϕ^+ -Wechselwirkung und CKM-Matrix	14
2 Das Goldstoneboson-Äquivalenztheorem	15
2.1 Beispiel: Higgs-Zerfall	15
2.2 Beispiel: Topzerfall	17
3 Higgs-Zerfälle im Standardmodell	19
3.1 Dyson-Resummation	21
3.2 Zur Masse des Higgsteilchens	22
3.3 Higgs-Selbstenergie	24
3.3.1 Fermionische 1-Schleifen-Beiträge zu $\Pi_H(p^2)$	24
3.3.2 Fine-Tuning-Problem	25
3.3.3 Quartische Kopplungen	25
3.3.4 Das minimale supersymmetrische Standardmodell in der Entkopplungsgrenze	25
4 Ward-Identitäten und Renormierung der QED	27
4.1 Graphische Darstellung	29
4.2 Ward-Identitäten für die Quantenelektrodynamik	31
4.3 Power Counting	33
5 QCD in der Teilchenphysik	41
5.0.1 Korrekturen durch Gluon-Emission	42
5.1 Streuung von Hadronen	42
5.1.1 Tief inelastische Streuung (Deep Inelastic Scattering (DIS))	43
5.1.2 DIS im naiven Partonmodell	43
5.1.3 DIS durch Photon-Austausch	44
5.1.4 (Anti-)Neutrino-Streuung	45
5.2 DIS: nichtperturbativ	46
5.2.1 Vergleich mit Parton-Niveau-Resultat	48
5.3 DIS jenseits LO	48
5.4 Kolineare Singularitäten in der QED	51
5.5 Equivalent photon approximation (EPA), Weizsäcker-Williams-Approximation	53
5.6 Evolutionsgleichungen DGLAP	55
5.6.1 $\gamma \mapsto e + e^-$ -Splitting	56
5.7 Gribov-Lipatov-Gleichung für $f_{\gamma/e}$, $f_{e/e}$, $f_{\bar{e}/e}$	57
5.7.1 Summenregeln	57
5.8 QCD-Verallgemeinerung	57
5.9 Altarelli-Parisi-Gleichungen	58
5.10 Tief inelastische Streuung in NLO	59

6	Anomale Symmetrien	65
6.1	Gegenbeispiel: Skaleninvarianz der masselosen QCD	65
6.2	Chirale Symmetrien/Chirale Anomalien	65
6.2.1	Berechnung von T^{VVA}	66

Kapitel 1

Spontan gebrochene Eichsymmetrien

Wir wollen uns als ersten mit dem abelschen U(1)-Fall beschäftigen. Hier wird die Eichsymmetrie beschrieben durch lokale Phasentransformationen des Feldes $\phi(x) \mapsto \exp(-ie\Lambda(x))\phi(x)$ und die Transformation eines Eichfeldes $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\Lambda$. Mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ kommt man auf folgende Lagrangendichte:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - \lambda\left(\phi^*\phi - \frac{v^2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

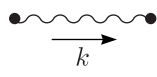
Das Minimum des Potentials $V(\phi)$ liegt bei $\phi = v/\sqrt{2}$. Dies ist der Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes. Diese Feldtheorie hatten wir uns bisher in der unitären Eichung angeschaut. Wir können das komplexe Feld schreiben als

$$\phi(x) = \exp\left(i\frac{\chi(x)}{v}\right)\frac{v + H(x)}{\sqrt{2}}$$

$H(x)$ ist das physikalische Higgs-Feld. In der unitären Eichung wird der komplexe Phasenfaktor durch eine Eichtransformation wegrotiert.

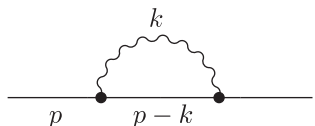
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{e^2 v^2}{2}A_\mu A^\mu \left(1 + \frac{H}{v}\right)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \lambda\left(vH + \frac{H^2}{2}\right)^2$$

Die Higgsmasse folgt aus dem Term, der quadratisch in H ist, und zwar $m_H^2 = 2\lambda v^2$. Analog ergibt sich die Masse des Eichfeldes $m_A = ev$. Das Problem ist, dass der Photon-Propagator



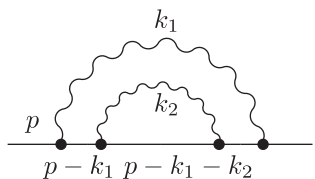
$$= D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_A^2} \right)$$

für $k \mapsto \infty$ nicht gedämpft ist, sondern $\sim k_\mu k_\nu / k^2 \sim k^0$.



$$= \int^M d^4k \frac{1}{\not{p} - \not{k}} \sim M^3$$

Die Selbstenergie ist mindestens quadratisch divergent.



$$= \int^M d^4k_1 d^4k_2 \frac{1}{(\not{p} - \not{k}_1)^2} \frac{1}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2} \sim M^5$$

Die Theorie erscheint also nicht renormierbar; es treten immer schlimmere Divergenzen auf, je mehr Schleifen man betrachtet.

1.1 Pfadintegralquantisierung in allgemeiner Eichung

Wir zerlegen das komplexe skalare Feld in Real- und Imaginärteil und betrachten Fluktuationen um den Vakuumerwartungswert:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + i\varphi)$$

Die kovariante Ableitung ist gegeben durch:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu h - eA_\mu\varphi) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\varphi + eA_\mu(v + h))$$

Damit drücken wir die gesamte Lagrangedichte mittels der Felder h und φ aus:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h - eA_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi + eA_\mu v + eA_\mu h)^2 - \lambda\left(vh + \frac{h^2}{2}\right)^2$$

\mathcal{L} ist immer noch invariant unter den Eichtransformationen $\phi \mapsto \exp(-ie\Lambda)\phi$ und $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\Lambda$. Für infinitesimales Λ gilt $\delta h = e\Lambda\varphi$, $\delta\varphi = -e\Lambda(v + h)$ und $\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda$.

Schauen wir uns nun das Erzeugendenfunktional an:

$$\begin{aligned} Z &= N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}h \mathcal{D}\varphi \int \mathcal{D}\omega \exp\left(-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2}\right) \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu, h, \varphi) - \omega\right) \delta(G(A, h, \varphi)) \det\left(\frac{\delta G}{\delta\Lambda}\right) = \\ &= N' \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}h \mathcal{D}\varphi \exp\left(i \int d^4x \left(\mathcal{L} - \frac{G^2}{2}\right)\right) \det\left(\frac{\delta G}{\delta\Lambda}\right) \end{aligned}$$

Die Eichfixierung wird durch $G(A, h, \varphi)$ festgelegt. ω ist eine Funktion, die nicht vom Eichparameter abhängt; über diese Funktion wird gemittelt. Wähle

$$G = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(\partial_\mu A^\mu - \xi\varphi ev) \text{ bzw. } -\frac{G^2}{2} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + ev\varphi\partial_\mu A^\mu - \frac{\xi}{2}(ev)^2\varphi^2$$

In \mathcal{L} tritt der Mischungsterm $\mathcal{L} = (\partial_\mu\varphi)A^\mu ev$ auf und von $-G^2/2$ kommt der Term $ev\varphi\partial_\mu A^\mu$. Damit folgt:

$$\int d^4x [(\partial_\mu\varphi)A^\mu ev + ev\varphi\partial_\mu A^\mu] = \int d^4x ev\partial_\mu(\varphi A^\mu) = 0$$

Der unerwünschte gemischte Term fällt also mit obiger Wahl von G heraus.

Die Propagatorterme sind nun die Terme, welche quadratisch in den Feldern sind.

$$\uparrow_2 = \left(\mathcal{L} - \frac{G^2}{2}\right)_{quadr.} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}(ev)^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{\xi}{2}(ev)^2\varphi^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$$

Wir lesen aus den quadratischen Ausdrücken die Massen der Felder ab:

$$m_h^2 = 2\lambda v, \quad m_A = ev \text{ und } m_\varphi^2 = \xi(ev)^2 = \xi m_A^2$$

Durch partielle Integration folgt dann weiterhin:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}A_\mu \left[-g^{\mu\nu}\square + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu - m_A^2 g^{\mu\nu}\right] A_\nu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \frac{m_h^2}{2}h^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\xi m_A^2\varphi^2$$

Nun müssen wir noch die Funktionaldeterminante parametrisieren:

$$\frac{\delta G}{\delta\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial_\mu\delta A^\mu - \xi(\delta\varphi)ev}{\delta\Lambda} = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(-\square - \xi(ev)^2 \left(1 + \frac{h}{v}\right)\right)$$

Hier haben wir $\delta\varphi = -e\Lambda(v + h)$ und $\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda$ verwendet.

$$\det\left(\frac{\delta G}{\delta\Lambda}\right) = N'' \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp\left(i \int d^4x \bar{c} \left(-\square - \xi m_A^2 \left(1 + \frac{h}{v}\right)\right) c\right)$$

Weil Wechselwirkungsterme mit anderen Feldern auftreten, können wir die Geiststerme nicht in die Normierungskonstante stecken, sondern müssen diese mitnehmen:

$$\mathcal{L}_{Geist} = \bar{c} \left(-\square - \xi m_A^2 \left(1 + \frac{h}{v}\right)\right) c$$

Sie treten also in Feynman-Graphen auf.

* Higgs-Teilchen:

$$\bullet \text{---} \rightarrow \text{---} \bullet : -\frac{i}{k^2 - m_h^2 + i\epsilon}$$

* Goldstone-Boson:

$$\mu \bullet \text{---} \overset{A}{\text{wavy}} \text{---} \bullet \nu : \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2 + i\epsilon}$$

* Geist:

$$\bullet \text{---} \rightarrow \text{---} \bullet : \frac{i}{k^2 - \xi m_A^2}$$

Kommen wir nun zum Photonpropagator. Dieser ist das Inverse von

$$k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu - m_A^2 g^{\mu\nu}$$

Dabei handelt es sich um eine 4×4 -Matrix im Minkowski-Raum, die wir nun invertieren müssen. Dazu teilen wir den Ausdruck auf in einen longitudinalen und transversalen Anteil.

$$\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) (k^2 - m_A^2) - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \left[\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^2 - k^2 + m_A^2\right] = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) (k^2 - m_A^2) - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \left(-\frac{1}{\xi}(k^2 - \xi m_A^2)\right)$$

Da die Faktoren

$$g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \text{ und } \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

Projektoren sind, kann die Invertierung schnell durchgeführt werden:

$$\begin{aligned} iD_{\mu\nu}(k) &= \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \frac{1}{k^2 - m_A^2} + \frac{\xi}{k^2 - \xi m_A^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} = \frac{1}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \left[1 - \frac{\xi k^2 - \xi m_A^2}{k^2 - \xi m_A^2}\right]\right) = \\ &= \frac{1}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu (1 - \xi) k^2}{k^2 (k^2 - \xi m_A^2)}\right) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{---} \overset{\text{wavy}}{\text{---}} \bullet : \frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi m_A^2}\right)$$

$$\mathcal{L}_{U(1)} = \mathcal{L}_{kl} - \frac{G^2}{2} + \bar{c} \left(-\sqrt{\xi} \frac{\delta G}{\delta \Lambda}\right) c = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_I$$

Der Wechselwirkungsterm ist gegeben durch:

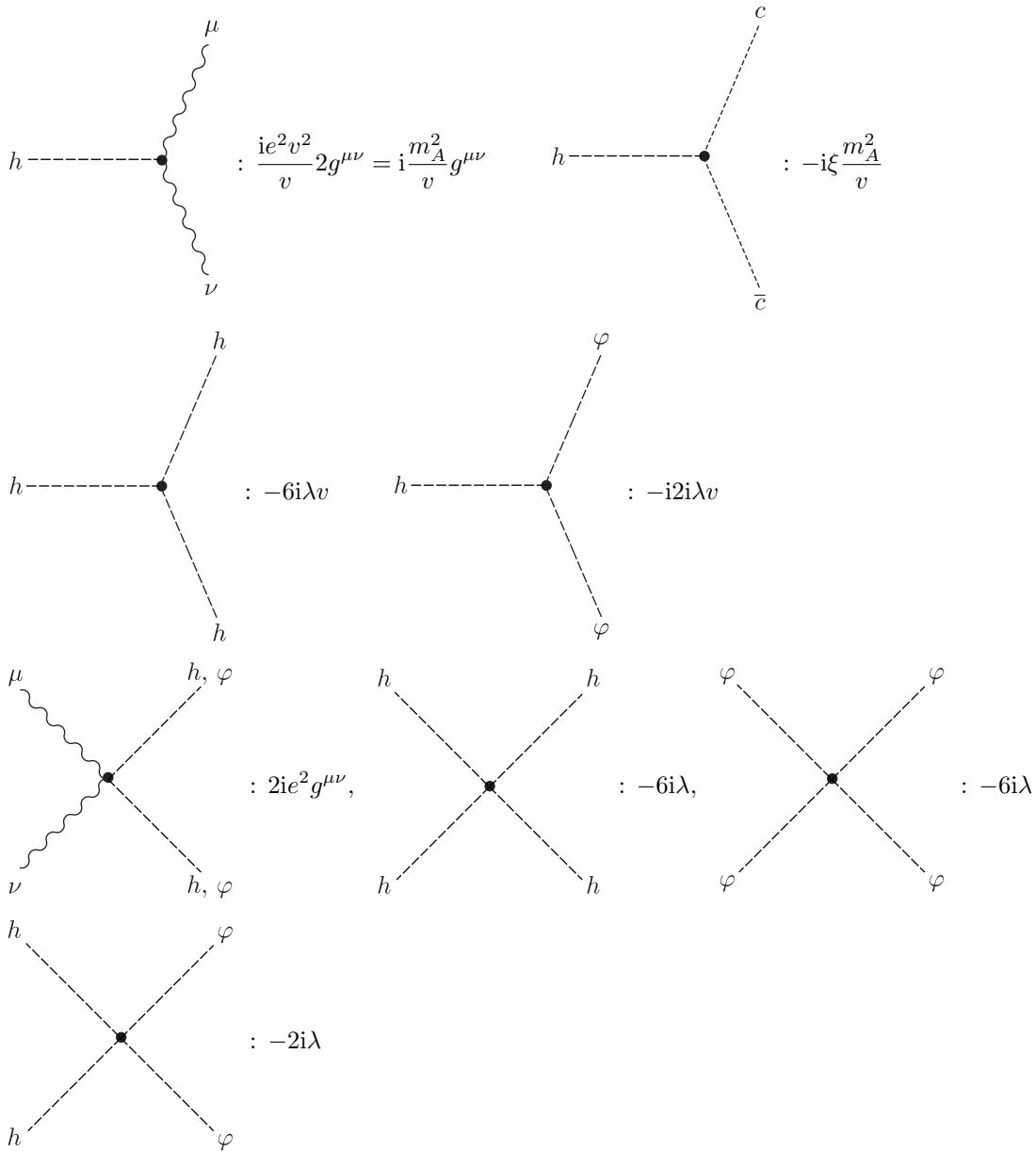
$$\mathcal{L}_I = e A_\mu (h \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu h) + \frac{e^2}{2} (\varphi^2 + h^2) A_\mu A^\mu + e^2 v h A_\mu A^\mu - \xi \frac{m_A^2}{v} h \bar{c} c - \lambda \left(v h^3 + v h \varphi^2 + \frac{h^4}{4} + \frac{h^2 \varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4}\right)$$

Die ersten beiden Terme würde man auch in einer ungebrochenen Theorie erwarten. Die Vertexregeln folgen aus der Wick-Entwicklung von $\exp(i \int d^4 z \mathcal{L}_I(z))$.

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E} [\exp(-ip \cdot x) a(p) + \exp(ipx) a^\dagger(p)]$$

Der erste Term beschreibt einlaufende, der zweite Term auslaufende Teilchen. Wir haben also $\partial_\mu \phi$ durch $-ip_\mu$ für einlaufende und durch ip_μ für auslaufende Teilchen zu ersetzen. Also geht $e A_\mu (h \partial^\mu \varphi - \varphi \partial^\mu h)$ über in $ie(ip^\mu - ik^\mu)$, was zur folgenden Feynman-Regel führt:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{l} h \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \varphi \end{array} \\ \begin{array}{l} k \\ \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \\ p \end{array} \\ \begin{array}{l} \mu \text{---} \text{wavy} \text{---} \bullet \end{array} \end{array} : e(k-p)^\mu$$



Im Limes $\xi \mapsto \infty$ haben wir den Fall der unitären Eichung. Für $m_\varphi, m_c \mapsto \infty$ verschwinden sowohl die Goldstone-Bosonen als auch die Geister und der Photon-Propagator geht über in:

$$\frac{-i}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_A^2} \right)$$

Das Problem sind die Schleifenbeiträge wie

$$= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{i(q-2p)_\mu} \frac{i}{(q-p)^2 - m_h^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 - \xi m_A^2 + i\epsilon} e^{i(2p-q)_\nu}$$

Das Integral ist quadratisch divergent, wie man durch Powercounting feststellt. Die Divergenz rührt von dem Bereich her, bei dem m_A^2 vernachlässigt wird. Sie verschwindet auch für $\xi \mapsto \infty$ nicht. In Schleifen tragen also Geister und Goldstone-Bosonen auch für $\xi \mapsto \infty$ bei! Berücksichtigt man nur Baumgraphen, so ist die unitäre Eichung durchaus sinnvoll. Bei Schleifen ist jedoch die Feynman-Eichung ($\xi = 1$) besser.

$$D_{\mu\nu}^{Feynman} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - m_A^2}$$

In dieser Eichung haben die Geister und Goldstone-Felder genau die gleiche Masse wie das Eichfeld. Es gilt also $m_\varphi = m_A$ und $m_c = m_A$.

1.2 Erweiterung um Fermionen

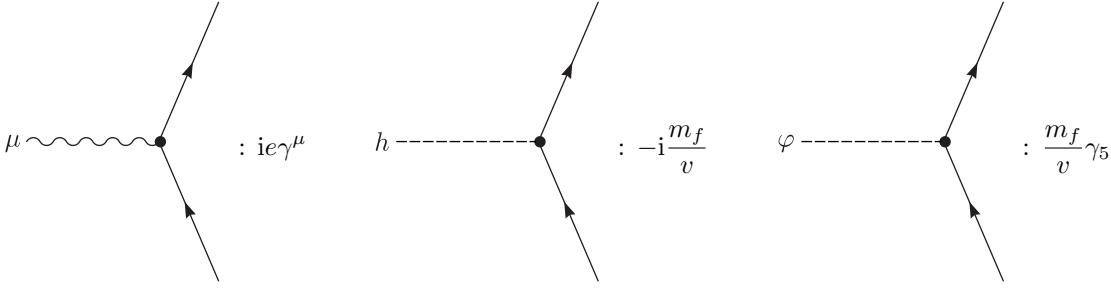
Die rechtshändigen Felder wechselwirken nicht mit den Eichbosonen:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}_L(i\not{D})\psi_L + \bar{\psi}_R i\not{\partial}\psi_R - \lambda_f (\bar{\psi}_L \phi \psi_R + \bar{\psi}_R \phi^* \psi_L)$$

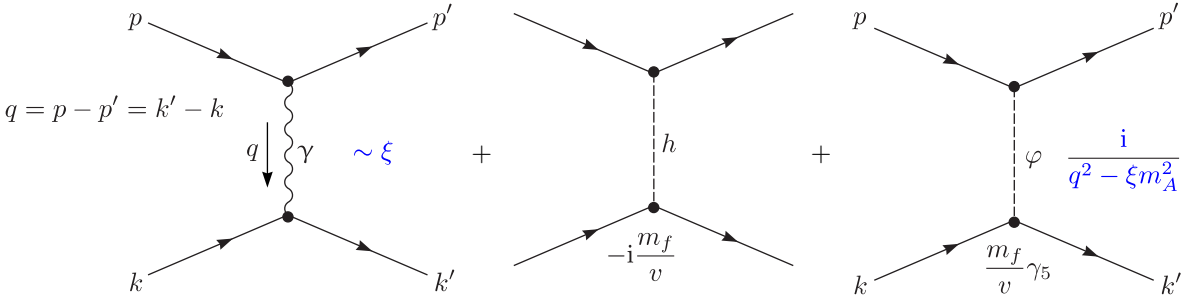
Die kovariante Ableitung ist $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, also hat ψ_L die Ladung $+1$. Die Yukawa-Wechselwirkung liefert die Fermionmasse nach der Ersetzung $\phi = 1/\sqrt{2}(v + h + i\varphi)$.

$$\mathcal{L}_Y = -\frac{\lambda_f}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi}(v + h + i\varphi) \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi + \bar{\psi}(v + h - i\varphi) \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi \right) = -\frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}} \left(\bar{\psi} \psi \left(1 + \frac{h}{v} \right) + \bar{\psi} i \gamma_5 \psi \frac{\varphi}{v} \right) \text{ mit } \frac{\lambda_f v}{\sqrt{2}}$$

Daraus ergeben sich folgende Feynman-Regeln für diese Theorie:



Unser Ziel ist nun, die $ff \mapsto ff$ -Streuung zu berechnen.



Für diese Baumgraphen-Rechnung erwarten wir, dass unser Ergebnis dasselbe ist wie in der unitären Eichung. An dieser Stelle spalten wir den Term im Photonpropagator auf:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \xi m_A^2} &= g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} + q^\mu q^\nu \left(\frac{1}{m_A^2} - (1 - \xi) \frac{1}{q^2 - \xi m_A^2} \right) = \\ &= g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} + q^\mu q^\nu \left(\frac{q^2 - \xi m_A^2 - (1 - \xi) m_A^2}{m_A^2 (q^2 - \xi m_A^2)} \right) = g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2 - \xi m_A^2} \frac{q^2 - m_A^2}{m_A^2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{wavy line} \text{---} \bullet \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{-i}{q^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} \right) + \frac{-i}{q^2 - \xi m_A^2} \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2}$$

Die gesamte Amplitude ergibt sich als Summe der drei Beiträge:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_A + \mathcal{M}_h + \mathcal{M}_\varphi$$

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_A &= \bar{u}(p') i e \gamma^\mu P_L u(p) \left[\frac{-i}{q^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} \right) - i \frac{q^\mu q^\nu}{m_A^2} \frac{1}{q^2 - \xi m_A^2} \right] \bar{u}(k') i e \gamma_\nu P_L u(k) = \\ &= i\mathcal{M}_A^{u, Eich.} + i \frac{e^2}{m_A^2} \bar{u}(p') \not{q} P_L u(p) \frac{1}{q^2 - \xi m_A^2} \bar{u}(k') \not{q} P_L u(k) \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_\varphi = \bar{u}(p') \frac{m_f}{v} \gamma_5 u(p) \frac{i}{q^2 - \xi m_A^2} \bar{u}(k') \frac{m_f}{v} \gamma_5 u(k)$$

Mit der Dirac-Gleichung folgt

$$\bar{u}(p') \not{q} P_L u(p) = \bar{u}(p') = \bar{u}(p') (\not{p} - \not{p}') \frac{1 - \gamma_5}{2} u(p) = \frac{1}{2} \bar{u}(p') (\not{p}' \gamma_5 + \gamma_5 \not{p}) u(p) = m_f \bar{u}(p') \gamma_5 u(p)$$

$$\bar{u}(k') \not{q} P_L u(k) = \bar{u}(k') (\not{k}' - \not{k}) P_L u(k) = -m_f \bar{u}(p') \gamma_5 u(p)$$

und hieraus ergibt sich wiederum:

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_A^{u.Eich.} - \frac{m_f^2 e^2}{m_A^2} \bar{u}(p') \gamma_5 u(p) \frac{1}{q^2 - \xi m_A^2} \bar{u}(k') \gamma_5 u(k)$$

Mit $m_A = ev$ erkennen wir, dass sich \mathcal{M}_φ mit dem ξ -Term von \mathcal{M}_A weghebt. Die gesamte Streuamplitude ist also genau der Beitrag von der unitären Eichung: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_A^{u.Eich.} + \mathcal{M}_h$. Damit ist die Eichinvarianz gezeigt.

1.3 Spontan gebrochene nichtabelsche Eichtheorien

Wir betrachten n komplexe Skalarfelder, also $2n$ reelle Felder.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^2 - V(\phi)$$

Die Eichtransformation sieht folgendermaßen aus:

$$\phi'(x) = O(x) \phi(x) = \exp(-\alpha^a(x) T^a) \phi(x)$$

Die T^a sind antisymmetrische reelle Generatoren. Schauen wir uns infinitesimale Transformationen an:

$$\delta \phi_i(x) = -\alpha^a(x) T_{ij}^a \phi_j(x) = i\alpha^a (iT_{ij}^a) \phi_j$$

Wenn T^a antisymmetrisch ist, so ist iT^a ein hermitescher Generator. Die infinitesimale Eichtransformation des Eichfeldes können wir in folgender Form schreiben:

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha^a - g f^{abc} \alpha^b A_\mu^c) = \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a$$

Die infinitesimale Transformation des Eichfeldes ist nichts anderes als die kovariante Ableitung des Eichparameters α . Die kovariante Ableitung für die skalaren Felder ist gegeben durch:

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i + g A_\mu^a T_{ij}^a \phi_j = (\partial_\mu - ig A_\mu \phi)_i$$

Das Minimum des Potentials $V(\phi)$ liegt bei einem Vakuumerwartungswert $\langle \phi_i \rangle = \phi_{i0}$. Anregungen können wir schreiben in der Form $\phi_i(x) = \phi_{i0} + \chi_i(x)$ mit Fluktuationen $\chi_i(x)$. Die Eichbosonmassen rühren von $(D_\mu \phi)^2$ her

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \chi_i + g A_\mu^a T_{ij}^a (\phi_{j0} + \chi_j)$$

also speziell vom Term $g A_\mu^a T_{ij}^a \phi_{j0}$.

$$\frac{1}{2} g^2 A_\mu^a T_{ij}^a \phi_{j0} T_{il}^b \phi_{l0} A_\nu^b = \frac{1}{2} A_\mu^a g^2 F_i^a F_i^b A_\nu^b = \frac{1}{2} A_\mu^a (m_A^2)^{ab} A_\nu^b$$

Die Matrizen $F_i^a = T_{ij}^a \phi_{j0}$ vermitteln einen Übergang vom Raum der skalaren Felder in den Raum der Eichbosonfelder. Diese Matrizen sind im allgemeinen nicht quadratisch. (In unserem Falle hier ist sie jedoch zufällig quadratisch, da wir vier Eichfelder und vier skalare Felder haben.) Die Massenmatrix (m_A^2) für die Eichbosonen ist durch das Produkt der Matrizen F_i^a gegeben.

$$(m_A^2)^{ab} = g^2 (F F^\top)^{ab}$$

Die Massenmatrix ist quadratisch.

1.3.1 Beispiel: Standardmodell

Wir schreiben das Higgs-Feld als komplexes Dublettfeld der folgenden Form:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\chi_1 - i\chi_2) \\ v + \chi_\varphi + i\chi_\xi \end{pmatrix} \text{ mit } \chi_\varphi = H$$

Der Vakuumerwartungswert ist

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

Jetzt geht es darum, die reellen Darstellungsmatrizen T^a zu erhalten. Wir benötigen diese jedoch nicht in expliziter Form.

$$T^a = -i\frac{\sigma^a}{2}, T^Y = -iY = -\frac{i}{2}\mathbf{1}$$

$$T^1\Phi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -iv \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{v}{2} \text{ in } \chi_1\text{-Richtung}$$

$$T^2\Phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{v}{2} \text{ in } \chi_2\text{-Richtung}$$

$$T^3\Phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ iv \end{pmatrix} \quad \frac{v}{2} \text{ in } \chi_3\text{-Richtung}$$

$$T^Y\Phi_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -iv \end{pmatrix} \quad -\frac{v}{2} \text{ in } \chi_3\text{-Richtung}$$

In die χ_4 -Richtung kommen wir nie.

$$gF_i^a = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & -g' & 0 \end{pmatrix} \text{ und } gF^\top = \frac{v}{2}\begin{pmatrix} g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & -g' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (m_A^2)^{ab} = \frac{v^2}{4}\begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 & -gg' \\ 0 & 0 & -gg' & g'^2 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte der Matrix sind $(gv/2)^2$ mit algebraischer Vielfachheit 2 (entspricht $m_W = gv/2$), $(g^2+g'^2)v^2/v$ mit Vielfachheit 1 (entspricht $m_Z = \sqrt{g^2+g'^2}v/2$) und 0 mit Vielfachheit 1 ($m_\gamma = 0$).

$$\mathcal{L}_{kl}|_2 = -\frac{1}{2}A_\mu^a(-g^{\mu\nu}\square + \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu^a + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{1}{2}(m_A^2)^{ab}A_\mu^aA^{\mu b} + g(\partial^\mu\chi_i)A_\mu^aF_i^a + \frac{1}{2}M_{ij}^2\chi_i\chi_j \text{ mit } M_{ij}^2 = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial\chi_i\partial\chi_j}\right|_{\phi_0}$$

1.3.2 Quantisierung

$$Z = N' \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\chi \exp\left(i \int d^4x \left(\mathcal{L}_{kl} - \frac{G^2}{2}\right)\right) \det\left(\frac{\delta G}{\delta\alpha}\right)$$

Arbeiten wir wieder in der R_ξ -Eichung. Was wir wegheben wollen, ist der blaue Term in \mathcal{L}_{kl} .

