Mitschrieb zu Theoretische Physik C: Elektrodynamik und Optik

Prof. Dr. Kühn und Dr. Roth

Vorlesung Wintersemester 2002/2003

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 21. Februar 2004

Mitschrieb der Vorlesung Theoretische Physik C
von Herrn Prof. Dr. Kühn im Wintersemester 2002/2003
von Marco Schreck.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler, Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Coulomb-Gesetz ($\sim$ 1785):

Kraft $= k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

$$k = \begin{cases} 1 & \text{Gauß-System} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \text{MKSA-System} \equiv \text{SI-System} \end{cases}$$

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ (forward factor)

Magnetismus (Lithors magnetes):

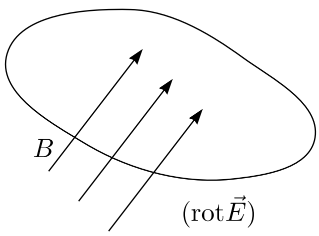
Feldstärken:

- $B_{Erde} \approx 0,3 - 0,6$ Gauß (Gauß-System)
- $B_{Erde} \approx (0,3 - 0,6) \cdot 10^{-4}$ Tesla (SI-System)
- Beschleunigermagnete: 5-20 Tesla

Biot-Savart (1820), Ampère (1820-1825):

Strom $\longrightarrow$ Magnetfeld
Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern
Wir betrachten einen Zusammenhang zwischen E und B und deren zeitlichen Änderungen („Dynamik“).

Faraday:



Eine zeitliche Änderung des magnetischen Feldes durch eine Leiterschleife induziert Spannung und Strom.
$\Rightarrow$ Generator, Dynamo, Elektrotechnik

Maxwell (1865):

Zeitliche Änderung des E-Feldes führt zu rot$\vec{B}$. Dies beinhalten die $\boxed{\text{Maxwell-Gleichungen}}$. In diesen Gleichungen stecken folgende Erkenntnisse:

- Vereinheitlichung von elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen zu einheitlichen Phänomenen
- $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$ für relativ bewegte Beobachter.
- Kovarianz der Maxwell-Gleichungen unter Lorentz-Transformationen $\Rightarrow$ spezielle Relativitätstheorie

Praktische Konsequenzen:

- Elektromagnetische Wellen
- Abstrahlung
- Absorption

Klassische Elektrodynamik:

Es handelt sich um ein „abgeschlossenes Gebiet“, ähnlich wie die klassische Mechanik.

Quantenelektrodynamik:

In der gegenwärtige Forschung verbinden sich die beiden Gebiete Elektrodynamik und Quantenmechanik zur sogenannten Quantenelektrodynamik. Dies führt zu folgenden Forschungsgebieten:

- Quantenfeldtheorie
- Teilchenphysik
- Vereinheitlichung von Wechselwirkungen

Statistische Mechanik, Festkörperphysik:

Dieses Gebiet behandelt die elektrischen und magnetischen Eigenschaften von Materie. Folgende Teilgebiete sind ihr zuzuordnen:

- Halbleiterphysik
- Supraleitung

Plasma-Physik:

Die Plasmaphysik beschreibt das Verhalten von leitenden Flüssigkeiten und Gasen.

Inhalts-Verzeichnis:

I.) Einleitung

II.) Elektrostatik, allgemeine Konzepte

III.) Randwertprobleme in der Elektrostatik

IV.) Multipole

V.) Magnetostatik

VI.) Zeitabhängige Felder; Maxwell-Gleichungen

VII.) Elemente der speziellen Relativitätstheorie

VIII.) Abstrahlung; Lösung der Maxwell-Gleichungen mit zeitabhängigen Quellen

IX.) Strahlung einer bewegten Punktladung

X.) Elektrodynamik kontinuierlicher Medien

Literatur:

- Ausgewählte Kapitel aus Jackson: Classical Electrodynamics (oder deutsche Übersetzung)
- Purzell: Berkeley Physics Course
  Dies ist nützlich für einfache Erklärungen.
- Honerkamp+Römer: Grundlagen der klassischen theoretischen Physik

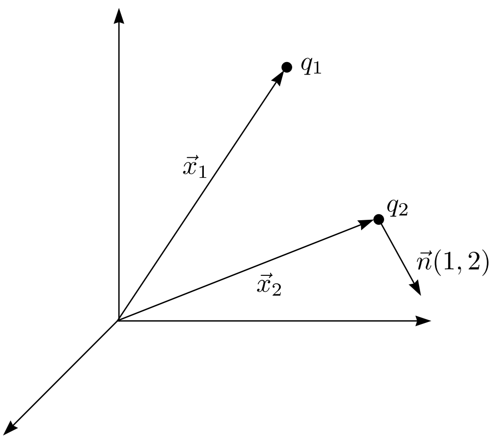
Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Coulomb-Gesetz

Die Kraft zwischen zwei Punktladungen lautet;

$$\vec{F}_{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2} \vec{n}(1,2)$$



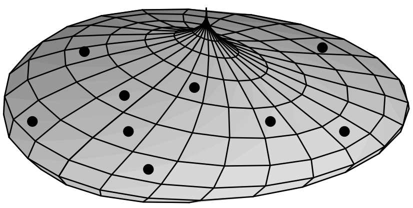
$\vec{n}(1,2) \mathrel{\hat{=}}$ Einheitsvektor von $\vec{x}_2$ nach $\vec{x}_1 = \dfrac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}$

Superpositionsprinzip:

Die Kraft von vielen verschiedenen Punktladungen ergibt sich als Summe der einzelnen Kräfte.

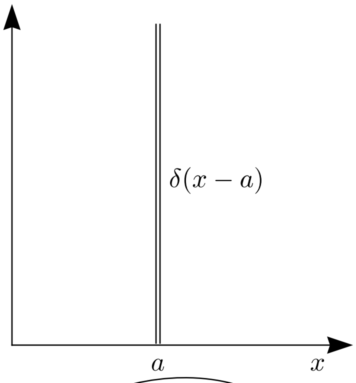
Übergang zum Kontinuum:

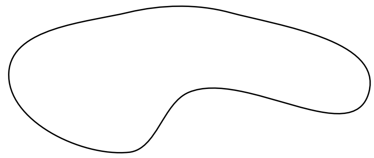
$$\sum_i q_1 \delta\left(\vec{x} - \vec{x}_i\right)$$



Ladungsverteilung

Die Delta-Funktion:





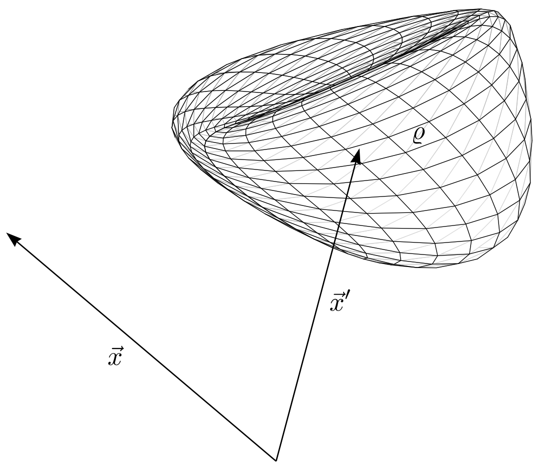
$\varrho(\vec{x})$ als kontinuierliche Funktion

Abstraktion:

Eine Kraft wird durch das Feld am Punkt $\vec{x}_2$ hervorgerufen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{(\vec{x}_2-\vec{x}_1)}\vec{n}(1,2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:



$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\varrho(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

$$\int \mathrm{d}V = \int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \int \mathrm{d}\vec{x}' = \int \mathrm{d}^3x'$$

2.2 Skalar-,Vektor-,Tensorfelder, Differentialoperatoren und Integralsätze

a.) Felder, Transformationsgesetze
Jedem Raumpunkt wird eine physikalische Größe zugeordnet. Diese Abbildung nennt man Feld. Nach dem Verhalten unter Koordinatentransformation unterscheidet man Skalar-, Vektor- und Tensorfelder (hier 3 Raumdimensionen).

Koordinatentransformation:

$\vec{x}$, $\vec{x}$' sollen in 2 Koordinatensystemen die gleichen Punkte beschreiben.

$$\vec{x} \mapsto x'_i = D_{ik}x_k + y_i = \sum_{k=1}^{3} D_{ik}x_k + y_i$$

$\mathcal{D}_{ik}$ beschreibt hierbei die Drehung/Spiegelung und y_i die Verschiebung.

$$\vec{x}' = \mathcal{D}\vec{x} + \vec{y}$$

Die Umkehrabbildung lautet:

$$\vec{x} = \mathcal{D}^{-1}\left(\vec{x}' - \vec{y}\right)$$

Wenn $\mathcal{D}$ eine orthogonale Transformation ist, gilt:

$$\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T$$

Beispiel:

- Skalare Felder $\phi(\vec{x})$
- Temperatur
- Druck
- Ladungsdichte
- Potential

$$\phi'(\vec{x}') = \phi(x) = \phi(\mathcal{D}^{-1}\left(\vec{x}' - \vec{y}\right))$$

Einschub: Einsteinsche Summationskonvention:

Man summiert immer über den Index, der gleich ist. Somit gilt nun:

$$a_ib_i = \sum_{i=1}^{3} a_ib_i$$

Vektorfelder $\vec{A}(\vec{x})$:

- Elektrisches Feld
- Magnetisches Feld
- Vektorpotential
- Stromdichte

$$A'_i(\vec{x}') = \sum_{k=1}^{3} D_{ik}A_k(\vec{x}) = D_{ik}A_k(\vec{x})$$

$$\vec{A}'(\vec{x}') = \mathcal{D}\vec{A}(\vec{x})$$

Tensorfeld $\mathsf{T}_{ij}(\vec{x})$:

- Mechanischer Spannungstensor im festen Körper
- Feldstärke-Tensor im Minkowski-Raum

$$\mathsf{T}'_{ij}(\vec{x}') = \sum_{\substack{k=1,2,3\\ l=1,2,3}} D_{ik} D_{jl} \mathsf{T}_{kl}(\vec{x}) = D_{ik} D_{jl} \mathsf{T}_{kl}(\vec{x})$$

Unter Spiegelung $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = -\vec{x}$ ändern Vektoren ihr Vorzeichen.

$\vec{E}'(\vec{x}') = -\vec{E}(\vec{x})$

Dies gilt aber nicht für Pseudovektoren wie beispielsweise $\vec{B}$ oder $\vec{a} \times \vec{b}$ (Drehimpuls).
Skalare Felder ändern sich nicht unter Spiegelungen. Es gibt aber Pseudoskalare:

$P \xrightarrow[\text{Spiegelung}]{} -P$

Verallgemeinerung: Tensor n-ter Stufe:

$\mathsf{T}'_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(\vec{x}') = D_{i_1 j_1} D_{i_2 j_2} \ldots D_{i_n j_n} \mathsf{T}_{j_1 j_2 \ldots j_n}(\vec{x})$
Wir betrachten einen antisymmetrischen Tensor:

$$\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Diesen Tensor kann man mit einem Pseudovektor in Beziehung bringen:

$t_1 = t_{23}; t_2 = -t_{13}, t_3 = t_{12}$

b.) Differential-Operatoren und Integralsätze (Vektoranalysis)

i.) Gradient:
Der Gradient ist folgendermaßen definiert:

$$\operatorname{grad} \phi(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla}_x \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(\vec{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(\vec{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\phi(\vec{x}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \partial_1\phi(\vec{x}) \\ \partial_2\phi(\vec{x}) \\ \partial_3\phi(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Der Gradient hat nun folgende wichtige Eigenschaften: $\vec{\nabla}\phi(\vec{x})$ transformiert sich wie ein Vektor, wenn $\phi(\vec{x})$ sich wie ein Skalar transformiert. Wir wollen diese Aussage kurz beweisen:
$\phi(\vec{x} + \mathrm{d}\vec{x}) - \phi(\vec{x})$ wobei $\mathrm{d}\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix}$ ein kleiner endlicher Vektor beliebiger Richtung ist. Durch Taylorentwicklung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x} + \mathrm{d}\vec{x}) - \phi(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(\vec{x})\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\phi(\vec{x})\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\phi(\vec{x})\,\mathrm{d}x_3 = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\phi \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\phi \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \mathrm{d}x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Skalar}} \end{aligned}$$

Aus hier gibt es einen Integralsatz:

$$\boxed{\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})}$$

ii.) Divergenz:

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{x}) \equiv \vec{\nabla}\vec{A}(\vec{x}) \equiv \partial_k A_k(\vec{x}) \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}A_1(\vec{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}A_2(\vec{x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}A_3(\vec{x})$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ ist ein Skalar, da $A'_k(\vec{x}') = D_{kk'}A_{k'}(\vec{x})$.

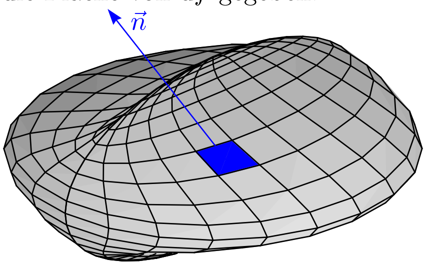
$$\frac{\partial}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial x'_k} = \frac{\partial}{\partial x_l}(D^{-1})_{lk} = D_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$\vec{\nabla}_{x'}\vec{A}'(\vec{x}') = D_{kl}D_{kk'}\frac{\partial}{\partial x_l}\mathcal{A}_{k'}(\vec{x})$$

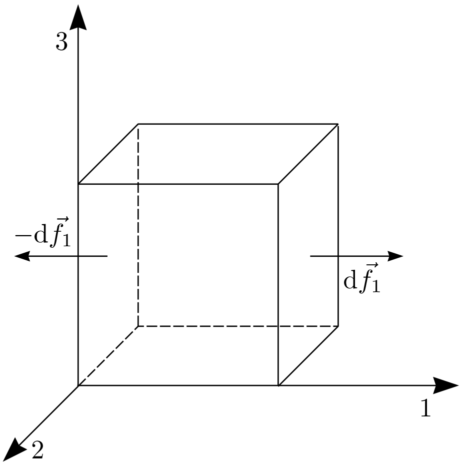
Das Flächenintegral über ein Vektorfeld $\vec{A}$ ist definiert durch:

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\vec{A}(\vec{x}),\ \text{wobei } \mathrm{d}\vec{f} = \vec{n}\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}\vec{\sigma}$$

$\vec{n}$ steht senkrecht auf der Fläche und ist bei geschlossener Fläche nach außen orientiert, $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ ist durch die Fläche von $\mathrm{d}\vec{f}$ gegeben.