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}}(\partial_\mu A^{\mu a} - \xi g F_i^a \chi_i)$$

Zusätzlicher quadratischer Term:

$$-\frac{1}{2}G^2 = \left(-\frac{1}{2}G^2\right)\Big|_2 = \frac{1}{2}A_\mu^a \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu A_\nu^a + g \partial_\mu A^{\mu a} F_i^a \chi_i - \frac{1}{2} \xi g^2 \chi_i F_i^a F_j^a \chi_j$$

$$\left(\mathcal{L}_{kl} - \frac{1}{2}G^2\right)\Big|_2 = -\frac{1}{2}A_\mu^a \left(-g^{\mu\nu}\square + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu - (m_A^2)^{ab}g^{\mu\nu}\right)A_\nu^b +$$

$$+ \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}(M^2)_{ij}\chi_i\chi_j - \frac{1}{2}\chi_i\xi g^2(F^\top F)_{ij}\chi_j$$

Schauen wir uns nun die Massenmatrizen für die Eichbosonen und Goldstonebosonen an:

$$(m_A^2)^{ab} = g^2 F_i^a F_i^b = g^2 (F F^\top)^{ab} \text{ und } (m_G^2)_{ij} = \xi g^2 (F^\top F)_{ij}$$

Daraus können wir die Propagatoren direkt ablesen:

$$\begin{array}{c} \mu, a \bullet \text{-----} \bullet \nu, b \\ \longleftarrow k \end{array} : \frac{-i}{k^2 - g^2 F F^\top} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi g^2 F F^\top} \right)^{ab}$$

Dabei handelt es sich um eine Matrix im Farbraum.

$$i \bullet \text{-----} \bullet j : \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F^\top F} \right)_{ij}$$

Schauen wir uns hierzu die Goldstonemassen im Standardmodell an:

$$\xi g^2 F^\tau F = \xi \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} m_W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Massen der Goldstonebosonen sind genau die Massen der korrespondierenden Eichbosonen mit einem zusätzlichen Faktor ξ . Benötigt wird nun noch die Parametrisierung der Funktionaldeterminante $\det(\delta G/\delta\alpha)$.

$$G^a = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (\partial_\mu A^{\mu a} - \xi g F_i^a \chi_i)$$

Mit den Variationen

$$\delta\phi_i = -\alpha^a T_{ij}^a \phi_j = \delta\chi_i \text{ und } \delta A_\mu^a = \frac{1}{g} (D_\mu \alpha)^a$$

ergibt sich die Variation von G^a bezüglich α^b :

$$\frac{\delta G^a}{\delta \alpha^b} = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \left(\frac{1}{g} \partial_\mu (D^\mu)^{ab} + \xi g F_i^a T_{ij}^b (\phi_{0j} + \chi_j) \right) = -\frac{1}{g\sqrt{\xi}} [-(\partial_\mu D^\mu)^{ab} - \xi g F_i^a (g F_i^b + g T_{ij}^b \chi_j)]$$

Dabei handelt es sich um einen Differentialoperator bezüglich der Raum-Zeit und eine Matrix im Farbraum. Diesen Differentialoperator müssen wir nun mittels der Geistfelder parametrisieren:

$$\mathcal{L}_{Geist} = \bar{c}^a [-(\partial_\mu D^\mu)^{ab} - \xi g^2 (F F^\tau)^{ab} - \xi g^2 F_i^a T_{ij}^b \chi_j] c^b$$

$$\mathcal{L}_{Geist}|_2 = -\square \delta^{ab} - \xi (m_A^2)^{ab}$$

Versuchen wir jetzt die Feynman-Regeln für die Geister abzuleiten.

$$a \bullet \xrightarrow{k} \bullet b : \left(\frac{i}{k^2 - \xi g^2 F F^\tau} \right)^{ab}$$

Die Wechselwirkung $\partial_\mu D^\mu$ ist analog zur QCD. Wechselwirkung zwischen Geistern und skalaren Feldern:

$$\bar{c}^a \xi \left(\frac{m_A^2}{v} \right)_i^{ab} \chi_i c^b$$

Dies ist die einzigste Wechselwirkung, die proportional zum Eichparameter ξ ist.

$$f_{L,i}^0 = (U_L^f)_{ij} f_{L,j} \text{ und } f_{R,i}^0 = (U_R^f)_{ij} f_{R,j}$$

Weil die linkshändigen Felder zu Dubletts und die rechtshändigen Felder zu Singulets gehören, können wir diese unabhängig voneinander rotieren.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Masse} &= M_{ij}^f \bar{f}_{L,i}^0 f_{R,j}^0 + \text{k.k.} = M_{ij}^f ((U^*)_{L,ik}^f) \bar{f}_{L,k} (U_{R,jm}^f) f_{R,m} = (U_{L,ki}^\dagger)^f M_{ij}^f (U_{R,jm}^f) \bar{f}_{L,k} f_{R,m} = \\ &= (U_{L,km}^\dagger)^f M_{ij}^f (U_{R,jm}^f) \bar{f}_{L,k} f_{R,m} = m_{km}^f \delta_{km} \bar{f}_{L,k} f_{R,m} \end{aligned}$$

Eine beliebige komplexe Matrix kann nur mit zwei unabhängigen komplexen Matrizen diagonalisiert werden (und auf reelle Eigenwerte gebracht werden).

$$U_L^\dagger M^d U_R^d = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [M_{ij}^f \bar{f}_{L,i}^0 f_{R,j}^0 + \text{k.k.}] \left(1 + \frac{H + i\chi}{v} \right) &= [M_{ij}^f ((U^*)_{L,ik}^f) \bar{f}_{L,k} (U_{R,jm}^f) f_{R,m} + \text{k.k.}] \left(1 + \frac{H + i\chi}{v} \right) = \\ &= [(U_{L,ki}^\dagger)^f M_{ij}^f (U_{R,jm}^f) \bar{f}_{L,k} f_{R,m} + \text{k.k.}] \left(1 + \frac{H + i\chi}{v} \right) = \\ &= [(U_{L,km}^\dagger)^f M_{ij}^f (U_{R,jm}^f) \bar{f}_{L,k} f_{R,m} + \text{k.k.}] \left(1 + \frac{H + i\chi}{v} \right) = \\ &= [m_{km}^f \delta_{km} \bar{f}_{L,k} f_{R,m} + \text{k.k.}] \left(1 + \frac{H + i\chi}{v} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_Y = \sum_{f=\nu_e, \dots, t} m_f \bar{f} f \left(1 + \frac{H}{v}\right)$$

Die Higgs-Wechselwirkung wird automatisch gleichzeitig mit den Massen diagonalisiert. Es gibt keine flavourändernden Higgs-Prozesse auf Baumgraphenniveau, dass Higgs-Teilchen erzeugt also keine flavourändernde Wechselwirkung. In Erweiterungen des Standardmodells muss dies nicht sein. Schauen wir uns nun die Wechselwirkungen der γ und Z mit den u , c und t an.

$$\bar{u}_i^0 Z \left(\frac{1}{4}(\mathbf{1} - \gamma_5) - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_i^0$$

Wir müssen nach links und rechtshändigen Felder zerlegen, weil sich diese unterschiedlich transformieren.

$$\begin{aligned} \bar{u}_i^0 Z \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) u_i^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) &= \bar{u}_{L,i}^0 Z u_{L,i}^0 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) + \bar{u}_{R,i}^0 Z u_{R,i}^0 \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) = \\ &= \bar{u}_i Z \left(\frac{1}{4}(\mathbf{1} - \gamma_5) - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_i \end{aligned}$$

Es finden hier also keine Übergänge zwischen verschiedenen Quark-Flavours statt aufgrund von $U_L^\dagger U_L = \mathbf{1} = U_R^\dagger U_R$. Mit Flavours mischen sich für neutrale Ströme (neutral currents) nicht (GIM-Mechanismus [GLASHOW, ILOPOULOS, MAKAI]). Kommen wir nun zu den geladenen Strömen (charged currents), also die Wechselwirkung mit den W^\pm .

$$\begin{aligned} \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \bar{u}_{L,i}^0 W^+ d_{L,i}^0 + \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \bar{d}_{L,i}^0 W^- u_{L,i}^0 &= \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_w} \left[(\bar{u}_L U^{u\dagger})_i W^+ (U^d d_L)_i + \text{k.k.} \right] = \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{L,i} (U^{u\dagger} U^d)_{ij} W^+ d_{L,j} + \text{k.k.} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{L,i} (V_{CKM})_{ij} W^+ d_{L,j} + \text{k.k.} \end{aligned}$$

V_{CKM} ist eine allgemeine unitäre 3×3 -Matrix. Die Matrixelemente können bisher nur experimentell bestimmt werden.

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

$$|V_{ud}| = 0,9738 \pm 0,0005 \approx \cos \theta_c, \quad |V_{cd}| = 0,224 \pm 0,012 \approx \sin \theta_c,$$

$$|V_{us}| = 0,2196 \pm 0,0023 \approx \sin \theta_c \quad \text{und} \quad |V_{cs}| = 0,996 \pm 0,013 \approx \cos \theta_c$$

V_{ud} kann über den β -Zerfall von Kernen sehr genau gemessen werden. Cabbico hatte damals nur die Mischung von d - mit s -Quarks angeschaut, weshalb obere Werte ungefähr mit $\sin \theta_c$ bzw. $\cos \theta_c$ übereinstimmen.

$$|V_{cb}| = 0,0413 \pm 0,0015, \quad |V_{ub}| = 0,00367 \pm 0,00047 \quad \text{und} \quad |V_{tb}| = 0,99 \pm 0,29$$

V_{tb} kommt aus direkten Top-Quark-Messungen (großer Fehler). Für Übergänge innerhalb einer Generation liegen die Matrixelemente nahe bei eins.

1.4 CP-Verletzung im geladenen Strom

$$\mathcal{L}_{cc} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u} V_{CKM} W^+ P_L d + \text{k.k.} = \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{ij} W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) d_j + \frac{g}{\sqrt{2}} V_{ij}^* W_\mu^- \bar{d}_j \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_i$$

Schauen wir uns das Verhalten unter CP-Transformationen an.

$$\mathcal{P} \bar{u}_i \gamma^\mu (\mathbf{1} \mp \gamma_5) d_j \mathcal{P}^\dagger = \bar{u}_i \gamma_\mu (\mathbf{1} \pm \gamma_5) d_j, \quad \mathcal{P} W_\mu^+ \mathcal{P}^\dagger = W^{+\mu}$$

$$\mathcal{C} \bar{u}_i \gamma^\mu (\mathbf{1} \mp \gamma_5) d_j \mathcal{C}^\dagger = -\bar{d}_j \gamma^\mu (\mathbf{1} \pm \gamma_5) u_i, \quad \mathcal{C} W_\mu^+ \mathcal{C}^\dagger = -W_\mu^-$$

C und P sind maximal verletzt; CP ist jedoch erhalten für $V_{ij} = \delta_{ij}$.

$$\mathcal{C} \mathcal{P} \mathcal{L}_{cc} (\mathcal{C} \mathcal{P})^\dagger = \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{ij} (-W^{\mu-}) (-\bar{d}_j \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) u_i) + \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{ij}^* W_\mu^+ \frac{g}{2\sqrt{2}} V_{ij}^* W_\mu^+ \bar{u}_i \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma_5) d_j$$

Nur dann, wenn V_{CKM} reell ist, ändert sich \mathcal{L}_{cc} nicht. \mathcal{L}_{cc} verletzt also CP, falls $V_{ij} \neq V_{ij}^*$.

Wir müssen uns die Matrix V_{CKM} für n Generationen anschauen. Dabei handelt es sich um eine beliebige unitäre Matrix; diese besitzt n^2 Parameter, welche wir in $n(n-1)/2$ Winkel ($O(n)$ -Matrix) und $n(n+1)/2$ Phasen unterteilen. Man hat nun die Freiheit der Phasenwahl der Fermifelder: $u_i \mapsto \exp(i\alpha_i)u_i$ und $d_i \mapsto \exp(i\beta_i)d_i$, was $2n$ Phasen entspricht. Davon ist eine Phase global. Die Zahl der physikalischen Phasen ist also

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 2n + 1 = \frac{1}{2}(n^2 - 3n) + 1$$

V_{CKM} mit n Generatoren:

n	Anzahl der Winkel	Anzahl der Phasen	Anzahl der unphysikalischen Phasen	Anzahl der physikalischen Phasen
2	1	3	3	0
3	3	6	5	1

Für zwei Generationen kann man V_{CKM} (also die Cabbibo-Matrix) reell wählen, womit bei zwei Generationen keine CP-Verletzung auftritt. Daraus haben Cabbibo und Maskawa geschlossen, dass es eine dritte Generation geben muss, weil CP-verletzende Effekte (K-System, B-System) im Standardmodell auftreten. Ob es andere Ursünge von CP-Verletzung gibt, ist bisher unbekannt. Wir haben also $3 + 1 = 4$ freie Parameter in V_{CKM} . Wolfenstein-Parametrisierung der CKM-Matrix:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\varrho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \varrho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix} + O(\lambda^4)$$

Die CP-Verletzung im Standardmodell ist stark unterdrückt aufgrund des kleinen Mischungswinkels.

1.4.1 ϕ^+ -Wechselwirkung und CKM-Matrix

$$\Gamma_{ij}^d \bar{Q}^0 \phi^0 d_{R,j}^0 \text{ mit } \bar{Q} = (\bar{u}_L^0, d_L^0) \text{ und } \phi = \begin{pmatrix} i\phi^+ \\ \frac{v+H+iX}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

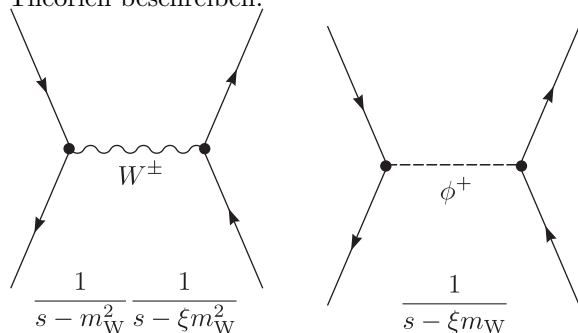
Hieraus folgt ein Wechselwirkungsterm mit dem geladenen Goldstoneboson und den Quarks:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^d \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_{L,i}^0 d_{R,j}^0 i\phi^+ \frac{\sqrt{2}}{v} &= \bar{u}_L (U_L^u)^\dagger M^d U_R^d d_{R,i} \phi^+ \frac{\sqrt{2}}{v} = \bar{u}_L (U_L^u)^\dagger U_L^d m_{diag} d_{R,i} \phi^+ \frac{\sqrt{2}}{v} = \\ &= \bar{u}_L V_{CKM} m_{diag} d_{R,i} \phi^+ \frac{\sqrt{2}}{v} = m_j^{diag} V_{ij} \bar{u}_{L,i} d_{R,j} i\phi^+ \frac{\sqrt{2}}{v} \end{aligned}$$

Kapitel 2

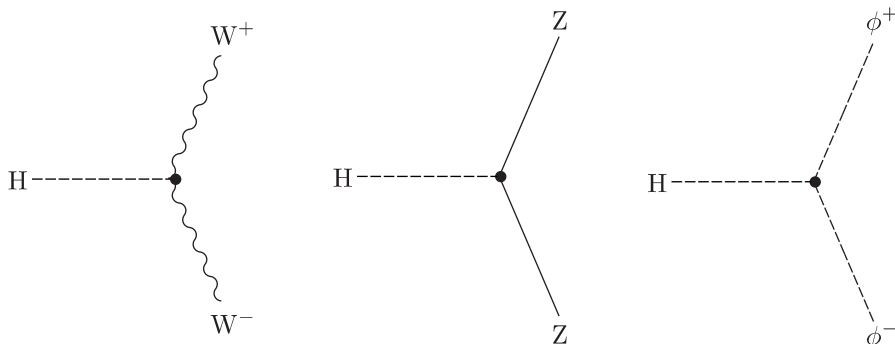
Das Goldstoneboson-Äquivalenztheorem

Die physikalischen Teilchen des Standardmodells sind Quarks, Leptonen, das Higgsteilchen H und die Eichbosonen γ , W^\pm , Z und g . Wenn wir von der unitären Eichung in eine beliebige Eichung wechseln, kommen zusätzliche unphysikalische Felder hinzu, welche nicht als asymptotische Zustände der Streumatrix auftreten sollten. Dabei handelt es sich um die Goldstonebosonen χ , ϕ^\pm und die Geisterfelder u^\pm , u^Z , u^A . Geister können auf keinen Fall als Anfangs- und Endzustände bei einem Streuprozess auftreten, weil sie keine physikalischen Teilchen sind. Sie wurden nur benötigt, um die im Pfadintegralformalismus aufgrund der Eichfixierung auftretende Funktionaldeterminante geschickt zu parametrisieren, damit Feynman-Regeln aufgestellt werden konnten. Außerdem stimmen bei Geistern Spin und Statistik nicht überein. Man könnte jedoch zunächst vermuten, dass Goldstonebosonen physikalische Teilchen sind. Zwar würden deren Resonanzen von der Eichung ξ abhängen, was unphysikalisch ist; es könnte jedoch argumentiert werden, dass verschiedene ξ unterschiedliche Theorien beschreiben.



Man findet aber lediglich eine Resonanz bei m_A^2 ($A = W, Z$) (und nicht bei ξm_A^2). Andere Resonanzen sind nicht erkennbar. Entsprechend sind die Goldstonebosonen χ und ϕ^\pm keine physikalischen Teilchen.

2.1 Beispiel: Higgs-Zerfall



Addiert man alle drei Beiträge und bildet die Zerfallsbreite, so erhält man Unsinn! Der dritte Beitrag existiert folglich nicht. Goldstonebosonen sind keine asymptotischen Teilchen; sie tauchen nicht in $|i\rangle, |f\rangle$ von Streuprozessen auf. Man kann sie jedoch benutzen, um approximative Resultate zu erhalten. Z und W^\pm korrespondieren für $E \gg m_W$ mit χ , ϕ^\pm . Dies besagt das Goldstoneboson-Äquivalenztheorem.

Wir gehen nun aus von einem Vektorboson mit Masse m . Dieses hat drei Polarisationszustände, nämlich zwei transversale und ein longitudinaler Freiheitsgrad. Im Ruhesystem gilt $k^\mu = (m, \vec{0})$ und $\varepsilon_i^\mu = (0, \hat{e}_i)$, wobei $\varepsilon_i \cdot k = 0$ und $\varepsilon_i^2 = -1$. Wir führen nun einen Boost entlang der z -Achse in das bewegte System durch.

$$k^\mu = (E, 0, 0, k) \text{ mit } E^2 = k^2 + m^2 \text{ und } \varepsilon_3^\mu = \varepsilon_L^\mu = \frac{1}{m}(k, 0, 0, E)$$

Die transversalen Polarisationsvektoren $\varepsilon_{i=1,2} = (0, \hat{e}_i)$ ändern sich bei diesem Boost nicht.

$$\varepsilon_L^\mu = \frac{k^\mu}{m} = \frac{1}{m}(k - E, 0, 0, E - k) = \frac{m}{E + k}(-1, 0, 0, 1) \Rightarrow \varepsilon_L^\mu = \frac{k^\mu}{m} + O\left(\frac{m}{E}\right)$$

Wir schauen uns nun die Wechselwirkung der Eichbosonen an (für ein externes W, Z). Dazu gehen wir in die Eichung $\xi = 0$ (aufgrund des störenden Kreuzterms, welcher in diesem Falle verschwindet).

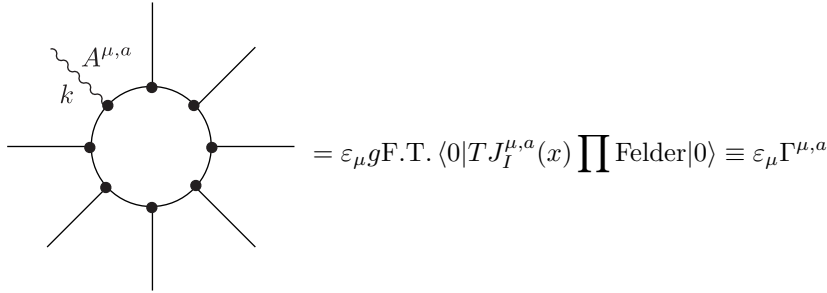
$$\mathcal{L}_I = gA_\mu^a J^{\mu,a} + O(A^2)$$

$J^{\mu,a}$ ist der erhaltene Noether-Strom. Wir können also die Beziehung $\partial_\mu J^{\mu,a} = 0$ ausnutzen. Schauen wir uns den Beitrag von Skalaren an:

$$J_s^{\mu,a} = (\partial_\mu \phi_i) T_{ij}^a \phi_j \text{ mit } \phi_j = \phi_{j,0} + \chi_j$$

$$J_s^{\mu,a} = (\partial_\mu \chi_i)(T_{ij}^a \phi_{j,0} + T_{ij}^a \chi_j); gJ^{\mu,a} = gJ_I^{\mu,a} + (\partial^\mu \chi_j) gF^a$$

S-Matrix-Element mit einem externen massiven Eichboson:



$$= \varepsilon_\mu g \text{F.T.} \langle 0 | T J_I^{\mu,a}(x) \prod \text{Felder} | 0 \rangle \equiv \varepsilon_\mu \Gamma^{\mu,a}$$

Nutzen wir nun die Stromerhaltung aus:

$$\begin{aligned} 0 &= k_\mu \text{F.T.} \langle 0 | T g J^{\mu,a}(x) \prod \text{Felder} | 0 \rangle = k_\mu \text{F.T.} \langle 0 | T (g J_I^{\mu,a} + (\partial^\mu \chi_i) g F_i^a) \prod \text{Felder} | 0 \rangle = \\ &= k_\mu \Gamma^{\mu,a} + k_\mu \text{F.T.} \langle 0 | T \partial^\mu \chi_i m_A^a \delta_{ai} \prod \text{Felder} | 0 \rangle = k_\mu \Gamma^{\mu,a} + k_\mu i k^\mu \frac{i}{k^2} m_A \langle 0 | \chi_i \prod \text{Felder} | 0 \rangle \end{aligned}$$

In einer geeigneten Basis ist die Matrix gF_i^a diagonal und entspricht der Massenmatrix mit den Matrixelementen $m_A^a \delta_{ai}$. $\langle 0 | \chi_i \prod \text{Felder} | 0 \rangle \equiv \Gamma_{\chi_i}$ ist die Amplitude, bei der das äußere Eichboson durch ein Goldstoneboson ersetzt wird.

$$\boxed{k_\mu \Gamma^{\mu,a} = m_A \Gamma_{\chi_i}}$$

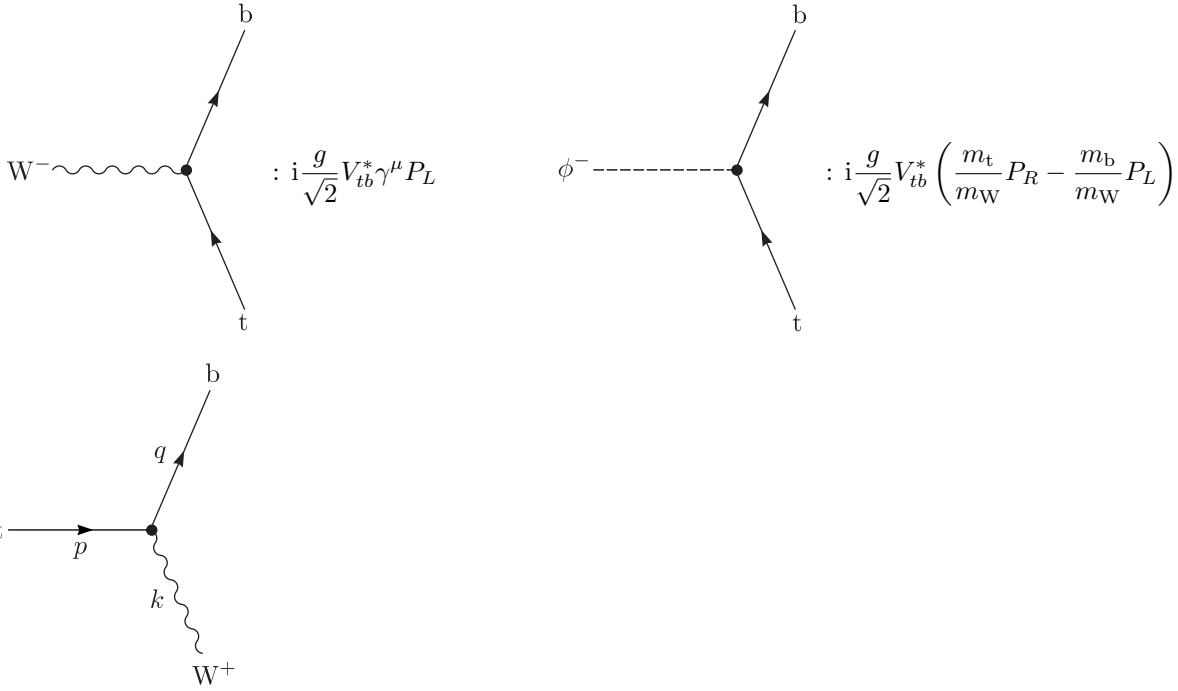
χ_i ist das Goldstoneboson, welches A_μ^a entspricht. Das Resultat gilt exakt.

$$\varepsilon_{\mu,L} \Gamma^\mu \approx \frac{k^\mu}{m} \Gamma^\mu = \Gamma$$

Die Amplitude für longitudinal polarisierte Eichbosonen im Hochenergielimes kann als Matrixelement berechnet werden, in dem das Eichboson durch das entsprechende Goldstoneboson ersetzt wurde. Damit lassen sich komplizierte Rechnungen vereinfachen; außerdem kann mit dieser Methodik ein Eichtest durchgeführt werden (entweder analytisch oder numerisch).

2.2 Beispiel: Topzerfall

Wir betrachten den Prozess $t \mapsto W^+ + b$.



$$i\mathcal{M} = u(q) \frac{ig}{\sqrt{2}} V_{tb}^* \gamma^\mu P_L u(p) \varepsilon_\mu(k)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \text{Sp} [(q + m_b) \gamma^\mu P_L (q + m_t) P_R \gamma^\nu] \sum_{\text{Pol}} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu = \\ &= \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \text{Sp} \left[q \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \gamma_5) \right] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) = \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \cdot 2(g^\mu p^\nu + q^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p \cdot q)) = \\ &= \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \left(2q \cdot p + 4 \frac{(k \cdot q)(k \cdot p)}{m_W^2} \right) \end{aligned}$$

Das Ergebnis können wir mittels der kinematischen Beziehungen noch weiter umschreiben, wobei wir $m_b = 0$ setzen wollen:

$$2q \cdot p = -(p - q)^2 + p^2 + q^2 = -k^2 + p^2 + m_b^2 = m_t^2 - m_W^2$$

$$2k \cdot q = (k + q)^2 - k^2 = m_t^2 - m_W^2$$

$$2k \cdot p = 2k \cdot (k + q) = 2m_W^2 + m_t^2 - m_W^2 = m_t^2 + m_W^2$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 (m_t^2 - m_W^2) \left(2 + \frac{m_t^2}{m_W^2} \right) = \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \frac{m_t^4}{m_W^2} \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2} \right) \left(1 + 2 \frac{m_W^2}{m_t^2} \right)$$

Mit $m_t \approx 172,5 \text{ GeV}$ und $m_W \approx 80,4 \text{ GeV}$ folgt $m_W^2/m_t^2 \approx 0,217$. Berechnen wir nun noch die Zerfallsbreite:

$$\begin{aligned} \Gamma(t \mapsto bW^+) &= \frac{1}{2m_t} \int d\phi_2(p; k, q) \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2m_t} \int d\Omega \frac{1}{32\pi^2} \underbrace{\frac{|\vec{q}|^*}{2}}_{\beta} = \\ &= \boxed{\frac{g^2}{64\pi} \frac{m_t^3}{m_W} \underbrace{\left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{m_W^2}{m_t^2} \right)}_{\approx 0,88} |V_{tb}|^2 \approx 1,47 \text{ GeV} |V_{tb}|^2} \end{aligned}$$

Schauen wir uns nun die analoge Rechnung an für die Amplitude von $t \mapsto b\phi^+$:

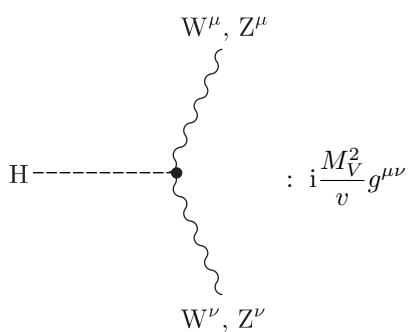
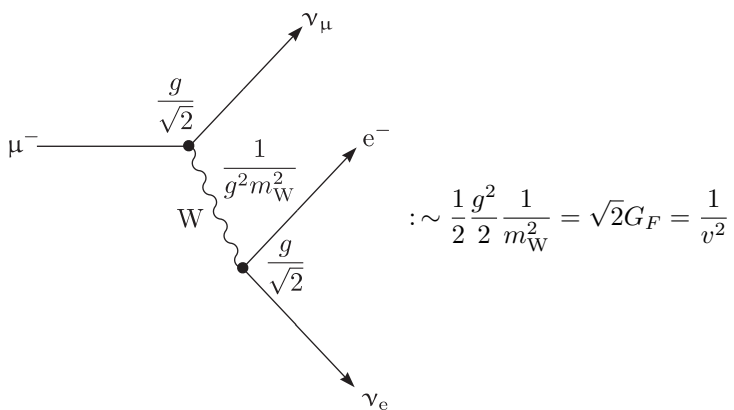
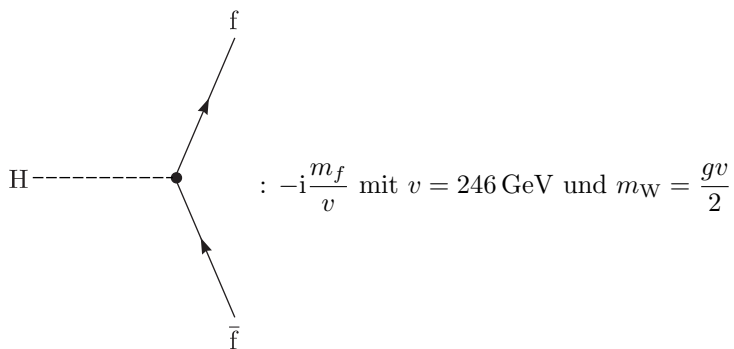
$$i\mathcal{M}_\phi = \bar{u}(q) \frac{ig}{\sqrt{2}} \frac{m_t}{m_W} P_R u(p)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_\phi|^2 &= \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \frac{m_t^2}{m_W^2} \text{Sp}[(\not{q} + m_b)P_R(\not{p} + m_t)P_L] = \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \frac{m_t^2}{m_W^2} \text{Sp} \left[\not{q} \not{p} \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \gamma_5) \right] = \\
 &= \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \frac{m_t^2}{m_W^2} \cdot 2(p \cdot q) = \frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \frac{m_t^2}{m_W^2} (m_t^2 - m_W^2) = \boxed{\frac{g^2}{4} |V_{tb}|^2 \frac{m_t^4}{m_W^2} \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2} \right)}
 \end{aligned}$$

Kapitel 3

Higgs-Zerfälle im Standardmodell

Die Higgs-Kopplung ist proportional zur Masse.



In den Übungen hatten wir die entsprechenden Zerfallsbreiten berechnet:

$$\Gamma(H \mapsto q\bar{q}) = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{m_q(m_H)}{v} \right)^2 m_H \underbrace{\left(1 - \frac{4m_q^2}{m_H^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{\beta_q}$$

$$\Gamma(H \mapsto e^+e^-) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{m_e(m_H)}{v} \right)^2 m_H \beta_e$$

Für $m_H \lesssim 120 \text{ GeV}$ dominieren die Prozesse $H \mapsto b\bar{b}$ und $H \mapsto \tau^+\tau^-$. Die anderen fermionischen Zerfälle sind stark unterdrückt wegen des Faktors $(m_q(m_H)/v)^2$. Oberhalb $m_H \geq 2m_V$ gilt:

$$\Gamma(H \mapsto W^+W^-) = \frac{m_H^3}{16\pi v^2} \beta_W \left(1 - \frac{4m_W^2}{m_H^2} + 12 \frac{m_W^4}{m_H^4} \right)$$

$$\Gamma(H \mapsto ZZ) = \frac{m_H^3}{32\pi v^2} \beta_Z \left(1 - \frac{4m_Z^2}{m_H^2} + 12 \frac{m_Z^4}{m_H^4} \right)$$

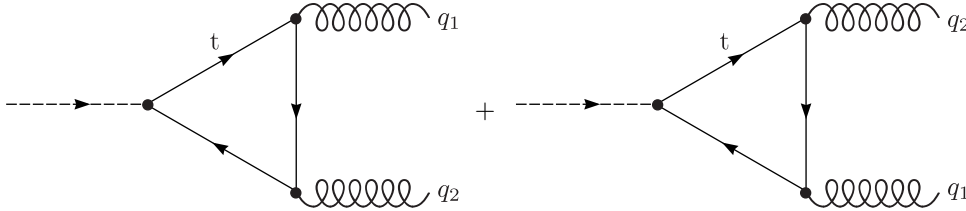
Die longitudinalen Moden der massiven Vektorbosonen liefern einen zusätzlichen Faktor

$$\varepsilon_L^+ \cdot \varepsilon_L^- \sim \frac{k_1 \cdot k_2}{m_V^2} \approx \frac{m_H^2}{m_V^2}$$

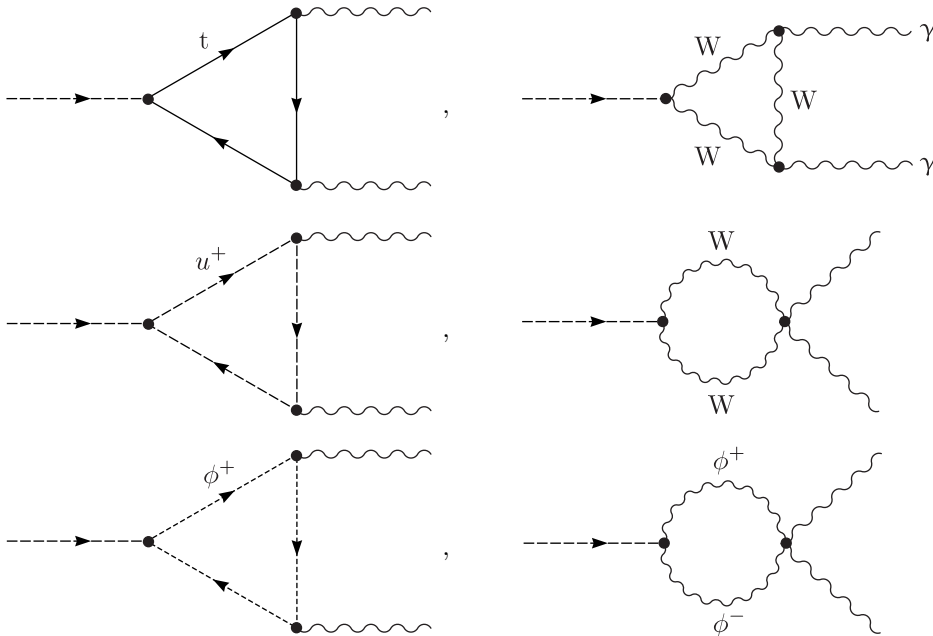
womit die Proportionalität zu m_H^3 bei diesen Zerfällen zu erklären ist. Wir haben also eine Verstärkung gegenüber der Fermionzerfälle:

$$\sim \frac{1}{2N_c} \left(\frac{m_H}{m_f} \right)^2$$

Neben diesen dominanten Moden gibt es noch eine Reihe von anderen, die durch Schleifeneffekte hervorgerufen werden. Dazu gehört beispielsweise der Prozess $H \mapsto gg$.

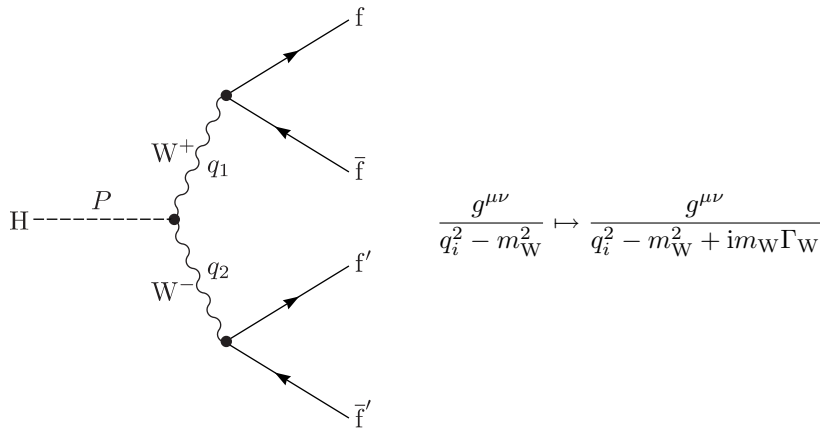


Der einzige wichtige Beitrag liefert hier eine Top-Quark-Schleife. Außerdem gibt es den Prozess $H \mapsto \gamma\gamma$:



1.) Verzweigungsverhältnis (branching ratio):

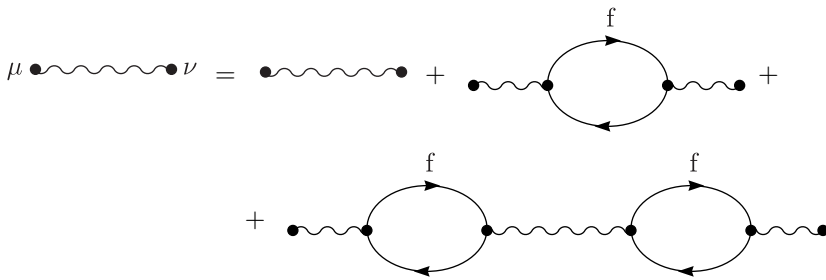
$$B(H \mapsto xx) = \frac{\Gamma(H \mapsto xx)}{\sum_x \Gamma(H \mapsto xx)} = \frac{\Gamma(H \mapsto xx)}{\Gamma_{tot}}$$



2.) Breitenberechnung:

$$\Gamma(H \mapsto X) = \frac{1}{2m_H} \int d\phi(P, X) |\mathcal{M}(H \mapsto X)|^2$$

3.1 Dyson-Resummation



$$D^{\mu\nu}(q^2) \sim \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 - m_W^2 + \Pi^{em}(q^2)} \approx \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2 - m_W^2 + i\text{Im}(\Pi_W(q^2 = m_W^2))}$$

Für den Z,W-Fall gilt:

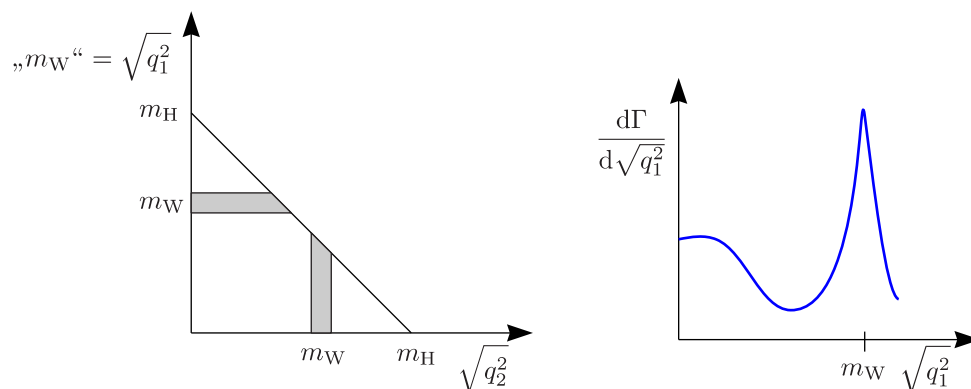
$$\text{Im}(\Pi(q^2)) = \sum_f \text{Im}(\text{Loop}) = \text{Numerischer Faktor} * \sum_f \left| \text{Cut} \right|^2 = m_W \Gamma_W \frac{q^2}{m_W^2}$$

$$\Gamma(H \mapsto \text{„WW“}) = \sum_{f, f'} \frac{1}{2m_H} \int d\phi_4(P; f \bar{f} f' \bar{f}') |\mathcal{M}|^2 = \sum_{f, f'} \frac{1}{2m_H} \int \frac{dq_1^2}{2\pi} \frac{dq_2^2}{2\pi} d\phi_2(P; q_1, q_2) d\phi_2(q_1, f \bar{f}) d\phi_2(q_2; f' \bar{f}')$$

Bei Quarks muss man einen zusätzlichen Faktor 3 berücksichtigen. Hier hat man einen Vier-Teilchen-Phasenraum, den man jedoch separieren kann.

$$|\mathcal{M}|^2 \sim \prod_{i=1}^2 \frac{1}{(q_i^2 - m_W^2)^2 + (m_W \Gamma_W)^2} \cdot f \cdot f' \cdot \bar{f} \cdot \bar{f}'$$

Die Phasenräume sind separat lorentzinvariant, also kann man in die Ruhesysteme der entsprechenden Teilchen gehen.



3.2 Zur Masse des Higgsteilchens

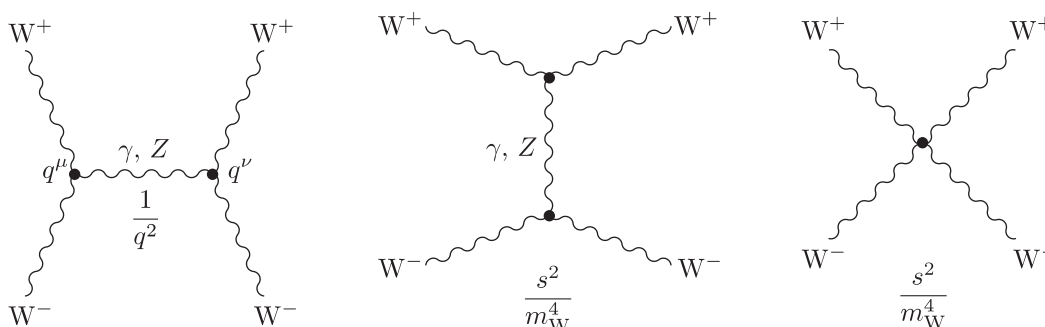
Die Higgsmasse bestimmt die Phänomenologie:

$$V(\phi) = \lambda \left(\phi^\dagger \phi - \frac{v^2}{2} \right) = \lambda v^2 H^2 + \lambda v H^3 + \lambda \frac{H^4}{4} \text{ mit } \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

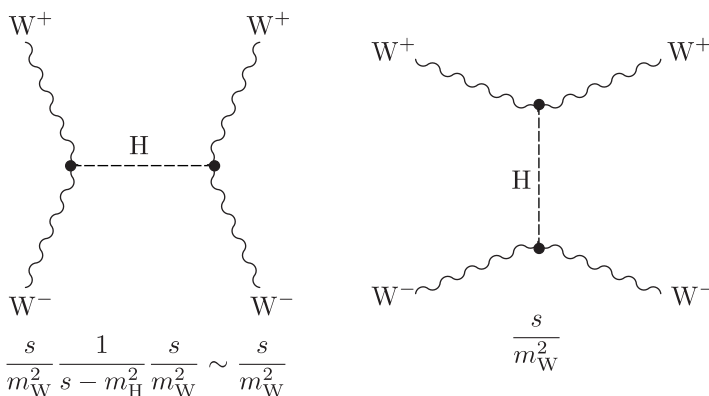
Aus dem in H quadratischen Term erhält man die Higgsmasse $\frac{m_H^2}{2}$. Wegen $\lambda = \frac{m_H^2}{2v^2}$ lässt sich aus der ϕ^4 -Kopplung die Higgsmasse bestimmen oder umgekehrt. Hier ist erkennbar, dass die Higgsmasse nicht beliebig groß sein kann, weil sonst die Kopplungskonstante beliebig groß werden würde. (Die Kopplung λ muss beschränkt sein, weil sonst die Störungstheorie zusammenbricht.) Es gibt also von der theoretischen Seite her Einschränkungen, wie groß die Higgsmasse sein kann.

a.) Unitaritätsschranken an $WW \mapsto WW$:

Es gibt folgende Beiträge:

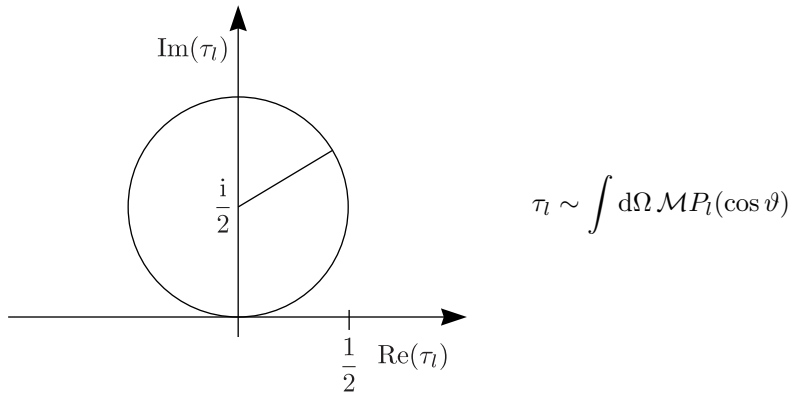


Wegen $\varepsilon_L^\mu = k^\mu/m + O(m/E)$ gilt $k^0 = \sqrt{s}/2$. Die Streuamplituden kann man auch als Wahrscheinlichkeitsamplituden interpretieren. Sehr schnell führt das Ansteigen dazu, dass die Größe der Einzelamplituden explodiert, was die Unitarität verletzen würde. Die Summe aller Graphen bleibt jedoch im Rahmen und ist proportional zu $\frac{s}{m_W^2}$. Schauen wir uns weitere Beiträge aus dem Standardmodell an:

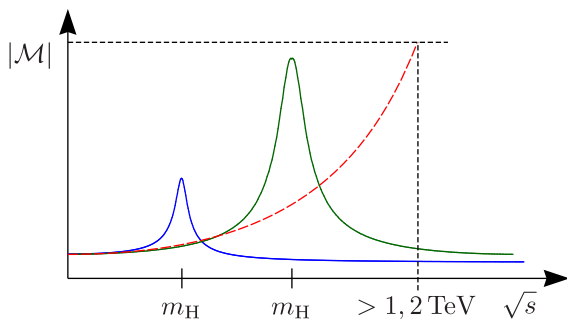


Hier ist das Verhalten besser als oben. Bei großen Schwerpunktsenergien ist die Summe aller Beiträge $\sim s^0$, also konstant.

Aus der Theorie E wissen wir, dass die $2 \mapsto 2$ -Streuamplitude dimensionslos und proportional zur Wahrscheinlichkeitsamplitude ist. Die Partialwellenamplitude kann auf einen Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ projiziert werden (Argand-Kreis).



Der Realteil der Streuamplitude kann deshalb nie größer als $\frac{1}{2}$ sein.



$$|\text{Re}(\mathcal{M}_l(s))| < \frac{1}{2}$$

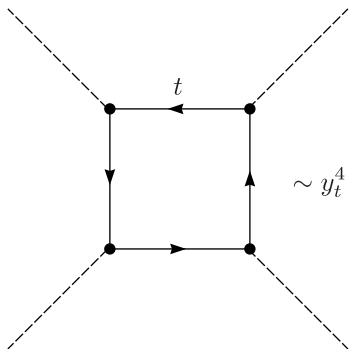
Bei $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$ bis 2 TeV kommt man in den unitaritätsverletzenden Bereich. Wenn es das Higgs-Teilchen gibt, dann muss seine Resonanz unterhalb dieser Grenze liegen. Fassen wir also zusammen:

- 1.) Es ist ein Higgs-Austausch oder neue Physik notwendig für Unitarität in der W-Boson-Streuung.
- 2.) Im Standardmodell ist die Higgsmasse beschränkt auf $m_H < 1,2 \text{ TeV}$.

Higgsmassen oberhalb 600 TeV bis 800 TeV sind also problematisch für die Unitarität. Dies folgt unter anderem auch gittertheoretischen Berechnungen.

b.) Laufen der ϕ^4 -Kopplung λ

Man kann die β -Funktion für die Kopplungskonstante analog zur vorher ableiten und erhält daraus das Laufen der Kopplung. Diese hängt von λ , y_t , usw. ab.



Die Renormierungsgruppengleichung hat dann folgende Form:

$$\mu \frac{d\lambda(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \cdot 24 [\lambda^2 + \lambda y_t^2 - y_t^4 + \dots]$$

Wir wollen nun verschiedene Fälle betrachten.

i.) $\lambda(m_H) = \frac{m_H^2}{2v^2} \gg 1$

Hier brauchen wir auf der rechten Seite nur den Term $\sim \lambda^2$ mitzunehmen.

$$\lambda(\mu) = \lambda(m_H) \frac{1}{1 - 12 \frac{\lambda(m_H)}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\mu^2}{m_H^2}\right)}$$

$\lambda(\mu)$ hat einen Pol bei $\mu = \Lambda$; man bezeichnet diesen als Landau-Pol:

$$\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m_H^2}\right) = \frac{4\pi^2}{3\lambda(m_H)} = \frac{1}{6} \left(\frac{4\pi v}{m_H}\right)^2$$

Wenn man verlangt, dass Λ groß gewählt werden kann, dann muss die Higgsmasse klein sein. Dass die Theorie bis hin zu beliebig großen Skalen gültig ist, funktioniert nur mit $\lambda(m_H) = 0$. Dann hat man keine effektive ϕ^4 -Kopplung. Die Wechselwirkung wird abgeschaltet und die ϕ^4 -Theorie wird trivial; man bezeichnet diesen Grenzwert als Trivialitätsgrenze. (Dies gilt bei einer reinen ϕ^4 -Theorie.) Die Schranke für die Higgsmasse, die man bei gegebenen Λ erhält, ist die sogenannte Trivialitätsschranke (130 GeV bis 140 GeV).

ii.) m_H klein, das heißt $\lambda \ll y_t^2$

Die Renormierungsgruppengleichung besagt dann, dass die logarithmische Ableitung von λ konstant ist.

$$\frac{d\lambda}{d(\ln \mu)} = -|\text{const.}|$$

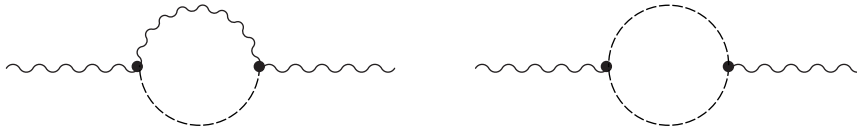
λ wird negativ bei großen μ . Dann ist das ϕ^4 -Potential in der Lagrangedichte nach unten geöffnet. Die Theorie hätte unter dieser Bedingung kein vernünftiges Spektrum mehr (wäre also instabil), weil das Potential asymptotisch für $|\phi| \mapsto \infty$ gegen $-\infty$ gehen würde und nicht nach unten beschränkt wäre (Stabilitätsschranken (Stabilitätsbounds) an λ und m_H).

* Für Cut-Off $\Lambda > 1000$ TeV: $110 \text{ GeV} < m_H < 320 \text{ GeV}$

* Standardmodell bis zu einer Planckmasse $m_{\text{Planck}} \sim 10^{19} \text{ GeV}$: $130 \text{ GeV} < m_H < 180 \text{ GeV}$

Für weitere Informationen siehe RIESELMANN: hep-ph 1711456

Die Higgsmasse ist innerhalb eines großen Bereichs theoretisch eingeschränkt, weshalb wir experimentelle Ergebnisse benötigen. Werden Korrekturen zum W-Propagator betrachtet, so findet man experimentell (aus Daten von elektroschwachen Präzisionsmessungen des LEP, SLC), dass die Beiträge nicht zu groß sein dürfen.

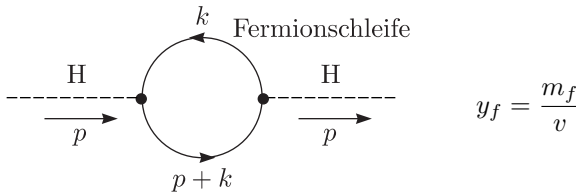


$$\sim \frac{\alpha}{\pi} \log\left(\frac{m_H^2}{m_W^2}\right)$$

Damit wird favorisiert, dass die Higgsmasse im Bereich der Massen der Z- und W-Bosonen liegt.

3.3 Higgs-Selbstenergie

3.3.1 Fermionische 1-Schleifen-Beiträge zu $\Pi_H(p^2)$



$$y_f = \frac{m_f}{v}$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_H^f(p^2) &= - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left[(-iy_f) \frac{i}{\not{p} + \not{k} - m_f} (-iy_f) \frac{i}{\not{k} - m_f} \right] = \\ &= -2y_f^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - m_f^2 + (k+p)^2 - m_f^2 + 4m_f^2 - p^2}{[k^2 - m_f^2][(k+k)^2 - m_f^2]} \end{aligned}$$

$$\Pi_H^f(p^2) = -\frac{y_f^2}{16\pi^2} [4A(m_f^2) + 2(p^2 - 4m_f^2)B_0(p, m_f)]$$

$A(m^2)$ ist quadratisch divergent und $B_0(p, m_f)$ logarithmisch divergent. Schauen wir uns die führende Divergenz in $A(m^2)$ an. Dazu führen wir Regularisierung durch, indem wir einen Cut-Off Λ einführen.

$$A(m^2) = \frac{1}{i\pi^2} \int^R d^4k \frac{1}{-k^2 + m^2 - i\epsilon} = \frac{1}{i\pi} \underbrace{\int_{2\pi^2} d^3\Omega}_i \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{k_E^2 + m^2} = \Lambda^2 - m^2 \log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right)$$

3.3.2 Fine-Tuning-Problem

Die Quantenkorrektur ist gegeben durch die Vakuumpolarisation beim Pol, nämlich der Higgsmasse m_H :

$$\delta m_H^2 = \Pi_H(m_H^2) = -4 \sum_f \frac{y_f^2}{16\pi^2} \Lambda^2 + O(\log \Lambda)$$

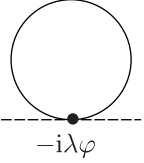
Die Massenverschiebung ist quadratisch divergent:

$$|\delta m_H^2| \gg m_H^2 \text{ für } \Lambda \mapsto M_{Planck}$$

Wenn man die Skala sehr groß wählt (in der Nähe der Planck-Skala) wird die Quantenkorrektur viel größer als die eigentliche Masse. Wir benötigen $m_H^2 = m_{0,H}^2 + \delta m_H^2 \ll \Lambda^2$ mit $m_H^2 \sim 10^4 \text{ GeV}^2$ und $\delta m_H^2 \sim 10^{38} \text{ GeV}^2$. Um dafür zu sorgen, dass trotz der radiativen Verschiebung der Größenordnung $\Lambda \approx m_{Planck}$ die Higgsmasse m_H viel kleiner als m_{Planck} ist, muss man die entsprechenden Größen unglaublich genau aufeinander abstimmen (fine tuning).

3.3.3 Quartische Kopplungen

Wir nehmen an, dass es skalare Teilchen φ gibt mit quartischen Kopplungen λ_φ an das Higgs.



$$-i\Pi_H^\varphi(p^2) = -i\lambda_\varphi \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_\varphi^2} = -i\lambda_\varphi \frac{1}{16\pi^2} A(m_\varphi^2)$$

Gesamte Verschiebung der Masse:

$$\delta m_H^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\sum_\varphi \lambda_\varphi - \sum_f 4y_f^2 \right] \Lambda^2 + \dots$$

Die Higgs-Kopplungen λ_φ zu skalaren Teilchen und y_f zu Fermionen müssen genau zusammenpassen, so dass die quadratischen Divergenzen herausfallen. Man benötigt eine Symmetrie, um zu garantieren, dass sich die Terme gegenseitig wegheben. Dies ist genau der Fall in den supersymmetrischen Modellen.

3.3.4 Das minimale supersymmetrische Standardmodell in der Entkopplungsgrenze

Für jedes Dirac-Fermion $f = (f_L, f_R)$ gibt es zwei zusätzliche skalare Teilchen \tilde{f}_L, \tilde{f}_R mit quartischen Kopplungen $\lambda_{\tilde{f}_{L,R}} = 2y_f^2$. Dies führt dazu, dass sich die bosonischen und fermionischen divergenten Anteile eines solchen $SU(2)$ -Multipletts exakt wegheben. Damit fallen die quadratischen Divergenzen heraus. Was übrig bleibt, sind die logarithmischen Divergenzen der B_0 -Funktion.

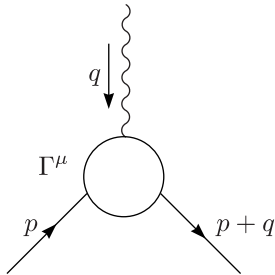
$$\delta m_H^2|_{f_s} \approx -\frac{y_t^2}{4\pi^2} M_{SUSY}^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{M_{SUSY}^2}\right) \text{ mit } M_{SUSY} \sim m_t \lesssim O(1 \text{ TeV})$$

Das Fine-Tuning-Problem wird in supersymmetrischen Modellen mit einer SUSY-Skala der Ordnung 1 TeV gelöst.

Kapitel 4

Ward-Identitäten und Renormierung der QED

Ward-Identitäten stellen Beziehungen her zwischen Vertexfunktionen und Propagatoren.



$$q^\mu \Gamma_\mu = S_F^{-1}(p + q) - S_F^{-1}(p)$$

Um dies zu beweisen, benötigen wir das Erzeugendenfunktional für Vertexfunktionen. Ableiten wollen wir das hier für den einfachsten Fall, nämlich die skalare ϕ^4 -Theorie. Für eine solche Theorie ist das Erzeugendenfunktional gegeben durch:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int (\mathcal{L} + \phi(x)J(x)) d^4x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n)$$

Die Koeffizienten dieser Taylorentwicklung sind die n -Teilchen-Greenfunktionen $G^{(n)} = \langle 0 | T \hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n) | 0 \rangle$. $W[J]$ war das Erzeugendenfunktional für zusammenhängende Greenfunktionen.

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} iW[J] \Big|_{J=0}$$

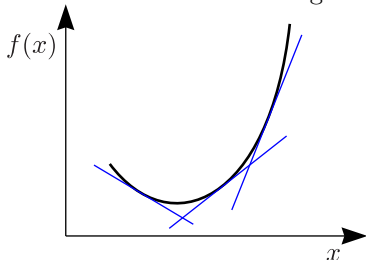
Das zeitgeordnete Produkt zerfällt nämlich in einfachere Produkte, durch welche Substreuprozesse beschrieben werden, bei denen nicht alle Teilchen teilnehmen. Diese Prozesse interessieren uns nicht.

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \varphi(x, J)$$

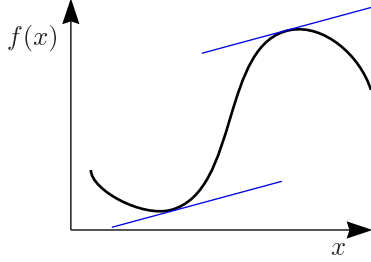
$\varphi(x)$ ist eine klassische Funktion, kein Quantenfeld. Bei $J = 0$ würde die Ableitung die Einpunktfunktion ergeben, welche aber verschwindet. Also gilt $\varphi(x, J = 0) = 0$. Mit diesem φ kann man nun eine Legendre-Transformation definieren.

$$\Gamma[\varphi] = W[j] - \int d^4x j(x)\varphi(x) \text{ mit } \varphi(x) = \varphi(x, j)$$

Schauen wir uns zuerst Legendre-Transformationen im eindimensionalen Falle an.



Die Idee von der Legendre-Transformation ist, dass man anstelle der Funktion $f(x)$ die Steigung der Funktion als neue Variablen verwendet. In der klassischen Mechanik war der kanonische Impuls die Steigung von \mathcal{L} als Funktion von \dot{q} . Wir ersetzen die Abhängigkeit bezüglich der Geschwindigkeit durch eine Abhängigkeit bezüglich der Steigung von \mathcal{L} . Hierbei kann folgendes Problem auftreten:



Hier gibt es keine eindeutige Zuordnung zwischen Steigung und ursprünglicher Funktion. Die Funktion darf also keinen Wendepunkt haben, die zweite Ableitung also nicht verschwinden. Wenn das der Fall ist, dann können wir den Übergang von $f(x)$ nach df/dx machen. Dies können wir nun auf Funktionale übertragen. Betrachten wir die zweite Ableitung für Funktionale

$$\left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta j(x) \delta j(y)} \right|_{j=0} = \text{Propagator} \neq 0$$

Die Bedingung, dass keine Wendepunkte da sind, entspricht der Bedingung, dass die Propagatoren für eine vernünftige Quantenfeldtheorie nicht verschwinden. Um zu zeigen, dass $\Gamma[\varphi]$ das Erzeugendenfunktional für zusammenhängende Greenfunktionen ist, benötigen wir folgende Beziehungen:

$$\left. \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=j} = \varphi(x) = \int d^4 y \delta^{(4)}(x-y) \varphi(y)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} = \int d^4 y \underbrace{\frac{\delta W[j]}{\delta j(y)}}_{\varphi(y)} \frac{\delta j(y)}{\delta \varphi(x)} - \int d^4 z \frac{\delta j(z)}{\delta \varphi(x)} \varphi(z) - j(x) = -j(x)$$

Da j von überabzählbar vielen Variablen abhängt, müssen wir bei der Kettenregel für Funktionale anstelle von Summation eine Integration verwenden. Mit

$$\frac{\delta j(z)}{\delta \varphi(y)} = -\frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \left(\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z)} \right)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} &= \delta^{(4)}(x-y) = \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \left(\frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \right) = i \int d^4 z \frac{\delta^2 i W[j]}{i \delta j(z) i \delta j(x)} \frac{\delta j(z)}{\delta \varphi(y)} = \\ &= i \int d^4 z G_c^{(2)}(x, z, j) \left[-\frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \left(\frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z)} \right) \right] = i \int d^4 z G_c^{(2)}(x, z, j) \left[-\Gamma^{(2)}(y, z, j) \right] \end{aligned}$$

$G_c^{(2)}$ ist die zusammenhängende Greenfunktion in Anwesenheit einer äußeren Quelle j . Der Propagator gefaltet mit der Funktion $\Gamma^{(2)}$ ist die Einheit $\delta^{(4)}(x-y)$ im Raum der Funktionen. Bis auf einen Phasenfaktor ist also $\Gamma^{(2)}$ das inverse des Propagators $G_c^{(2)}(x, z, j)$.

$$\boxed{-i\Gamma^{(2)}(x, y; \varphi) = [G^{(2)}(x, y; j)]^{-1}}$$

Ohne äußere Felder, also bei $j = \varphi = 0$, ist die Theorie lorentz- und translationsinvariant, weil dann keine bestimmte Richtung ausgezeichnet ist. Deshalb gilt dann $-i\Gamma^{(2)}(x-y) = [G^{(2)}(x-y)]^{-1}$ mit $G^{(2)}(x, y; \varphi = 0) = G^{(2)}(x-y)$. Nun wollen wir übergehen zum Impulsraum:

$$\Gamma^{(2)}(p) = \int d^4 x \exp(-ip \cdot x) \Gamma^{(2)}(x)$$

Führen wir die Fouriertransformation von

$$\delta^{(4)}(x-y) = \int d^4 z G^{(2)}(x-z) [-i\Gamma^{(2)}(z-y)]$$

durch, so folgt mittels des Faltungstheorems:

$$1 = G^{(2)}(p)(-i\Gamma^{(2)}(p)) \Rightarrow \Gamma^{(2)}(p) = \frac{i}{G^{(2)}(p)} = p^2 - m^2 - \Sigma(p) \text{ wegen } G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}$$

Für $n \geq 3$ bilden wir weitere Ableitungen von

$$\delta^{(4)}(x_1 - x_2) = \int d^4z \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(z)\delta j(x_1)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z)\delta \varphi(x_2)}$$

und zwar bezüglich $\varphi(x_3)$:

$$0 = \int d^4z d^4y \frac{\delta^3 W[j]}{\delta j(z)\delta j(x_1)\delta j(y)} \frac{\delta j(y)}{\delta \varphi(x_3)} \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z)\delta \varphi(x_2)} + \int d^4z \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j(z)\delta j(x_1)} \underbrace{\frac{\delta^3 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(z)\delta \varphi(x_2)\delta \varphi(x_3)}}_{\Gamma^{(3)}(z, x_2, x_3; \varphi)}$$

Mit

$$\frac{\delta j(y)}{\delta \varphi(x_3)} = -\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi(y)\delta \varphi(x_3)} = -i[G^{(2)}(y, x_3; j)]^{-1}$$

folgt weiter unter Ausnutzung der δ -Distribution:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}(x_1, x_1, x_3; \varphi) &= \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 G_2^{(3)}(y_1, y_2, y_3; j) \Gamma^{(2)}(x_1, y_1; \varphi) \Gamma^{(2)}(x_2, y_2; \varphi) \Gamma^{(2)}(x_3, y_3; \varphi) = \\ &= \int d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 G_2^{(3)}(y_1, y_2, y_3; j) [G^{(2)}(x_1, y_1; \varphi)]^{-1} [G^{(2)}(x_2, y_2; \varphi)]^{-1} [G^{(2)}(x_3, y_3; \varphi)]^{-1} \end{aligned}$$

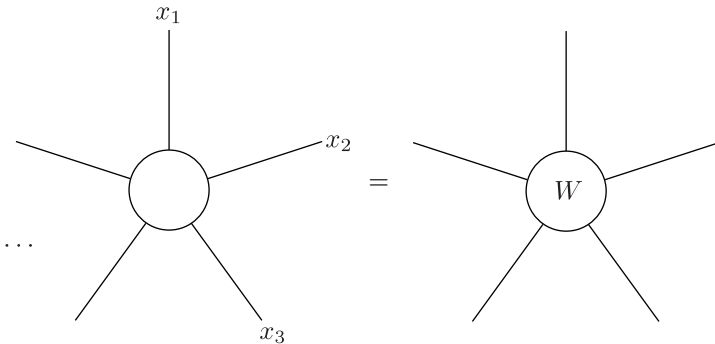
Für jedes äußere Teilchen multipliziert man mit dem inversen Propagator, womit man die äußeren Beinchen abschneidet. Damit folgt die amputierte Greenfunktion.

$$\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3; \varphi = 0) = G_{trunc}^{(3)}(x_1, x_2, x_3)$$

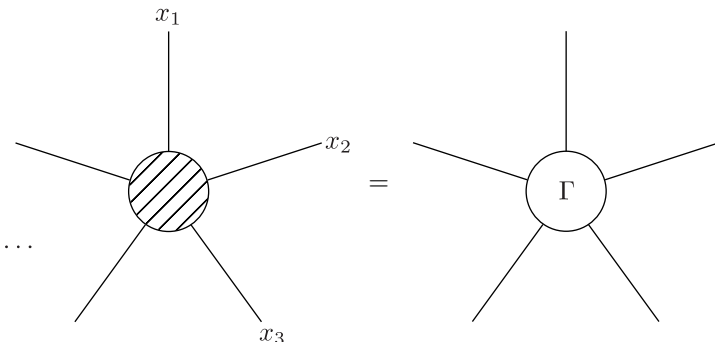
Durch weitere Ableitungen kann man dies auf beliebig hohe n -Punkt-Funktionen verallgemeinern. $\Gamma[\varphi]$ ist das Erzeugendenfunktional für amputierte Greenfunktionen (truncated 1PI (1-Teilchen-irreduzible) Green's functions) oder Vertexfunktionen.