Wir leiten den Gaußschen Integralsatz her, welcher einen Zusammenhang zwischen div A und einem Flächenintegral herstellt. Dazu betrachten wir einen kleinen Würfel am Punkt $\vec{x}$:



$$\frac{1}{\Delta V}\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}\vec{f}\vec{A}(\vec{x})$$

$\mathrm{d}f$ steht senkrecht auf der Oberfläche. Der Betrag von $\mathrm{d}\vec{f}_1$ und $\mathrm{d}\vec{f}'_1$ lautet:

$$\frac{1}{\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3}\underbrace{[A_1(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1,x_2,x_3)]}_{\frac{\partial A_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)\Delta x_1}\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\Delta x_2\Delta x_3} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)$$

Es handelt sich um 6 Flächen:

$$\boxed{\lim_{V\mapsto 0}\frac{1}{V}\int_O \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{f} = \nabla_x\vec{A}(\vec{x})}$$

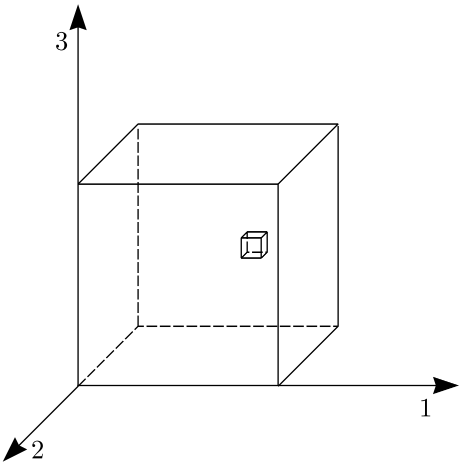
Für endliche Volumina gilt:

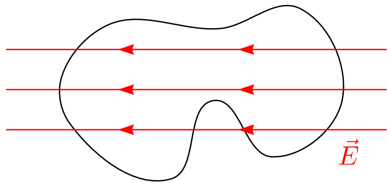
$$\boxed{\int \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{f} = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{\nabla}\vec{A}}$$

Dies ist der Gaußsche Integralsatz.

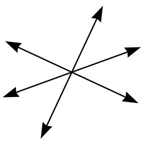
Beweisskizze:

Zerlege V in kleine Teilvolumina ΔV. Die Beträge der inneren Fläche heben sich weg, die der äußeren bleiben.





Ein Beispiel dafür ist eine Wasserströmung ohne Quellen.



$\vec{\nabla} \neq \vec{o}$

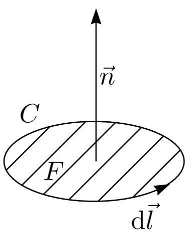
Rotation

iii.) Rotation:

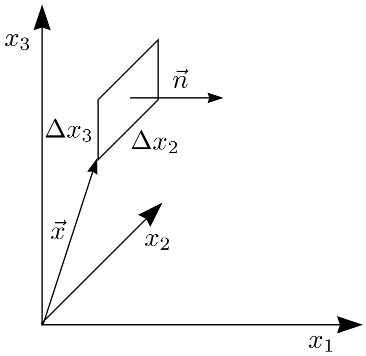
$$\mathrm{rot}\vec{A} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \\ \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix}$$

Behauptung:

$$\lim_{F \mapsto 0} \frac{1}{F} \oint \vec{A}\, \mathrm{d}\vec{l} = \vec{n} \cdot \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)$$



$\vec{n}$ sei die Normale auf der Fläche (Rechtsschraube mit C). Wir beweisen diesen sogenannten Stokesschen Satz. Dazu betrachten wir folgende Fläche:



$$\lim_{F\mapsto 0}\frac{1}{F}\oint \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{l} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\Delta x_2 \Delta x_3}}_{F}\cdot\left(\int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} \mathrm{d}x_2'\cdot A_2(x_1,x_2',x_3) + \int\limits_{x_3}^{x_3+\Delta x_3} \mathrm{d}x_3'(x_1,x_2+\Delta x_2,x_3') - \right.$$

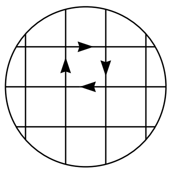
$$\left. + \int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} \mathrm{d}x_2' A(x_1,x_2' x_3+\Delta x_3) - \int\limits_{x_3}^{x_3+\Delta x_3} \mathrm{d}x_3' A(x_1,x_2,x_3')\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_2 \Delta x_3}\cdot\left(\int\limits_{x_2}^{x_2+\Delta x_2} \mathrm{d}x_2' \left[A_2\left(x_1,x_2',x_3\right) - A_2\left(x_1,x_2',x_3+\Delta x_3\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_3}^{x_3+\Delta x_3} \mathrm{d}x_3' \left[A_3\left(x_1,x_2+\Delta x_2,x_3'\right) - A_3\left(x_1,x_2,x_3'\right)\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x_2 \Delta x_3}\left[\Delta x_2\left(-\frac{\partial}{\partial x_3}A_2\right)\Delta x_3 + \Delta x_3\left(\frac{\partial}{\partial x_2}A_3\right)\Delta x_2\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2}A_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}A_2 = \left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)_1$$



Durch Zerlegung einer endlichen Fläche F in kleine Elemente $\mathrm{d}f$ und Summation über alle Beiträge (wobei sich bei den Linienintegralen die inneren Anteile kompensieren) erhalten wir:

$$\oint_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_F \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\mathrm{d}\vec{f}$$

Damit haben wir den Satz von Stokes.

$$\int\limits_{\vec{a}}^{\vec{b}} \mathrm{d}\vec{l}\vec{\nabla} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})$$

2.3 Mathematischer Einschub: Die Diracsche δ-Funktion

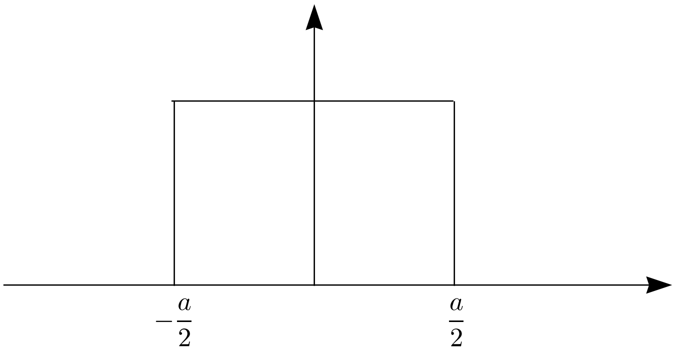
a.) Verallgemeinerte Funktion, Distribution (in einer Dimension)

Gegeben sei eine Funktion $\triangle_a(x)$ durch:

$$\triangle_a(x) = \frac{1}{a}\theta\left(\frac{a}{2}-|x|\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & \text{falls} \quad |x| < \dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \triangle_a(x)\,\mathrm{d}x = a^{-1}a = 1$$



$f(x)$ sei eine beliebige stetige Funktion. Wir betrachten:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \triangle_a(x) f(x) = f(\tilde{x}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \triangle_a(x), \text{ wobei } \tilde{x} \in \left\langle -\frac{a}{2}, +\frac{a}{2} \right\rangle$$

Somit ist:

$$\boxed{\lim_{a \mapsto 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \triangle_a(x) f(x) = f(a)}$$

Wir vertauschen nun lim und $\int$ und definieren $\lim\limits_{a \mapsto 0} \triangle_a(x) = \delta(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x) = 1$
- $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x) = f(0)$
- $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x - x') = f(x')$
- $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x f(x)\delta(x - x') = \begin{cases} f(x') & \text{falls} \quad x' \in \langle x_1, x_2 \rangle \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b.) Die δ-Funktion in n Dimensionen

$$\delta^{(n)}(\vec{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n)$$

Oft läßt man den Index n weg und schreibt $\delta(\vec{x})$.

$$\int\limits_V \mathrm{d}^n x f(\vec{x})\delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} f(\vec{x}') & \text{falls} \quad \vec{x}' \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kapitel 3

Elektrisches Feld, Ladungsdichte, Potential

a.) Gaußscher Satz in der Elektrostatik

Durch das Coulomb-Gesetz läßt sich von der Ladung auf die Kraft schließen:

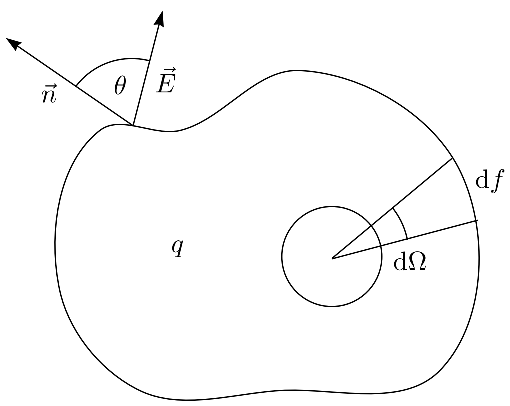
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

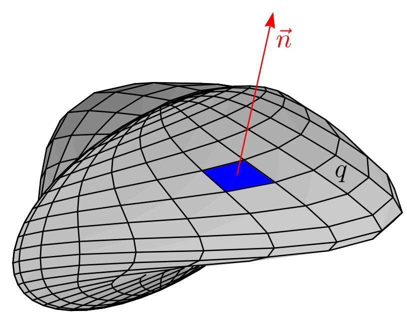
Wir verallgemeinern auf die Ladungsdichte:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\varrho(\vec{x}')\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Das Problem läßt sich auch umkehren, indem man ϱ aus dem vorgegebenen $\vec{E}$ berechnen muß. Zunächst sei $\vec{E}$ auf geschlossener Fläche gegeben, wobei sich im Ursprung eine Punktladung befinden sollte:

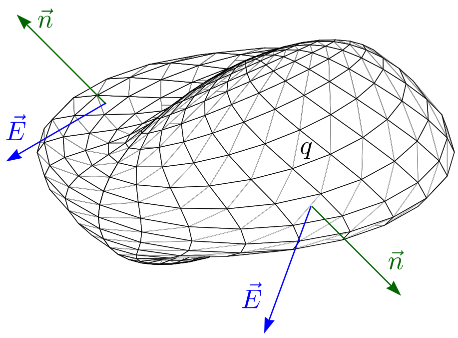
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$





$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \vec{E}\vec{n}\,\mathrm{d}f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \underbrace{\frac{\cos\theta}{r^2}\,\mathrm{d}f}_{\mathrm{d}\Omega}$$

$$\int_O \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \text{Ladung innerhalb} \\ 0 & \text{Ladung außerhalb} \end{cases}$$



Wegen der Additivität des Feldes gilt für mehrere Punktladungen:

$$\int\limits_O = \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\sum_i q_i}_{\substack{\text{innerhalb}\\ \text{von } O}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\text{Gesamtladung innerhalb von } O$$

Wir gehen nun zur Ladungsdichte über:

$$\boxed{\int\limits_O \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \varrho(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x}$$

V ist hierbei das von O eingeschlossene Volumen. Diese Beziehung nennt man auch Gaußsches Gesetz der Elektrostatik in Integralform. Wir verwenden nun:

$$\int\limits_O \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \int\limits_V \vec{\nabla}\vec{E}\,\mathrm{d}^3x \text{ (siehe II.2b)}$$

$$\int\limits_V \left(\vec{\nabla}\vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})\right)\mathrm{d}^3x = 0 \text{ (für beliebige Volumina)}$$

Daraus erhalten wir nun die differentielle Form des Gaußschen Gesetzes:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})}$$

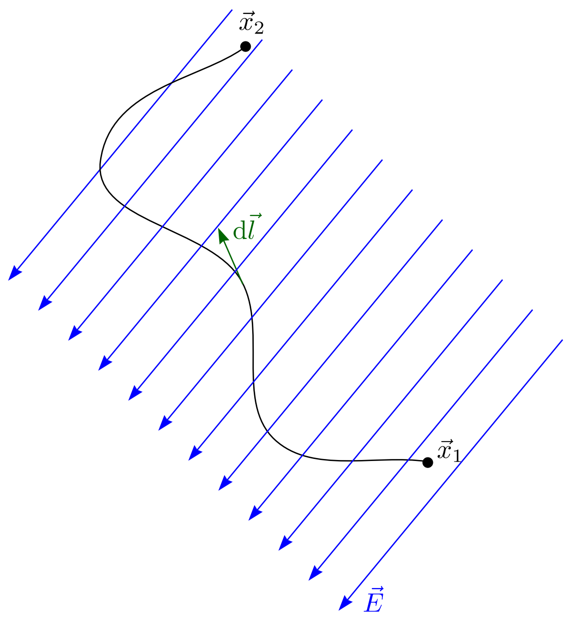
b.) Potential

Aus $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}^3x'\,\varrho(\vec{x}')\cdot\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$ und $-\vec{\nabla}_x\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$ folgt:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \text{ mit } \boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

Der Vorteil des Potentials ϕ ist, daß es sich um eine skalare Größe handelt. Es handelt sich somit um eine Funktion, statt der drei Komponenten von $\vec{E}(\vec{x})$. Wie kann man ϕ interpretieren?
Stellen wir uns vor, eine Testladung q wird von $\vec{x}_1$ nach $\vec{x}_2$ transportiert, wobei die Kraft $q\cdot\vec{E}(\vec{x})$ auf q wirkt. Die aufzuwendende Arbeit berechnet sich nach:

$$W = -q\int\limits_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2}\mathrm{d}\vec{l}\vec{E}(\vec{x}) = q\cdot\int\limits_{\vec{x}_1}^{\vec{x}_2}\mathrm{d}\vec{l}\vec{\nabla}\phi = q\left(\phi(\vec{x}_2) - \phi(\vec{x}_1)\right)$$



Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\phi\right) = 0$$

Diese Beziehung kann durch Nachrechnen gezeigt werden. Das Linienintegral über einem geschlossenen Weg erhält man mittels des Stokesschen Satzes:

$$\oint\limits_C \mathrm{d}\vec{l}\vec{E} = \int\limits_F \mathrm{d}\vec{F}\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\int\limits_F \mathrm{d}\vec{F}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$$

Durch Transport auf geschlossenem Weg kann aus wirbelfreiem Feld keine Energie gewonnen werden. Die zwei Grundgleichungen der Elektrostatik lauten nun:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{o} \\ &\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \end{aligned}}$$

c.) Poisson- und Laplace-Gleichung

Aus $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgt nun:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})}$$

Dies ist die sogenannte Poisson-Gleichung. In Gebieten ohne Ladung läßt sich diese Gleichung folgendermaßen umformen:

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = 0$$

Hierbei handelt es sich um die Laplace-Gleichung, wobei der Laplace-Operator folgendermaßen definiert ist:

$$\vec{\nabla}^2 \equiv \triangle = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

Wir verifizieren die Poisson-Gleichung nun unter Verwendung von:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3x'\,\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wir berechnen also:

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\varrho(\vec{x}')\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Nun wird eine Nebenrechnung durchgeführt, wobei bewiesen wird:

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x})$$

Für $|\vec{x}| \neq 0$ gilt in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} r \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} 1 = 0 \text{ für } r \neq 0$$

Am Ursprung ist $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r}$ zunächst nicht definiert. Für beliebig kleine V gilt mit dem Gaußschen Satz:

$$\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = \int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \int\limits_O \mathrm{d}F\left(-\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

Für eine Kugeloberfläche O mit Radius $|\vec{x}_0|$ gilt:

$$\mathrm{d}\vec{F} = \frac{\vec{x}_0}{|\vec{x}_0|}\vec{x}_0^2 \,\mathrm{d}\Omega$$

$$\int\limits_O \mathrm{d}F\left(-\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right) = -\int \mathrm{d}\Omega = -4\pi$$

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = 0 \text{ für } \vec{x} \neq 0$$

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{x})$$

Also folgt:

$$\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\varrho(\vec{x}')\left(-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})$$

d.) Energie des statischen Feldes
Die Wechselwirkungsenergie eines Systems von Punktladungen lautet:

$$U_{ww} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{N} \frac{q_1 q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Beispiel:

$$N = 2 \Rightarrow i = 1, j = 2$$

$$U_{ww} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Wenn wir zusätzlich eine Ladung q_3 ins System bringen, gilt:

$$U_{ww} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3|}$$

$$U_{ww} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Wir gehen nun zum Kontinuum über:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\mathrm{d}^3\vec{x}'\,\frac{\varrho(\vec{x})\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$U = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}\varrho(\vec{x})\phi(\vec{x})$$

Mittels der Poisson-Gleichung eliminieren wir nun $\varrho(\vec{x})$:

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}(-\varepsilon_0)\left(\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x})\right)\phi(\vec{x})$$

Durch partielle Integration erhält man, wobei die Randterme verschwinden, weil ϱ und ϕ im Unendlichen gegen 0 gehen.

$$\int \mathrm{d}x(\partial f)g = -\int \mathrm{d}x f\partial g$$

$$\int \mathrm{d}x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)g(x) = -\int \mathrm{d}x f(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right) + \text{Randterme}$$

Angewendet auf unsere Formel, ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}(-\varepsilon_0)\left(\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x})\right)\phi(\vec{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\right)\left(\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\left|\vec{E}(\vec{x})\right|^2$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 = \text{Energiedichte des Feldes}$$

3.1 Energie des statischen Feldes

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\mathrm{d}^3\vec{x}'\frac{\varrho(\vec{x})\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\varrho(\vec{x})\phi(\vec{x})$$

Durch Benutzung der Poisson-Gleichung folgte:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{E}(\vec{x})^2$$

$\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$ nannten wir die Energiedichte des elektrischen Feldes. Nun betrachten wir zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen. Dann folgt:

$$U_{ww} < 0$$

Andererseits gilt aber auch $\vec{E}^2 \geq 0$, woraus dann folgt:

$$U > 0$$

Der Unterschied zwischen U_{ww} und U liegt in den positiven „Selbstenergiebeiträgen".