4.1 Graphische Darstellung

Die zusammenhängende Greenfunktion $G_c^{(n)}$ für n äußere Teilchen wollen wir folgendermaßen darstellen:

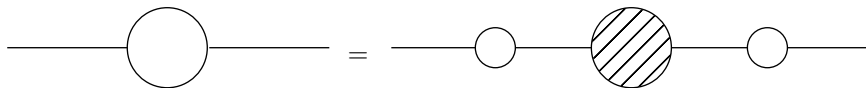


Für die Vertexfunktion gilt:

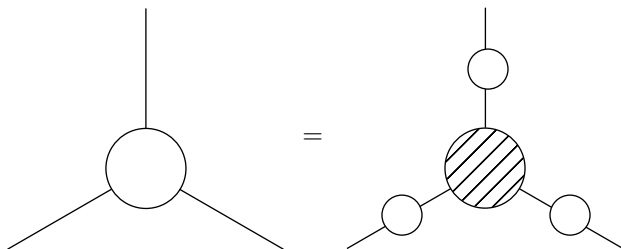


Das Inverse des Propagators wollen wir darstellen durch:

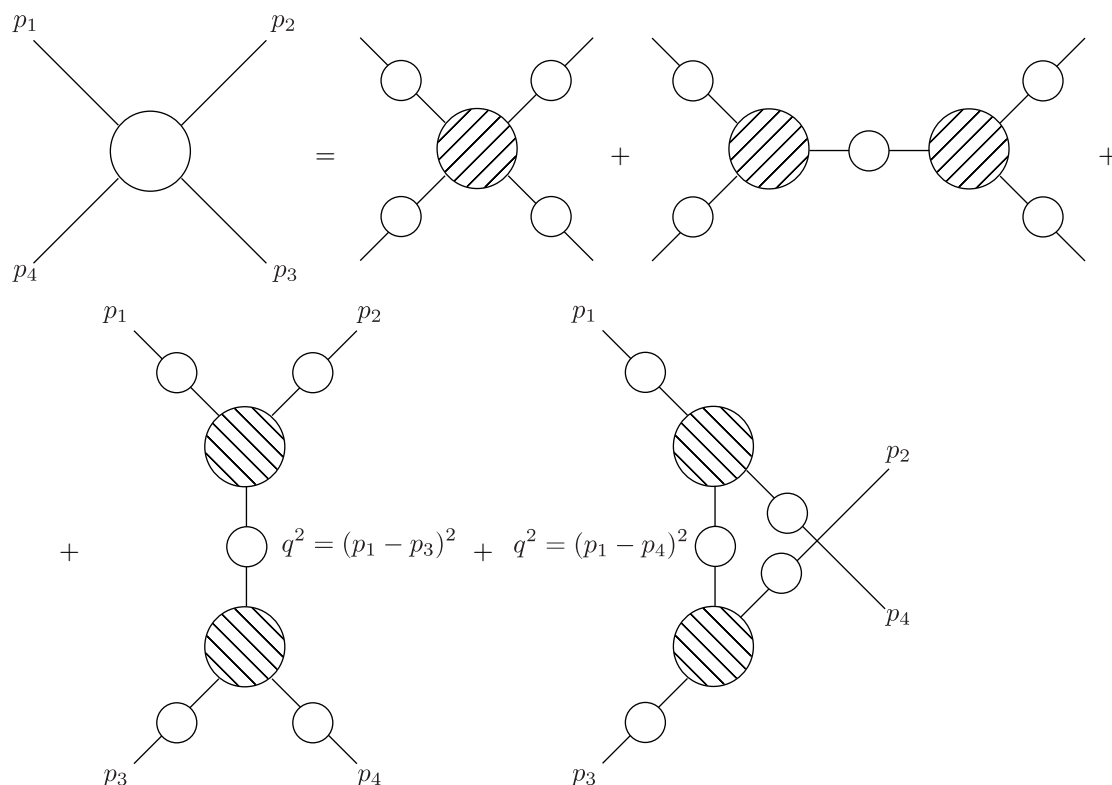
1.) $n = 2$:



2.) $n = 3$:



3.) $n = 4$:



$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \varphi(x) \varphi(y) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(-ip \cdot (x - y)) \Gamma^{(2)}(p) + \dots \text{ mit } \Gamma^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p)$$

$p^2 - m^2$ ist der Baumgraphen-Anteil und $\Sigma(p)$ die Quantenkorrekturen. Schauen wir uns den Baumgraphen-Anteil näher an. Diesen können wir unter Ausnutzung der Exponentialdarstellung der δ -Funktion folgendermaßen schreiben:

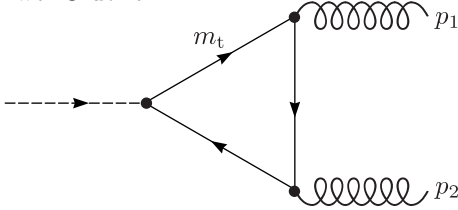
$$\Gamma_{tree}^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \varphi(x) \varphi(y) (-\square_y - m^2) \delta^{(4)}(x - y)$$

Durch partielle Integration folgt weiter:

$$\Gamma_{tree}^{(2)}[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \delta^{(4)}(x - y) \varphi(x) (-\square_y - m^2) \varphi(y) = \frac{1}{2} \int d^4x \varphi(x) (-\square - m^2) \varphi(x) =$$

$$= \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right) = \int d^4x \mathcal{L}_{klassisch}^{(2)}$$

Dieser Anteil ist nichts anderes als das Integral über die klassische Lagrangedichte, also der quadratische Beitrag zur klassischen Wirkung. $\Gamma[\varphi]$ ist nichts anderes als die effektive Wirkung, welche alle Quantenkorrekturen (also Schleifen-Korrekturen zur Wirkung) schon beinhaltet. Mit Hilfe dieser effektiven Wirkung können wir beliebige Prozesse zu allen Ordnungen der Störungstheorie ausrechnen. Die Schleifenbeiträge stecken vollständig in den $\Gamma^{(n)}$ drin. Die kompletten Matrixelemente folgen im wesentlichen durch Berechnung von Baumgraphen, welche die vollen Vertizes $\Gamma^{(n)}$ und Propagatoren $(\Gamma^{(2)})^{-1}$ beinhalten. Die effektive Lagrangedichte ergibt sich aus der effektiven Wirkung $\Gamma[\varphi]$ im Limes, dass die Massenquadrate sehr viel größer als die kinematischen Invarianten $p_i \cdot p_j$ der äußeren Impulse p_i, p_j sind. Das führt dazu, dass $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ lokal werden, also alles auf einen Punkt kollabiert ($\sim \delta^{(4)}(x-x_1)\delta^{(4)}(x-x_2)\dots$). Betrachten wir als Beispiel den Zerfall eines Higgsteilchens in zwei Gluonen:



Im Limes $m_t \mapsto \infty$ kann dieser Vertex in der Wirkung geschrieben werden als $\mathcal{L}_{eff} \sim \frac{1}{v} H G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$.

4.2 Ward-Identitäten für die Quantenelektrodynamik

In der Quantenelektrodynamik gibt es ein Photonfeld mit vier Komponenten und mindestens ein Fermionfeld mit vier Komponenten. Damit wollen wir uns hier begnügen. Für die Eichbosonen benötigen wir äußere Quellen J und für das Fermionfeld grassmannartige Quellen η und $\bar{\eta}$:

$$Z[J, \eta, \bar{\eta}] = N \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{tot} \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta$$

Wir benötigen einen Eichfixierungsterm, um einen Propagator zu erhalten, der wohldefiniert ist. Mittels einer Legendre-Transformation folgt aus $\Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]$ aus W (mit $Z = \exp(iW)$). Eine Eichtransformation in Z ist nichts anderes als eine Variablensubstitution im Pfadintegral. Wir wählen also $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ und $\psi \mapsto \psi \exp(ie\Lambda(x))$. Es genügt, infinitesimale Transformationen $\psi \mapsto \psi(1 + ie\Lambda(x))$ und $\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi}(1 - ie\Lambda(x))$ zu betrachten. Wegen der Eichinvarianz der klassischen Wirkung ändert sich in den ersten drei Termen von \mathcal{L}_{tot} nichts, wohl aber in den darauffolgenden Termen. Unter Substitution ergibt sich:

$$\mathcal{L}_{tot} \mapsto \mathcal{L}_{tot} + \delta\mathcal{L}_{tot} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{\alpha} (\partial_\mu A^\mu) \square \Lambda + J_\mu \partial^\mu \Lambda + ie\Lambda(x) (\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta)$$

Es folgt hieraus ein extra Faktor. Wir wollen partielle Integration durchführen, so dass $\Lambda(x)$ als globaler Faktor auftritt:

$$\exp \left(i \int \delta\mathcal{L}_{tot} d^4x \right) = 1 + i \int d^4x \left[-\frac{1}{\alpha} \square (\partial_\mu A^\mu) - \partial_\mu J^\mu + ie(\bar{\eta}\psi - \bar{\psi}\eta) \right] \Lambda(x)$$

Wir können nun die Felder durch Funktionalableitungen nach den äußeren Quellen ersetzen, wobei wir bei den Fermionfelder auf die Vorzeichen achten müssen:

$$1 + i \int d^4x \left[-\frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} - \partial_\mu J^\mu + ie \left(\bar{\eta} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} - \eta \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \right] \Lambda(x)$$

Wir haben die Summation über die Spinorindizes unterdrückt. Aus der Invarianz von $Z[J, \eta, \bar{\eta}]$ unter dieser Variablensubstitution resultiert folgende Gleichung:

$$\left[-\frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} - \partial_\mu J^\mu + e \left(\bar{\eta} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} - \eta \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \right] Z[J, \eta, \bar{\eta}] = 0$$

Wegen $Z = \exp(iW)$ muss auf folgende Beziehung gelten:

$$-\frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu \frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)} - \partial_\mu J^\mu(x) + ie \left(\bar{\eta} \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}} - \eta \frac{\delta W}{\delta \eta} \right) = 0$$

Erzeugendenfunktional für Vertexfunktionen:

$$\Gamma[A_\mu, \bar{\psi}, \psi] = W[J, \eta, \bar{\eta}] - \int d^4x (\bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + J_\mu A^\mu)$$

Wir setzen die Beziehungen

$$\frac{\delta W}{\delta J_\mu} = A^\mu, \quad \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}(x)} = \psi(x) \quad \text{und} \quad \frac{\delta W}{\delta \eta(x)} = -\bar{\psi}(x)$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} = -J^\mu, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} = \bar{\eta}(x) \quad \text{und} \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} = -\eta(x)$$

in obige Gleichung für W ein und erhalten:

$$\boxed{-\frac{1}{\alpha} \square \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} + ie \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi(x)} \psi(x) + \bar{\psi}(x) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}(x)} \right) = 0} \quad (*)$$

Dies ist eine Funktionaldifferentialgleichung, die aus der Eichinvarianz der Quantenelektrodynamik folgt.

$$\begin{aligned} \Gamma[A_\mu, \psi, \bar{\psi}] = & \int d^4x_1 d^4x_2 \left(\bar{\psi}(x_1) S_F^{-1}(x_1 - x_2) \psi(x_2) + \frac{1}{2} A^\mu(x_1) D_{\mu\nu}^{-1}(x_1 - x_2) A^\nu(x_2) \right) + \\ & + \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \bar{\psi}(x_1) e \Gamma^\mu(x_1, x_2, x_3) \psi(x_2) A^\mu(x_3) + \text{Vierpunktfunktionen} + \dots \end{aligned}$$

Es kommt kein Faktor $\frac{1}{3!}$ vor, weil alle Felder $\bar{\psi}$, A_μ und ψ unterschiedlich sind. Gleichung (*) liefert uns unendlich viele Beziehungen zwischen $\Gamma^{(n_f, n_A)}$ und $\Gamma^{(n_f, n_A-1)}$. Schauen wir uns zuerst den Fall mit $n_f = 0$ und $n_A = 2$ an:

$$-\frac{1}{\alpha} \square \partial_\nu A^\nu(x) + \partial_x^\mu \int d^4x_2 D_{\mu\nu}^{-1}(x - x_2) A^\nu(x_2) = 0$$

Der volle inverse Propagator im Impulsraum ist gegeben durch:

$$D_{\mu\nu}^{-1}(k) = \left(-g_{\mu\nu} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu + \omega_{\mu\nu}(k) \right)$$

Die vollständigen Quantenkorrekturen stecken in $\omega_{\mu\nu}(k)$. Betrachten wir nun auch obige Gleichung im Impulsraum:

$$\frac{1}{\alpha} k^2 i k_\nu + i k^\mu \left(-g_{\mu\nu} k^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) k_\mu k_\nu + \omega_{\mu\nu}(k) \right) = 0 \Rightarrow \boxed{k^\mu \omega_{\mu\nu}(k) = 0}$$

$\omega_{\mu\nu}$ ist transversal in allen Ordnungen der Störungstheorie. $\omega_{\mu\nu}(k)$ können wir wie folgt in Kovarianten zerlegen:

$$\boxed{\omega_{\mu\nu}(k^2) (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \omega(k^2)}$$

Die Eichinvarianz führt über diese Beziehung dazu, dass der Photonpropagator nur logarithmisch (und nicht quadratisch) divergent ist. Als nächstes schauen wir uns den Fall $n_f = 1$ und $n_A = 1$ an. Der Term $1/\alpha$ trägt hier nicht bei:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu(x)} &= \partial_\mu^x \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{\psi}(x_1) e \Gamma^\mu(x_1, x_2, x) \psi(x_2) = \\ &= -ie \int d^4x_1 d^4x_2 \left(-\bar{\psi}(x_1) \psi(x_2) \delta^{(4)}(x_2 - x) + \bar{\psi}(x_1) \delta^{(4)}(x - x_1) S_F^{-1}(x_1 - x_2) \psi(x_2) \right) \end{aligned}$$

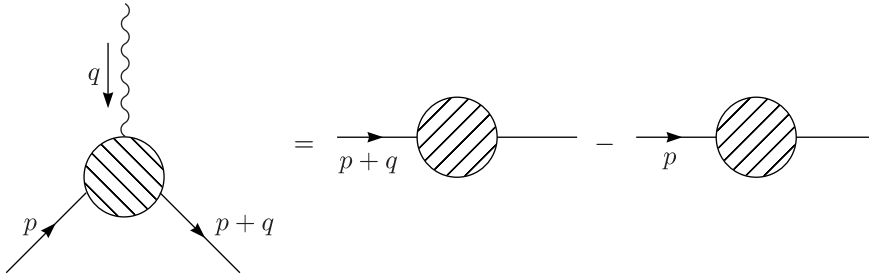
Wir können an dieser Stelle einen Koeffizientenvergleich beider Seiten durchführen:

$$\boxed{\partial^\mu e \Gamma_\mu(x_1, x_2, x) = ie \left[S_F^{-1}(x_1 - x_2) \delta^{(4)}(x_2 - x) - S_F^{-1}(x_1 - x_2) \delta^{(4)}(x - x_1) \right]}$$

Das ist die Beziehung zwischen den Fermionpropagatoren und dem Dreiverter. Wir betrachten das ganze fouriertransformiert: In der Fouriertransformation entspricht x_1 dem Impuls p , x_2 dem Impuls $p+q$ und x dem äußeren Impuls q . Auf der rechten Seite gilt $x_1 \mapsto p$ und $x_2 \mapsto p+q$.

$$\boxed{q^\mu \Gamma_\mu(p, p+q, q) = S_F^{-1}(p+q) - S_F^{-1}(p)}$$

Auch diese Beziehung (Ward-Identität) gilt wieder in allen Ordnungen Störungstheorie.



Berücksichtigt man nur Baumgraphen, so gilt $\Gamma_\mu^{(0)} = \gamma_\mu$ und $S_F^{-1(0)}(p) = \not{p} - m$.

$$q^\mu \gamma_\mu = q^\mu \Gamma_\mu^{(0)} = (\not{p} + \not{q} - m) - (\not{p} - m) = \not{q}$$

Damit ist die obige Gleichung für das Baumgraphen-Niveau verifiziert. Im Ein-Schleifen-Niveau gilt:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Lambda^{\mu \ 1 \text{ Loop}} \stackrel{!}{=} \gamma^\mu (1 - K_1) + \text{endliche Terme}$$

$$S_F^{-1}(p) = \not{p} - m - \Sigma(p) \stackrel{! \text{ Loop}}{=} \not{p} (1 - K_2) + (K_2 m + \delta m) + \text{endliche Terme}$$

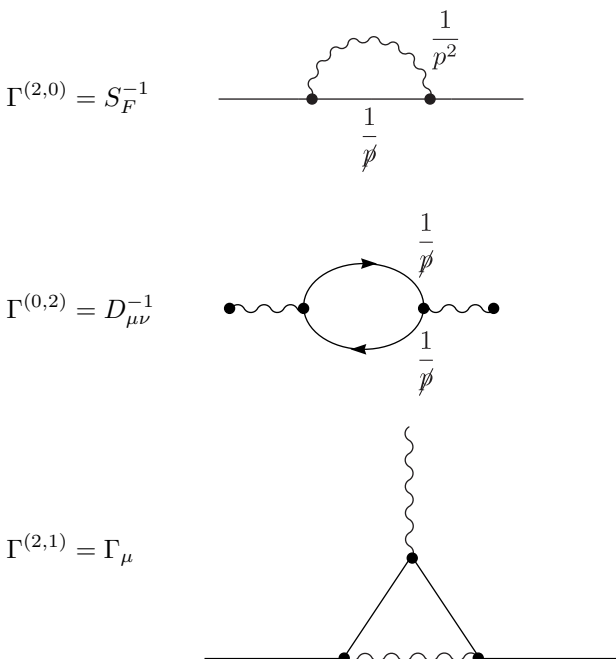
Aus der Ward-Identität folgt $K_1 = K_2$ und damit $Z_1 = 1 + K_1 = 1 + K_2 = Z_2$. Also sind die Renormierungskonstanten Z_1 und Z_2 in allen Ordnungen Störungstheorie gleich.

$$e_0 = e\mu^\varepsilon \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} = \boxed{e\mu^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{Z_3}}}$$

In der Quantenelektrodynamik können wir allein aus den photonischen Selbstenergien die Renormierung der Ladung durchführen. Die Vertexkorrekturen und die fermionischen Korrekturen heben sich exakt weg. Alle Identitäten laufen unter dem Namen Ward-Takahashi-Identitäten. Diese Identitäten sollten bei allen Berechnungen immer überprüft werden.

4.3 Power Counting

Wir betrachten Vertexfunktionen $\Gamma^{(t,b)}$ mit f äußeren Fermionen und b äußeren Bosonen. Schauen wir uns die Beispiele an, welche wir in der Quantenelektrodynamik durchgeführt haben. Der einfachste Fall ist $\Gamma^{(2,0)} = S_F^{-1}$. Wir hatten gesehen, dass bei der Berechnung der Ein-Schleifen-Korrekturen, die auftretenden Integrale UV-divergent sind.



Gibt es über diese drei divergenten Vertexfunktionen noch weitere in der Quantenelektrodynamik und was passiert, wenn man zu mehr Schleifen übergeht? Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir einen Schleifengraphen. l sei die Anzahl der Schleifen; jede Schleife liefert eine Integration über den d -dimensionalen Minkowski-Raum, also $\int d^d p / (2\pi)^d$. f_i sei die Anzahl der Fermion-Propagatoren $1/\not{p}$, b_i die Zahl der Boson-Propagatoren $1/p^2$ und v die Anzahl der Vertizes. Zwischen diesen Größen gibt es Beziehungen, die von der Struktur der Vertizes abhängen. Ein Vertex hat n_k Ableitungen, n_f Fermionen und n_b Bosonen. Im Falle der Quantenelektrodynamik gilt $n_k = 0$, $n_f = 2$ und $n_b = 1$. Die Anzahl der Schleifen, also der verbleibenden $d^d p$ -Integrale ist gegeben durch $l = f_i + b_i - (v - 1)$, weil pro Vertex wegen Impulserhaltung eine Integration wegfällt. (Die Impulserhaltung an einem dieser Vertizes steckt schon in der globalen Impulserhaltung des gesamten Diagramms. Die globale Impulserhaltung „schluckt“ keine Schleifen-Integration, weshalb v im 1 zu erniedrigen ist.) Die Anzahl der Enden der Fermionlinien ist $n_{fv} = 2f_i + f$ und die der Bosonlinien $n_{bv} = 2b_i + b$, wobei f und b die Zahl der äußeren Fermionen bzw. Bosonen ist. Diese Beziehungen können wir nach f_i bzw. b_i auflösen

$$f_i = \frac{n_f v - f}{2} \text{ und } b_i = \frac{n_b v - b}{2}$$

und oben einsetzen:

$$l = \frac{n_f v - f}{2} + \frac{n_b v - b}{2} - v + 1 = v \frac{n_f + n_b - 2}{2} + 1 - \frac{f + b}{2}$$

Man kann also v eliminieren und alle Größen durch l ausdrücken. Der Divergenzgrad ist somit gegeben durch

$$D = dl - f_i - 2b_i + n_k v$$

Jeder Fermion-Propagator reduziert die Divergenz um 1 und jeder Boson-Propagator um 2. Zusätzliche Ableitungen n_k sorgen für extra Impulse im Zähler und damit zu einer Verschlechterung des Divergenzgrades. Durch Einsetzen der obigen Gleichungen können wir D in der folgenden Form schreiben:

$$D = l(d - c) + c - \frac{f}{2}(c - 1) - \frac{b}{2}(c - 2) \text{ mit } c = 2 - \frac{2n_k + n_f - 4}{n_f + n_b - 2} = l(d - c) + F(f, b)$$

In der Konstanten c geht ein, was für eine Art von Wechselwirkung man diskutiert. Wie sehen diese Terme nun für unterschiedliche Wechselwirkungen aus?

Vertex	Wechselwirkungsterm	n_f	n_b	n_k	$d - c$	F
QED	$\bar{\psi} \not{A} \psi$	2	1	0	$d - 4$	$4 - \frac{3}{2}f - b$
Drei-Gluon-Vertex	$A^2 \partial_\mu A$	0	3	1	$d - 4$	$4 - \frac{3}{2}f - b$
Vier-Gluon-Vertex	A^4	0	4	0	$d - 4$	$4 - \frac{3}{2}f - b$
Skalarer Dreiervertex	ϕ^3	0	3	0	$d - 6$	$6 - \frac{3}{2}f - 2b$
Schwache Wechselwirkung ohne V-A-Struktur (Fermi-Theorie)	$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2$	4	0	0	$d - 2$	$2 - \frac{f}{2}$
„Anomales magnetisches Moment“	$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi$	2	1	1	$d - 2$	$2 - \frac{f}{2}$

Für eine vernünftige Theorie muss D für $l \mapsto \infty$ konvergent sein. Hieraus folgt $d - c \leq 0$. Dann ist nämlich die Anzahl der Counterterme endlich. Sonst muss man zusätzliche Counterterme mit immer höheren Divergenzen, in die Theorie reinstecken. Counterterme entsprechen letzten Endes Messungen. Man braucht somit unendliche viele Messungen, um eine nicht-renormierbare Theorie festzulegen. Eine solche Theorie besitzt keinerlei Aussagekraft.

In der Quantenelektrodynamik ist $d - c = 0$ in vier Dimensionen. Dann hängt der Divergenzgrad nur von der Zahl der äußeren Teilchen ab. Bei einer ϕ^3 -Theorie wird die Konvergenz umso besser, je mehr Schleifen berücksichtigt werden. Auf Ein-Schleifen-Niveau ist der Propagator



noch divergent, alle anderen Schleifen-Diagramme sind konvergent in vier Dimensionen. Die ϕ^3 -Theorie ist sogar in sechs Dimensionen noch renormierbar.

f	b	Diagramm	D	effektive Divergenz
0	2		2	0
0	3		1	- (Furrys Theorem)
0	4		0	-4
2	0		1	0
2	1		0	0
2	≥ 2		< 0	

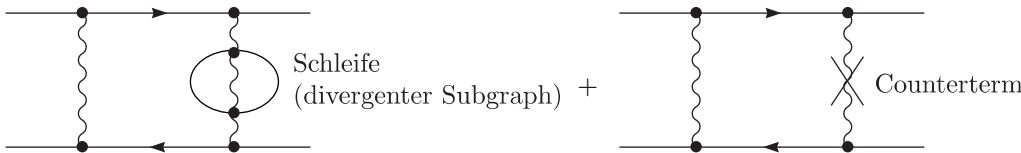
Für die Quantenelektrodynamik in $d = 4$ Dimensionen gilt $D = 4 - \frac{d}{2}f - b$. Aufgrund der Ward-Identitäten reduziert sich die Divergenz der Selbstenergie des Photons; aus einer quadratischen Divergenz wird eine logarithmische. (Durch Symmetrien erniedrigt sich der Divergenzgrad immer.) Die Vertizes mit $b = 2n + 1$ und $f = 0$ verschwinden in der QED in allen Ordnungen der Störungstheorie. Dies folgt aus der Ladungskonjugation eines Photonfeldes $\mathcal{C} A_\mu(x) \mathcal{C}^\dagger = -A_\mu(x)$ und des Vakuumzustandes $\mathcal{C}|0\rangle = |0\rangle$:

$$\langle 0|T A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1})|0\rangle \stackrel{\mathcal{C}}{=} (-1)^{2n+1} \langle 0|T A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1})|0\rangle$$

$$\Rightarrow \langle 0|T A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_{2n+1}}(x_{2n+1})|0\rangle = 0$$

Das gilt jedoch nicht für die QCD. Hier hat man eine Wechselwirkung der Form $\bar{\psi} T^a A_\mu^a \gamma^\mu \psi$. Es gibt T^a , welche symmetrisch sind $T_{ij}^a \mapsto T_{ji}^a = T_{ij}^a$ ($A_\mu^a \mapsto -A_\mu^a$) und welche antisymmetrisch sind $T_{ij}^a \mapsto T_{ji}^a = -T_{ij}^a$ ($A_\mu^a \mapsto A_\mu^a$). Anders als Photonen, haben nicht alle Gluonen negative Ladungskonjugation.

Alle höheren Vertexfunktionen haben einen Divergenzgrad $D < 0$, sie sind also konvergent. Wir müssen damit nur die divergenten Graphen betrachten. Betrachten wir beispielsweise den Fall $l = 2$ mit $f = 4$ und $b = 0$:

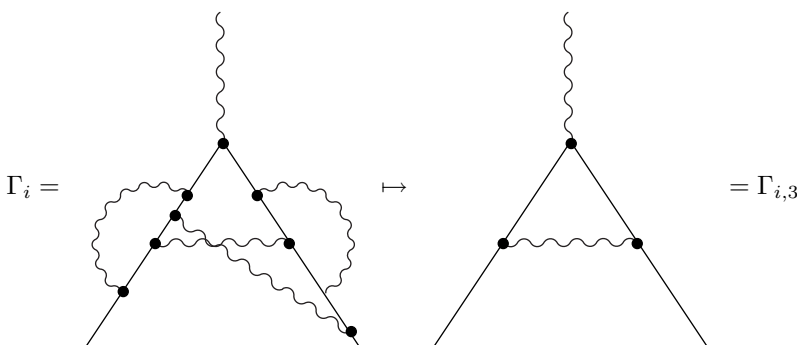


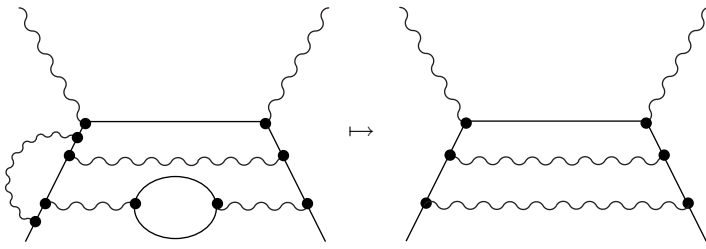
Hier tritt ein divergenter Subgraph auf. Wir müssen die Feynman-Graphen also aufspalten in Anteile, welche radiative Korrekturen zu Propagatoren oder Vertizes sind, und in den Rest des Graphen. Die Summe des ersten Graphen mit dem Graphen mit dem Counterterm ist konvergent, dann konvergiert auch der Box-Anteil.

Oberflächlich konvergente $\Gamma^{(f,b)}$ enthalten divergente Subgraphen, nämlich S_F, D_F, Γ^μ . In der folgenden Diskussion benötigen wir das Konzept von Skelettgraphen. Bei einem Skelettgraphen handelt es sich um den ursprünglichen Feynmangraphen mit den folgenden Ersetzungen:

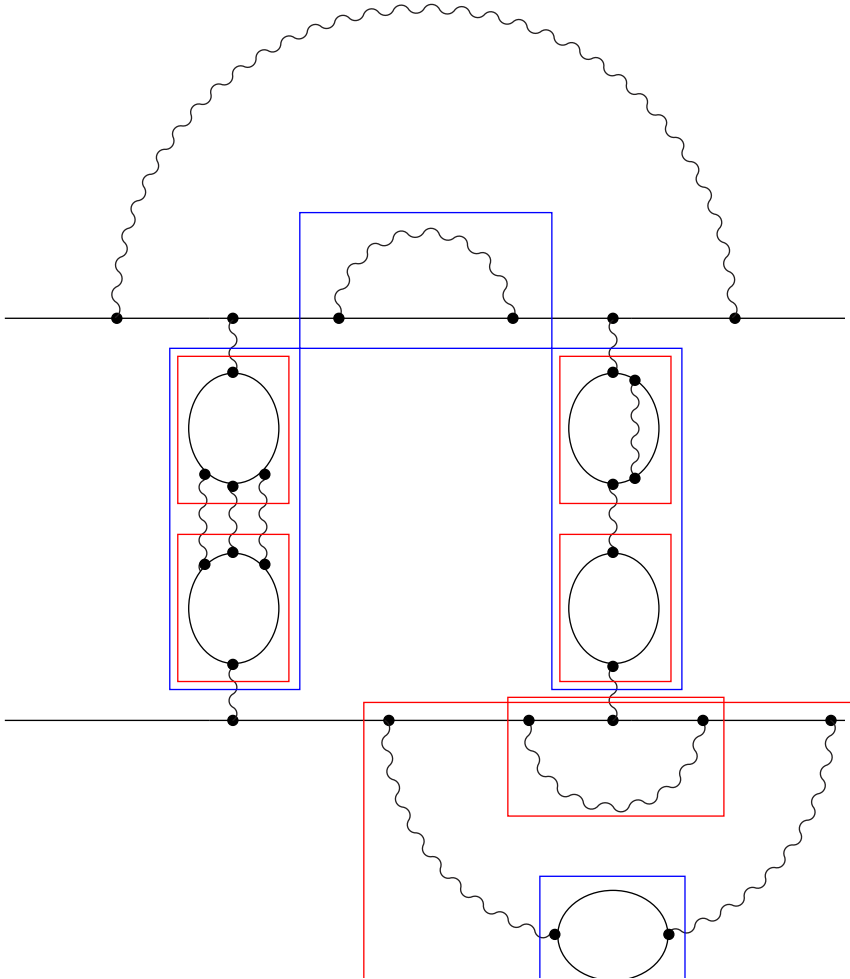
- 1.) Alle Selbstenergiekorrekturen werden ersetzt durch Propagatoren in niedrigster Ordnung.
- 2.) Alle Vertexkorrekturen werden ersetzt durch Baumgraphen-Vertizes.

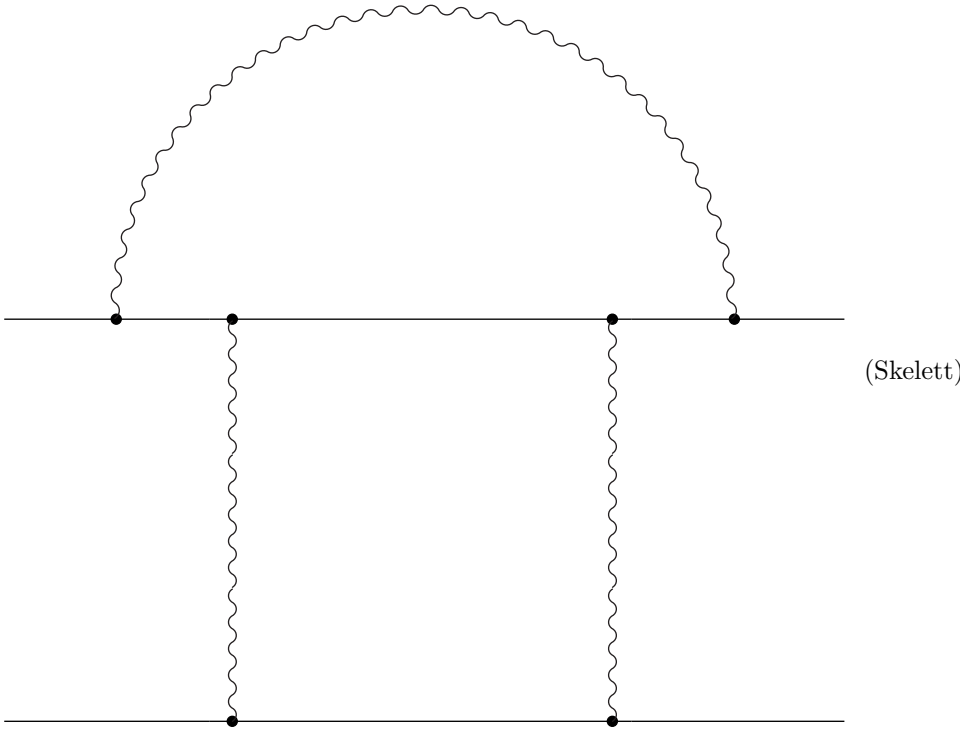
Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:





Irreduzible Feynmangraphen sind ihre eigenen Skelettgraphen. Die Idee ist, in Skelettgraphen alle $D_{F,0} \mapsto D_F$, $S_{F,0} \mapsto S_F$ und $\gamma_\mu \mapsto \Gamma_\mu$ zu ersetzen. Anschließend macht man eine Taylorentwicklung in $\alpha = e^2/(4\pi)$ zur gewünschten Ordnung. Dies ist im wesentlichen ein Induktionsbeweis für die Renormierbarkeit.





Wenn man anstelle der Propagatoren die vollen Propagatoren einsetzt, ist das Diagramm immer noch konvergent. Dies gilt für alle Vertexfunktionen, außer der Selbstenergie für Photon, Fermion und der Vertexkorrektur. Wir können also eine beliebig divergente Vertexfunktion schreiben als Summe über alle Skelettgraphen, in denen wir die kompliziertere Struktur des ursprünglichen Diagramms regenerieren. Für oberflächlich konvergente $\Gamma^{(f,b)}$:

$$\Gamma^{(f,b)}(p_i; S_{F,0}, D_{F,0}, \gamma_\mu, e) = \sum_s \Gamma_s^{(f,b)}(p_i, S_F, D_F, \Gamma_\mu, e)$$

S_F , D_F und Γ_μ werden endlich durch multiplikative Renormierung mit den Faktoren Z_i . Wir ersetzen also diese divergenten Größen durch entsprechende renormierte Größen.

$$S_F \mapsto \frac{1}{Z_2} S_F = S_F^r, D_F \mapsto \frac{1}{Z_3} D_F = D_F^r, \Gamma_\mu \mapsto Z_1 \Gamma_\mu = \Gamma_\mu^r \text{ und } e^2 \mapsto Z_3 e^2 = e_r^2$$

Wir betrachten ein Skelett mit v Vertizes $e\Gamma_\mu$, f_i Propagatoren S_F und b_i Propagatoren D_F .

$$\Gamma_s(p_i, S_F, D_F, \Gamma_\mu, e) = \Gamma_s \left(p_i, Z_2 S_F^r, Z_3 D_F^r, \frac{1}{Z_1} \Gamma_\mu^r, \frac{e_r}{\sqrt{Z_3}} \right)$$

Da die einzelnen Beiträge faktorisieren, können wir die Renormierungskonstanten aus Γ_s herausziehen und erhalten:

$$\Gamma_s(p_i, S_F, D_F, \Gamma_\mu, e) = Z_2^{f_i} Z_3^{b_i} (Z_1 \sqrt{Z_3})^{-v} \Gamma_s(p_i, S_F^r, D_F^r, \Gamma_\mu^r, e_r)$$

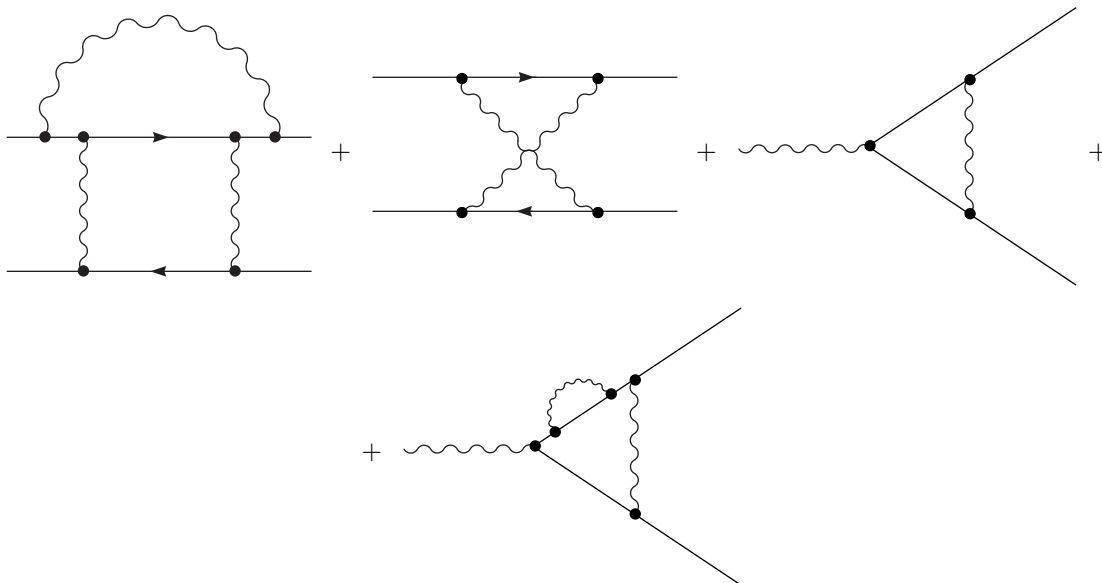
Mit $f_i = v - f/2$, $b_i = v/2 - b/2$ und der Folgerung $Z_1 = Z_2$ aus der Ward-Identität ergibt sich weiter:

$$\Gamma_s(p_i, S, F, D_F, \Gamma_\mu, e) = Z_2^{r-\frac{f}{2}} Z_3^{\frac{v}{2}-\frac{b}{2}} \frac{1}{Z_1^v} \frac{1}{Z_3^{\frac{v}{2}}} = Z_2^{-\frac{f}{2}} Z_3^{-\frac{b}{2}} \Gamma_s(p_i; S_F^r, D_F^r, \Gamma_\mu^r, e_r)$$

Das können wir nun in obige Entwicklung mit den Skelettgraphen einsetzen:

$$\Gamma_r^{(f,b)}(p_i; S_F^r, D_F^r, \Gamma_\mu^r, e_r) = Z_2^{\frac{f}{2}} Z_3^{\frac{b}{2}} \Gamma^{(f,b)}(p_i; S_F, D_F, \Gamma_\mu, e)$$

Wir werden also alle Divergenzen mittels einer multiplikativen Renormierung der gesamten Vertexfunktion los.



Für $(f, b) = (2, 0)$ gilt $S_{F,r}^{-1} = Z_2 S_F^{-1}$, für $(f, b) = (0, 2)$ gilt $D_{F,r}^{-1} = Z_3 D_F$ und für $(f, b) = (2, 1)$ gilt $(e\Gamma_\mu)_r = Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} (e\Gamma_\mu) = e_r \Gamma_\mu^r = \sqrt{Z_3} e Z_1 \Gamma_\mu$. Für die Vertexfunktionen haben wir nun folgende Situation:

$$\Gamma_\mu^r = \gamma_\mu + \Lambda_\mu^r = \gamma_\mu + \sum_s \Lambda_\mu^s(p_i; S_F^r, D_F^r, \Gamma_\mu^r; e_r) + K_1 \gamma_\mu$$

Den Counterterm K_1 können wir so wählen, dass die Divergenzen in den Skelettgraphen absorbiert werden. Die Skelettgraphen der Vertexfunktion werden durch obige Bedingung definiert. Sie sind so beschaffen, dass man die Summe aller Feynmandiagramme rekonstruieren kann. Dies gibt im wesentlichen an, welche Skelettgraphen man benötigt.

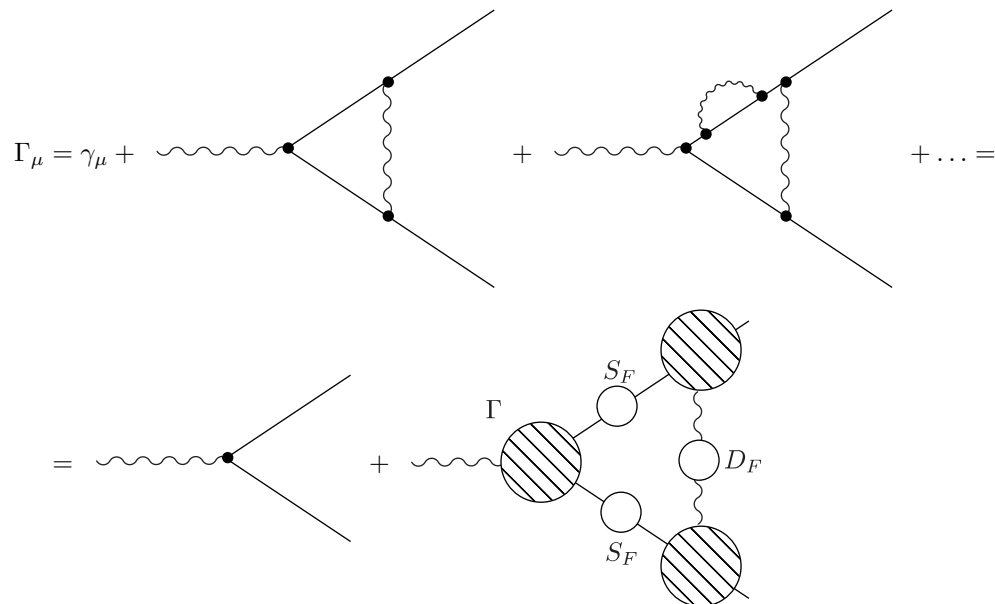
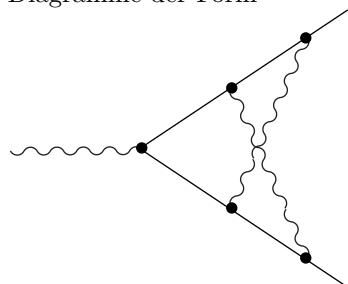
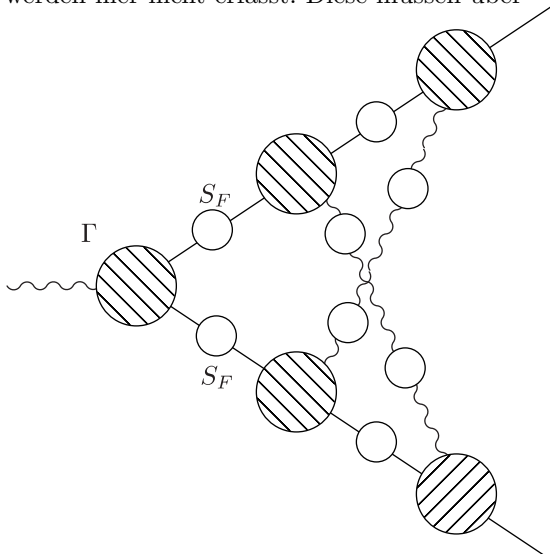


Diagramme der Form



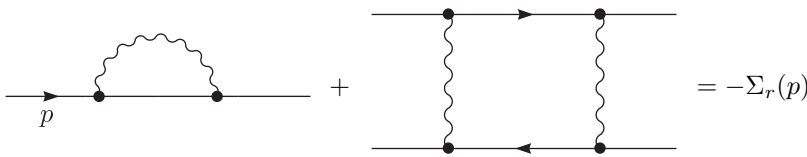
werden hier nicht erfasst. Diese müssen über



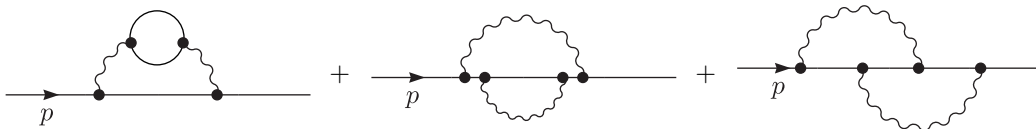
berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^r &= (1 + K_1) \left[\gamma_\mu + \frac{1}{1 + K_1} \sum_s \Lambda_\mu^s(p_i; S_F^r, D_F^r, \Gamma_\mu^r, e_R) \right] = \\ &= Z_1 \left(\gamma_\mu + \frac{1}{Z_1} \sum_s Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \Lambda_\mu(p_i; S_F, D_F, \Gamma_\mu; e) \right) = Z_1 \left(\gamma_\mu + \sum_s \Lambda_\mu^s(p_i; S_F, D_F, \Gamma_\mu; e) \right) \end{aligned}$$

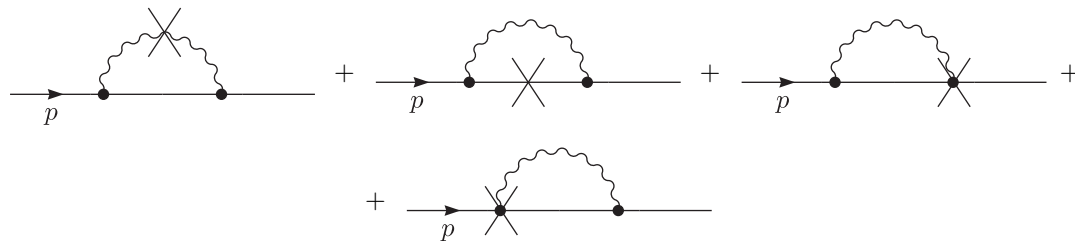
Für die Vertexfunktion und Propagatoren kann man einmal die renormierten Größen einsetzen. Zusätzlich haben wir einen Counterterm. Diese Beiträge kombinieren sich so, dass es auf die multiplikative Renormierung hinausläuft. Betrachten wir das ganze für den Fermionpropagator. Sei $l = 1$:



Für $l = 2$ sind folgende Graphen relevant:



Betrachten wir nun den Fall $l = 1$ und die $O(e^2)$ -Counterterme:



Zusätzliche bekommt man noch einen Counterterm der Ordnung e^4 :



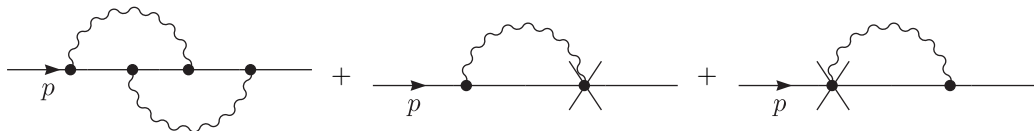
Die Summe aller Diagramme entpuppt sich als endlich. Das Problem ist, dass diese überlappenden Divergenzen nicht lokal sind. Sie führen zu nichtlokalen divergenten Termen. Betrachten wir einzelnen dieser Graphen:

$$\text{Diagram} \sim (Z_1 - 1) \Sigma^{(1)}(p) \sim \frac{e^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\mu^2}{-p^2} \right) \right] \frac{e^2}{m^2}$$

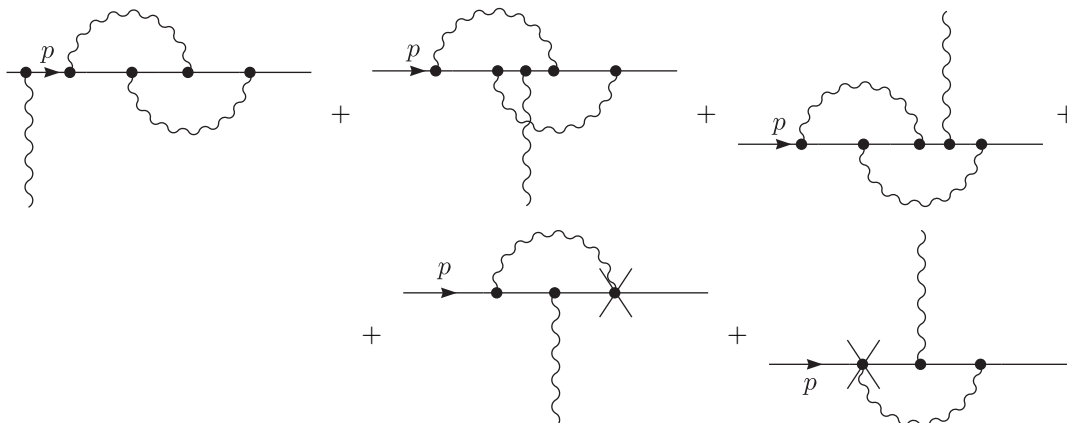
Dieser Term für zu $1/\varepsilon \ln(p^2)$ und dieser ist nichtlokal. Die Ward-Identität setzt S_F^{-1} mit Γ_μ in Beziehung:

$$S_F^{-1}(p+q) - S_F^{-1}(p) = q^\mu \Gamma_\mu(p+q, p) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{\partial S_F^{-1}}{\partial p^\mu} = \Gamma_\mu(p, p) = -\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu}$$

Die Ableitung bezüglich p ist gegeben durch Vertexgraphen, in der man zusätzlich ein Photon einsetzt. Diese Vertexgraphen sind folgende:



Mittels der Ward-Identität folgt:



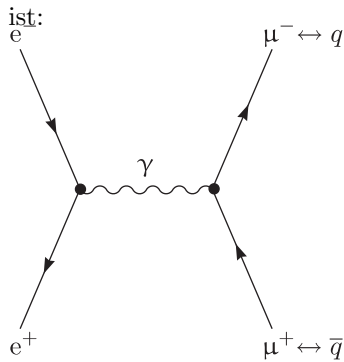
Die S_F^{-1} +Counter-Terme sind endlich wegen der Ward-Identität.

Kapitel 5

QCD in der Teilchenphysik

Nützliche Informationen zu den folgenden Kapiteln findet man im „CTEQ: Handbook of perturbative QCD V 1.1“.

Wir wollen den Prozess $e^+e^- \mapsto \text{Hadronen}$ innerhalb der QCD beschreiben. Auf Feldtheorieniveau entspricht dies $e^+e^- \mapsto q\bar{q}$. Der Feynmangraph in niedrigster Ordnung, wenn man nur Photonaustausch berücksichtigt,



Der differentielle Wirkungsquerschnitt im Limes $s \gg m^2$ (also $m = 0$) ist gegeben durch:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta)$$

$1 + \cos^2 \theta$ ist charakteristisch für die Erzeugung eines Spin-1/2-Fermions. Der totale Wirkungsquerschnitt folgt durch Integration:

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \beta \frac{3 - \beta^2}{2} \quad \text{mit } \beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}$$

Für $\beta \approx 1$ gilt:

$$\sigma \approx \frac{3\pi\alpha^2}{3s} \equiv \sigma_0$$

Betrachten wir nun anstelle von Myonen Quarks der Ladung $e_q = 2/3, -1/3$ und mit drei Farben, dann ist der Wirkungsquerschnitt gegeben durch:

$$\sigma(e^+e^- \mapsto \text{Hadronen}) = \sum_q \sigma_0 3e_q^2$$

Es wird über alle Quarks summiert, die zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Berücksichtigt man QCD-Korrekturen, so ergibt sich:

$$\sigma(e^+e^- \mapsto \text{Hadronen}) = \sum_q \sigma_0 3e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + \dots \right)$$

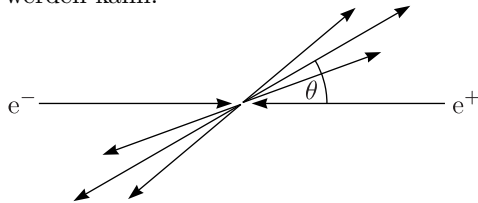
Das Laufen der elektromagnetischen Kopplungskonstanten führt zu elektromagnetischen Korrekturen, die wichtiger als die QCD-Korrekturen sind. Elektroschwache Korrekturen und der $1/s$ -Abfall werden eliminiert, wenn wir folgendes Verhältnis betrachten:

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \mapsto \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \mapsto \mu^+\mu^-)} = \left(1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + \dots \right) \sum_q^{2m_q < \sqrt{s}} 3e_q^2$$

Die Summe läuft über alle Quarks, die kinematisch zugänglich sind.

$$R = \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \dots\right) \begin{cases} 3 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) = 2 & \text{für } u, d, s = q \\ 3 \frac{1}{3} & \text{für } c \\ 3 \frac{2}{3} & \text{für } b \end{cases}$$

Für $\sqrt{s} \gtrsim \text{GeV}$ entstehen bei der e^-e^+ -Kollision Jets (Energiecluster), deren Winkel sehr genau gemessen werden kann.



Aus der Beobachtung von Jets bekommen wir eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Partonen und den Jets, die wir beobachten.

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \sim 1 + \cos^2\theta$$

Dadurch ist die Winkelverteilung der Quarks gegeben.

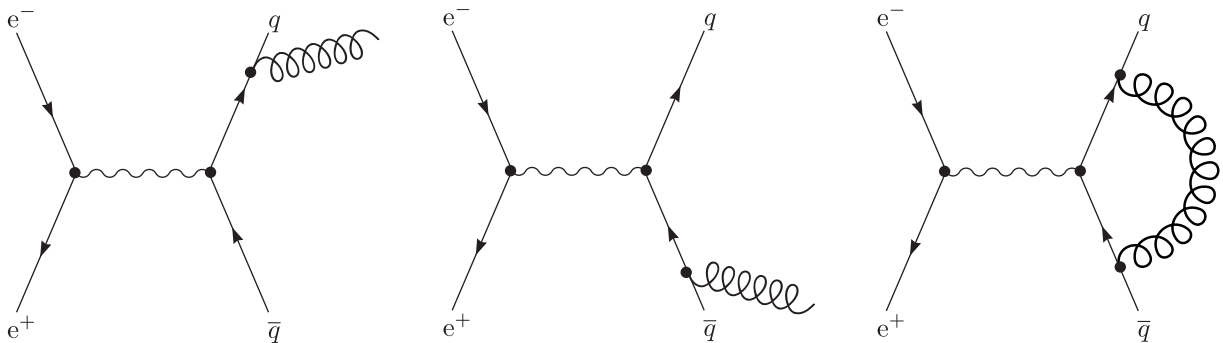
- summierte Impulse der Hadronen in Clustern (Jets): $p_j^\mu \approx p_q^\mu$

Es ist nicht so einfach zu entscheiden, welche Hadronen zu einem Jet dazugehören und welche nicht. Solange ein endlicher Öffnungswinkel da ist, wird ein Jet eine endliche Masse haben, während die Quarks in der Feldtheorie oft als masselos angenommen werden.

- Quark-Hadron-Dualität

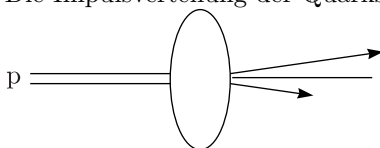
Bei hohen Impulsüberträgen oberhalb der Resonanzen (harte Kollisionen) kann man die dominanten Eigenschaften der hadronischen Wirkungsquerschnitte ausrechnen, indem man die Wirkungsquerschnitte auf Quark-Gluon-Niveau betrachtet. Das ist eine phänomenologische Tatsache, die nicht direkt aus der QCD folgt. Man bezeichnet das ganze in niedrigster Ordnung Störungstheorie als das naive Partonmodell.

5.0.1 Korrekturen durch Gluon-Emission



5.1 Streuung von Hadronen

Die Impulsverteilung der Quarks ist sehr stark kollimiert mit der Flugrichtung des Protons.



$$\vec{p}_{T,q} \sim 500 \text{ MeV} \text{ und } p_{L,q} = xP_L(\text{hadron})$$

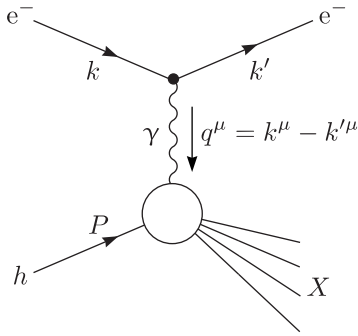
Man vernachlässigt den Transversalimpuls der Quarks (Die Hauptkorrekturen entstehen hinterher durch Störungstheorie. Zusätzliche Gluonabstrahlung liefert einen wesentlich größeren Beitrag.) Die Variable x wird auch als das Feynman-x bezeichnet.

Im naiven Partonmodell betrachtet man das Proton als Kollektion von quasifreien Teilchen (Quarks und Gluonen), die in Richtung des Protons fliegen. Der Impulsanteil dieser Teilchen ist x ($p_q^\mu = xP_{hadron}^\mu$). Diese Beziehung gilt nur im Limes, dass die Masse der Hadronen vernachlässigbar ist, da ja sonst die Massen der Quarks wegen der Massenschalen-Beziehung von x abhängen würden. Der Wirkungsquerschnitt der Hadron-Hadron-Streuung ist nun gegeben durch:

$$\sigma_{hh'}(P, P') = \sum_{j,j=\text{Partonen}} \int dx_1 dx_2 \hat{\sigma}_{ij}(x_1 P, x_2 P') \phi_{i/j}(x_1) \phi_{j/h'}(x_2)$$

$\hat{\sigma}$ ist der Wirkungsquerschnitt auf Partonniveau. Die Impulse der einlaufenden Partonen sind $x_1 P$ bzw. $x_2 P'$. $\phi_{i/A}(x) dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Parton i im Hadron A mit Impuls xP im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden. Man bezeichnet $\phi_{i/A}$ auch als parton distribution function (pdf).

5.1.1 Tief inelastische Streuung (Deep Inelastic Scattering (DIS))



Wir betrachten das ganze für $s \gg m_e^2, m_h^2$. Die Impulse seien gegeben durch $k = E(1, 0, 0, 1)$ und $k' = E'(1, \sin \theta, 0, \cos \theta)$. Dann folgt damit:

$$0 < -q^2 = Q^2 = -(k - k')^2 = 2k \cdot k' = 2EE'(1 - \cos \theta)$$

„Fixed target“ bedeutet, dass für das einlaufende Hadron $P = (m_h, \vec{0})$ gilt. Im allgemeinen Falle ist der Hadronimpuls P . (Im folgenden gelten die ersten Terme nach dem Gleichheitszeichen für „Fixed-target-Modelle“, die nachfolgenden allgemein.) Für den Energieverlust ergibt sich:

$$v = E - E' = \frac{P \cdot (k - k')}{m_h} = \frac{P \cdot q}{m_h}$$

Was uns weiterhin interessiert, ist der Bruchteil des Energieverlustes (fraction energy loss):

$$y = \frac{E - E'}{E} = \frac{P \cdot q}{P \cdot k} \in [0, 1]$$

Die Bjorken-x-Variable (unterscheide: Feynman-x) ist definiert durch:

$$x = \frac{Q^2}{2m_h v} = \frac{Q^2}{2P \cdot q} > 0$$

Es gibt eine Schranke an x und zwar $P_X^2 \geq m_h^2 > 0$.

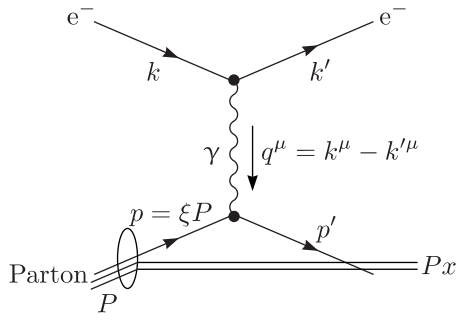
$$0 < P_X^2 = (P + q)^2 = m_h^2 + 2P \cdot q + q^2 = m_h^2 + \frac{Q^2}{x} - Q^2 \Rightarrow 0 \leq P_X^2 - m_h^2 = \frac{Q^2}{x}(1 - x)$$

Hieraus folgt wiederum $0 < x \leq 1$. Der Fall $x = 1$ entspricht $P_X^2 = m_h^2$, also elastischer Streuung. Schauen wir uns nun die Schwerpunktsenergie an:

$$s = (k + P)^2 \approx 2k \cdot P = \frac{2k \cdot P}{2P \cdot q} \cdot \frac{2P \cdot q}{Q^2} \cdot Q^2 = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot Q^2 \Rightarrow \boxed{Q^2 = xys}$$

5.1.2 DIS im naiven Partonmodell

Wir bezeichnen mit ξ das Bjorken-x:



Wir wollen alle Fermionen als masselos betrachten.

$$Q^2 = -(p' - p)^2 = 2p \cdot p'(-p'^2)$$

$$Q^2 + p'^2 = 2\xi P \cdot p' = 2\xi P \cdot (q + p) = 2\xi P \cdot q$$

Mit $Q^2 + p'^2 = x2P \cdot q + p'^2$ folgt für $p'^2 = 0$, dass $\xi = x$ ist. Diese Gleichheit gilt wirklich nur in niedrigster Ordnung Störungstheorie. In höherer Ordnung Störungstheorie ist jedoch $\xi > x$ für $p'^2 > 0$.

5.1.3 DIS durch Photon-Austausch

Schauen wir uns die Matrixelemente an:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(k')(ie\gamma^\mu)u(k) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p')(-iee_q\gamma^\nu)u(p)$$

Die allgemeine Struktur des dritten Terms ist gegeben durch $-iee_q f_N^\nu(p, q)$ ($N \equiv$ Nukleon). Darauf werden wir später zurückkommen. Was wir weiter benötigen ist das gemittelte Amplitudenquadrat. Dabei ist zu beachten, dass sowohl das einlaufende Elektron als auch das einlaufende Nukleon bzw. Quark Spin-1/2-Teilchen sind, was zu einem Vorfaktor 1/4 führt:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4} \frac{e^4 e_q^2}{Q^4} \text{Sp}(k' \gamma^\mu k \gamma^\nu) \sum_{pol} j_{N,\mu}^* j_{N,\nu} \text{ mit } \text{Sp}(k' \gamma^\mu k \gamma^\nu) = 4(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu} k \cdot k') = 2L^{\mu\nu}$$

Wir können den Ausdruck also in der Form

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = L^{\mu\nu} \frac{1}{Q^4} W_{\mu\nu}$$

schreiben, wobei $L^{\mu\nu}$ ein leptonischer und $W_{\mu\nu}$ ein hadronischer Tensor ist. Der differentielle partonische Wirkungsquerschnitt ist nun gegeben durch:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{\hat{s}^2} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{t}^2} \text{ mit } \hat{s} = 2k \cdot p = \xi s, \hat{t} = -2k \cdot k' = -Q^2 \text{ und } \hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = 0$$

Damit können wir das ganze umschreiben:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} = \frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2} = \frac{2\pi\alpha^2 e_q^2}{Q^4} \left[1 + \left(\frac{\hat{u}}{\hat{s}} \right)^2 \right]$$

Weiterhin gilt

$$-\frac{\hat{u}}{\hat{s}} = \frac{\hat{s} + \hat{t}}{\hat{s}} = 1 - \frac{Q^2}{2k \cdot P} = 1 - \frac{xy s}{xs} = 1 - y$$

und damit erhalten wir unser endgültiges Ergebnis für den vollen Wirkungsquerschnitt, indem wir über die Partonverteilungsfunktionen integrieren (wobei wir mit der θ -Funktion $y \in [0, 1]$ berücksichtigen):

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_0^1 d\xi \sum_{f=q,\bar{q}} \phi_{f/N}(\xi) e_f^2 \frac{2\pi\alpha^2}{Q^4} [1 + (1-y)^2] \theta((1-y)y)$$

Mit

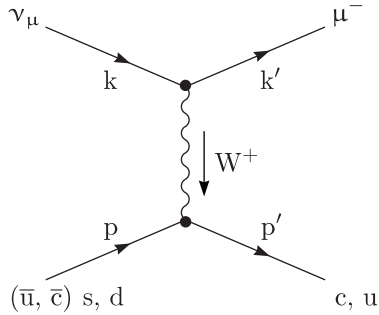
$$d\xi dQ^2 = dx \frac{dQ^2}{dy} dy = xs dx dy$$

gilt weiter:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \left(\sum_{f=q,\bar{q}} x\phi_{f|N}(x)e_q^2 \right) \frac{2\pi\alpha^2 s}{Q^4} [1 + (1-y)^2]$$

Führt man Streuung von geladenen Leptonen an Nucleonen durch, so misst man den Koeffizienten in der Klammer. Das Quark-Parton-Modell sagt voraus, dass dieser Koeffizient nicht von Q^2 abhängt. Dies war ganz wesentlich, um die Quarks als Teilchen zu etablieren.

5.1.4 (Anti-)Neutrino-Streuung



Mit dieser Reaktion kann man in erster Näherung direkt die Down-Quark-Verteilung messen.

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(k') \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(k) \frac{-i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right)}{q^2 - m_W^2} \bar{u}(p') \frac{-ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) u(p)$$

Bei fixed-target-Modellen kann man q^2 im Propagatorenner vernachlässigen. (Bei HERA ist dies nicht möglich.) Wegen γ_5 besitzt der leptoniche Tensor noch einen zusätzlichen Anteil mit einem ε -Tensor. Aufgrund der Antisymmetrie des ε -Tensors folgt:

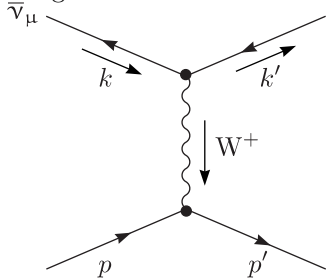
$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = -2(g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} - g^{\alpha\sigma} g^{\beta\rho})$$

Deshalb erhalten wir weiter:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{g^4}{2m_W^4} \underbrace{(2k' \cdot p')(2k \cdot p)}_{\hat{s}^2} = 16G_F^2 \hat{s}^2 \text{ mit } G_F = \frac{g^2}{8m_W^2}$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dQ^2} (\nu d \mapsto \mu^- n, c) = \frac{1}{16\pi \hat{s}^2} \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{G_F^2}{\pi}$$

Der partonische Wirkungsquerschnitt besitzt also keine Winkelabhängigkeit, sondern ist konstant. Wie sieht das ganze für Antineutrino-Streuung aus?



Wir müssen hier nur k durch $-k'$ und k' durch $-k$ ersetzen und erhalten:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{g^4}{2m_W^4} \underbrace{(2k \cdot p')}_{-\hat{u}} \underbrace{(2k' \cdot p)}_{-\hat{u}} = 16G_F^2 \hat{u}^2 (1-y)^2 \hat{s}^2$$

$$\frac{d^2\sigma(\nu p \mapsto \mu^- X)}{dx dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} [x(\phi_{d/p}(x) + \phi_{s/p}(x)) + (1-y)^2 x(\phi_{\bar{u}/p} + \phi_{\bar{c}/p})]$$

Dies gilt nur, wenn die Masse des charm-Quarks klein ist.