Beispiel:

Wir haben zwei entgegengesetzte Punktladungen:

$$q_1 = q;\ q_2 = -q$$

Dann gilt:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_2\frac{(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}$$

Nun folgt für die Energie:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{d}\vec{x}\left(\underbrace{\frac{q_1^2}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{x}-\vec{x}_2|^4}}_{\text{Selbstenergie}>0} + \underbrace{2q_1q_2\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3}}_{\text{Wechselwirkung}<0 \text{ für } q_1\cdot q_2<0}\right)$$

Die ersten beiden Terme sind größer 0 (das Integral divergiert), das Integral über den dritten Term liefert:

$$\frac{4\pi}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}$$

Dies kann man durch explizite Berechnung zeigen oder auch so:

$$\int \mathrm{d}\vec{x}\frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3|\vec{x}-\vec{x}_2|^3} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\left(\vec{\nabla}\frac{1}{\vec{x}-\vec{x}_1}\right)\left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right)$$

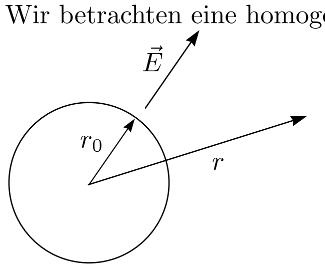
Durch partielle Integration erhalten wir:

$$-\int \mathrm{d}^3\vec{x}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\underbrace{\vec{\nabla}^2\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}}_{-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}_2)} = \frac{4\pi}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}$$

Für die Berechnung der Kräfte zwischen den Ladungen ist nur der zweite Term relevant.

Beispiel für Energiedichte:

Wir betrachten eine homogen geladene Kugel mit Radius r_0:



$$\varrho(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{\frac{4\pi}{3}r_0^3} & \text{für} \quad r \le r_0 \\ 0 & \text{für} \quad r > r_0 \end{cases}$$

Gesucht ist nun das Feld E. Wir verwenden den Gaußschen Satz und erhalten:

$$\int_F \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varrho\,\mathrm{d}^3\vec{x}$$

Sei V Kugel mit Radius r und F die zugehörige Oberfläche:

$$\vec{E} = |\vec{E}|\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|};\mathrm{d}\vec{F} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\,\mathrm{d}F = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}|\vec{x}|^2\,\mathrm{d}\Omega$$

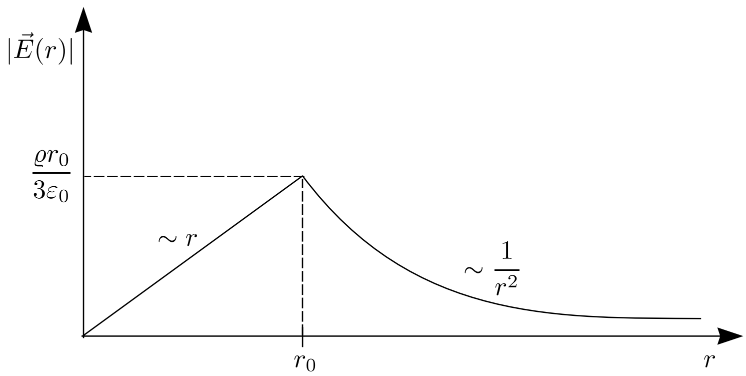
$$\int_F \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = 4\pi r^2|\vec{E}| \stackrel{!}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}Q\begin{cases} \dfrac{r^3}{r_0^3} & \text{für} \quad r \le r_0 \\ 1 & \text{für} \quad r \ge r_0 \end{cases}$$

Dies können wir jetzt auflösen und erhalten:

$$\vec{E} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{r}{r_0^3} & \text{für} \quad r \le r_0 \\ \dfrac{1}{r^2} & \text{für} \quad r \ge r_0 \end{cases}$$

Die Feldenergie ergibt sich jetzt als:

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}|\vec{E}|^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{r_0}$$



Klassischer Elektronenradius:

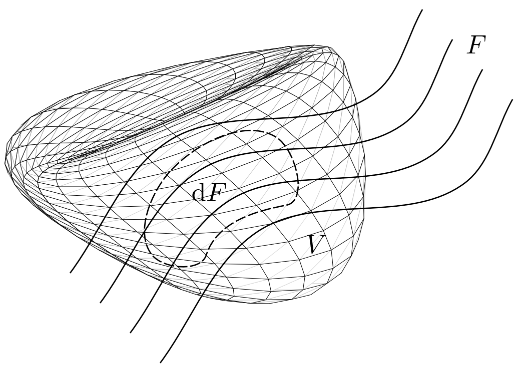
Wir nehmen an, daß nach der Einsteinschen Relativitätstheorie die Feldenergie äquivalent zur Ruhemasse $m_e c^2$ ist. Daraus folgt nun der klassische Elektronenradius zu:

$$r_0 \approx \frac{e^2}{m_e c^2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 2,8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{cm}$$

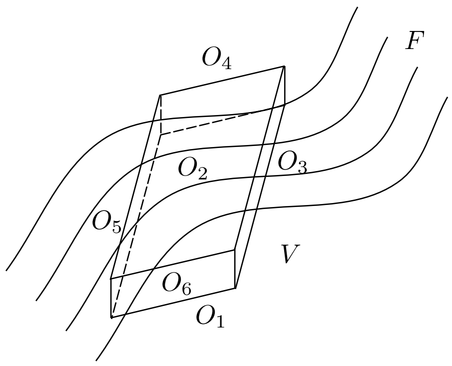
3.2 Oberflächenladungen

Auf einer Fläche S sei eine Ladung mit der Flächendichte $\sigma(\vec{x})$ gegeben, mit der Eigenschaft:

$$\int\limits_V \mathrm{d}\vec{x}\varrho(\vec{x}) = \int\limits_F \mathrm{d}f\sigma(\vec{x})$$



F beschreibt dabei den im Integrationsgebiet V gelegenen Teil der Fläche S. Wir interessieren uns nun für die Änderung des elektrischen Feldes beim Durchgang durch S.



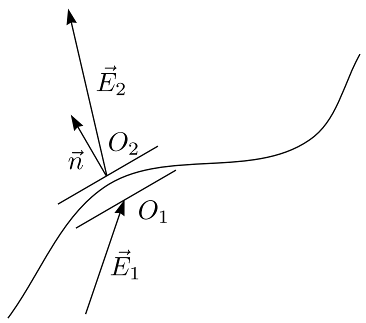
O_1, O_2 sind die gegenüberliegenden großen Flächen. Mit O_3, O_4, O_5 und O_6 werden die schmalen Streifen bezeichnet. Daraus folgt nun:

$$O = O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 + O_6$$

Nach dem Gaußschen Satz gilt:

$$\int\limits_O \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}\varrho(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}{}_{O_1} \mathrm{d}f\sigma(\vec{x})$$

Die Beiträge von $O_{3,4,5,6}$ sind vernachlässigbar, da man die Streifen sehr klein machen kann. Für die Anteile von O_1 und O_2 gilt nun, daß ihre Flächennormalen entgegengesetzt gleich sind.



$$\int\limits_{O} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F} = \int\limits_{O_1} \left(\vec{E}_2\vec{n} - \vec{E}_1\vec{n}\right)\,\mathrm{d}f = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{O_1} \mathrm{d}f\,\sigma(\vec{x})$$

Also folgt:

$$\int\limits_{O_1} \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\vec{n}\,\mathrm{d}f = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{O_1} \sigma(\vec{x})\,\mathrm{d}f \text{ für beliebige } O_1$$

Daraus folgt also:

$$(E_2(\vec{x}) - E_1(\vec{x}))\cdot\vec{n} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\vec{x})$$

Wir haben somit einen Sprung an der Komponente senkrecht zur Fläche. Komponenten parallel zur Fläche sind stetig.

Der Beweis erfolgt über den Stokesschen Satz, indem man über eine geschlossene Fläche integriert:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{o}$$

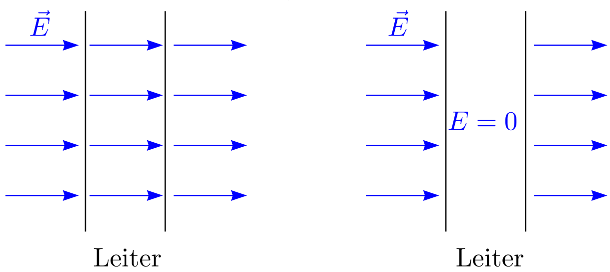
Wir gehen nun zum Potential über, falls Raum- und Flächenladungen vorliegen:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}f\,\frac{\sigma(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}}$$

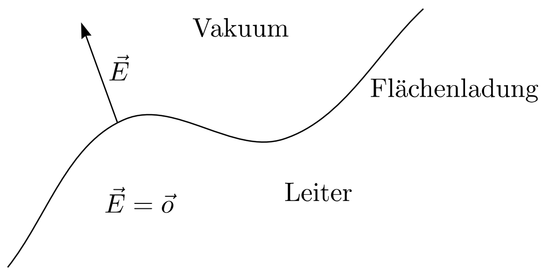
3.3 Randwertprobleme in der Elektrostatik

1.) Leiter:

In einem Leiter befinden sich leicht bewegliche Ladungsträger (Elektronen). Falls im Innern des Leiters ein elektrisches Feld existiert, führt dies zu einem Strom von Elektronen bis zur Kompensation des Feldes durch Oberflächenladungen.



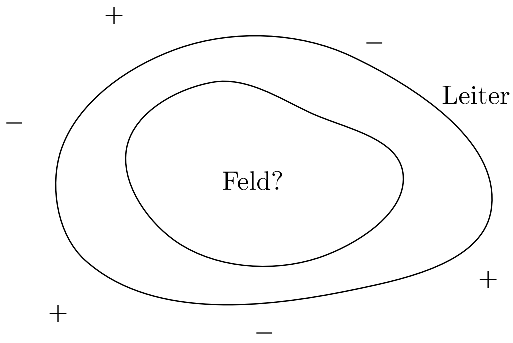
Ein Leiter ist somit ein Gebiet ohne Feld (mit konstantem Potential).



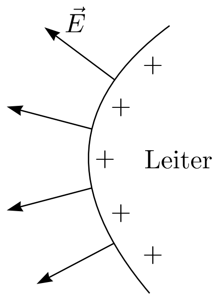
Es gibt einen Sprung in der Komponente senkrecht zur Oberfläche. Die parallel zur Oberfläche laufende Komponente ist stetig. Das im Innern des Leiters $\vec{E} = \vec{o}$ ist, muß $\vec{E}$ im Außenraum senkrecht zur Fläche stehen.

$$\boxed{E_{\perp} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma,\, E_{tang} = 0}$$

Die Oberfläche des Leiters stellt somit eine Äquipotentialfläche dar. Ein Beispiel dafür ist der Hohlraum in einem Leiter:



Es gilt somit ϕ=const. im inneren Rand des Leiters. Falls sich keine Ladungen im Inneren befinden, ist dies die einzige Lösung der Laplace-Gleichung: ϕ ist somit konstant im Innern, womit gilt $\vec{E} = \vec{o}$. Dies gilt im Innern auch bei Anwesenheit von Ladungen im Außenraum. Die Ladungsträger richten sich so aus, daß sie das Feld im Innern abschirmen. Dies ist also nichts anderes als ein Faradayscher Käfig. Zusammenfassend kann man also sagen: Das Potential im Leiter ist konstant und das elektrische Feld somit 0.



Der Vektor des $\vec{E}$-Feldes steht senkrecht auf der Oberfläche. Die Flächenladungsdichte σ ist:

$$\boxed{E_{\perp} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma}$$

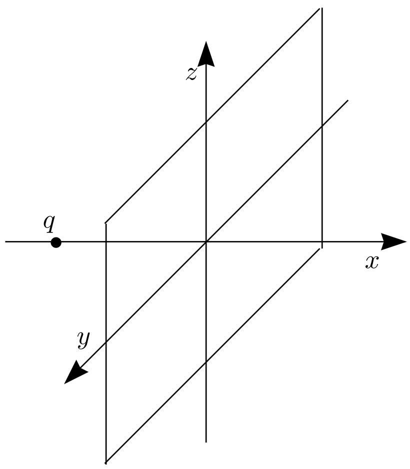
Beim allgemeinen Problembereich handelt es sich um partielle Differentialgleichungen mit Randwertproblemen, hier speziell die Poisson-Gleichung:

$$\boxed{\triangle\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

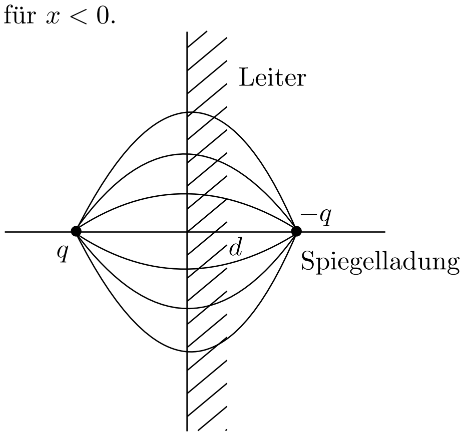
Bisher war es so, daß das Potential ϕ im Unendlichen gegen 0 ging. Im folgenden werden aber Probleme behandelt, die Randbedingungen im Endlichen, wie beispielsweise auf Flächen, aufweisen.

2.) Methode der Spiegelladungen

a.) Geerdete Halbebene; $x = 0$



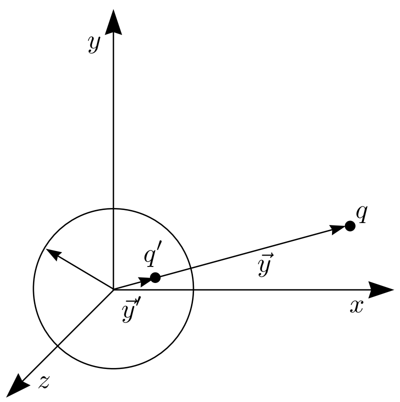
Eine Ladung q befindet sich bei $x = -d$; $y = z = 0$. Wir bestimmen das Feld im Halbraum, also für $x < 0$.



Es wird gefordert, daß $\vec{E}$ bei $x = 0$ senkrecht auf der Ebene steht. ϕ muß im Bereich $x < 0$ die Poisson-Gleichung erfüllen. Das Feld im Halbraum $x < 0$ wird durch Ladung und Spiegelladung beschrieben. Mögliche Fragestellungen sind daher:

1.) Flächenladungsverteilung im Leiter
2.) Induzierte Gesamtladung ($-q'$)
3.) Berechne die auf q ausgeübte Kraft

b.) Geerdete Metallkugel (Radius a) und Punktladung q außerhalb am Punkt $\vec{y}$:



Wir suchen die Bildladung q' am Ort $\vec{y}$' im Innern der Kugel, so daß $\phi(\vec{x})|_{|\vec{x}|=a} = 0$ ist. Wir verwenden den Ansatz (Ursprung im Mittelpunkt der Kugel):

$$4\pi\varepsilon_0\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{y}'|}, \text{ mit } |\vec{y}'| < a$$

Es wird definiert:

$$\vec{n}_{\vec{y}} = \frac{\vec{y}}{y}; \vec{n}_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{x}$$

Aus Symmetriegründen gilt $\vec{y}' = y'\vec{n}_y$. Außerdem fordern wir aufgrund der Erdung:

$$0 = 4\pi\varepsilon\ \phi(\vec{x})|_{\vec{x}=a} = \frac{q}{a\left|\vec{n}_x - \frac{y}{a}\vec{n}_y\right|} + \frac{q'}{y'\left|\frac{a}{y'}\vec{n}_x - \vec{n}_y\right|}$$

Die Lösung des Problems ist:

1.) Wähle y' so, daß gilt:

$$\frac{a}{y'} = \frac{y}{a}$$

$$y' = \frac{a^2}{y}$$

Dann gilt nämlich:

$$\left|\vec{n}_x - \frac{y}{a}\vec{n}_y\right| = \left|\frac{a}{y'}\vec{n}_x - \vec{n}_y\right|$$

Dies gilt wegen:

$$\left(1 + \frac{y^2}{a^2} - 2\frac{y}{a}\vec{n}_x\vec{n}_y\right) = \left(\frac{a^2}{y'^2} + 1 - 2\frac{a}{y'}\vec{n}_x\vec{n}_y\right)$$

2.) Wähle q' so, daß

$$\frac{q'}{y'} = -\frac{q}{a}$$

Also folgt:

$$q' = -\frac{y'}{a}q = -\frac{a}{y}q$$

Zusammenfassend kann man also sagen, daß gilt:

$$\boxed{q' = -\frac{a}{y}q}$$

$$\boxed{\vec{y}' = \frac{a^2}{y^2}\vec{y}}$$

$$\boxed{4\pi\varepsilon_0\phi(\vec{x}) = q\left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{a}{y}\frac{1}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right|}\right)}$$

Die Poisson-Gleichung ist somit erfüllt und außerdem gilt $\phi = 0$ auf der Kugeloberfläche. Was uns außerdem noch interessiert, ist das elektrische Feld:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} - \frac{a}{y}\frac{\left(\vec{x} - \frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right)}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right|^3}\right)}$$

Auf der Kugeloberfläche sollte $\vec{E}$ in radiale Richtung zeigen. Nach Rechnung folgt:

$$\vec{E}(\vec{x})\Big|_{|\vec{x}|=a} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{n}_x\frac{a}{y}\frac{\left(1 - \frac{a^2}{y^2}\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{y^2} - 2\frac{a}{y}\vec{n}_x\vec{n}_y\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Nachrechnen, verwende (für $|\vec{x}| = a$):

$$|\vec{x} - \vec{y}| = y\left|\frac{a}{y}\vec{n}_x - \vec{n}_y\right|$$

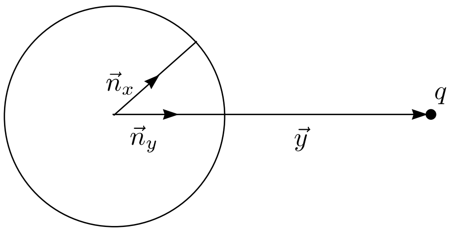
$$\left|\vec{x}-\frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right| = \frac{a^2}{y}\left|\frac{y}{a}\frac{\vec{x}}{a}-\frac{\vec{y}}{y}\right| = \frac{a^2}{y}\underbrace{\left|\frac{y}{a}\vec{n}_x-\vec{n}_y\right|}_{\left|\vec{n}_x-\frac{y}{a}\vec{n}_y\right|}$$

Also folgt:

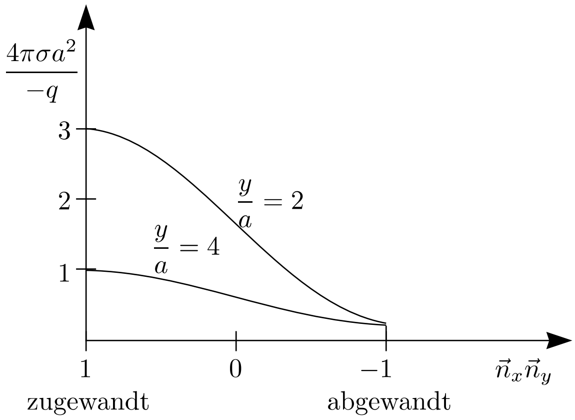
$$\vec{E}(\vec{x})\Big|_{|\vec{x}|=a} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{\vec{x}-\vec{y}}{a^3}-\frac{a}{y}\frac{\vec{x}-\frac{a^2}{y^2}\vec{y}}{\frac{a^6}{y^3}}}{\left|\vec{n}_x-\frac{y}{a}\vec{n}_y\right|^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{1}{a^3}-\frac{y^2}{a^5}}{\left|\vec{n}_x-\frac{y}{a}\vec{n}_y\right|^3}\cdot\vec{x}$$

Anschließend berechnen wir noch die Oberflächenladung:

$$\sigma = \varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{n}_\perp = \boxed{-\frac{q}{4\pi a^2}\frac{a}{y}\frac{\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)}{\left(1+\frac{a^2}{y^2}-2\frac{a}{y}\vec{n}_x\vec{n}_y\right)^{\frac{3}{2}}}}$$



Wir tragen wir Funktion in einem Schaubild auf:



Die auf der Kugel induzierte Gesamtladung $q' = -\frac{a}{y}q$ nimmt ab mit wachsendem y und ist gleichmäßiger verteilt, wenn y größer wird. $\phi(\vec{x})$ liefert das von der Punktladung erzeugte Potential. Daraus folgt dann die Greensche Funktion zur Randbedingung $\phi(\vec{x})|_{|\vec{x}|=a} = 0$. Der Betrag der auf die Ladung q wirkenden Kraft ist:

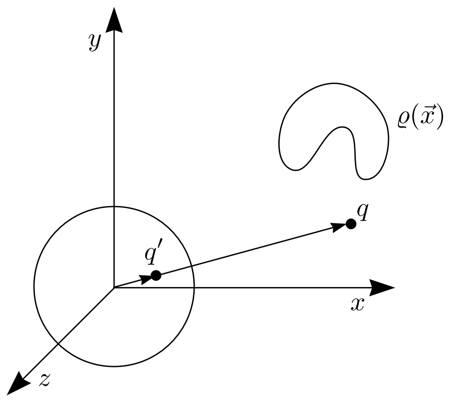
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1q_2|}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2\frac{a}{y}}{\left(\vec{y}-\vec{y}'\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2a}{y^3}\frac{1}{\left(1-\frac{a^2}{y^2}\right)^2}$$

q_1 ist hierbei die echte Ladung und q_2 die Spiegelladung.

$$K \approx \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{a}{y^3} & \text{für} \quad y\gg a \qquad \text{Abstand } \approx y,\ \text{induzierte Ladung: } q\frac{a}{y}\\[2ex] \dfrac{1}{4\delta^2} & \text{für} \quad y=a+\delta \quad \text{Mit } \delta\ll a\end{cases}$$

Die induzierte Ladung ist $q'\approx q$. Der Abstand zwischen Ladung und Spiegelladung ist 2δ. Für eine kontinuierliche Verteilung $\varrho(\vec{y})$ außerhalb der Kugel gilt:

$$4\pi\varepsilon_0\phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3\vec{y}\,\varrho(\vec{y})\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}-\frac{a}{y}\frac{1}{\left|\vec{x}-\frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right|}\right)$$



Für kontinuierliche Ladungsdichte $\varrho(\vec{y})$ ergibt sich das Potential zu:

$$4\pi\varepsilon_0\phi(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3\vec{y}\varrho(\vec{y}) \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} - \frac{a}{y} \frac{1}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{y^2}\vec{y}\right|} \right)$$

Analoge Beispiele:

- Kugel mit vorgegebener Ladung Q (nicht geerdet)

  1.) Berechne Spiegelladung q' für geerdete Kugel wie vorher
  Dann hat man eine Situation, bei der $\vec{E}\perp O$, und welche die Poisson-Gleichung im Außenraum erfüllt.

  2.) Addiere homogene Flächenladungsverteilung auf der Kugel

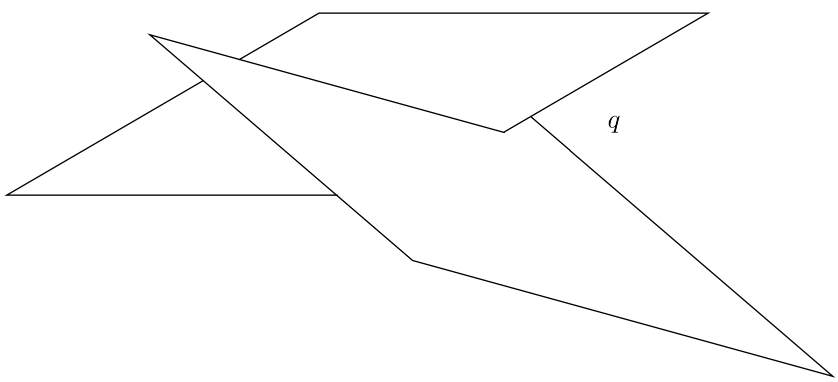
  $$\sigma = \frac{Q-q'}{4\pi a^2}$$

  – Hier gilt wieder $\vec{E}\perp O$.
  – Die Poisson-Gleichung ist weiterhin gültig.
  – Die Gesamtladung auf der Kugel ist:

  $$4\pi a^2 \cdot \frac{Q-q'}{4\pi r^2} + q' = Q$$

- 2 Halbkugeln auf verschiedenem Potential

- Sich schneidende leitende Ebenen



3.3.1 Green'sche Funktionen und ihre Anwendungen

Ziel:

- Berechnung von ϕ im Gebiet V aus vorgegebenen ϱ in V und dem Potential ϕ (oder seiner Ableitung) am Rand

a.) Mathematischer Einschub: Green'sches Theorem
Wir erinnern an den Gaußschen Satz:

$$\int\limits_V \vec{\nabla}\vec{A}\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \int\limits_O \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{F}$$

Wir wählen jetzt ein bestimmtes $\vec{A}(\vec{x}) = \phi(\vec{x})\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})$, wobei ϕ und Ψ zunächst beliebige Skalarfelder sind. Nun folgt:

$$\int\limits_V \underbrace{\left(\phi(\vec{x})\vec{\nabla}^2\Psi + \vec{\nabla}\phi(\vec{x})\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})\right)}_{\vec{\nabla}\vec{A}} = \int\limits_O \underbrace{\phi(\vec{x})\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})}_{\vec{A}}\,\mathrm{d}\vec{F}$$

Nun wird die entsprechende Gleichung subtrahiert, bei der Ψ und ϕ vertauscht sind:

$$\boxed{\int\limits_V \left(\phi(\vec{x})\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{x}) - \Psi(\vec{x})\vec{\nabla}^2\phi(\vec{x})\right)\,\mathrm{d}^3\vec{x} = \int\limits_O \left(\phi(\vec{x})\vec{\nabla}\Psi(\vec{x}) - \Psi(\vec{x})\vec{\nabla}\phi(\vec{x})\right)\,\mathrm{d}\vec{F}}$$

Dies ist das sogenannte <u>Green'sche Theorem</u>. Oft schreibt man in Lehrbüchern für $\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{F} \equiv \vec{n}\vec{\nabla}\Psi(\vec{x})\,\mathrm{d}F$ $\equiv \frac{\partial}{\partial n}\Psi(\vec{x})\,\mathrm{d}F$.

b.) Green'sche Funktion
Gegeben sei V mit Rand O, ϕ (oder alternativ $\vec{n}\vec{\nabla}\phi$) auf O vorgegeben (Randbedingungen), sowie die Quellen ϱ in V. Bestimme ϕ. Dies nennt man „Dirichlet-Randproblem“. (Wenn $\vec{n}\vec{\nabla}\phi$ vorgeben ist, handelt es sich um das Neumann-Randproblem.) Wir suchen $G(\vec{x},\vec{x}')$ für welches für $\vec{x}$, $\vec{x}' \in V$ gilt:

$$\triangle G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

Dann kann G zerlegt werden in $G(\vec{x},\vec{x}') = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$ und $\triangle F(\vec{x},\vec{x}') = 0$.

<u>**Beispiel:**</u>

Wenn $\phi = 0$ auf Kugeloberfläche festgelegt ist, dann ist $F(\vec{x},\vec{x}') = -\dfrac{a}{x'}\dfrac{1}{\left|\vec{x} - \frac{a^2}{x'^2}\vec{x}'\right|}$. Verwende Green'sches Theorem mit $\Psi(\vec{x}') = G(\vec{x},\vec{x}')$ und $\vec{x}'$ als Integrationsvariable.

$$\int\limits_V \mathrm{d}\vec{x}' \left(\phi(\vec{x}')\underbrace{\triangle G(\vec{x},\vec{x}')}_{-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')} - G(\vec{x},\vec{x}')\underbrace{\triangle\phi(\vec{x}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x})}\right) = \int\limits_O \left(\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}_{x'}G(\vec{x},\vec{x}') - G(\vec{x},\vec{x}')\vec{\nabla}_{x'}\phi(\vec{x}')\right)\,\mathrm{d}\vec{F}$$

Nun schreiben wir das Potential als:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \mathrm{d}\vec{x}'G(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi}\int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}'\left[\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}_{x'}G(\vec{x},\vec{x}') - G(\vec{x},\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}_{x'}\phi(\vec{x}')\right]}$$

a.) <u>Dirichlet-Randwertproblem</u>
ϕ sei auf O vorgegeben. Suche G_D so, daß $G_D(\vec{x},\vec{x}') = 0$ für $\vec{x}' \in O$ und natürlich weiter $\triangle G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$. Das legt G_D eindeutig fest (ohne Beweis)! Dann folgt daraus:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^{(3)}\vec{x}'G_D(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}') - \frac{1}{4\pi}\int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}\phi(\vec{x}')\vec{\nabla}_{x'}G_D(\vec{x},\vec{x}')}$$

Falls $\phi|_O = 0$ (geerdeter Leiter), so trägt nur der erste Term bei. Der wichtige Punkt ist folgender, daß G_D nur von der Geometrie (V, O) und der Art der Randbedingung (Dirichlet oder Neumann) abhängt, aber nicht von ϱ und $\phi|_O$.