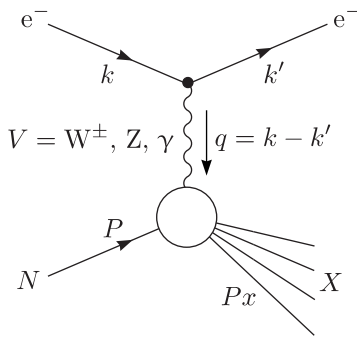
$$\frac{d^2\sigma(\nu p \mapsto \mu^+ X)}{dx dy} = \frac{G_F^2 s}{\pi} [x(\phi_{u/p}(x) + \phi_{c/p}(x))(1-y)^2 + x(\phi_{\bar{d}}(x) + \phi_{\bar{s}}(x))]$$

Aus der Neutrino-Streuung kann man die d-Quark-Typen von den \bar{u} -Quark-Typen unterscheiden. Experimentell macht man einen Fit an kombinierte Daten, nämlich e^-p und $e^-D = e^-(p+n)$. (Die Differenz ergibt den Wirkungsquerschnitt zwischen Elektronen und Neutronen.)

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uud \\ ddu \end{pmatrix}$$

Die Zustände $|p\rangle$ und $|n\rangle$ gehen auseinander durch Isospintransformationen hervor. Damit gilt $\phi_{u/p}(x) = \phi_{d/n}(x)$ und $\phi_{d/p}(x) = \phi_{u/n}(x)$.

5.2 DIS: nichtperturbativ



$$d\sigma^{lN} = \frac{1}{s} \sum_s \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + P - k' - Px) \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2E'}$$

Das Matrixelement ist gegeben durch:

$$\mathcal{M} = c_V^2 \bar{u}(k') \gamma^\mu \underbrace{(v_l^V - \gamma_5 a_l^V)}_{\Gamma_{l,v}} u(k) \frac{1}{Q^2 + m_V^2} \langle X | j_\mu^V(0) | N(p, \sigma) \rangle \quad \text{mit } c_V^2 = \begin{cases} e^2 & \text{für } V = \gamma \\ \left(\frac{g}{2\sqrt{2}}\right)^2 & \text{für } V = W^\pm \end{cases}$$

$\langle X | j_\mu^V(0) | N(p, \sigma) \rangle$ ist das hadronische Matrixelement. c_V^2 legt die Faktoren v_l^V und a_l^V fest:

$$v_l^Y = -1 \quad \text{und} \quad a_l^Y = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_{\nu W^+} = \mathbf{1} - \gamma_5 \quad \text{und} \quad \Gamma_{\bar{\nu} W^-} = \mathbf{1} + \gamma_5$$

Damit ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für Lepton-Nukleon-Streuung gegeben durch:

$$d\sigma^{lN} = \frac{d^3\vec{k}'}{2sE'} c_V^4 L_{l,V}^{\mu\nu}(k, q) W_{\mu\nu}^{N,V}(P, q) \frac{1}{4\pi^2(Q^2 + m_V^2)^2} \quad \text{mit}$$

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Sp}[\not{k}' \gamma^\mu (v - a\gamma_5) \not{k} \gamma^\nu (v - a\gamma_5)] = 2[(k^\mu k'^\nu + k'^\mu k^\nu - g^{\mu\nu} k \cdot k')(v^2 + a^2) - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k'_\rho k_\sigma 2av]$$

Kommen wir nun zum hadronischen Tensor:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_\sigma \sum_x \langle N(p, \sigma) | j_\nu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | N(p, \sigma) \rangle$$

Es wird also über die Nukleonpolarisationen σ und über die hadronischen Endzustände x summiert. Den Strom kann man zu einem beliebigen Raum-Zeit-Punkt wählen, weil daraus nur ein zusätzlicher für die Physik unwichtiger Phasenfaktor resultiert. Wir haben uns für den Nullpunkt entschieden. Wegen der Impulserhaltung $\delta^{(4)}(P + q - Px)$ ist

$$\sum_x |X\rangle \langle X| \neq \mathbf{1}$$

weil die hadronischen Endzustände eingeschränkt werden und kein vollständiges System bilden. Man kann diese Problematik jedoch umgehen, indem man die δ -Funktion als Fourierintegral schreibt:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P + q - Px) = \int d^4x \exp[i(P + q - Px) \cdot x]$$

Vergleiche mit

$$\langle N(p, \sigma) | j_\nu^\dagger(x) | X \rangle = \langle N(p, \sigma) | \exp(i\hat{P} \cdot x) j_\nu^\dagger(0) \exp(-i\hat{P} \cdot x) | X \rangle = \exp[i(P - P_X) \cdot x] \langle N(p, \sigma) | j_\nu^\dagger(0) | X \rangle$$

und schreibe $W_{\mu\nu}$ um:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_\sigma \int d^4x \exp(iq \cdot x) \sum_X \langle N(p, \sigma) | j_\nu^\dagger(x) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | N(p, \sigma) \rangle$$

Da in dieser Form die hadronischen Endzustände nicht mehr eingeschränkt sind, ergibt sich folgendes Endergebnis:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_\sigma \int d^4x \exp(iq \cdot x) \langle N(p, \sigma) | j_\nu^\dagger(x) j_\mu(0) | N(p, \sigma) \rangle$$

Anstelle von $j_\nu^\dagger(x) j_\mu(0)$ können wir auch den Kommutator in obiges Matrixelement schreiben, da der $j_\mu(0) j_\nu^\dagger(x)$ -Term aufgrund seiner Proportionalität zu $\delta^{(4)}(P_X + q - P)$ verschwindet. Wenn das Argument dieser δ -Funktion immer $\neq 0$ ist, liefert sie keinen Beitrag. Aufgrund der Lorentzinvarianz von $\delta^{(4)}(P_X + q - P)$ können wir dies in einem beliebigen Bezugssystem entscheiden. Wir wählen der Einfachheit halber das Ruhesystem des Nukleons mit $P = (m_N, \vec{0})$. Es gilt $q^0 = E - E' = v > 0$ und $P_X^0 = P^0 - q^0 = m_N - v < m_N$. Die hadronischen (angeregten) Endzustände besitzen jedoch eine Energie $P_X^0 \geq m_N$. Damit fällt die δ -Funktion weg und es gilt:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} \sum_\sigma \int d^4x \exp(iq \cdot x) \langle N(p, \sigma) | [j_\nu^\dagger(x) j_\mu(0)] | N(p, \sigma) \rangle$$

Was ist die allgemeinste Form von $W_{\mu\nu}(P, q)$? $W_{\mu\nu}$ ist das Matrixelement des Stromoperators $[j^\dagger(x), j_\mu(0)]$. Der elektromagnetische Strom ist exakt erhalten. Also muss $q^\mu W_{\mu\nu} = 0 = q^\nu W_{\mu\nu}$ gelten. Diese beiden Bedingungen schränken die Form von $W_{\mu\nu}$ drastisch ein:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F$$

F ist eine skalare Funktion, die nur von Invarianten abhängen kann, die sich aus P und q bilden lassen. Diese Invarianten sind $P \cdot q$, q^2 und $m_N^2 = P^2$. ($P^2 = m_N^2$ ist jedoch eine Konstante, die wir nicht weiter betrachten wollen.) Anstelle von $P \cdot q$ und q^2 können wir auch

$$Q^2 = -q^2 \text{ und } x = \frac{Q^2}{2P \cdot q}$$

verwenden, womit folgt:

$$W_{\mu\nu}(P, q) = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1^V(x, Q^2) + \frac{P^\mu P^\nu}{P \cdot q} F_2^V(x, Q^2) - i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{P^\alpha q^\beta}{P \cdot q} F_3^V(x, Q^2) \text{ mit } p_\mu^T \equiv P_\mu - q_\mu \frac{P \cdot q}{q^2}$$

Es gilt nämlich:

$$q \cdot p^T = q \cdot P - q^2 \frac{P \cdot q}{q^2} = 0$$

Kontraktion mit $L^{\mu\nu}$ liefert:

$$\frac{d^2 \sigma^{l,N}}{dx dy} = N^{l,\nu} \left[\frac{y^2}{2} \cdot 2xF_1 + (1-y)F_2 + \delta_V \left(y - \frac{y^2}{2} \right) F_3 \right] \text{ mit } \delta_V = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu N \\ -1 & \text{für } \bar{\nu} N \end{cases}$$

N ist ein Normierungsfaktor, der davon abhängt, welche Kopplungen auftreten. Es gilt

$$N^{e^\pm, \gamma} = 4\pi\alpha^2 \frac{s}{Q^4} \text{ und } N^{\nu, W} = N^{\bar{\nu}, W} = \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{s}{\left(1 + \frac{Q^2}{m_N^2}\right)^2} \approx \frac{G_F^2 s}{2\pi}$$

5.2.1 Vergleich mit Parton-Niveau-Resultat

Aus dem Vergleich mit

$$\frac{d^2\sigma^{e^\pm,\gamma}}{dx dy} = N^{e^\pm,\gamma} \left[\frac{1 + (1-y)^2}{2} \right] \sum_f x\phi_{f/N}(x)e_f^2 = N^{e^\pm,\gamma} \left[\frac{y^2}{2} + 1 - y \right] \sum_f x\phi_{f/N}(x)e_f^2$$

erhalten wir:

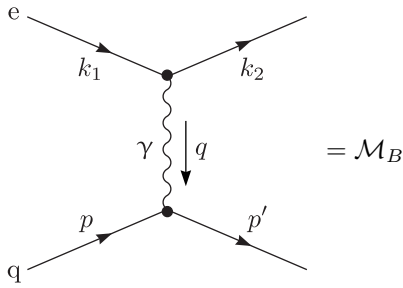
$$2xF_1 = F_2 = \sum_f x\phi_{f/N}(x)e_f^2$$

$2xF_1 = F_2$ ist die sogenannte Callan-Gross-Relation. Für skalare Partonen gilt $F_1 = 0$ und für Spin-1/2-Partonen $2xF_1 = F_2$. Dadurch wurden experimentell die Quarks als Spin-1/2-Fermionen bestätigt. Für νN -Streuung (bzw. $\bar{\nu}N$ -Streuung) gilt:

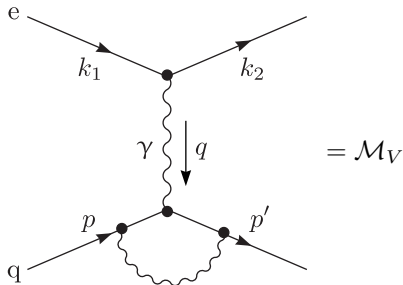
$$2xF_3 = 2(\bar{u}(x) - d'(x)) + \dots \text{ mit } d'(x) = d(x) \cos^2 \theta_c + s(x) \sin^2 \theta_c$$

5.3 DIS jenseits LO

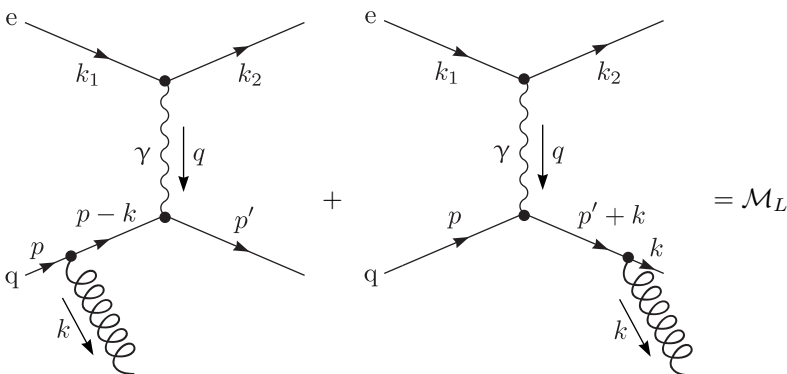
Born-Diagramme haben die folgende Form:



Ebenso gibt es virtuelle Diagramme:



Zusätzlich können auch reelle Emissionsgraphen auftreten:



Der hadronische Strom hat einerseits Interferenzbeiträge der ersten beiden Diagramme und andererseits das Quadrat der reellen Emissionsamplitude.

$$d\sigma^{NLO} = d\sigma_{Born} + d\sigma_{B,V} + d\sigma^{reelle\ Emission} \text{ mit } d\sigma_{Born} \sim |\mathcal{M}_B|^2, d\sigma_{B,V} \sim 2\text{Re}(\mathcal{M}_B^* \mathcal{M}_V) \text{ und}$$

$$d\sigma^{\text{reelle Emission}} \sim |\mathcal{M}_L|^2$$

Um die zusätzlichen Divergenzen zu sehen, fangen wir mit der reellen Emission an. Für den hadronischen Strom entsteht ein zusätzlicher Beitrag:

$$J_\mu^{h,e} = \bar{u}(p')\gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} g_s T_{i'i}^a \not{\epsilon}(k) u(p) + \bar{u}(p') g_s T_{i'i}^a \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} \gamma_\mu u(p)$$

Die Abstrahlung eines Gluons an einer äußeren Linie führt auf

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \not{\epsilon} u(p) = \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2} \not{\epsilon} u(p) = \left(\frac{-\not{k} \not{\epsilon} + m \not{\epsilon} - \not{\epsilon} \not{p} + 2\varepsilon \cdot p}{-2p \cdot k} \right) u(p) = \left(\frac{\not{k} \not{\epsilon}}{2p \cdot k} - \frac{p \cdot \varepsilon}{p \cdot k} \right) u(p)$$

unter Ausnutzung der Dirac-Gleichung und On-Shell-Beziehung. Analog ergibt sich für die Abstrahlung eines Gluons beim auslaufenden Teilchen:

$$\bar{u}(p') \not{\epsilon} \frac{1}{\not{p}' + \not{k} - m} = \bar{u}(p') \left(\frac{\not{\epsilon} \not{k}}{2p' \cdot k} + \frac{p' \cdot \varepsilon}{p' \cdot k} \right)$$

Damit folgt weiter:

$$g_s T_{i'i}^a \left(\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \underbrace{\left[\frac{p'_\alpha}{-p' \cdot k} - \frac{p_\alpha}{p \cdot k} \right]}_{\text{Eikonalfaktor}} \varepsilon_\alpha + \bar{u}(p') \left[\frac{\gamma_\mu \not{k} \not{\epsilon}}{2p \cdot k} + \frac{\not{\epsilon} \not{k} \gamma_\mu}{2p' \cdot k} \right] u(p) \right)$$

Wir haben hier den potentiellen divergenten Anteil abgespalten. Wenn das Quark und das abgestrahlte Gluon ungefähr parallel sind, treten weitere Singularitäten auf.

Für kleine Gluonenergien $k^0 = |\vec{k}|$ gilt:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_B \cdot g_s T_{i'i}^a \underbrace{\left(\frac{p'_\alpha}{p' \cdot k} - \frac{p_\alpha}{p \cdot k} \right)}_{:= E_\alpha} \varepsilon_\alpha + \dots$$

Mit

$$\sum_{a,i',i} |T_{i'i}^a|^2 = T_{i'i}^a T_{i'i}^a = \text{Sp}(T^a T^a) = \text{Sp} \left(\frac{N^2 - 1}{2N} \mathbf{1} \right) = \frac{N^2 - 1}{2}, \quad k_\alpha E^\alpha = \frac{p' \cdot k}{p' \cdot k} - \frac{p \cdot k}{p \cdot k} = 0 \text{ und}$$

$$E^2 = m^2 \left(\frac{1}{(p' \cdot k)^2} + \frac{1}{(p \cdot k)^2} \right) - \frac{2p \cdot p'}{(p' \cdot k)(p \cdot k)}$$

ergibt sich:

$$\sum_{\text{pol Farben}} |\mathcal{M}|^2 = \sum_{\text{pol Farben}} |\mathcal{M}_B|^2 g_s^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \underbrace{\sum_{\text{g.pol=T}} E_\alpha E_\beta \varepsilon^\alpha \varepsilon^{\beta*}}_{-E_\alpha E^\alpha} = \sum_{\text{pol Farben}} |\mathcal{M}_B|^2 g_s^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \left(\frac{2p \cdot p'}{(p' \cdot k)(p \cdot k)} + \dots \right) + \dots$$

Schauen wir uns nun das Phasenraumintegral über $d^3 \vec{k}$ (mit $k^0 := \omega$ und $\hat{k} := k/\omega$) an:

$$\sum_{\text{pol Farben}} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2|\vec{k}|} \approx \sum_{\text{pol Farben}} |\mathcal{M}_B|^2 g_s^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{2p \cdot p'}{(p' \cdot \hat{k})(p \cdot \hat{k})} \frac{\omega^2 d\omega d\Omega_k}{16\pi^3 \omega^3}$$

Wir wählen

$$p' = p'^0(1, 0, 0, \beta) \text{ und } \hat{k} = (1, \sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \text{ mit } \beta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{p'^0{}^2}}$$

und erhalten wir $p' \cdot \hat{k} = p'^0(1 - \beta \cos \vartheta)$:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{d\omega}{\omega} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d \cos \vartheta |\mathcal{M}_B|^2 g_s^2 \frac{N^2 - 1}{2N} \frac{2p \cdot p'}{p'^0(1 - \beta \cos \vartheta)p \cdot \hat{k}}$$

Hier treten nun folgende Probleme auf:

1.) Infrarote Singularität:

Das Integral $\int_0^{\frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{d\omega}{\omega}$ führt auf eine logarithmische Divergenz. Wir benötigen also eine Regularisierung. Die erste Möglichkeit ist, eine kleine Eichbosonmasse einzuführen:

$$\int_{m_\gamma}^{\frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{d\omega}{\omega} = \log\left(\frac{\frac{\sqrt{s}}{2}}{m_\gamma}\right)$$

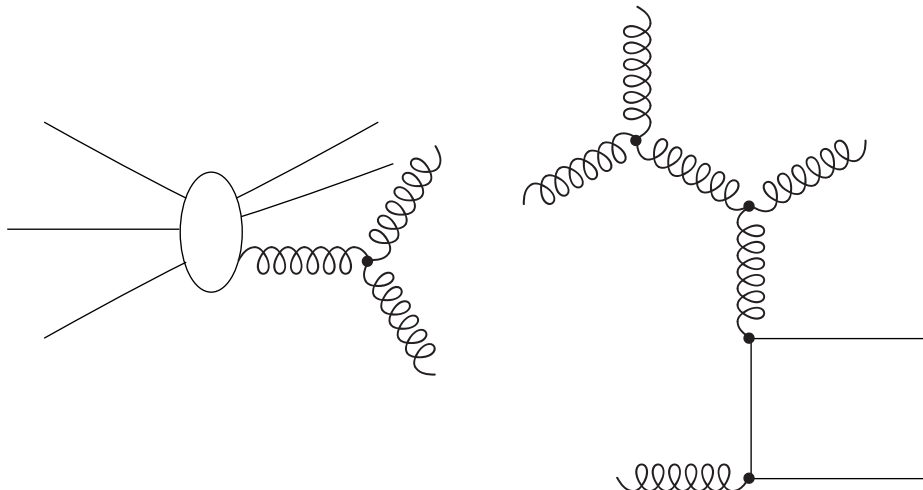
Eine kleine Gluonmasse zerstört die Eichinvarianz, weshalb es bei nichtabelschen Vertizes Probleme mit dieser Art der Regularisierung gibt. Deshalb funktioniert dies für echte QCD-Prozesse nicht. Deshalb ist in diesem Falle dimensionale Regularisierung angesagter.

2.) Kolineare Singularität: $\vartheta \mapsto 0$

In diesem Falle ist das Gluon parallel zum auslaufenden Quark.

$$\int_{-1}^1 d\cos\vartheta \frac{1}{1-\beta\cos\vartheta} = \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

Mittels einer kleinen Quarkmasse lässt sich diese Singularität regularisieren. Wir möchten jedoch im Limes verschwindender Quarkmassen rechnen (Partonmodell), da sonst die Rechnungen überaus kompliziert werden. Also liegt für $m \mapsto 0$ ($\beta \mapsto 1$) eine logarithmische Singularität vor.



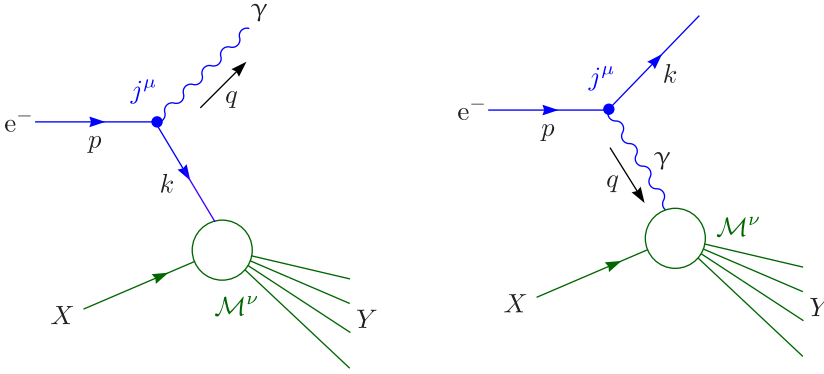
Diese Art von Singularität können auch bei Prozessen mit Drei-Gluon-Vertizes auftreten. Solche Fälle lassen sich nicht durch Einführen einer kleinen Gluonmasse regularisieren, weil dann die Eichinvarianz in nichtkontrollierbarer Weise vernichtet wird. Es müssen dann Zusatzterme eingeführt werden, welche die Eichinvarianz garantieren im Limes verschwindender Gluonmasse. Außerdem hat man im Falle massiver Gluonen zusätzliche longitudinale Polarisationen, die unphysikalisch sind. Im QED-Fall würden diese wegen der Stromerhaltung herausfallen, aber nicht im QCD-Fall. Infolgedessen muss man in der QCD diese Polarisationen extra eliminieren.

Alternativ zur Einführung kleiner Eichbosonmassen kann dimensionale Regularisierung durchgeführt werden.

Es gibt überlappende kolineare und infrarote Singularitäten.

$$0 \sim \log\left(\frac{\sqrt{s}}{2}\right) \log\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon^2}$$

5.4 Kolineare Singularitäten in der QED



Was die Probleme verursacht, sind die Propagatoren. Wir betrachten den Fall $k^2 \approx m^2$:

$$\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} = \frac{\sum_s u^s(k) \bar{u}^s(k)}{k^2 - m^2} \text{ und } \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \stackrel{\text{eff}}{=} i \frac{\sum_{i=1,2} \varepsilon_{i,T}^\mu \varepsilon_{i,T}^\nu}{q^2}$$

Die Amplitude besitzt in diesem Grenzfall folgende Struktur, weil sich die restlichen Terme in diesem Limes vernachlässigen lassen:

$$\mathcal{M}(e^- X \mapsto \gamma Y) \approx \sum_s \mathcal{M}(e^-_s \mapsto \gamma_i e^-_s) \frac{1}{k^2 - m^2} \mathcal{M}(e^-_s(k) X \mapsto Y)$$

Im $q^2 \mapsto 0$ -Limes gilt:

$$\varepsilon_{T,i}^\mu = (0, \vec{\varepsilon}_{T,i}) \text{ und } \vec{\varepsilon}_{T,i} \cdot \vec{q} = 0$$

Die unphysikalischen Polarisationen sind gegeben durch:

$$\varepsilon_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{q}|} q^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{q}|} (q^0, \vec{q}) \text{ und } \varepsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}|\vec{q}|} (q^0, -\vec{q})$$

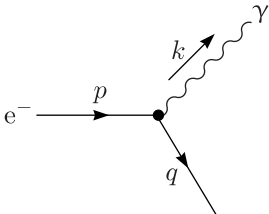
ε_+^μ und ε_-^μ sind lichtartige Vektoren. Für sie gilt $\varepsilon_\pm \cdot \varepsilon_\pm^* = 0$, $\varepsilon_+ \cdot \varepsilon_-^* = 1$ und $\varepsilon_\pm \cdot \varepsilon_{T,i}^* = 0$. Damit lässt sich der metrische Tensor auf folgende Art und Weise schreiben:

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon_+^\mu \varepsilon_{-,\nu}^* + \varepsilon_-^\mu \varepsilon_{+,\nu}^* - \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{T,i}^\mu \varepsilon_{T,i,\nu}^*$$

Dass sich der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ tatsächlich auf diese Weise darstellen lässt, kann überprüft werden, indem man die Beziehungen der Form $g^{\mu\nu} \varepsilon_\mu = \varepsilon_\nu$ nachrechnet (als Übung). $g_{\mu\nu}$ verknüpft den Strom j^μ mit dem Matrixelement \mathcal{M}^ν . Der leptonische Strom j^μ ist erhalten; es gilt also $j_\mu q^\mu = 0$. Ebenso ist das Matrixelement eichinvariant und deshalb gilt $q^\nu \mathcal{M}_\nu = 0$.

$$\mathcal{M}(e^- X \mapsto e^- Y) \approx \sum_{i=1}^2 \mathcal{M}(e^- \mapsto \gamma_i e^-) \frac{i}{q^2} \mathcal{M}(\gamma_i X \mapsto Y)$$

Uns geht es darum, den Teil abzuspalten, wo die kolineare Singularität passiert. Dies haben wir oben getan. Die endlichen Terme interessieren uns jetzt nicht.



Für die Berechnung dieses Matrixelements betrachten wir zunächst den Grenzfall $m_e = 0$, weil dann der Vertex die Helizität/Chiralität erhält. Was wir benötigen, ist:

$$\mathcal{M}_{L,i/R,i} \sim \bar{u}_{L/R}(k) (-ie\gamma^\mu) u_{L/R}(p) \varepsilon_{\mu,i,T}^*(k)$$

Es reicht also aus, die linkshändigen Prozesse zu betrachten. Wähle $p^\mu = (p, 0, 0, p)$, $q = (zp, p_T \cos \varphi, p_T \sin \varphi, zp)$ und $k = ((1-z)p, -p_T \cos \varphi, -p_T \sin \varphi, (1-z)p)$. $\vec{p}_T = (p_T \cos \varphi, p_T \sin \varphi)$ sei der transversale zweidimensionale Vektor, der den Streuwinkel des auslaufenden Elektrons beschreibt. Weiterhin gilt $q^2 = -p_T^2$ und $k^2 = -p_T^2$.

a.) Reelles Photon: $q^2 = 0$ (bis $O(p_T^4)$)

Dies können wir folgendermaßen erreichen. Wir setzen

$$q = \left(zp, \vec{p}_T, zp - \frac{p_T^2}{2zp} \right)$$

und damit gilt $q^2 = -p_T^4/(4z^2p^2)$. Wegen der Vierer-Impulserhaltung muss außerdem folgendes gelten:

$$k = \left((1-z)p, \vec{p}_T, (1-z)p + \frac{p_T^2}{2zp} \right) \text{ und damit } k^2 = -\frac{p_T^2}{z}$$

b.) Hier machen wir das ganze umgekehrt:

$$k = \left((1-z)p, -\vec{p}_T, (1-z)p - \frac{p_T^2}{2(1-z)p} \right), q = p - k \text{ und } q^2 = -\frac{p_T^2}{1-z}$$

Die Kinematik ist also approximativ richtig bis zur Ordnung p_T^2 . Für den relativistischen Grenzfall ist die chirale Darstellung die geeignetste für die γ -Matrizen.

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \bar{\sigma}_\mu & 0 \end{pmatrix}, u_L(p) = \sqrt{2p^0} \begin{pmatrix} \xi_-(p) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\xi_-(p)$ ist ein zweidimensionaler Weyl-Spinor.

$$\mathcal{M}_a = \sum_s \mathcal{M}(e^-(k, s) + X \mapsto Y) \frac{i}{k^2} \mathcal{M}(e^-(p) \mapsto \gamma(p)e^-_s(k))$$

$$\mathcal{M}_b = \sum_{j=1,2} \mathcal{M}(\gamma(q, j) + X \mapsto Y) \frac{i}{q^2} \mathcal{M}(e^-(p) \mapsto \gamma_j(q)e^-(k))$$

Wir wollen nun $\mathcal{M}(e^-_{L/R} \mapsto \gamma_i e^-_{L/R})$ (für $i = L, R$) berechnen. Wegen der Chiralitäts-/Helizitätserhaltung am Vertex stimmt die Helizität bei ein- und auslaufendem Elektron überein. Aufgrund der Paritätserhaltung reicht es, den linkshändigen Anteil auszurechnen.

$$\mathcal{M} = \bar{u}(k)(-e\gamma^\mu)u(p)\varepsilon_i^*(q)$$

In chiraler Darstellung der γ^μ gilt:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \sigma^\mu = (\mathbf{1}, \vec{\sigma}), \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\vec{\sigma})$$

Die Spinoren sind gegeben durch:

$$u_L(p) = \sqrt{2p^0} \begin{pmatrix} \xi_-(p) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \xi_-(p) = \frac{1}{\sqrt{2p(p+p_z)}} \begin{pmatrix} -p_x + ip_y \\ p + p_z \end{pmatrix}$$

Das müssen wir uns jetzt anschauen für die obigen Impulse. Für die hier spezifische Kinematik $\vec{p} \parallel \hat{z}$ folgt also:

$$\xi_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_-(k) = \frac{1}{2(1-z)p} \begin{pmatrix} p_T \exp(-i\varphi) \\ 2(1-z)p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_T}{2(1-z)p} \exp(-i\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir treffen außerdem folgende Wahl:

$$\bar{\varepsilon}_{T,L}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\exp(-i\varphi), i \exp(-i\varphi), -\frac{\vec{p}_T}{zp} \right) \text{ und } \bar{\varepsilon}_{T,R}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\exp(i\varphi), -i \exp(i\varphi), -\frac{\vec{p}_T}{zp} \right)$$

Man kann sich überzeugen, dass $\vec{q} \cdot \bar{\varepsilon}_L^* = O(p_T^2)$ ist.

$$\vec{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}_{T,L}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{p_T}{zp} & 2 \exp(-i\varphi) \\ 0 & \frac{p_T}{zp} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}_{T,R}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{p_T}{zp} & 0 \\ 2 \exp(i\varphi) & \frac{p_T}{zp} \end{pmatrix}$$

Also gilt für das Matricelement:

$$\mathcal{M}(e^-_L \mapsto e^-_L \gamma R) = -e \sqrt{2p \cdot 2(1-z)} \cdot p \xi^\dagger(\vec{k}) \vec{\sigma} \cdot \bar{\varepsilon}_{T,L}^*(q) \xi(p) = -e \cdot 2p \sqrt{1-z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_T}{zp} = -e \frac{\sqrt{2z(1-z)}}{z} p_T$$

$$\mathcal{M}(e^-_L \mapsto e^-_L \gamma_L) = -e \cdot 2p \sqrt{1-z} \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left(\frac{p_T}{(1-z)p} + \frac{p_T}{zp} \right)}_{\frac{p_T}{z(1-z)}} = -e \frac{\sqrt{2(1-z)}}{z(1-z)} p_T$$

Macht man eine Paritätstransformation, so ändert die Helizität ihr Vorzeichen. Da die elektromagnetische Wechselwirkung partitätsinvariant ist, gilt $\mathcal{M}(e^-_L \mapsto e^-_L \gamma_R) = -\mathcal{M}(e^-_R \mapsto e^-_R \gamma_L)$ und $\mathcal{M}(e^-_L \mapsto e^-_L \gamma_L) = -\mathcal{M}(e^-_R \mapsto e^-_R \gamma_R)$. Wir berechnen nun das Amplitudenquadrat, gemittelt über die Polarisationen:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 = e^2 \cdot 2(1-z) p_T^2 \cdot \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2(1-z)^2} \right) = \frac{2e^2 p_T^2}{z(1-z)} \left[\frac{(1-z)^2 + 1}{z} \right]$$

Dies ist unabhängig davon, ob wir den ersten oder zweiten Fall betrachten.