Anmerkung:

G_D ist symmetrisch, d.h. $G_D(\vec{x},\vec{x}') = G_D(\vec{x}',\vec{x})$. Wir beweisen dies über das Green'sche Theorem mit $\phi(\vec{x}) = G_D(\vec{x},\vec{x}'')$, $\Psi(\vec{x}) = G_D(\vec{x}',\vec{x}'')$ und $\vec{x}''$ als Integrationsvariable.

$$\int_V \mathrm{d}^{(3)}x'' \left(G_D(x,x'') \underbrace{\triangle_{x''} G_D(x',x'')}_{-4\pi\delta(x'-x'')} \right) - \left(\underbrace{\triangle_{x'} G_D(x,x'')}_{-4\pi\delta(x-x'')} G_D(x',x'') \right) =$$

$$= \int_O \mathrm{d}F'' \left[\left(G_D(x,x'') \frac{\partial}{\partial n''} G(x',x'') \right) - \left(\frac{\partial}{\partial n''} G_D(x,x'') \cdot G_D(x',x'') \right) \right]$$

Das Integral über die Oberfläche O ist 0, da die Greenfunktion auf der Oberfläche den Wert 0 annimmt. Daraus folgt dann die Symmetrie:

$$4\pi \left(G_D(x,x') - G_D(x',x) \right) = 0$$

Interpretation von F:

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + F(\vec{x},\vec{x}')$$

$$\triangle F = 0$$

F ist ein Potential, welches so gewählt wird, daß die Wirkung einer Punktladung bei $\vec{x}'$ gerade kompensiert wird.

b.) Neumann-Randwertproblem

Wir nehmen an, daß $\vec{n}\vec{\nabla}\phi\Big|_O$ gegeben sei, d.h. daß die Feldstärke senkrecht zur Oberfläche gegeben ist. $\dfrac{\partial G_N}{\partial n'} = 0$ wäre auf den ersten Blick eine mögliche Lösung, aber es gilt:

$$\int_O \mathrm{d}\vec{F}'\vec{\nabla}_{x'} G_N(x,x') = \int_V \mathrm{d}^{(3)}x' \triangle G_N = \int_V \mathrm{d}^{(3)}\vec{x}'(-4\pi)\delta(\vec{x}-\vec{x}') = -4\pi$$

$\mathrm{d}F' \dfrac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x},\vec{x}')$ muß infolgedessen -4π sein. $G_N(\vec{x},\vec{x}')$ wird deswegen so gesucht, daß gilt:

$$\frac{\partial}{\partial n'} G_N(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{4\pi}{F} \text{ für } \vec{x}' \in O$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}\vec{x}' G_N(\vec{x},\vec{x}')\varrho(\vec{x}') + \frac{1}{4\pi} \int_O \mathrm{d}F' G_N(\vec{x}-\vec{x}') \underbrace{\frac{\partial}{\partial n'}\phi(\vec{x}')}_{\text{Feldanteil}\perp O} + \underbrace{\frac{1}{F} \int_O \mathrm{d}F' \phi(\vec{x}')}_{\substack{\text{Mittelwert von} \\ \phi \text{ auf } O, \\ \text{(irrelevante Konstante)}}}}$$

Beispiel für Dirichlet-Problem:

Das Potential ϕ sei auf der Kugeloberfläche vorgegeben. Wir suchen nun $G(\vec{x},\vec{x}')$ so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\triangle G(\vec{x},\vec{x}') = -4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$
- $G(\vec{x},\vec{x}') = 0$ für $|\vec{x}| = a$

Die Lösung ist gegeben durch das Potential einer Punktladung am Punkt $\vec{x}$ in Anwesenheit einer geerdeten Kugel mit festem a um den Nullpunkt.

$$G_D(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{a}{x' \left| \vec{x} - \frac{a^2}{x'^2}\vec{x}' \right|} \text{ mit } x = |\vec{x}| \text{ und } x' = |\vec{x}'|$$

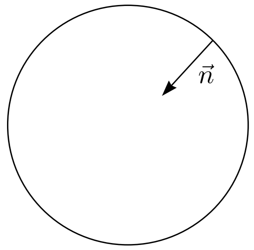
Dies kann man nun auch schreiben als:

$$G_D(x,x') = \frac{1}{(x^2 + x'^2 - 2xx'\cos\gamma)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{\left(\frac{x'^2 x^2}{a^2} + a^2 - 2xx'\cos\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}$$

γ ist hierbei der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{x}'$. Sie Symmetrie zwischen $\vec{x}$, $\vec{x}'$ ist hier offensichtlich.

$$\vec{n}'\vec{\nabla}_{x'} G_D \equiv \frac{\partial}{\partial n'} G_D$$

$\vec{n}$ ist aus dem Volumen V nach außen gerichtet, also:



$$\frac{\partial}{\partial n'} G = -\frac{\partial}{\partial x'} G \bigg|_{x'=a}$$

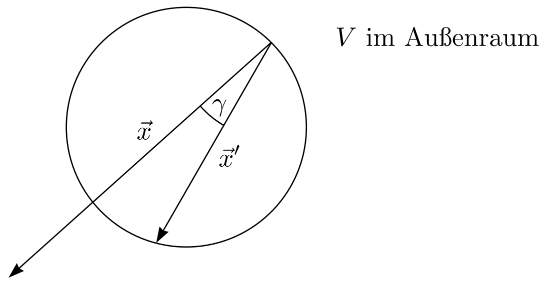
Somit folgt, wie man durch Nachrechnen überprüfen kann:

$$-\frac{1}{a} \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

Für vorgegebenes Potential $\phi(a,\theta,\varphi)$ in Kugelkoordinaten auf Kugeloberfläche erhält man im Außenraum (ohne zusätzliche Ladung):

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int a^2 \mathrm{d}\Omega' \phi(a,\theta'\varphi') \frac{1}{a} \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2 - 2ax\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cos\gamma = \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$$



$$\vec{x} = x \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \vec{x}' = x' \begin{pmatrix} \sin\theta'\cos\varphi' \\ \sin\theta'\sin\varphi' \\ \cos\theta' \end{pmatrix}$$

Mittels des Skalarprodukts und der obigen Beziehungen folgt:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{x}\cdot\vec{x}'}{x \cdot x'} = \cos\theta \cdot \cos\theta' + \sin\theta \cdot \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')$$

3.3.2 Laplace-Gleichung mit Randwerten auf Quader/Separation der Variablen

a.) Karthesische Koordinaten

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\phi = 0\,(\star) \text{ (keine Quellen!)}$$

Wir machen einen Ansatz:

$$\phi(x,y,z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

In die Differentialgleichung eingesetzt, folgt:

$$Y \cdot Z \cdot \partial_x^2 X(x) + X \cdot Z \cdot \partial_y^2 Y(y) + X \cdot Y \cdot \partial_z^2 Z(z) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{X}\partial_x^2 X(x)}_{-\alpha^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\partial_y^2 Y(y)}_{-\beta^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\partial_z^2 Z(z)}_{\gamma^2} = 0$$

Jeder Term sei konstant.

$$\frac{1}{X(x)}\partial_x^2 X(x) = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{Y(y)}\partial_y^2 Y(y) = -\beta^2$$

$$\frac{1}{Z(z)}\partial_z^2 Z(z) = \gamma^2$$

Diese Konstanten müssen nun folgende Beziehungen erfüllen:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$$

Die Lösung ist nun, da die zweite Ableitung einer Exponentialfunktion wieder eine Exponentialfunktion ist:

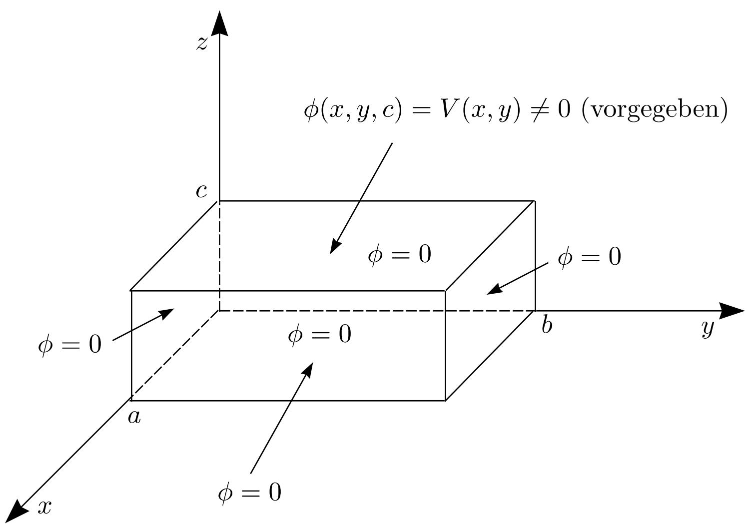
$$X = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\alpha x}$$

$$Y = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\beta y}$$

$$Z = \mathrm{e}^{\pm \gamma z} = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}$$

Die Lösung von ($\star$) ist $X \cdot Y \cdot Z$ und beliebige Linearkombination. Wir wählen nun die Linearkombination und α, β, γ so, daß die Randbedingungen erfüllt werden.

Beispiel:



ϕ sei somit gleich null auf fünf Flächen. Zuerst berücksichtigen wir die drei Flächen durch den Ursprung:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sin(\alpha x) \\ Y &= \sin(\beta y) \\ Z &= \sinh\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z\right) \end{aligned}\right\} \text{3 Flächen } \Rightarrow 0$$

$$\phi = 0 \text{ für } x = a \Rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{a} \cdot a\right) = 0$$

$$\phi = 0 \text{ für } y = b \Rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

$$\gamma_{n,m} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Daraus folgt nun das Potential:

$$\boxed{\phi(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{nm} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \sinh\left(\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} z\right)}$$

ϕ erfüllt die Randbedingungen $\phi = 0$ auf 5 Flächen. Die sechste Randbedingung ist bei $z = c$:

$$\phi(x,y,z=c) = V(x,y) \neq 0$$

Die A_{nm} werden nun „passend“ gewählt.

Forderung:

$$V(x,y) = \phi(x,y,c) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot \sinh\left(\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} c\right)$$

Wir stellen $V(x,y)$ mittels einer Fourier-Reihe dar. V wird mit folgenden Koeffizienten entwickelt:

$$A_{nm} \sinh\left(\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} c\right)$$

Wir bestimmen A_{nm}:

$$\boxed{A_{nm} = \frac{4}{ab\sinh\left(\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} c\right)} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y V(x,y) \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y)}$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{b}$$

3.3.3 Mathematischer Einschub:Orthogonale Funktionen, Entwicklungen, Fourier-Reihen

Wir erinnern uns an die lineare Algebra (vollständige Orthonormalbasis $\{\vec{e}_i\}$):

1.) $\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}$

2.) Der Vektorraum wird aufgespannt durch $\sum_i \lambda_i \vec{e}_i$, wobei λ_i beliebig ist.

Jeder Vektor $\vec{v}$ kann dargestellt werden durch:

$$\vec{v} = \sum_i v_i \vec{e}_i$$

Die Komponenten v_i sind gegeben durch $v_i = \vec{v}\vec{e}_i$, d.h. wir entwickeln $\vec{v}$ nach der Basis $\{\vec{e}_i\}$. Analog entwickeln wir eine Funktion bezüglich einer Basis, d.h. wir suchen eine Funktion beispielsweise durch Polynome oder durch trigonometrische Funktionen.

$$\vec{v} = \sum_i \vec{e}_i \left(\vec{e}_i \cdot \vec{v}\right)$$

Wir schreiben dies in Komponenten:

$$v_k = \sum_i e_i^k e_i^l v_l$$

e_k^i ist hierbei die k-te Komponente von $\vec{e}_i$. Es muß also folglich gelten:

$$\sum_i e_i^k e_i^l = \delta_{kl}$$

Dies ist die sogenannte Vollständigkeitsrelation. Wir probieren das für den zweidimensionalen Raum aus:

- 1.Wahl:

$$\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- 2.Wahl:

$$\boxed{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}}$$

Analog dazu entwickeln wir eine Funktion bezüglich eines Orthonormalsystems (beispielsweise von Polynomen oder trigonometrischen Funktionen). Hieraus folgt die Fourier-Entwicklung.
Durch Hinzunahme von immer mehr Funktionen kommt eine bessere Näherung zustande. Forderungen an die Basisfunktionen sind nun:

- Für $\{U_n(\xi)\}$ mit $n = 1, 2, \ldots$ und $\xi \in (a, b)$ soll gelten:

$$\boxed{\int\limits_a^b \mathrm{d}\xi U_n^\star(\xi) U_m(\xi) = \delta_{mn} \qquad (\star)}$$

  Wir definieren hier als das Skalarprodukt durch ein Integral. Da wir komplexe Funktionen erlauben, sei $U^\star$ eine konjugiert komplexe Funktion.

Eine beliebige Funktion $f(\xi)$ werde nun genähert durch:

$$f(\xi) \approx \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi)$$

Wir fordern eine optimale Näherung, d.h. wir definieren M_N als den Abstand der Funktion von der Näherung:

$$M_N = \int\limits_a^b \left| f(\xi) - \sum_{n=1}^N a_n U_n(\xi) \right|^2 \mathrm{d}\xi$$

Dieser Abstand sei minimal, so daß die Näherungsfunktion im Mittel möglichst nahe an der Funktion $f(\xi)$ liegt. Dann kann man zeigen, daß der Koeffizient a_n folgendermaßen gegeben ist:

$$\boxed{a_n = \int\limits_a^b U^\star(\xi) f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \qquad (\star\star)}$$

Den Beweis schlage man in einem Buch oder Skript der Höheren Mathematik nach.
Das System ist „vollständig“, wenn $M_N \mapsto 0$ für $N \mapsto \infty$. Dann schreiben wir:

$$f(\xi) = \sum_{n=1}^\infty a_n U_n(\xi) = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_a^b \mathrm{d}f'\, U_n^\star(\xi') f(\xi') U_n(\xi) = f(\xi)$$

Wir vertauschen Integral und Summe:

$$\int \mathrm{d}\xi' \underbrace{\sum_{n=1}^\infty U_n^\star(\xi') U_n(\xi)}_{\delta(\xi-\xi')} f(\xi') = f(\xi)$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} U_n^\star(\xi')U_n(\xi) = \delta(\xi - \xi') \qquad (\star\star\star)}$$

Jetzt haben wir unsere Vollständigkeitsrelation. Speziell im Intervall $\left\langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\rangle$ gilt:

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right); \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \right\}$$

Falls m ganzzahlig ist, handelt es sich um eine vollständige Orthonormalbasis. Die Fourier-Reihe von $f(x)$ in $\left\langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\rangle$ sei un gegeben durch:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[A_m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \right]}$$

Die Koeffizienten A_m und B_m sind nun gegeben durch:

$$\boxed{A_m = \frac{2}{a} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\, f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)}$$

$$\boxed{B_m = \frac{2}{a} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\, f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)}$$

3.3.4 Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

$\triangle \phi(r, \theta, \varphi) = 0$

In Kugelkoordinaten lautet diese Gleichung:

$$\boxed{\frac{1}{r}\partial_r^2(r\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\, \partial_\theta \phi + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2 \phi = 0}$$

Hier treten keine gemischten Ableitungen auf, weil es sich beim Kugelkoordinatensystem um ein Orthonormalsystem handelt. Wir substituieren:

$\cos\theta = x$

Die Substitutionsvariable x ist hier natürlich nicht gleich der karthesischen Koordinaten x!

$$\partial_\theta = -\sin\theta \frac{\partial}{\partial(\cos\theta)}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x}$$

$\sin^2\theta = 1 - x^2$

Wir suchen eine Produktdarstellung für ϕ und führen eine Separation der Variablen durch:

$$\phi = \frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi) = \frac{U(r)}{r}P(x)Q(\varphi)$$

Für die Laplace-Gleichung folgt somit:

$$\frac{1}{r}P \cdot Q \cdot \partial_r^2 U + \frac{1}{r^2}\frac{U}{r}Q\frac{\partial}{\partial x}(1 - x^2)\frac{\partial}{\partial x}P(x) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{1 - x^2}\frac{U}{r}P\partial_\varphi^2 Q = 0$$

Wir dividieren durch $\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{(1-x^2)}\frac{U}{r}\cdot P\cdot Q\right]$:

$$\underbrace{r^2(1-x^2)\left[\frac{1}{U}\partial_r^2 U+\frac{1}{r^2}\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P\right]}_{\text{hängt nicht von }\varphi\text{ ab}}+\underbrace{\frac{1}{Q}\partial_\varphi^2 Q}_{\substack{\text{hängt nicht}\\ \text{von } r,x \text{ ab}}}=0$$

Bei den beiden Termen handelt es sich somit um Konstanten:

$\partial_\varphi^2 Q=\text{const.}\cdot Q$

Daraus folgt nun die Lösung:

$$\boxed{Q=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}}$$

(Warum nicht $\mathrm{e}^{\pm\alpha\varphi}$?) $Q(\varphi)$ muß eindeutig und stetig in $(0,2\pi)$ sein. m ist also ganzzahlig. Wir erhalten somit:

$$\frac{1}{Q}\partial_\varphi^2\phi=-m^2$$

$$\underbrace{r^2\frac{1}{U}\partial_r^2 U}_{\substack{\text{unabhängig}\\ \text{von } x}}+\underbrace{\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P-\frac{m^2}{(1-x^2)}}_{\text{unabhängig von } r}=0$$

$$r^2\frac{1}{U}\partial_r^2 U=\text{const.}$$

Die Lösung ist somit gleich:

$$\boxed{U=Ar^{l+1}+Br^{-l}}$$

A, B, l sind zunächst beliebig. Wir leiten U zweimal nach r ab und erhalten:

$$U''=A(l+1)lr^{l-1}+B(-l)(-l-1)r^{-l-2}=\underbrace{l(l+1)}_{\text{const.}}r^{-2}U$$

Die Gleichung für P lautet:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P(x)+l(l+1)P(x)-\frac{m^2}{1-x^2}P(x)=0}$$

Dies ist die verallgemeinerte Legendre-Gleichung. $P_l^m(x)$ sind die assoziierten Legendre-Funktionen.

Forderung:

- P_l^m ist eindeutig in (-1,1).
- Die Funktion soll endlich und stetig sein.

$$\boxed{\frac{1}{Q}\partial_\varphi^2 Q(\varphi)=0; Q=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\varphi}}$$

Zunächst betrachten wir den Grenzfall für $m=0$ (für Probleme mit azimuthaler Symmetrie, unabhängig von φ):

$$P_l^{m=0}\equiv P_l$$

P_l sind die sogenannten Legendre-Polynome. Somit erhalten wir die Legendre-Gleichung:

$$\boxed{\partial_x(1-x^2)\partial_x P_l(x)+l(l+1)P_l(x)=0}$$

Wir haben hier die sogenannte Rodrigues-Formel vor uns. P_l sind Polynome der Form (hier ohne Beweis):

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l$$

Das Polynom hat den Grad l.

$P_0 = 1$

$P_1 = x$

$P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$

$P_3 = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$

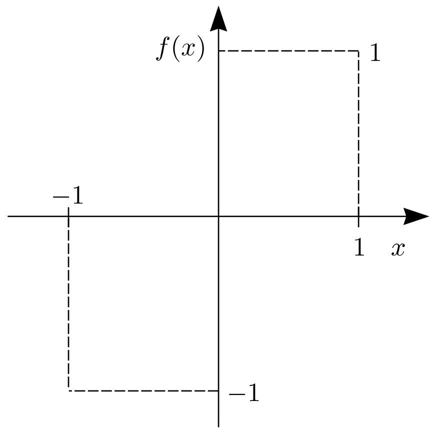
$P_4 = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$

Die Polynome P_l bilden ein Orthogonalsystem, das heißt:

$$\boxed{\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x) P_m(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm}}$$

Die Normierung ist hier nicht 1, sondern $\frac{2}{2l+1}$, wie wir sehen. Jede Funktion auf $\langle -1, 1\rangle$ kann durch $\sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x)$ genähert werden. Wir haben somit ein Fundamentalsystem, welches ähnlich wie die Fourierreihe funktioniert. Es handelt sich bei den Funktionen aber nicht um trigonometrische Funktionen, sondern um Polynome.

Beispiel:



Wir nähern $f(x)$:

$$A_l = \frac{2l+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}x f(x) P_l(x) = \frac{2l+1}{2}\left[\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x) - \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}x\, P_l(x)\right] = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \text{ gerade} \\ (2l+1)\int\limits_{0}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x) & \text{für} \quad l \text{ ungerade} \end{cases} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{l-1}{2}} \frac{(2l+1)}{2} \frac{(l-2)!!}{2\left(\frac{l+1}{2}\right)!}$$

Dies folgt mittels der Rodrigues-Funktion. Etwas zur Notation:

$(2n+1)!! = (2n+1)\cdot(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1$

Somit erhält man eine Näherung von $f(x)$:

$f(x) = \frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) \mp \ldots$

3.3.5 Randwertprobleme mit azimuthaler Symmetrie

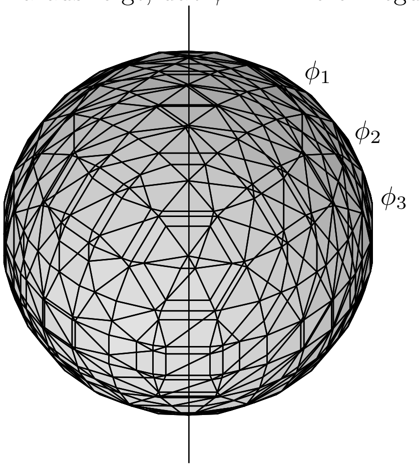
Wir schreiben die Lösung der Laplace-Gleichung in der Form:

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$$

A_l und B_l folgen aus den Randwerten.

Beispiel:

$\phi(r = a, \theta) = V(\theta)$ sei gegeben. Gesucht sei ϕ im Inneren der Kugel. Im Innern befindet sich keine Ladung. Daraus folgt, daß ϕ im Inneren regulär ist.

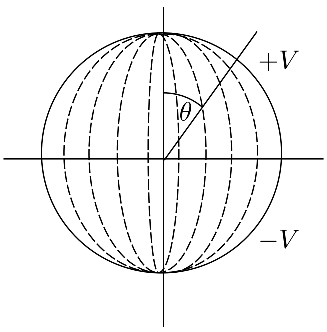


Ich weiß also, daß das Potential im Innern keine Singularität aufweist. B_l muß infolgedessen 0 sein. A_l erhält man dadurch, daß man V nach Legendre-Funktionen entwickelt:

$$\phi(a,\theta) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta)$$

Wir erhalten somit als Beispiel:

$$V(\theta) = \begin{cases} +V & \text{für} \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -V & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \end{cases}$$



$$A_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) V(\theta) P_l(\cos\theta) = \frac{2l+1}{a^2} V \cdot \int_{0}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x) \text{ für } l \text{ ungerade}$$

$A_l = 0$ für l gerade

$$\phi(r,\theta) = V\left[\frac{3}{2}\left(\frac{r}{a}\right) P_1(\cos\theta) - \frac{7}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos\theta) + \frac{11}{16}\left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos\theta) \mp \ldots\right]$$

Ein analoges Problem ergibt sich für den Außenraum:

$$\phi \xrightarrow[r\mapsto\infty]{} 0$$

Aus dieser Bedingung geht hervor, daß die Koeffizienten A_l 0 sein müssen, da r^l im Unendlichen nicht gegen 0, sondern gegen unendlich geht. Für B_l folgt:

$$B_l = a^{l+1}\frac{2l+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} V(\theta)P_l(\cos\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta)$$

$$\phi = V\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1 - \frac{7}{8}\left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3 \pm \ldots\right]$$

Aus der Beziehung geht hervor, daß es für große l einen starken Abfall gibt.

Kugelflächenfunktion : $m \neq 0$:

Die verallgemeinerte Legendre-Gleichung lautet, wie wir schon gesehen haben:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P_l^m(x) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0}$$

Dies hängt nur ab von m^2. Wir behandeln den Fall $m \geq 0$, wobei bei $x^2 = 1$ eine Singularität liegt. Folgender Ansatz wird verwendet:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^\varrho h(x)$$

$h(x)$ sei regulär bei $x^2 = 1$. Wir untersuchen nun das Verhalten bei $x^2 = 1$, wobei wir zwei Terme haben:

1.) 1.Term:

$$= \frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)^\varrho h = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\varrho(1-x^2)^{\varrho-1}(-2x) + O((1-x^2)^{\varrho+1})\right]h(x) =$$
$$= \left[\varrho^2(1-x^2)^{\varrho-1}\underbrace{4x^2}_{\approx 4} + O((1-x^2)^\varrho)\right]h(x) = \left[4\varrho^2(1-x^2)^{\varrho-1} + O((1-x^2)^\varrho)\right]h(x)$$

2.) 2.Term:

$$\left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right](1-x^2)^\varrho h(x) = -m^2(1-x^2)^{\varrho-1}h(x) + O((1-x^2)^\varrho)$$

Daraus folgt:

$$4\varrho^2 = m^2$$

$$\boxed{\varrho = \pm\left|\frac{m}{2}\right|}$$

Wir setzen $P_l^m = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}h(x)m$ $(\star)$. Dies ergibt eine Differentialgleichung für H mit regulären Koeffizienten. Man kann somit nach kurzer Rechnung zeigen:

$$h = \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}x^{|m|}}P_l(x)$$

Die Gleichung $(\star)$ ist somit erfüllt. P_l ist ein Polynom vom Grad l. Daraus folgt:

$$\boxed{|m| \leq l}$$

$$P_l^m(x) = (-1)^m\left(1-x^2\right)^{\frac{|m|}{2}}\frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}x^{|m|}}P_l(x)$$

Es wird eine Normierung durchgeführt:

$$\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x P_l^m(x)P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\cdot\delta_{ll'}$$

Die Kugelflächenfunktionen sind folgendermaßen definiert:

$$\boxed{Y_{lm}(\theta,\varphi) \equiv \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m\left(\cos\theta\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}}$$

Dies ist auf der Kugeloberfläche das Analogon zur Fourierreihe. Des weiteren gilt:

$$\boxed{\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}^\star(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}}$$

Beispiele:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1-1} = Y_{11}^\star$$

$$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}$$

Jede Funktion auf der Kugeloberfläche kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Jede Lösung der Laplace-Gleichung als:

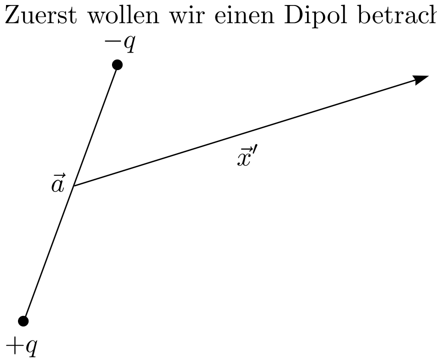
$$\boxed{\phi = \sum_l\sum_m\left[A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

Je nachdem, ob wir fordern, daß ϕ regulär im Innern oder bei ∞ ist, entfallen B oder A.

3.3.6 Dipole und Multipol-Entwicklung

1.) Kartesische Koordinaten

a.) Dipol:
Zuerst wollen wir einen Dipol betrachten:



- ✳ Punktladung q bei $-\dfrac{\vec{a}}{2}$
- ✳ Punktladung $-q$ bei $\dfrac{\vec{a}}{2}$

Wir berechnen das Potential im großen Abstand:

$|\vec{x}'| \gg |\vec{a}|$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x} - \frac{\vec{a}}{2}|} + \frac{-q}{|\vec{x} + \frac{\vec{a}}{2}|}\right)$$

Wir verwenden die Entwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{x} + \vec{\varepsilon}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \frac{\vec{x}\vec{\varepsilon}}{|\vec{x}|^3} + \ldots$$

Daraus folgt:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{x}\vec{a}}{|\vec{x}|^3} + \ldots$$

Wir betrachten nun einen Punktdipol mit $\vec{a} \mapsto 0$, aber mit festem $q \cdot \vec{a} = \vec{d}$.

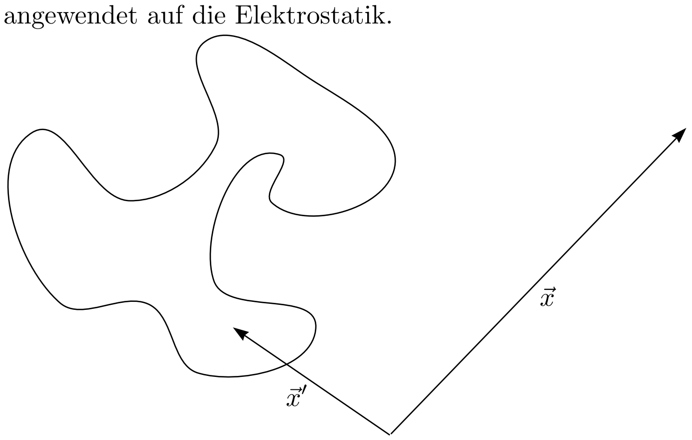
$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Wir bezeichnen mit $\vec{d}$ das Dipolmoment. Das Potential fällt proportional zu $\frac{1}{x^2}$ für $x \mapsto \infty$ ab. Für das elektrische Feld folgt dann durch Gradientenbildung:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \sim \frac{1}{x^3} \text{ für } x \mapsto \infty$$

Das elektrische Feld fällt somit proportional zu $\frac{1}{x^3}$ ab.

b.) Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten:
Dabei handelt es sich um nichts anderes als die bekannte Taylor-Entwicklung in drei Dimensionen, angewendet auf die Elektrostatik.