5.5 Equivalent photon approximation (EPA), Weizsäcker-Williams-Approximation

Schauen wir uns nun den zweiten Fall an, in dem das intermediäre Teilchen ein Photon ist; wir wollen uns also den Prozess $e^- X \mapsto e^- Y$ näher anschauen. Für den Wirkungsquerschnitt folgt:

$$\sigma = \underbrace{\frac{1}{8pE_x}}_{\frac{1}{2s}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k^0} \int d\phi_y \left(\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 \right) \frac{1}{q^4} |\overline{\mathcal{M}_{\gamma X}}|^2$$

Die Integration über den Winkel ϕ eliminiert die Interferenzterme. Wir können $d^3 \vec{k}$ schreiben als

$$dk_z d^2 \vec{k}_T = p dz p_T dp_T \int d\varphi = \pi p dz dp_T^2$$

$$k^0 = (1-z)p \text{ und } q^2 = -\frac{p_T^2}{1-z}$$

womit sich ergibt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{p dz dp_T^2}{16\pi^2 (1-z) p} \left(\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 \right) \frac{(1-z)^2}{p_T^4} \underbrace{\frac{z}{8pz \cdot E_x} \int d\phi_y |\overline{\mathcal{M}_{\gamma X}}|^2}_{\sigma(\gamma X \mapsto Y)} = \\ &= \int_0^1 dz \frac{dp_T^2}{16\pi^2} \cdot \frac{2e^2 p_T^2}{2(1-z)} \left[\frac{(1-z)^2 + 1}{z} \right] \frac{(1-z)^2}{p_T^4} \sigma(\gamma X \mapsto Y) = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int \frac{dp_T^2}{p_T^2} \left[\frac{(1+z)+1}{z} \right] \sigma(\gamma(z, p) X \mapsto Y) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

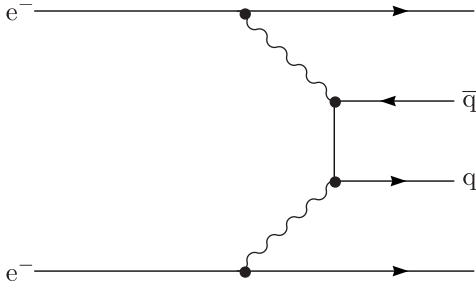
$$\int \frac{dp_T^2}{p_T^2} = \int \frac{dq^2}{q^2} = \int_{m^2}^s \frac{dq^2}{q^2} = \ln \left(\frac{s}{m^2} \right) + O(1)$$

$$\sigma \approx \int_0^1 dz \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{s}{m^2} \right) \left[\frac{(1+z)^2 + 1}{z} \right] \sigma(\gamma(z, p) X \mapsto Y)$$

Wir können hier das Photon als Parton im Elektron interpretieren. Dann ist

$$f_{\gamma/e}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{s}{m^2} \right) \left[\frac{(1-z)^2 + 1}{z} \right]$$

die Wahrscheinlichkeitsamplitude, ein Photon mit Impuls pz im Elektron zu finden. Die Weizsäcker-Williams-Approximation arbeitet also mit Partondichten von Photonen in Elektronen. Anwendung:



Die Photonen besitzen ein sehr kleines q^2 und befinden sich deshalb fast auf der Massenschale. Dies ist ein effektiver Prozess, um Hadronen (und andere Teilchen $+X$) bei e^+e^- -Kollisionen zu erzeugen. Am einfachsten berechnet man den Prozess, indem man mit der doppelten Weizsäcker-Williams-Approximation auf beiden Seiten arbeitet. Entsprechend redet man auch von Zwei-Photon-Prozessen. Bei kleinen invarianten Massen wird dieser Prozess dominant. Derselbe Prozess, bei dem die Elektronen durch schwere Ionen ersetzt werden, wäre ein Beitrag zur Higgszerzeugung.

Die Luminosität bei Schwerionenexperimenten muss 5 Größenordnungen kleiner sein als bei p-p-Stößen, weil sonst die Schwerionen auseinanderfliegen. Schwerionen haben sehr große Wirkungsquerschnitte.

a.) $e^-X \mapsto \gamma Y$:

$$\sigma = \frac{1}{8pE_y} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q^0} \int d\phi_y \left(\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 \right) \frac{z^2}{p_T^2} \overline{|\mathcal{M}_{e^-X}|^2}$$

Anstelle von d^3k hat man d^3q , weil sich das Photon auf der Massenschale befindet. Mit $d^3q = p dz \pi dp_T^2$ und $q^0 = zp$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int \frac{p dz dp_T^2}{16\pi^2 zp} \left(\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}|^2 \right) \frac{z^2}{p_T^4} \frac{1-z}{8p(1-z)E_y} \int d\phi_y \overline{|\mathcal{M}_{e^-X}|^2} = \\ & = \int \frac{dz dp_T^2}{16\pi^2} \cdot \frac{2e^2 p_T^2}{z(1-z)} \left[\frac{1+(1-z)^2}{z} \right] \frac{z}{p_T^2} \frac{1-z}{(1-z)E_y} \int d\phi_y \overline{|\mathcal{M}_{e^-X}|^2} = \\ & = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dz \int \frac{dp_T^2}{p_T^2} \left[\frac{(1-z)^2 + 1}{z} \right] \sigma(e^-(1-z, p) + X \mapsto Y) \stackrel{1-z=x}{=} \\ & = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx \int \frac{dp_T^2}{p_T^2} \left[\frac{x^2 + 1}{1-x} \right] \sigma(e^-(x, p) + X \mapsto Y) \end{aligned}$$

Bei $x = 1$ (und $z = 0$) tritt eine Divergenz auf. In diesem Falle gilt $q^0 \mapsto 0$; das Photon ist also infrarot. Weiche Photonemissionen führen also zu Divergenzen. Die infrarote $1/(1-x)$ -Singularität hebt sich in der vollständigen Rechnung weg gegen $\mathcal{M}_{\text{Born}}^* \mathcal{M}_{\text{virtuell}}$. Die tatsächliche Splitting-Funktion wäre:

$$f_{e/e}^{(1)}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \frac{x^2 + 1}{1-x} + A\delta(1-x)$$

$$f_{e/e}^{(1)}(x) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+$$

Wir führen eine neue Distribution ein, die sich von der alten um einen δ -Funktionsbeitrag unterscheidet. Dies sind die sogenannten $+$ -Distributionen $(g(x))_+$. Für eine beliebige Testfunktion $f(x)$ (stetig auf dem Intervall $[0, 1]$) gilt:

$$\int_0^1 dx f(x) (g(x))_+ = \int_0^1 dx g(x) [f(x) - f(1)]$$

Also gilt hier:

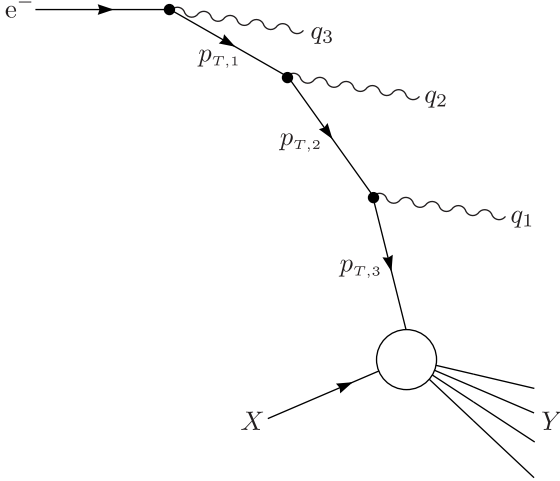
$$\int_0^1 dx f(x) \left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+ = \int_0^1 dx \frac{(f(x) - f(1))(1+x^2)}{1-x}$$

Die Elektronenzahl ist erhalten. Es muss also folgendes gelten:

$$1 = \int_0^1 f_{e/e}(x) = \int_0^1 dx \left[\delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} \ln\left(\frac{s}{m^2}\right) \left(\frac{1+x^2}{1-x}\right) \underbrace{[f(x) - f(1)]}_{1-1} \right] = 1 + 0 = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron zu finden, mit Impuls zwischen 0 und 1.

5.6 Evolutionsgleichungen DGLAP



Was sind die relevanten p_T -Bereiche bei der multiplen Emission von Photonen, die zusätzliche Logarithmen und damit eine Verstärkung liefern?

$$|\mathcal{M}_{eX \rightarrow Y+n\gamma}|^2 \sim \frac{1}{p_{T,3}^2} \frac{1}{(p_{T,2} + p_{T,3})^2} \frac{1}{(p_{T,1} + p_{T,2} + p_{T,3})^2}$$

Schauen wir uns den Fall an, wenn für Transversalimpulse immer weiter zunehmen. Es sei also $p_{T,1} \gg p_{T,2} \gg p_{T,3}$.

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \int_{m^2}^{p_{T,1}^2} \frac{dp_{T,2}^2}{p_{T,2}^2} \int_{m^2}^{p_{T,2}^2} \frac{dp_{T,3}^2}{p_{T,3}^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \ln^2\left(\frac{p_T^2}{m^2}\right)$$

Wegen $1/p_{T,3}^2$ dominieren die kleinen $p_{T,2}$, weshalb der Fehler gering ist. Analog gilt:

$$\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \int_{m^2}^{p_{T,1}^2} \frac{dp_{T,2}^2}{p_{T,2}^2} \int_{m^2}^{p_{T,2}^2} \frac{dp_{T,3}^2}{p_{T,3}^2} = \frac{1}{n!} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^n \ln^n\left(\frac{p_T^2}{m^2}\right)$$

Wir wollen nun alle Emissionen bis zu einem gegebenen p_T^2 aufsummieren. Dazu definieren wir uns neue Verteilungsfunktionen. $f_{\gamma/e}(x, Q^2)$ und $f_{e/e}(x, Q^2)$ seien die Wahrscheinlichkeiten, ein γ oder e^- im e^- zu finden mit Impulsanteil x , nachdem alle Splittings mit $p_T < Q$ berücksichtigt wurden. Sowohl in der QED als auch der QCD erhält man eine perturbative Vorhersage, wie die Partonverteilung von der Skala Q abhängt. Schauen wir uns also die Änderung von Q nach $Q + \Delta Q$ an. Bei der Skala Q haben wir eine Elektronverteilung, welche durch $f_{e/e}(x, Q^2)$ gegeben ist. Bei $Q + \Delta Q$ haben wir eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass eine zusätzliche Photonemission stattfindet. Das Elektron emittiert ein Photon mit $p_T \in [Q, Q + \Delta Q]$ mit der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\alpha}{2\pi} \frac{dp_T^2}{p_T^2} \frac{1 + (1-z)^2}{z} \Rightarrow f_{\gamma/e}(x, Q + \Delta Q) = f_{\gamma/e}(x, Q) + \int_0^1 dx' \int_0^1 dz \underbrace{\frac{\alpha}{2\pi} \frac{\Delta Q^2}{Q^2}}_{\frac{2\Delta Q}{Q}} \frac{1 + (1-z)^2}{z} f_{e/e}(x', Q^2) \underbrace{\delta(x - x'z)}_{\frac{1}{z} \delta(x' - \frac{x}{z})}$$

$$\boxed{\frac{d}{d \log(Q)} f_{\gamma/e}(x, Q) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{1 + (1-z)^2}{z} \right] f_{e/e}\left(\frac{x}{z}, Q\right)}$$

z kann nicht kleiner sein als x , weil sonst wäre $x' > 1$. Deshalb fängt die z -Integration bei x an. Dies ist die einfachste Form der Evolutionsgleichung. Sobald die Anfangsbedingung festgelegt wird, kann man diese lösen. Analog folgt für den Fall der Elektronen im ursprünglichen Elektron ist der einzige Unterschied, dass der Splitting-Kernel ersetzt wird:

$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{e/e}(x, Q) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{\alpha}{\pi} \left[\left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ \right] f_{e/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right)$$

Um diese Differentialgleichungen in der QED zu lösen, kann man iterativ vorgehen. Die minimale Skala ist gegeben durch die Elektronenmasse. Damit ist die Anfangsbedingung gegeben durch:

$$f_{e/e}(x, Q = m) = \delta(1-x) \text{ und } f_{\gamma,e}(x, Q = m) = 0$$

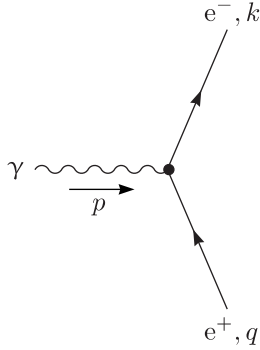
Bei $Q = m$ kann kein Photon emittiert worden sein, da dieses ja immer einen Transversalimpuls mitnehmen würde. Was man findet, ist die Verteilung, die man in der niedrigsten Ordnung Störungstheorie ausrechnet. Jede weitere Ordnung liefert einen zusätzlichen Term $\log(Q)$. Die Lösung summiert also genau die multiplen Emissionen auf. In der QCD ist $\alpha_s/\pi \log(Q) \sim O(1)$ für realistische Energien. Dann muss man die Summation ausführen, um vernünftige Werte für die Partonverteilung zu erhalten. Löst man die Gleichung nun iterativ, so kommt man auf Ausdrücke für Wirkungsquerschnitte:

$$\sigma(e^-(p) + X \mapsto e^- + n\gamma + Y) = \int_0^1 dx f_{\gamma/e}(x, Q) \sigma(\gamma(xp) + X \mapsto Y)$$

$$\sigma(e^-(p) + X \mapsto n\gamma + Y) = \int_0^1 dx f_{e/e}(x, Q) \sigma(e^-(xp) + X \mapsto Y)$$

Mit den Photondichten summiert man multiple Photonemissionen auf. In führender Ordnung kann man alle solche Effekte berücksichtigen. Korrekturen sind unterdrückt durch einen Faktor α_s/π (ohne $\log(Q)$).

5.6.1 $\gamma \mapsto e + e^-$ -Splitting



Eine analoge Rechnung wie früher führt auf:

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}(\gamma \mapsto e^+ + e^-)|^2 = \frac{2e^2 p_T^2}{z(1-z)} [z^2 + (1-z)^2]$$

z ist der Impulsanteil vom Elektron und $(1-z)$ der vom Positron. Weiter folgt:

$$f_{e/\gamma}(z) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{s}{m^2} \right) [z^2 + (1-z)^2]$$

In dieser Ordnung ist die Wahrscheinlichkeit, das Photon zu finden, reduziert. Das Integral ergibt sich Wahrscheinlichkeit, dass das Photon verloren geht. Ein Photon verschwindet mit der Wahrscheinlichkeit

$$\sim \int_0^1 dz [z^2 + (1-z)^2] = \frac{2}{3}$$

$$f_{\gamma/\gamma}(z) = \delta(1-z) - \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{s}{m^2} \right) \cdot \frac{2}{3} (1-z)$$

Man berücksichtigt hier, dass die Wahrscheinlichkeit, das Photon zu finden, reduziert ist durch einen Splittingprozess.

5.7 Gribov-Lipatov-Gleichung für $f_{\gamma/e}$, $f_{e/e}$, $f_{\bar{e}/e}$

Schauen wir uns als erstes die Evolution des Photons an:

$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{\gamma/e}(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left(P_{\gamma \leftarrow e}(z) \left[f_{e/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) + f_{\bar{e}/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right] + P_{\gamma \leftarrow \gamma}(z) f_{\gamma/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right) \text{ mit}$$

$$P_{\gamma \leftarrow e}(z) = \frac{1 + (1-z)^2}{z}, \quad P_{\gamma \leftarrow \gamma}(z) = -\frac{2}{3} \delta(1-z)$$

Die Evolution des Elektrons bzw. Positrons sind gegeben durch:

$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{e/e}(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{e \leftarrow e}(z) f_{e/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) + P_{e \leftarrow \gamma}(z) f_{\gamma/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right]$$

$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{\bar{e}/e}(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{e \leftarrow e}(z) f_{\bar{e}/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) + P_{e \leftarrow \gamma}(z) f_{\gamma/e} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right]$$

$$P_{e \leftarrow e}(z) = \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ = (1+z^2) \left(\frac{1}{1-z} \right)_+ + \frac{3}{2} \delta(1-z)$$

$$P_{e \leftarrow \gamma}(z) = z^2 + (1-z)^2$$

Dies sind die vollständige Evolutionsgleichungen für die QED, um die gesamte kolleare Emission aufzusummieren. Um die Gleichungen zu lösen, benötigt man wieder Randbedingungen. Bei $Q = m$ hat noch kein Splitting stattgefunden, also muss $f_{e/e}(x, Q = m) = \delta(1-x)$ und $f_{\bar{e}/e}(x, Q = m) = 0 = f_{\gamma/e}(x, Q = m)$ sein.

5.7.1 Summenregeln

Durch das Splitting wird die gesamte Zahl der geladenen Teilchen immer größer. Jedes Splitting eines Photons erzeugt genauso viele positive wie negative Ladungen. Aufgrund der Ladungserhaltung muss gelten:

$$\int_0^1 dx [f_{e/e}(x, Q) - f_{\bar{e}/e}(x, Q)] = 1$$

Um dies zu überprüfen, kann man nach $\log(Q)$ ableiten und zeigen, dass die linke Seite verschwindet.

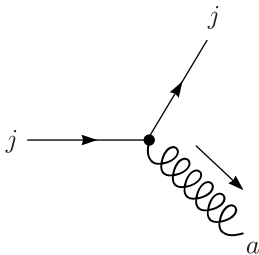
$$\int_0^1 dx x [f_{e/e}(x, Q) + f_{\bar{e}/e}(x, Q) + f_{\gamma/e}(x, Q)] = 1$$

Hier wird über alle Beiträge der Impulse von allen möglichen Teilen summiert (Impulserhaltung!).

5.8 QCD-Verallgemeinerung

In der QCD haben wir die Möglichkeit von drei verschiedenen Splittings.

- 1.) Quark-Linie mit Aussendung von Gluon



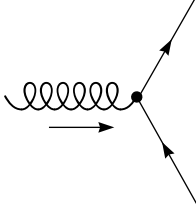
Der Farbfaktor ist gegeben durch T_{ji}^a . Im Amplitudenquadrat wird über innere Farben summiert.

$$T_{ji}^a T_{ji}^{b,*} = T_{ji}^a T_{ij}^b = \text{Sp}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$$

Die Farbmittelung für Gluonen und Quarks ist unterschiedlich, weshalb man einen zusätzlichen Faktor $(N^2 - 1)/(2N)$ berücksichtigen muss. Betrachtet man das Quark mit der Farbe j als virtuell und das Gluon als reell, so gilt:

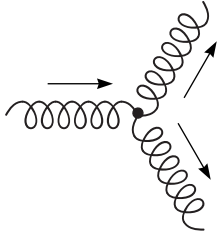
$$\frac{N}{N} T_{ji}^a T_{j'i}^{a,*} = (T^a T^a)_{jj'} = \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{jj'}$$

2.) Splitting eines Gluons in $q\bar{q}$ -Paar



$$\frac{N}{N^2 - 1} T_{ij}^a T_{i'j}^{a,*} = \frac{N}{N^2 - 1} (T^a T^a)_{ii'} = \frac{N}{N^2 - 1} \cdot \frac{N^2 - 1}{2N} \delta_{ii'} = \frac{1}{2} \delta_{ii'}$$

3.) Splitting eines Gluons in zwei Gluonen



$$N \delta_{ab}$$

Der neuen Effekte hier sind die Kopplungskonstante α_s und die zusätzlichen Farbfaktoren. Man erhält zur QED analoge Evolutionsgleichungen mit etwas anderen Integrationskernen. α/π wird ersetzt mit $\alpha_s(Q)/\pi$ (laufende Kopplungskonstante bei der relevanten Skala), γ durch g , e durch f und \bar{e} durch \bar{f} .

$$P_{q \leftarrow q}(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ \quad \text{mit } C_F = \frac{N^2 - 1}{2N} = \frac{4}{3}, \quad C_A = N \quad \text{und } T_F = \frac{1}{2}$$

$$P_{g \leftarrow q}(z) = C_F \frac{1 + (1-z)^2}{z} \quad \text{und } P_{q \leftarrow g} = T_F [z^2 + (1-z)^2]$$

$$P_{g \leftarrow g}(z) = 2C_A \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z) + \left(\frac{11}{12} - \frac{n_f T_F}{3C_A} \right) \delta(1-z) \right]$$

Die Quark-Antiquark-Paare werden proportional zur Anzahl der Fermionen sein.

5.9 Altarelli-Parisi-Gleichungen

$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{g/h}(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{g \leftarrow g}(z) \sum_f \left[f_{f/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) + f_{\bar{f}/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right] + P_{g \leftarrow g}(z) f_{g/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right]$$

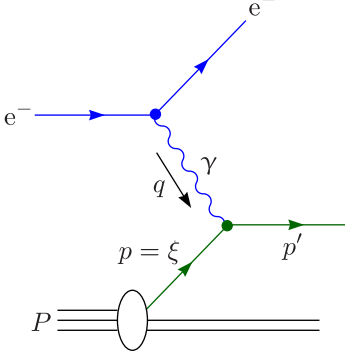
$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{f/h}(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{q \leftarrow q}(z) f_{f/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) + P_{q \leftarrow g}(z) f_{g/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right]$$

$$\frac{d}{d \log(Q)} f_{\bar{f}/h}(x, Q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[P_{q \leftarrow q}(z) f_{\bar{f}/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) + P_{q \leftarrow g}(z) f_{g/h} \left(\frac{x}{z}, Q \right) \right]$$

5.10 Tief inelastische Streuung in NLO

Wir orientieren uns am Buch von Böhm, Denner und Joos.

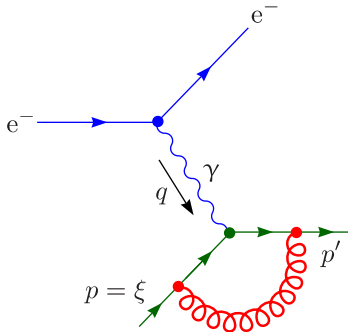
Bis jetzt hatten wir die tief inelastische Streuung in führender Ordnung angeschaut:



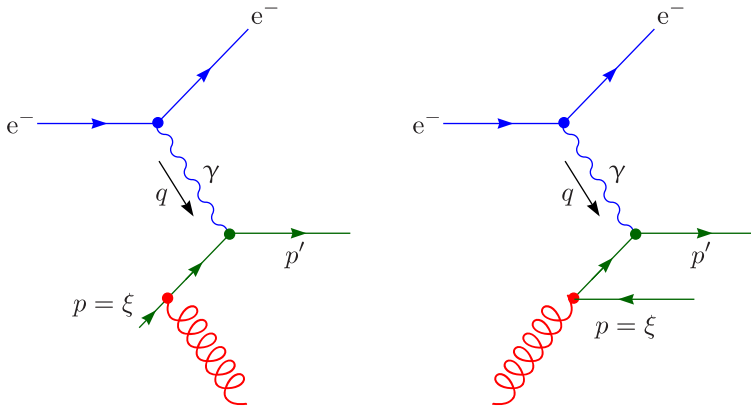
$$\mathcal{M}_B^\mu = \bar{u}(p') e e_q \gamma^\mu u(p)$$

Was passiert, wenn wir nun QCD-Korrekturen zu solchen Prozessen berechnen?

1.) Virtuelle Korrekturen \mathcal{M}_V^μ



2.) Reelle Emission



Was wir nun berechnen wollen, ist der hadronische Tensor, der dann mit dem leptonischen Tensor $L^{\mu\nu}$ kontrahiert werden wird.

$$W_{\mu\nu} = - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{P_\mu^T P_\nu^T}{P \cdot q} F_2(x, Q^2) \text{ mit } P_\mu^T = P_\mu - q_\mu \frac{P \cdot q}{q^2}$$

Wir invertieren nun $W_{\mu\nu}$ und berechnen die $F_1(x, Q^2)$ und $F_2(x, Q^2)$. Wegen $q^\mu W_{\mu\nu} = 0 = q^\nu W_{\mu\nu}$ ergibt sich:

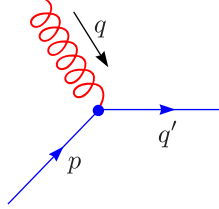
$$F_1(x, Q^2) = \frac{1}{d-2} \left(-g^{\mu\nu} + 2x \frac{P^\mu P^\nu}{P \cdot q} \right) W_{\mu\nu} \text{ mit } x = \frac{Q^2}{2P \cdot q} \text{ und } g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d = 4 - 2\varepsilon$$

$$F_L = F_2 - 2xF_1 = 4x^2 \frac{P^\mu P^\nu}{P \cdot q} W_{\mu\nu}$$

$$\frac{1}{x}F_2(x, Q^2) \text{ und } F_1(x, Q^2) = \int_0^1 dz \sum_{i=q, \bar{q}, g} \phi_i(z) \int_0^1 d\hat{x} \delta(x - \hat{x}z) \begin{cases} \frac{1}{\hat{x}}\widehat{F}_2^i(\hat{x}, Q^2) \\ \widehat{F}_1^i(\hat{x}, Q^2) \end{cases}$$

$\phi_i(z)$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein Parton I zu finden. \hat{x} ist der Impulsanteil von z . Der gesamte Impulsanteil ist gegeben durch $x = \hat{x}z$. In führender Ordnung wollen wir das ganze für ein Quark betrachten:

$$\widehat{F}_1^q(\hat{x}, Q^2) = \frac{1}{d-2} \left(-g_{\mu\nu} + 2\hat{x} \frac{p_\mu p_\nu}{P \cdot q} \right) \frac{1}{8\pi} \frac{1}{3} \sum_{\text{pol}} \frac{\mathcal{M}_B^\mu \mathcal{M}_B^\nu}{e^2} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + q - p')$$



Es ist nun günstig, das Phasenraumelement anders (außerdem in d Dimensionen) zu schreiben:

$$\frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2p'^0} = \frac{d^4 p'}{(2\pi)^3} \delta(p'^2) \xrightarrow{d \text{ Dimensionen}} \frac{d^d p'}{(2\pi)^{d-1}} \delta(p'^2) (2\pi)^d \delta^{(d)}(p + q - p')$$

Dann können wir nämlich das Integral über p' wegen $\delta^{(4)}(p + q - p')$ einfach ausführen. Weiterhin gilt:

$$\sum_{\text{pol}} \frac{\mathcal{M}_B^\mu \mathcal{M}_B^\nu}{e^2} = e^2 e_q^2 \text{Sp}(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu)$$

Wegen $\gamma^\mu \not{p} \gamma_\mu = (2-d)\not{p}$ und $\hat{x}/Q^2/(2p \cdot q)$ gilt dann

$$(p+q)^2 = 2p \cdot q + q^2 = 2p \cdot q - Q^2 = 2p \cdot q(1 - \hat{x}), \quad 2p \cdot p' = -(p-p')^2 = Q^2, \quad 2p \cdot q = \frac{Q^2}{\hat{x}}$$

und somit folgt:

$$\widehat{F}_1^q(\hat{x}, Q^2) = \frac{1}{d-2} e_q^2 (d-2) \text{Sp}(\not{p}' \not{p}) \frac{1}{8\pi} \cdot 2\pi \delta((p+q)^2) = e_q^2 \cdot 2\hat{x} |2p \cdot q| \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{|2p \cdot q|} \delta(1 - \hat{x}) = \frac{1}{2} e_q^2 \delta(1 - \hat{x})$$

$$F_1(x, Q^2) = \sum_{q, \bar{q}} \phi_i(x) \frac{1}{2} e_q^2$$

Das Ergebnis ist konsistent mit unseren früheren Berechnungen. Also können wir das ganze in NLO betrachten. Schauen wir uns als erstes den virtuellen Beitrag an.

$$\mathcal{M}_V^\mu = \mathcal{M}_B^\mu \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon) \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{3} - 8 \right]$$

Die $eq \mapsto eq$ -Streuamplitude ist gegeben durch:

$$\mathcal{M}^\mu = \mathcal{M}_B^\mu + \mathcal{M}_V^\mu \Rightarrow \mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} = \mathcal{M}_B^\mu \mathcal{M}_B^{*\nu} + 2\text{Re}(\mathcal{M}_V^\mu \mathcal{M}_B^{*\nu}) + \dots$$

$$\mathcal{M}^\mu \mathcal{M}^{*\nu} = (\mathcal{M}_B^\mu \mathcal{M}_B^{*\nu}) \left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon) \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{2}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{3} - 8 \right] \right)$$

$$\widehat{F}_{i, \text{virtuell}}^{(i), q} = \frac{1}{2} e_q^2 \delta(1 - \hat{x}) \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon) \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{3} - 8 \right]$$

Nun kommen wir zur reellen Emission. Kinematische Variablen im Schwerpunktsystem:

$$\hat{s} = (p+q)^2 = 2p \cdot q - Q^2 = \left(\frac{1}{\hat{x}} - 1 \right) Q^2$$

$$\hat{t} = (p-k)^2 = -2p \cdot k = -2E_q E_g (1 - \cos \theta) = -2 \frac{\hat{s} + Q^2}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos \theta) = -\frac{Q^2}{2\hat{x}} (1 - \cos \theta)$$

$$\hat{u} = (p - p')^2 = -\frac{Q^2}{2\hat{x}}(1 + \cos\theta) \text{ und } \hat{s} + \hat{u} + \hat{t} = -Q^2$$

Wir bestimmen \hat{F}_i aus:

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \sum_{\substack{\text{pol} \\ \text{Farbe}}} \mathcal{M}_r^\mu \mathcal{M}_r^{\nu,*}$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} &= -4e^2 e_q^2 4\pi\alpha_s C_F \frac{d-2}{2} \cdot \left[\frac{\hat{s}}{\hat{t}} - \frac{2Q^2 \hat{u}}{\hat{s}\hat{t}} + \frac{\hat{t}}{\hat{s}} + \frac{d-4}{2} \frac{(\hat{s} + \hat{t})^2}{\hat{s} \cdot \hat{t}} \right] = \\ &= -e^2 e_q^2 8\pi\alpha_s (d-2) \left[-\frac{1-\hat{x}}{t} - 2\frac{\hat{x}}{1-\hat{x}} \left(\frac{1}{t} - 1 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

$$P^\mu P^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} = -4e^2 e_q^2 4\pi\alpha_s C_F \frac{d-2}{2} \left(\frac{\hat{u}}{2} \right)$$

Dimensionale Regularisierung für $1/\hat{t} \sim 1/(1 - \cos\theta)$ **und** $1/\hat{s} \sim 1/(1 - \hat{x})$ Divergenzen

Betrachten wir den Phasenraum in d Dimensionen:

$$d\phi_2(p+q; p', k) = \mu^{4-d} (2\pi)^d \delta^{(d)}(p+q-p'-k) \frac{d^d p'}{(2\pi)^{d-1}} \delta(p'^2) \frac{d^d k}{(2\pi)^{d-1}} \delta(k^2) = \mu^{4-d} \delta((p+q-k)^2) \delta(k^2) \frac{d^d k}{(2\pi)^{d-2}}$$

Der Viererimpuls des Gluons ist $k^\nu = (k^0, k\hat{e}_{d-1})$, wobei \hat{e}_n ein Einheitsvektor in n -dimensionalen Kugelkoordinaten ist. Wir müssen die Abhängigkeit vom Streuwinkel berücksichtigen:

$$k^\mu = (k^0, k \sin\theta \hat{e}_{d-2}, k \cos\theta)$$

$$d^d k = dk^0 k^{d-2} dk d\Omega_{d-1} = dk^0 k^{d-2} dk (\sin\theta)^{d-3} d\theta \int d\Omega_{d-2} = dk^0 k^{d-2} dk (\sin\theta)^{d-3} d\theta \cdot \frac{2\pi^{\frac{d-2}{2}}}{\Gamma(\frac{d-2}{2})}$$

Mit $(p+q-k)^2 = (p+q)^2 - 2(p+q)k = \hat{s} - 2\sqrt{\hat{s}}k^0$ folgt:

$$d\phi_2 = \mu^{4-d} \delta(\hat{s} - 2\sqrt{\hat{s}}k^0) \delta(k^0{}^2 - k^2) dk^0 k^{d-2} dk \frac{(\sin\theta)^{d-4} d\cos\theta}{(4\pi^2)^{\frac{d-2}{2}}} \frac{2\pi^{\frac{d-2}{2}}}{\Gamma(\frac{d-2}{2})}$$

Mit

$$\delta(\hat{s} - 2\sqrt{\hat{s}}k^0) dk^0 = \frac{1}{2\sqrt{\hat{s}}} \text{ und } \delta(k^0{}^2 - k^2) k^{d-2} dk = \frac{1}{k} \left(\frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \right)^{d-2} = \left(\frac{\hat{s}}{4} \right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{2}{\sqrt{\hat{s}}}$$

folgt dann schließlich:

$$d\phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\hat{s} \sin^2\theta}{16\pi\mu^2} \right)^{\frac{d-4}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} d\cos\theta$$

Wir benötigen nun noch einige kinematische Beziehungen:

$$\hat{t} = -\frac{Q^2}{2\hat{x}}(1 - \cos\theta) \text{ und } d\cos\theta = \frac{2\hat{x}}{Q^2} d\hat{t}$$

$$\sin^2\theta = (1 - \cos\theta)[2 - (1 - \cos\theta)] = -\frac{2\hat{x}}{Q^2} \hat{t} \left(2 + \frac{2\hat{x}}{Q^2} \hat{t} \right)$$

$$\hat{s} = \frac{1-\hat{x}}{\hat{x}} Q^2 \text{ und } t = -\hat{t} \frac{x}{Q^2}$$

Damit können wir $d\phi_2$ weiter umschreiben:

$$d\phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1-\hat{x}}{4\pi\mu^2} (-\hat{t}) \left(1 + \frac{\hat{x}\hat{t}}{Q^2} \right) \right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\Gamma(\frac{d-2}{2})} d\cos\theta$$

$$\int d\phi_2 = \int_{-\frac{Q^2}{\hat{x}}}^0 d\hat{t} \frac{2\hat{x}}{Q^2} d\hat{t} \frac{1}{16\pi} \left(\frac{1-\hat{x}}{4\pi\mu^2} \right)^{-\varepsilon} (-\hat{t})^{-\varepsilon} \left(1 + \frac{\hat{x}\hat{t}}{Q^2} \right)^{-\varepsilon}$$

$$\int d\phi_2 f(\hat{t}) = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left[\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}} \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right]^{-\varepsilon} \int_0^1 dt t^{-\varepsilon} (1-t)^{-\varepsilon} f\left(-t \frac{Q^2}{\hat{x}}\right)$$

Wir benutzen nun die Integrale

$$\int_0^1 dt t^{m-1} (1-t)^{n-1} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \text{ mit } m > 0, n > 0$$

$$\int_0^1 dt t^{-\varepsilon} (1-t)^{-\varepsilon} \left(\frac{1}{t}, 1, t\right) = \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{1-2\varepsilon}, \frac{1}{2(1-2\varepsilon)}\right] \text{ für } \varepsilon < 0, d = 4 - 2\varepsilon > 4$$

um $g^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu}$ zu integrieren:

$$\int g^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} d\phi_2 = e^2 e_q^2 \alpha_s C_F (d-2) \left[\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}} \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right]^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{1}{\varepsilon} \frac{1+\hat{x}^2}{1-\hat{x}} - \frac{3}{2} \frac{1}{1-\hat{x}} + 3 - \hat{x} - \frac{7}{2} \varepsilon \frac{1}{1-\hat{x}} \right] + O(\varepsilon)$$

Analog erhalten wir:

$$\int p^\mu p^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} = e^2 e_q^2 \alpha_s C_F (d-2) \frac{Q^2}{4\hat{x}} + O(\varepsilon)$$

Dass dieser Ausdruck endlich ist, bedeutet sofort, dass die longitudinale Strukturfunktion $\hat{F}_L = \hat{F}_2 - 2x\hat{F}$ endlich ist. Für $F_i(x, Q^2)$ werden die Integrale

$$\int_x^1 d\hat{x} \hat{F}(\hat{x}, Q^2) \phi_{q/h}\left(\frac{x}{\hat{x}}\right)$$

benötigt. $\hat{x} = 1$ bedeutet, dass das Photon eine verschwindende Energie hat. Dann besteht der Endzustand nur noch aus dem masselosen Quark. Dann tritt eine Singularität (infrarote Singularität) auf. Diese Singularität wird jedoch durch den Vorfaktor $[(1-\hat{x})/\hat{x}]^{-\varepsilon}$ regularisiert. Dies müssen wir jedoch in einer sinnvollen Weise aufschreiben:

$$\begin{aligned} \int_x^1 d\hat{x} \left(\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}\right) \frac{1}{1-\hat{x}} f(\hat{x}) &= \int_0^1 d\hat{x} \hat{x}^\varepsilon (1-\hat{x})^{-1-\varepsilon} d\hat{x} \hat{x}^\varepsilon (1-\hat{x})^{-1-\varepsilon} [f(\hat{x})\theta(\hat{x}-x) - f(1)\theta(1-x) + f(1)] = \\ &= \int_x^1 d\hat{x} [\hat{x}^\varepsilon (1-\hat{x})^{-1-\varepsilon}]_+ f(\hat{x}) + f(1) \underbrace{\int_0^1 dx x^\varepsilon (1-x)^{-1-\varepsilon}}_{\frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(-\varepsilon)}{\Gamma(1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{1-\hat{x}} &= \left[\left(\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{1-\hat{x}} \right]_+ - \frac{1}{\varepsilon} \delta(1-\hat{x}) \Gamma(1+\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) = \\ &= \left[\frac{1}{1-\hat{x}} \right]_+ - \varepsilon \left[\frac{\ln\left(\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}\right)}{1-\hat{x}} \right]_+ - \frac{1}{\varepsilon} \delta(1-\hat{x}) \Gamma(1+\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int g^{\mu\nu} \mathcal{M}_{\mu\nu} d\phi_2 &= e^2 e_q^2 \alpha_s C_F (d-2) \left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \left[-\frac{1}{\varepsilon} \left[(1+\hat{x}^2) \frac{1}{1-\hat{x}} \right]_+ + \right. \\ &\quad \left. + (1+\hat{x}^2) \left[\frac{\ln\left(\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}\right)}{1-\hat{x}} \right]_+ + \frac{2}{\varepsilon^2} \delta(1-\hat{x}) \Gamma(1+\varepsilon) \Gamma(1-\varepsilon) \right] = \\ &= \frac{3}{2\varepsilon} \delta(1-\hat{x}) + 3 - \hat{x} - \left[\frac{1}{1-\hat{x}} \right]_+ \frac{3+7\varepsilon}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \delta(1-\hat{x}) \left(\frac{3+7\varepsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

Die $\delta(1-\hat{x})$ -Beiträge haben folgende Form:

$$\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \Gamma(1+\varepsilon) \frac{\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \delta(1-\hat{x}) \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{3}{\varepsilon} + \frac{7}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right]$$

Schauen wir uns nun nochmals den virtuellen Beitrag an:

$$\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \Gamma(1+\varepsilon) \left[-\frac{2}{\varepsilon^2} - \frac{3}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{3} - 8\right] \delta(1-\hat{x})$$

Die Summe beider Beiträge ist gegeben durch:

$$\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) \Gamma(1+\varepsilon) \left(-\frac{9}{2}\right)$$

Man erkennt, dass sie endlich ist!!! Infrarote Divergenzen heben sich also zwischen $\widehat{F}_{i,\text{virtuell}}$ und $\widehat{F}_{i,r.\text{emiss.}}$. Schauen wir uns nun die Summe von virtuellen und reellen Emissionsbeiträgen an:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_2^{q,(1)}(\hat{x}, Q^2) &= e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{x} \left[P_{qq}(\hat{x}) \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) + (1+\hat{x}^2) \left(\frac{\ln(1-\hat{x})}{1-\hat{x}}\right)_+ - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-\hat{x}}\right)_+ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{9}{2} + \frac{\pi^2}{3}\right) \delta(1-\hat{x}) - \frac{1+\hat{x}^2}{1-\hat{x}} \ln(\hat{x}) + 2\hat{x} + 3 \right) \right] = \\ &= e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{x} \left[P_{qq}(\hat{x}) \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) + \widehat{\phi}_2^q(\hat{x}) \right) \right] \text{ mit } P_{qq}(x) = C_F \left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+ \equiv \widehat{F}_2^{\bar{q},(1)}(\hat{x}, Q^2) \end{aligned}$$

Die Rechnung funktioniert analog für $\gamma^*g \mapsto q\bar{q}$, was zu folgendem Beitrag führt:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_2^{g,(1)}(\hat{x}, Q^2) &= 2 \sum_q e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \hat{x} \left[P_{qg}(\hat{x}) \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) + \underbrace{P_{qg}(\hat{x}) \ln\left(\frac{1-\hat{x}}{\hat{x}}\right) + 6T_f \hat{x}(1-\hat{x})}_{\phi_2^{g,(1)}(\hat{x})} \right] \text{ mit} \\ P_{qg}(\hat{x}) &= T_f(\hat{x}^2 + (1-\hat{x})^2) \end{aligned}$$

In führender Ordnung gilt $\widetilde{F}_2^{g,(0)} \equiv 0$. Für jedes einlaufende Parton in einer QCD-Rechnung erhält man einen $-1/\varepsilon P(\hat{x})$ -Term. Diese Terme tauchen also universell in allen QCD-Rechnungen mit einlaufenden Partonen auf. Wir benötigen also ein universelles Verfahren, um diese Divergenzen loszuwerden. Faktorisation in harten Wirkungsquerschnitt und Partondichte, Einsetzen in Partonmodell:

$$\frac{1}{x} F_2(x, Q^2) \equiv \mathcal{F}_2(x) = \int_0^1 dz \int_0^1 d\hat{x} \delta(x - \hat{x}z) \left(\sum_q \widehat{\mathcal{F}}_2^1(\hat{x}) [f_{q/h}(z) + f_{\bar{q}/h}(z)] + \mathcal{F}_2^g(\hat{x}) f_{g/h}(z) \right)$$

Dies ist eine Faltung von zwei Funktionen, nämlich der $\widehat{\mathcal{F}}_2$ auf Partonniveau mit den Partondichte f . Damit können wir dies symbolisch in folgender Form schreiben:

$$\left(\sum_q \widehat{\mathcal{F}}_2^q \otimes (f_{q/h} + f_{\bar{q}/h}) + \mathcal{F}_2^g \otimes f_{g/h} \right) (x) \text{ mit } (\mathcal{F} \otimes f)(x) = \int_0^1 dz \int_0^1 d\hat{x} \delta(x - \hat{x}z) \mathcal{F}(\hat{x}) f(z)$$

Die \hat{x} -Integration in der Faltung können wir folgendermaßen umschreiben:

$$(\mathcal{F} \otimes f)(x) = \int_0^1 dz \int_0^1 d\hat{x} \delta(x - \hat{x}z) \mathcal{F}(\hat{x}) f(z) = \int_0^1 dz \int_0^1 d\hat{x} \frac{1}{z} \delta\left(\hat{x} - \frac{x}{z}\right) \mathcal{F}(\hat{x}) f(z) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \mathcal{F}\left(\frac{x}{z}\right) f(z)$$

Wir machen nun eine Taylorentwicklung von $\mathcal{F}(\hat{x}) = \mathcal{F}^{(0)}(\hat{x}) + \mathcal{F}^{(1)}(\hat{x})$. Also gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \otimes f &= \int_x^1 \frac{dz}{z} \underbrace{\left[e_q^2 \delta\left(1 - \frac{x}{z}\right) \right]}_{F^{(0)}\left(\frac{x}{z}\right)} f^{(0)}(z) + e_q^2 \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P\left(\frac{x}{z}\right) \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) + \phi^{(1)}\left(\frac{x}{z}\right) \right] f^{(0)}(z) = \\ &= \mathcal{F}^{(0)} \otimes f^{(0)} + \int_x^1 \frac{dz}{z} e_q^2 \delta\left(1 - \frac{x}{z}\right) \int_z^1 \frac{dy}{y} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P\left(\frac{z}{y}\right) \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) + \phi\left(\frac{z}{y}\right) \right] f^{(0)}(y) = \\ &= \mathcal{F}^{(0)} \otimes f^{(0)} + \mathcal{F}^{(0)} \otimes \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[P\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right)\right) + \phi \right] \otimes f^{(0)} \end{aligned}$$

Im zweiten Term kommt also eine doppelte Faltung vor. Zählen wir $P(-1/\varepsilon + \gamma_E + \ln(Q^2/(4\pi\mu^2)))$ zur \mathcal{F} oder f ? Was typischerweise gemacht wird, ist die $\overline{\text{MS}}$ -Faktorisierung:

$$\ln\left(\frac{Q^2}{4\pi\mu^2}\right) = \ln\left(\frac{\mu_F^2}{4\pi\mu^2} + \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right)\right)$$

μ_F ist die sogenannte Faktorisierungsskala. Den ersten Term stecken wir zu f und den zweiten zu \mathcal{F} :

$$F \otimes f = \underbrace{\left[\mathcal{F}^{(0)} + \mathcal{F}^{(0)} \otimes \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(P \ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) + \phi \right) \right]}_{\mathcal{F}_{\overline{\text{MS}}}} \otimes \underbrace{\left[f^{(0)} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma_E + \ln\left(\frac{\mu_F^2}{4\pi\mu^2}\right) \right) P \otimes f^{(0)} \right]}_{f_{\overline{\text{MS}}}} + O(\alpha_s^2)$$

$f_{\overline{\text{MS}}}$ ist die gemessene Partondichte. Egal, welchen physikalischen Prozess betrachten, werden wir immer eine solche Struktur messen. Die gemessenen Partondichten sind vom Hadron h abhängig. Der erste Teil ist unabhängig vom Target h .

Kapitel 6

Anomale Symmetrien

Wir betrachten die klassische Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_j)$. Man spricht von einer Symmetrie, wenn \mathcal{L} unter der Transformation $\varphi_i \mapsto \varphi'_i = R_{ij}(\theta)\varphi_j$ invariant ist, also $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ gilt. $R_{ij}(\theta)$ sind irgendwelche Mischungsmatrizen der Felder. Aus einer Symmetrie folgt nach dem Noetherschen Theorem ein erhaltener Strom:

$$J_\theta^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_i)} \frac{\delta(R_{ij}(\theta)\varphi_j)}{\delta\theta} \text{ mit } \partial_\mu J_\theta^\mu = 0$$

6.1 Gegenbeispiel: Skaleninvarianz der masselosen QCD

Wir betrachten:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^{\mu a})^2 + (D_\mu \bar{\eta}^a)(D^\mu \eta)^a$$

Da x die Energiedimension -1 und die Gluonfelder die Energiedimension +1 haben, ergeben sich die folgenden Transformationen:

$$x^\mu \mapsto \exp(-t)x^\mu, A_\mu^a \mapsto \exp(t)A_\mu^a, \eta^a \mapsto \exp(t)\eta^a \text{ und } \psi \mapsto \exp\left(\frac{3}{2}t\right)\psi$$

Unter diesen Transformationen gilt:

$$\partial_\mu \mapsto \exp(t)\partial_\mu, D_\mu \mapsto \exp(t)D_\mu \text{ und damit } \mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \exp(4t)$$

Das relevante für die Symmetrie ist die Wirkung.

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int \exp(-4t) d^4x \exp(4t)\mathcal{L} \Rightarrow S' = S$$

Solange in der Lagrangefunktion keine massebehafteten Kopplungskonstanten auftreten, ist die \uparrow skaleninvariant ist. Es ist also völlig egal, bei welchen Energien man Experimente durchführt. Die Kernphysik würde sich also von der Teilchenphysik nicht unterscheiden (1 GeV \Leftrightarrow 1 TeV), was offensichtlich falsch ist. Also muss die Skaleninvarianz gebrochen sein.

In der Quantisierung bringen wir eine dimensionsbehaftete Größe rein, nämlich die Renormierungsskala μ .

$$\beta(g) \neq 0 \Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s \neq 0$$

Durch die Quantisierung wird also die Symmetrie gebrochen, die klassisch existiert. Solche Symmetrien bezeichnet man als anomal.

6.2 Chirale Symmetrien/Chirale Anomalien

Betrachte ein freies Diracfeld:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_L i \not{\partial} \psi_L + \bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \text{ mit } \psi_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)\psi$$

An dieser Schreibweise erkennen wir, dass für den Grenzfall $m \mapsto 0$ wir nicht nur eine globale $U(1)$ haben, sondern dass wir die links- und rechtshändigen Felder unabhängigen voneinander rotieren können. Wir haben also zwei voneinander unabhängige Symmetrien $\psi_L \mapsto \exp(i\alpha\psi_L)$ und $\psi_R \mapsto \exp(i\beta\psi_R)$. Nach dem Noetherschen Theorem ergeben sich geladene Ströme:

$$J_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad \text{und} \quad J_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$$

Es gilt $\partial_\mu J_{L/R}^\mu = 0$ für $m = 0$. Für die weitere Untersuchung ist es sinnvoller, Vektor- und Axialvektorströme zu betrachten.

$$J_V^\mu = J_L^\mu + J_R^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad \text{und} \quad J_A^\mu = J_R^\mu - J_L^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$$

Auch für $m \neq 0$ gilt $\partial_\mu J_V^\mu = 0$, jedoch $\partial_\mu J_A^\mu = 2m\bar{\psi}\gamma_5\psi$. Für die Quantenfeldtheorie schauen wir uns Korrelationsfunktionen an:

$$T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA} = \text{F.T.} \langle 0 | T J_{\nu_1}(x_1)^V J_{\nu_2}(x_2)^V J_\mu^A(0) | 0 \rangle = T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA}(p_1, p_2)$$

ν_1 und ν_2 sind die Indizes der Vektorströme und μ der Index des Axialvektorstroms. Durch eine Fouriertransformation führen wir x_1 in p_1 und x_2 in p_2 über. Die Stromerhaltung sollte sich reflektieren in Ward-Identitäten. Wegen der Stromerhaltung erwarten wir also:

$$p_1^{\nu_1} T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA} = 0 = p_2^{\nu_2} T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA} = 0 = (p_1 + p_2)^\mu T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA}$$

Diese drei Gleichungen sind jedoch nicht gleichzeitig erfüllt.

6.2.1 Berechnung von T^{VVA}

Der Trick ist, die Feynmanregeln für folgende Theorie zu betrachten:

$$\mathcal{L}_I = v_\mu J_V^\mu + a_\mu J_A^\mu$$

v_μ und a_μ seien irgendwelche Eichfelder. $T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA}$ ist die amputierte VVA -Vertexfunktion (Dreipunktfunktion). In Ein-Schleifen-Näherung haben wir folgende Beiträge:

$$= S_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2) + S_{\nu_2, \nu_1, \mu}(p_2, p_1) \equiv T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{VVA}$$

Mit Hilfe der normalen Feynmanregeln können wir $S_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2)$ ausrechnen:

$$S_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2, m) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left(\frac{i}{\not{k} - m} i\gamma_{\nu_2} \frac{i}{\not{k} + \not{p}_2 - m} i\gamma_\mu \gamma_5 \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1 - m} i\gamma_{\nu_1} \right)$$

Durch Power-Counting stellen wir fest, dass der Ausdruck linear divergent ist. Deshalb wollen wir dimensionale Regularisierung durchführen. Probleme macht hier jedoch die Matrix γ_5 . Es gilt:

$$\text{Sp}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

Die Spur von γ_5 mit sechs weiteren γ -Matrizen führt durch Ausnutzung der Clifford-Algebra ebenfalls auch Terme mit ϵ -Tensoren. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist der total symmetrische Tensor in vier Dimensionen, es lässt sich nicht ohne weiteres dimensional fortsetzen. In drei Dimensionen würde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ einfach verschwinden, da wir nur drei

Indizes zur Verfügung haben. Man kann zwar prinzipiell mit dimensionalen Tricks arbeiten, aber in diesem Fall hier ist die Pauli-Villars-Regularisierung die geschicktere Variante. Wir betrachten $S(\nu_1, \nu_2, p_1, p_2, m_i)$ mit verschiedenen Massen m_i und summieren über i :

$$\sum_{i=0}^2 c_i S_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2, m_i) \text{ mit } c_0 = 1, m_0 = m, c_1 = -1, m_1 = M (\mapsto \infty)$$

Wir fügen also zu dieser Theorie ein weiteres fiktives Fermionfeld hinzu, dessen Masse wir aber dann gegen Unendlich gehen lassen, so dass die physikalischen Observablen davon nicht beeinflusst werden.

$$S_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2, m) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\text{Sp} \left(\frac{i}{\not{k} - m} i\gamma_{\nu_2} \frac{i}{\not{k} + \not{p}_2 - m} i\gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1 - m} i\gamma_{\nu_1} \right) \right. \\ \left. - \text{Sp} \left(\frac{i}{\not{k} - M} i\gamma_{\nu_2} \frac{i}{\not{k} + \not{p}_2 - M} i\gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{i}{\not{k} - \not{p}_1 - M} i\gamma_{\nu_1} \right) \right]$$

(Im folgenden werden wir anstelle des zweiten Terms symbolisch ($m \rightarrow M$) schreiben.) $T_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2)$ ist proportional zum ε -Tensor. Die allgemeinste Form wird folgende Struktur haben:

$$T_{\nu_1, \nu_2, \mu}(p_1, p_2) = \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \mu \alpha} (T_1 p_1^\alpha + T_2 p_2^\alpha) \text{ mit } T_i = T_i(p_1^2, p_2^2, p_1 \cdot p_2) + \varepsilon_{\nu_1 \mu \varrho \sigma} p_1^\varrho p_2^\sigma (p_{1, \nu_2} T_3 + p_{2, \nu_2} T_4) \\ + \varepsilon_{\nu_2 \mu \varrho \sigma} p_1^\varrho p_2^\sigma (\dots) + \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \varrho \sigma} p_1^\varrho p_2^\sigma (\dots T_8)$$

Die lineare Divergenz wird weggehoben durch einen Counterterm. Wir werden hinterher die Freiheit haben, Counterterme zu definieren, die linear sind in p_1 und p_2 .

$$\boxed{\widehat{T}_{\nu_1 \nu_2 \mu} = c_1 \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \mu \sigma} p_1^\sigma + c_2 \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \mu \sigma} p_2^\sigma}$$

Sind die Ward-Identitäten erfüllt?

$$p_1^{\nu_1} S_{\nu_1 \nu_2 \mu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\text{Sp} \left(\frac{1}{\not{k} - m} \gamma_{\nu_2} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} \not{p}_1 \right) - (m \rightarrow M) \right] = \\ = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\text{Sp} \left(\frac{1}{\not{k} - m} \gamma_{\nu_2} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} [(k - m) - (k - \not{p}_1 - m)] \right) - (m \rightarrow M) \right] = \\ = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[\text{Sp} \left(\gamma_{\nu_2} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} - \gamma_{\nu_2} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} \gamma_{\mu} \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - m} \right) - (m \rightarrow M) \right]$$

Die erste Spur ist proportional zu $\varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \alpha \beta} k'^{\alpha} (p_1 + p_2)^{\beta}$ mit $k' = k + p_2$. Ähnlich verhält sich der zweite Term. Da die auftretenden Integrale alle ungerade sind, verschwindet der ganze Ausdruck wegen

$$\int d^4 k \frac{k^\mu}{(k^2 + X^2)^n} \equiv 0$$

Bei der Pauli-Villars-Regularisierung sind also die ersten beiden Identitäten ($p_1^{\nu_1} S_{\nu_1 \nu_2 \mu} = 0$ und $p_2^{\nu_2} S_{\nu_1 \nu_2 \mu}$) erfüllt. Wie verhält es sich mit der dritten Identität?

$$(p_1 + p_2)^\mu S_{\nu_1 \nu_2 \mu} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left(\frac{1}{\not{k} - m} \gamma_{\nu_2} \frac{1}{\not{k} + \not{p}_2 - m} (\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_5 \frac{1}{\not{k} - \not{p}_1 - m} \gamma_{\nu_1} - (m \rightarrow M) \right)$$

Mit $(\not{p}_1 + \not{p}_2) \gamma_5 = (\not{k} + \not{p}_2 - m) \gamma_5 + \gamma_5 (\not{k} - \not{p}_1 - m) + 2m \gamma_5$ resultiert:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Sp} \left(\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \gamma_{\nu_2} \frac{\not{k} + \not{p}_2 + m}{(k + p_2)^2 - m^2} 2m \gamma_5 \frac{\not{k} - \not{p}_1 + m}{(k - p_1)^2 - m^2} \gamma_{\nu_1} - (m \rightarrow M) \right)$$

Für $m \mapsto 0$ verschwindet zwar der erste Term, der Regularisierungsterm wegen $M \mapsto \infty$ jedoch nicht.

$$\text{Sp}(\dots) = 8m^2 i \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \sigma \varrho} p_1^\sigma p_2^\varrho \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p_2)^2 - m^2} \frac{1}{(k - p_1)^2 - m^2}$$

Die Feynman-Parametrisierung für drei Nenner führt auf:

$$(p_1 + p_2)^\mu S_{\nu_1 \nu_2 \mu} = 8 \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \varrho \sigma} p_1^\varrho p_2^\sigma \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{m^2}{m^2 - xp_1^2 - yp_2^2 + (xp_1 - yp_2)^2} - (m \rightarrow M) \right]$$

Uns interessiert der Grenzfall $m \mapsto 0$. Dann bleibt der M -Term übrig, welcher sich für $M \mapsto \infty$ wie folgt verhält:

$$\int_0^1 dx (1-x) = \frac{1}{2}$$

Damit gilt

$$(p_1 + p_2)^\mu S_{\nu_1\nu_2\mu} \xrightarrow{m \mapsto 0} -\frac{1}{4\pi^2} \varepsilon_{\nu_1\nu_2\rho\sigma} p_1^\rho p_2^\sigma = -\frac{1}{2} (p_1 + p_2)^\mu T_{\nu_1\nu_2\mu}^{VVA} \neq 0$$

und die dritte Ward-Identität ist nicht erfüllt. Kann die axiale Ward-Identität durch Addition von $\widehat{T}_{\nu_1\nu_2\mu}$ gerettet werden?

$$T_{\nu_1\nu_2\mu} = S_{\nu_1\nu_2\mu}(p_1, p_2) + S_{\nu_2\nu_1\mu}(p_2, p_1) + \widehat{T}_{\nu_1\nu_2\mu} \Rightarrow p_1^{\nu_1} T_{\nu_1\nu_2\mu} = p_1^{\nu_1} \widehat{T}_{\nu_1\nu_2\mu} = c_2 \varepsilon_{\nu_2\mu\rho\sigma} p_1^\rho p_2^\sigma$$

$$p_2^{\nu_2} T_{\nu_1\nu_2\mu} = c_1 \varepsilon_{\nu_1\mu\rho\sigma} p_1^\rho p_2^\sigma$$

$$(p_1 + p_2)^\mu T_{\nu_1\nu_2\mu} = \left(\frac{1}{2\pi^2} \cdot 2m^2 C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1 + p_2)^2, m^2) - \frac{1}{2\pi^2} - c_1 + c_2 \right) \varepsilon_{\nu_1\nu_2\rho\sigma} p_1^\rho p_2^\sigma$$

Man kann also sehr wohl die axiale Ward-Identität in Ordnung bringen, indem man c_1 oder c_2 gleich Null setzt. Dann sind jedoch die beiden anderen Ward-Identitäten futsch. Man schafft es nicht, alle drei Identitäten zu erfüllen. Mindestens einer der Symmetrien wird durch die Quantenmechanik gebrochen, nämlich entweder die Vektor- oder die Axial-Symmetrie.

Beispiel: Standardmodell

Wir betrachten den elektromagnetischen Strom als J_ν^V und die axiale Komponente des Z-Stroms als J_μ^A . Schauen wir uns die Beiträge der Dreiecksgraphen an. Der e^- -Beitrag ist anomal!
Bei vielen Experimenten sind die Z-Bosonen stark polarisiert. Der longitudinale Polarisationsvektor hat die Form

$$\varepsilon_L^\mu = \frac{q^\mu}{m_Z} + O\left(\frac{m_Z}{E}\right)$$

- Bei hohen Energien ($q^0 \gg m_Z$) koppelt $\varepsilon_L(Z)$ an masselose Fermionen f , was zu einer Unitaritätsverletzung führt.
- Die Renormierbarkeit des Standardmodell ist futsch, falls der Term $\sim 1/(2\pi^2)$ überlebt.

Neutrinos brauchen wir nicht berücksichtigen, da diese nicht an die Photonen koppeln. Schauen wir uns also den Beitrag der Quarks an:

Teilchen	Q_{em}	axiale Z-Kopplung	Farben
up	2/3	1/2	3
down	-1/3	-1/2	3
e^-	-1	-1/2	1

Der Koeffizient von $1/(2\pi)^2$ (für $c_2 = c_1 = 0$) [Gesamtanomalie] ergibt sich zu:

$$(-1)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(+\frac{1}{2}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0$$

Die Ladungen im Standardmodell sind genau so, dass die gefährlichen Beiträge sich exakt wegheben (anomaly cancellation im Standardmodell). Die Beiträge $\sim C_0$ sind linear konvergent, da die C_0 -Funktion $\sim 1/E^2$ ist. Die Anomalie hat keine Korrekturen durch höhere Ordnungen. Es stellen sich nun folgende Fragen:

- 1.) Was passiert für $W^+W^-\gamma$ -, W^+W^-Z -, ggZ-Dreiecksgraphen?
Da auch hier axiale Ströme auftreten, haben wir Anomaliebeiträge. Diese heben sich für alle Vertices weg.
- 2.) Hat das Standardmodell andere anomalfreie Ströme?

3.) Anomalie für drei axiale Ströme?

$$T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{AAA} = \text{F.T.} \langle 0 | T J_{\nu_1}^A J_{\nu_2}^A J_{\mu}^A | 0 \rangle$$

Man findet:

$$(p_1 + p_2)^\mu T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{AAA} = -\frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \rho \sigma} p_1^\rho p_2^\sigma$$

Analog gilt $p_1^{\nu_1} T^{AAA} \neq 0$. Wenn links- bzw. rechtshändige Fermionen in der Schleife umlaufen, tritt eine Anomalie auf.

Felder des Standardmodells:

	SU(3)	SU(2)	U _Y (1)	U _X (1)
$Q_L = (u, d)_L$	3	2	1/6	a
u_R	3	1	2/3	b
d_R	3	1	-1/3	c
$L_L = (\nu_e, e)_L$	1	2	-1/2	d
e_R	1	1	-1	e

Wir werden feststellen, dass sich innerhalb einer Generation die Anomalien schon wegheben, weshalb wir hier nur eine Generation betrachten wollen. Die Eichströme im Standardmodell sind:

$$\text{SU}(3) : J_\mu^a = \bar{Q}_L \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} Q_L + \bar{u}_R \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} u_R + \bar{d}_R \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} d_R = \sum_{q=u,d} \bar{q} \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q$$

Das ist ein reiner Vektorstrom.

$$\text{SU}(2) : J_\mu^i = \bar{Q}_L \frac{\sigma^i}{2} \gamma_\mu Q_L + \bar{L} \frac{\sigma^i}{2} \gamma_\mu L$$

Den Hyperladungsstrom kann man als Linearkombination schreiben vom elektromagnetischen Strom und von der dritten Komponente des SU(2)-Stroms:

$$J_\mu^Y = J_{el, \mu} + J_\mu^3$$

Schauen wir uns nun verschiedene Kombinationen der Ströme an:

- SU(3)³: 3 Vektorströme (anomaliefrei)
- SU(3)²SU(2): Was wir berechnen müssen, ist $\text{FT} \langle 0 | T J_{\nu_1}^a J_{\nu_2}^b J_\mu^i | 0 \rangle$.

$$(p_1 + p_2)^\mu T_{\nu_1, \nu_2, \mu}^{abi} = -\frac{1}{2\pi} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2 \rho \sigma} p_1^\rho p_2^\sigma \cdot \frac{1}{2} \left[\text{Sp} \left(\frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \frac{\sigma^i}{2} \right) + \text{Sp} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \frac{\sigma^i}{2} \right) \right]$$

Die Spuren sind zu interpretieren über die SU(3)- als auch die SU(2)-Indizes. Das ganze lässt sich aufspalten in ein direktes Produkt von SU(3) und SU(2) und damit gilt

$$\text{Sp} \left(\frac{\lambda^b}{2} \frac{\lambda^a}{2} \frac{\sigma^i}{2} \right) = \text{Sp} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \right) \text{Sp} \left(\frac{\sigma^i}{2} \right) = 0$$

Analog gilt das für die zweite Spur. Damit ist der Fall SU(3) × SU(3) × SU(2) anomaliefrei.

- SU(3)²U_Y(1): $J_{\nu_1}^a J_{\nu_2}^b (J_{em, \mu} + J_\mu^3)$
Da J_{em} ein Vektorstrom ist und J_μ^3 ein SU(2)-Strom ist diese Kombination anomaliefrei.
- SU(2)²: Hier tritt folgende Spur auf:

$$\text{Sp} \left(\frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^j}{2} \frac{\sigma^k}{2} + \frac{\sigma^j}{2} \frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^k}{2} \right) = \text{Sp} \left(\left\{ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right\} \frac{\sigma^k}{2} \right) = \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\delta^{ij} \mathbf{1} \cdot \frac{\sigma^k}{2} \right) = 0$$

Auch hier haben wir Anomaliefreiheit.

- SU(2)²U_Y(1):

$$\text{Sp} \left\{ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right\} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot 3 + \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0$$

- $U_Y(1)^3$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 3 \cdot 2 - \left(\frac{2}{3}\right) \cdot 3 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2 - (-1)^3 &= \\ = \frac{1}{36} - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1 - 32 + 4 - 9}{36} + 1 = 0 \end{aligned}$$

Das Standardmodell ist also genau so geschaffen, dass sich die Beiträge zwischen den verschiedenen Spezies exakt wegheben. Die Eichströme des Standardmodells sind also anomaliefrei! Das potentielle Problem der Anomalien wird durch die Wahl der Ladungen im Standardmodell behoben.

Gibt es eine zusätzliche anomaliefreie $U_X(1)$? Wir betrachten zunächst nur Kombinationen, in denen $U_X(1)$ einfach vorkommt (da wir sonst auf kubische Gleichungen stoßen):

- $SU(3)^2 U_X(1)$:

$$\text{Sp} \left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} (2a - b - c) = 0$$

- $SU(2)^2 U_X(1)$:

$$\text{Sp} \left\{ \frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right\} (3a + d) = 0$$

- $U_Y(1) U_X(1)$:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot 6 \cdot a - \frac{4}{9} \cdot 3b - \frac{1}{9} \cdot 3c + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2d - e = \frac{a}{6} - \frac{4}{3}b - \frac{c}{3} + \frac{d}{2} - e = 0$$

Wir haben also fünf Ladungen a, b, c, d, e und drei Bedingungen, was zu zwei linear unabhängigen Lösungen führt.

1.) $U_Y(1)$!

2.) Wir wählen $a = b = c = 1/3$ (Baryonzahl) und $d = e = -1$ (negative Leptonzahl).

Damit ist $U_X(1) \equiv U_{B-L}(1)$ anomaliefrei. Nun können wir folgende Kombinationen einfacher betrachten:

$$U_Y(1) U_{B-L}(1)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left[\frac{1}{6} \cdot 7 - \frac{2}{3} \cdot 3 - \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 \right] + (-1)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 - (-1)(-1)^3 = 0$$

$$U_{B-L}(1)^3 : \left(\frac{1}{3}\right)^3 (6 - 3 - 3) + (-1)^3 (2 - 1 - 1) = 0$$

Der Beitrag verschwindet also nur, wenn man ein rechtshändiges Neutrino ν_R einführt.