Gegeben sei eine beliebige Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ im endlichen Volumen V. Es folgt:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\mathrm{d}^3x' \qquad (\star)$$

$\vec{x}$ sei weit entfernt von der Ladungsverteilung:

$|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ für alle $\vec{x}'$ aus V

Wir machen somit eine Taylorentwicklung für $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$:

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = \left(\vec{x}^2 + \vec{x}'^2 - 2\vec{x}\vec{x}'\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Wir klammern $\vec{x}$ aus und erhalten folgendes Ergebnis:

$$|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1} = |\vec{x}|^{-1}\left(1 + \frac{\vec{x}'^2 - 2\vec{x}\vec{x}'}{\vec{x}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Wir verwenden nun:

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon}{1!} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \ldots$$

Somit folgt:

$$|\vec{x}-\vec{x}'|^{-1} = |\vec{x}|^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\vec{x}'^2 - 2\vec{x}\vec{x}'}{\vec{x}^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{\vec{x}'^2 - 2\vec{x}\vec{x}'}{\vec{x}^2}\right)^2 + \ldots\right) =$$

$$= |\vec{x}|^{-1}\left(1 + \frac{\vec{x}\vec{x}'}{|\vec{x}|^2} - \frac{3(\vec{x}\vec{x}')^3 - \vec{x}^2\vec{x}'^2}{2|\vec{x}|^4} + \ldots\right)$$

Wir nutzen dies bei der Näherung des Potentials ($\star$) aus:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{e}\vec{d}}{|\vec{x}|^2} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\frac{e_i e_j}{|\vec{x}|^3}Q_{ij} + \ldots\right), \vec{e} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Folgende Terme werden unterschieden:

- Gesamtladung (Monopol-Moment): $q = \int\limits_V \varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'$
- Dipol-Moment: $\vec{d} = \int\limits_V \vec{x}'\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'$
- Quadrupol-Moment: $Q_{ij} = \int\limits_V \left(3x_i'x_j' - \delta_{ij}\vec{x}'^2\right)\varrho(\vec{x}')\,\mathrm{d}^3x'$

Für kugelsymmetrische Verteilungen verschwindet $\vec{d}$, Q_{ij}, ... Für die Wechselwirkungsenergie einer Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ in einem von außen vorgegebenen Potential $\phi(\vec{x})$ folgt:

$$W = \int\limits_V \varrho(\vec{x})\phi(\vec{x})\,\mathrm{d}^3x$$

Im Bereich der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{x})$ sei $\phi(\vec{x})$ nur schwach veränderlich.

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) + \vec{x}(\nabla\phi)|_{\vec{x}=\vec{o}} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi\right)\bigg|_{\vec{x}=\vec{o}} + \ldots =$$

$$= \phi(0) + \vec{x}\vec{E}(0) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \left(\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)\right) + \ldots$$

Wir verwenden:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}E_i = \vec{\nabla}\vec{E} = -\triangle\phi = 0 \text{ für das äußere Feld}$$

Somit folgt für die Wechselwirkungsenergie:

$$W = q\phi(0) - \vec{d}\vec{E}(0) - \frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \ldots$$

Quadrupolmomente Q_{ij} haben nur 5 unabhängige Komponenten wegen der Symmetrie des Quadrupoltensors:

$$Q_{ik} = Q_{ki}$$

Dies ergibt drei Gleichungen. Berechnen wir die Spur des Tensors, so folgt daraus nochmal eine Gleichung:

$$\sum_i Q_{ii} = 0$$

Also bleiben von den neun Komponenten fünf unabhängige übrig. Q_{ik} kann durch geeignete Wahl des Koordinatensystems diagonalisiert werden. Die Summe über die Eigenwerte verschwindet, wobei also nur noch zwei Komponenten unabhängig voneinander sind:

$$\sum \text{Eigenwerte} = 0$$

2.) Darstellung in Polarkoordinaten:

Vorerst eine kleine Wiederholung dessen, was wir schon gelernt haben:

$$\triangle\phi(r,\theta,\varphi)=0$$

$$\triangle\phi=\frac{1}{r}\partial_r^2(r\phi)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\phi\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\varphi^2\phi=0$$

Wir führen eine Separation der Variablen durch:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{U(r)}{r}P(\cos\theta)Q(\varphi)$$

Mit $x=\cos\theta$ folgt und durch Multiplikation mit $\frac{r^3}{\phi}$ folgt:

$$\underbrace{\frac{r^2\partial_r^2U(r)}{U(r)}}_{l(l+1)}+\underbrace{\frac{\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2)\frac{\partial}{\partial x}P(x)}{P(x)}}_{-l(l+1)+\frac{m^2}{1-x^2}}+\frac{1}{1-x^2}\underbrace{\frac{\partial_\varphi^2Q(\varphi)}{\partial Q(\varphi)}}_{-m^2}=0$$

$$U(r)=Ar^{l+1}+Br^{-l}$$

$$Q(\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{\mathrm{d}^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x)$$

P_l^m sind die assoziierten Legendre-Polynome und $P_l(x)$ die Legendre-Polynome. Man führt an dieser Stelle die Kugelflächenfunktionen ein:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}}_{Q(\varphi)}$$

Das besondere an dieses Kugelflächenfunktionen ist nun, daß die ein orthonormiertes Basissystem bilden:

$$\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}(\cos\theta)\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi Y_{lm}^\star(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

Es sind also geeignete Funktionen für eine Entwicklung:

$$\triangle=\frac{1}{r^2}\partial_r r^2\partial_r-\frac{1}{r^2}L^2,-L^2=\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

$$L^2Y_{lm}(\theta,\varphi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Daraus folgt die sehr wichtige Formel:

$$\boxed{\phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-l-1}\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

Die Kugelflächenfunktionen nähern Funktionen an, welche so ähnlich sind die Kugelflächenfunktionen. Sie beschreiben also solche Systeme, die man sehr gut durch Polarkoordinaten ausdrücke kann. Aber nun zurück zur Multipolentwicklung:
Wir verwenden die Forderung, daß $\phi(r\mapsto\infty)=0$ ist:

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}q_{lm}r^{-(l+1)}\frac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Dies gilt außerhalb der Region mit Ladung. Es ist eine Entwicklung nach abfallenden Potenzen in r. Des weiteren verwenden wir folgende Gleichung:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^\star(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)\text{ mit }r_<=\min\left(|\vec{x}|,|\vec{x}'|\right),r_>=\max\left(|\vec{x}|,|\vec{x}'|\right)$$

Diese wird in $\phi(\vec{x})$ eingesetzt, wobei man die Multipolmomente erhält:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \mathrm{d}^3 x'$$

$$q_{lm} = \iint \mathrm{d}^3 x' \, \varrho(\vec{x}') r'^l Y^\star_{lm}(\theta', \varphi')$$

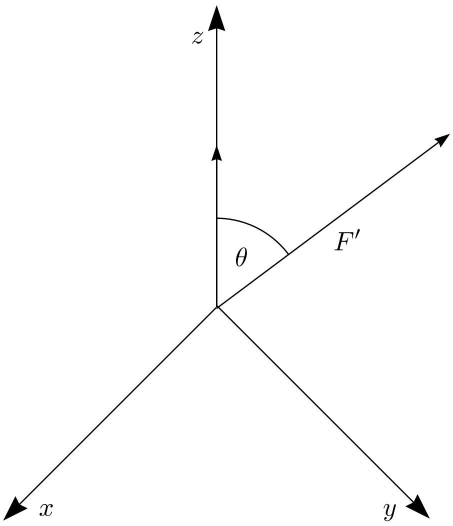
Somit erhält man:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} q, \; q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} d_z \text{ mit } Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} z$$

$$q_{1\pm1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(d_x \mp \mathrm{i} d_y\right) \text{ mit } Y_{1\pm1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(x \mp \mathrm{i} y\right)$$

q_{2m} ist linear in Q_{ik} (siehe Übung). Wir betrachten $F' \parallel \hat{z}$, also den axialsymmetrischen Fall ($m = 0$):

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_{l0} r^l + B_{l0} r^{-(l+1)}\right) P_l(\cos\theta)$$



Wir bestimmen A_{l0}, B_{l0} für den Fall $\vec{r} \parallel \vec{r}' \parallel \hat{z}$:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r_>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l$$

Wobei $r_> = \max(r, r')$ und $r_< = \min(r, r')$ ist. Damit folgt:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Den allgemeinen Fall erhält man mit Hilfe des Additions-Theorems für sphärische Harmonische. Das Legendre-Polynom von $\cos\theta$ kann man ausdrücken über eine Reihe von Kugelflächenfunktionen:

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^\star_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

θ ist der Winkel zwischen r und r'. Dann ergibt sich:

$$\cos\theta = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi - \varphi')$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{r}\vec{r}'}{rr'}$$

$$\boxed{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{(r_<)^l}{(r_>)^{l+1}} Y^\star_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}$$

Kapitel 4

Magnetostatik

4.1 Einleitung

a.) Strom- und Stromdichte

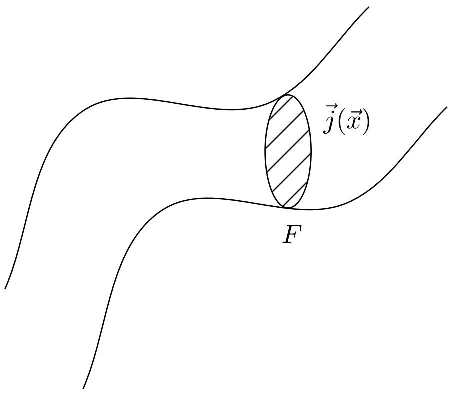
I sei der Strom, der durch einen Leitungsdraht.

$$I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeiteinheit}}$$

Die Einheit der Ladung ist das Ampere:

$$1\,\text{A} = 1\,\frac{\text{Q}}{\text{s}}$$

Wir betrachten einen ausgedehnten Leiter:



$\vec{j}(\vec{x})$ sei die Stromdichte am Punkt $\vec{x}$ des Leiters. Durch Integration über die Querschnittsfläche folgt dann der Strom:

$$I = \int_F \mathrm{d}\vec{F}\,\vec{j}(\vec{x})$$

Die Einheit von j ist:

$$[j] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Durch das Prinzip der Ladungserhaltung folgt dann:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho(\vec{x},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{x},t) = 0}$$

Eine anschaulichere Interpretation erhalten wir in integraler Form:

$$\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\frac{\partial \varrho(\vec{x},t)}{\partial t} + \int_V \mathrm{d}\vec{x}\,\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

Wir vertauschen im linken Term zeitliche Ableitung und Integral, woraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}\varrho(\vec{x},t) + \int\limits_V \mathrm{d}\vec{x}\,\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{x},t) = 0$$

Durch den Gaußschen Satz folgt nun:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}Q_V + \int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}\,\vec{j}(\vec{x},t) = 0}$$

Q_V ist die Ladung im Volumen V. Die Abnahme der Ladung im Volumen V wird durch den Fluß des Stromes durch die Oberfläche von V kompensiert. Wir behandeln hier speziell die Magnetostatik, die zeitliche Änderung der Ladungsdichte muß also 0 sein:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{x},t) = 0$$

Daraus folgt, daß die Ströme divergenzfrei sind:

$$\vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

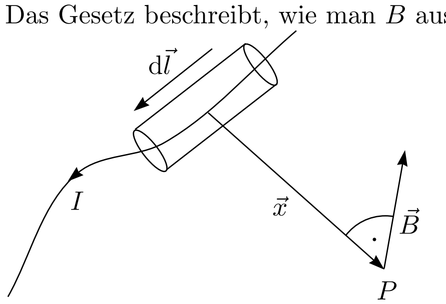
b.) Feldstärke B ($\equiv$ Dichte des magnetischen Flusses)

Diese Größe wird zum Beispiel durch die Wirkung auf magnetischen Dipol (Kompaß-Ladung) gemessen. Wir wissen, daß es auf eine Kompaß-Ladung ein Drehmoment gibt:

$\vec{M} = \vec{v}\times\vec{B}$ in geeigneten Einheiten

4.2 Biot-Savartsches-Gesetz

Das Gesetz beschreibt, wie man B aus dem Strom berechnen kann.



Das vom Strom I, vom Anteil dl des Drahtes am Punkt P erzeugte Feld ist gegeben durch folgende Beziehung (Biot, Savart):

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B} = kI\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}} \qquad (\star)$$

Wir haben hier ein $\frac{1}{x^2}$-Verhalten (wie in der Elektrostatik), aber der Vektor-Charakter ist völlig anders. Die Konstante k lautet folgendermaßen:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

In SI-Einheiten ist das $10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$. Im Gauß-System ist $k = \frac{1}{c}$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Im SI-System wird das auf die Definition von „Ampere“ führen.

Mikroskopische Interpretation:

I im Drahtstück d$\vec{l}$ ist der Strom, welcher durch die Bewegung der Ladung q mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ entsteht ($v \ll c$), also folgt:

$$I\,\mathrm{d}\vec{l} = q\vec{v}$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Es gilt ja bekanntlicherweise:

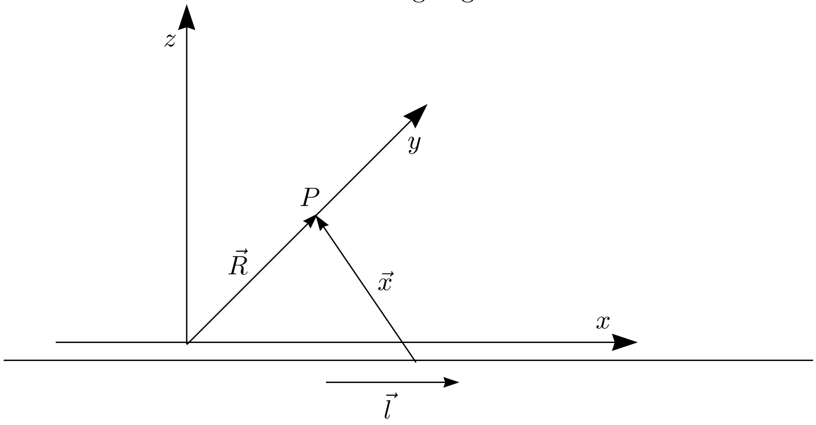
$$\frac{q \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = 4\pi\varepsilon_0 \vec{E} \text{ am Punkt } \vec{x}$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}$$

Beispiel:

Wir betrachten einen unendlich langen geraden Draht im Abstand R vom Beobachter (P):



Wir drücken die Größen durch Vektoren aus:

- Lage des Beobachters:

  $$\vec{R} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Richtung des Drahtes:

  $$\vec{l} = l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Vektor vom Drahtstück $\mathrm{d}\vec{l}$ zum Beobachter:

  $$\vec{x} = \vec{l} + \vec{R}$$

- Drahtstück

  $$\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für das Kreuzprodukt folgt:

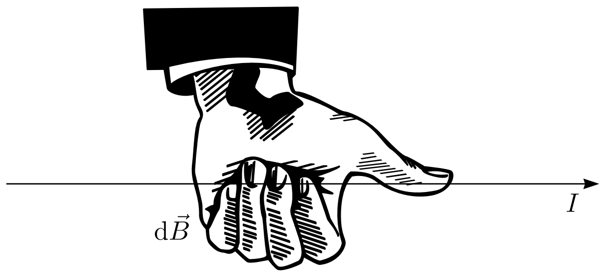
$$\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{x} = \mathrm{d}\vec{l} \times \left(-\vec{l} + \vec{R}\right) = \mathrm{d}l \cdot R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}l \cdot R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit folgt durch Einsetzen in das Biot-Savart-Gesetz und anschließende Integration:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \mathrm{d}l \, \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 + u^2}^3}}_{2 \text{ (siehe Bronstein)}}$$

Somit folgt als Endergebnis für $\vec{B}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$



Es gilt die Rechte-Hand-Regel.

4.2.1 Kraft zwischen 2 stromdurchflossenen Leitern

a.) Wirkung eines „äußeren“ magnetischen Feldes auf einen stromdurchflossenen Leiter

Wir stellen uns vor, daß der Strom I_1 im Leiterstück $\mathrm{d}\vec{l}_1$ fließt. Ein experimentelles Resultat ist:

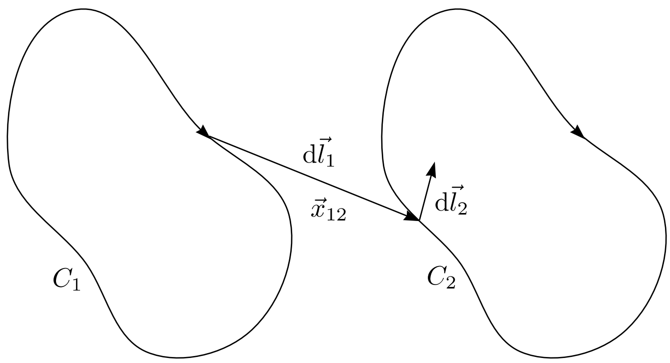
$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_1 = I_1\,\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{B}} \qquad (\star\star)$$

b.) $\vec{B}$ sei durch Strom I_2 im Leiter ② induziert:

Wir nehmen an, daß Leiter ① und ② geschlossene Schleifen C_1 und C_2.

Die Kraft, welche von ② auf ① ausgeübt wird, folgt aus $(\star)$ und $(\star\star)$:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2}\frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \left(\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12}\right)}{|\vec{x}_{12}|^3}}$$



Es gibt die Grassmann-Identität, die ein doppeltes Kreuzprodukt auflöst:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Somit folgt für den Zähler des Bruches:

$$\mathrm{d}\vec{l}_1 \times \left(\mathrm{d}\vec{l}_2 \times \vec{x}_{12}\right) = \mathrm{d}\vec{l}_2\left(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \vec{x}_{12}\right) - \left(\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2\right)\cdot \vec{x}_{12}$$

Wir verwenden folgende Beziehung:

$$\frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} = -\vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{x}_{12}|}$$

Somit folgt:

$$\vec{F}_{12} = I_1 I_2 \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2}\left[-\left(\mathrm{d}\vec{l}_1\mathrm{d}\vec{l}_2\right)\frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3} - \mathrm{d}\vec{l}_2\left(\mathrm{d}\vec{l}_1\vec{\nabla}_1\frac{1}{|\vec{x}_{13}|}\right)\right]$$

$$\frac{1}{|\vec{x}_{12}|} = \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Es gilt durch Integration über einen Gradienten:

$$\int_a^b \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{\nabla}\phi = \phi(x_b) - \phi(x_a)$$

Somit folgt durch eine geschlossene Integration:

$$\oint_{C_1} \mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \vec{\nabla}_1 \frac{1}{|\vec{x}_{12}|} = 0$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \mathrm{d}l_1 \cdot \mathrm{d}l_2 \frac{\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}}$$

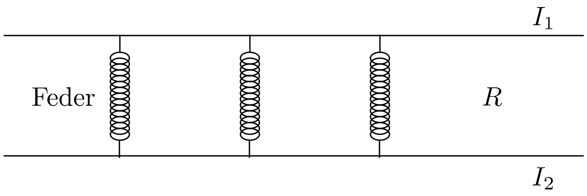
c.) Kraft zwischen zwei Drähten:

Aus Gleichung ($\star\star$) und dem Resultat für B ergibt sich:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies gilt für einen unendlich langen Leiter. Außerdem folgt für die Kraft pro Längeneinheit eines Drahtes:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 I_1 I_2}{R}} \qquad (\star\star\star)$$



$$\left.\begin{array}{l} \text{parallel} \\ \\ \text{antiparallel} \end{array}\right\} \text{Strom} \left\{\begin{array}{l} \text{attraktiv} \\ \\ \text{repulsiv} \end{array}\right.$$

($\star\star\star$) gibt uns die Definition des Ampere.

$$I_1 = I_2 = 1\,\text{Ampere} \Rightarrow \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}} = 10^{-7}\,\frac{\text{Newton}}{\text{Meter}}$$

Einiges noch zur Definition des Ampere:

$$\mu_0 \equiv 4\pi 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

Wird ε_0 experimentell gemessen, so findet man:

$$\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}}$$

4.3 Differentialgleichungen der Magnetostatik und Amperesches Gesetz

✳ Stromdichten:

$$I = \int \mathrm{d}\vec{F}\, \vec{j}(x)$$

✳ Gesetz von Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Analog gilt in der Elektrostatik, wie wir gesehen haben:

$$\vec{E} = 4\pi\varepsilon_0 \int \mathrm{d}\vec{x}' \, \varrho(\vec{x}') \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Mit Gradientenschreibweise folgt:

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \frac{(\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \times \left(-\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Da der Gradient nur von $\vec{x}$ abhängt, kann man ihn vor das Integral ziehen, woraus folgt:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \qquad (\star)$$

An dieser Stelle wird es wieder nützlich, an die Analogie zur Elektrostatik zu erinnern. Offensichtlich gilt:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Dies ist ja einer der Fundamentalsätze der Vektoranalysis. Wenn ein Feld als Rotation eines anderen Feldes geschrieben werden kann, dann ist die Divergenz dieses Feldes 0. Das Ziel ist es nun, eine Differentialgleichung für $\vec{B}$ von folgendem Typ zu finden:

Ableitung auf $B =$ Ausdruck $\vec{j}$

Wir betrachten hiermit;

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Das doppelte Kreuzprodukt lösen wir wieder mittels der folgenden Beziehung auf:

rot (rot) = grad (div) − Laplace

Somit folgt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{\nabla}_x \cdot \left(\vec{\nabla}_x \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \vec{\nabla}_x^2 \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Nun gilt:

$$\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -\vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wir setzen ein und ziehen den Gradienten in das Integral, woraus sich ergibt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\vec{\nabla}_x \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \left(-\vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \left(-4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}) \vec{j}(\vec{x}') \right) \right)$$

Der erste Term ist 0, was durch partielle Integration folgt, wobei die Randterme ignoriert werden.

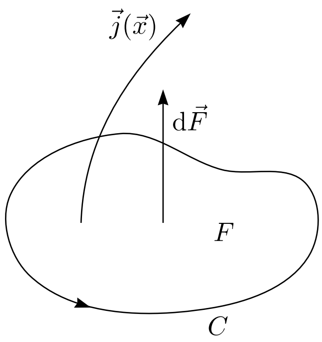
$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}' (\vec{\nabla} j) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Für den zweiten Term folgt dann durch Integration nach den Rechenregeln der Delta-Funktion:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{x})}$$

Zur Herleitung der integralen Form, betrachten wir eine Fläche F mit dem Rand C:

$$\int_F \mathrm{d}\vec{F} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = \mu_0 \int -F \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{j}$$

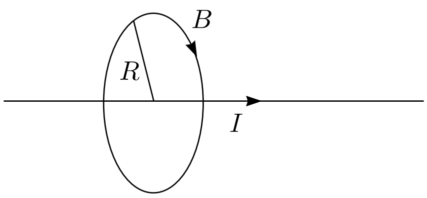


Das erste Integral schreiben wir mit dem Stokesschen Satz um, der besagt, daß man ein Flächenintegral über die Rotation ausdrücken kann durch ein Linienintegral über den Rand C der Fläche F. Das zweite Integral ergibt gerade den Strom I:

$$\boxed{\oint\limits_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{B}(x) = \mu_0 I}$$

Wir haben das sogenannte Amperesche Gesetz hergeleitet. I ist dabei der Strom durch die Fläche.

Einfaches Beispiel:



Wir betrachten einen geraden Leiter, dessen Feld kreisförmig um den Leiter herumläuft. Dann werden wir die obige Gleichung aus. Aus Symmetriegründen ist B tangential zum Kreis um den Leiter und vom Betrag her konstant wir $R = \text{const.}$, woraus dann folgt, weil wir B vor das Integral ziehen können:

$$2\pi R B(x) = \mu_0 I$$

Somit folgt für das B-Feld:

$$\boxed{B(R) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \cdot 2I}$$

Wir sehen, daß hier die Berechnung des Feldes mit dem Ampereschen Gesetz viel einfacher erfolgte, als mit dem Biot-Savart-Gesetz.

4.3.1 Vektor-Potential

Ähnlich wie beim elektrischen Feld können wir auch für das magnetische Feld ein Potential einführen. Dies ist unter anderem sinnvoll, da die Differentialgleichung damit einfacher wird. Den vollständigen Nutzen werden wir jedoch erst später erkennen.
Wegen $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ läßt sich B als Rotation eines Vektorfeldes $\vec{A}$ darstellen. Wir setzen einfach $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Wir versuchen nun Gleichungen für A zu finden, die so strukturiert sind, daß ich bei Bildung der Rotation das B-Feld erhalte. Eine mögliche Wahl für das Potential wäre beispielsweise Gleichung $(\star)$, womit folgt:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}\Psi(\vec{x})} \qquad (\star\star)$$

Dies wäre ein mögliches Vektorpotential, wobei $\Phi(\vec{x})$ eine beliebige Funktion ist, welche wegen $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Psi(x) = 0$ nichts zu B beiträgt. $\vec{A}$ ist infolgedessen nicht eindeutig durch $\vec{B}$ bestimmt. Falls $\vec{A}$ ein Vektorpotential zu $\vec{B}$ ist (d.h. $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$), so ist $\vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$ ebenfalls ein Vektorpotential. Man spricht von der sogenannten <u>Eichfreiheit</u>. Dies haben wir auch schon beim Potential des elektrischen Feldes kennengelernt, wobei man eine beliebige Konstante zum Potential addieren konnte, ohne daß sich der Vektor des elektrischen Feldes änderte. Hier ist es aber viel raffinierter. Die Eichtransformation lautet:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$$

In Gleichung ($\star\star$) wählen wir $\Phi = 0$. Daraus folgt eine interessante Beziehung für $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{x}' \vec{\nabla}_x \frac{j(\vec{x})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = 0$$

Dies gilt wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Für das Vektorpotential gilt somit, daß nun die Divergenz 0 ist:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{A} = 0}$$

Man bezeichnet diesen Fall als Coulomb-Eichung. Aus $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(x)) = \mu_0 \vec{j}(x)$ folgt nun wieder durch Auflösung des doppelten Kreuzproduktes:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x)\right)}_{=0 \text{ (Coulomb-eichung)}} - \triangle \vec{A}(x) = \mu_0 \vec{j}(x)$$

$$\boxed{\triangle \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{j}(x)}$$

Es handelt sich hier um die Analogie zur Poisson-Gleichung in der Elektrostatik.

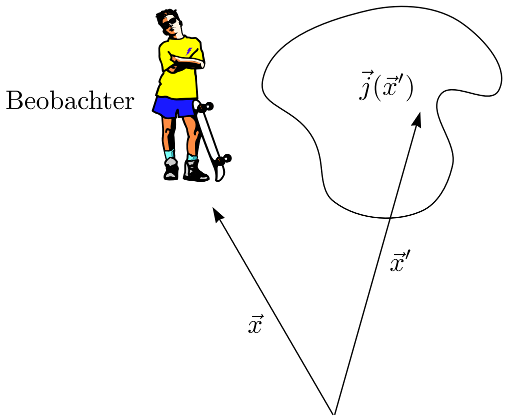
Anmerkung zu Eichtransformationen:

Gegeben sei $\vec{A}$, so daß $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Wir behaupten, daß wir immer ein Vektorpotential aus $\vec{A}$ gewinnen, so daß $\vec{\nabla}\vec{A} = 0$ ist (Coulomb-Eichung). Es sei $\vec{\nabla}\vec{A} = \lambda(\vec{x}) \neq 0$. Dann ersetzen wir $\vec{A}$ durch $\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi(x)$, wodurch das B-Feld nicht geändert wird. Jetzt bilden wir einfach die Divergenz:

$$\vec{\nabla}\vec{A}' = \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A}}_{\lambda(x)} + \vec{\nabla}^2\Psi(x) = 0$$

Also muß die Eichfunktion die Gleichung $\boxed{\triangle\Psi = -\lambda}$ erfüllen.

4.4 Lokalisierte Ströme und magnetische Momente



$\vec{j}$ sei ein im Volumen V von Null verschiedenes Feld, das wir im großen Abstand betrachten wollen. Wir gehen zur Komponentenschreibweise über:

$i = 1, 2, 3$ oder x, y, z

Wir betrachten das Vektorpotential im großen Abstand von einer lokalisierten Stromverteilung. Als Ausgangspunkt betrachten wir das Vektorpotential $\vec{A}$ in Komponentenschreibweise:

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}' \frac{j_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Wir betrachten den Fall, daß $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$: Damit können wir folgende Näherung benutzen:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \dots$$

Wir erhalten nun für die Komponenten von $\vec{A}$:

$$A_i = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|}\int \mathrm{d}^3\vec{x}' j_i(\vec{x})'}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3}\int \mathrm{d}^3\vec{x}' j_i(\vec{x}')\,(\vec{x}'\cdot\vec{x})}_{\mathrm{II}}$$

Wir wollen nun zeigen, daß der Term I verschwindet, während sich der Term II folgendermaßen darstellen läßt:

Term II $= \vec{m} \times \vec{x}$

- <u>Term I:</u>

  Mit $\vec{\nabla}'_j x'_i = \delta_{ij}$ folgt:

  $$\vec{\nabla}'\left(x'_i \cdot \vec{j}(\vec{x}')\right) = x'_i \underbrace{\vec{\nabla}'\vec{j}(\vec{x})}_{0} + j_i(\vec{x}') \qquad (\circ)$$

  Mit dem Gaußschen Satz in abgewandelter Form folgt:

  $$\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}' j_i(\vec{x}') = \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}'\vec{\nabla}'(x'_i\vec{j}(\vec{x}')) = \int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}(x'_i, \vec{j}(\vec{x}')) = 0$$

  Dieser Term ist 0, da $j = 0$ außerhalb von V. Der Monopolbeitrag verschwindet also, was uns ja nicht weiter wundert.

- <u>Term II:</u>

  Wir lassen die Konstante weg:

  $$\underbrace{\int \mathrm{d}^3\vec{x}'(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{j}(\vec{x}')}_{a} = \underbrace{\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left(\vec{x}\vec{j}(x')\right)\vec{x}'}_{b} - \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left[\vec{x}\times\left(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right)\right]$$

  Wir zeigen, daß $a = -b$ ist. Mit der Gleichung $\circ$ zeigen wir:

  $$\int \mathrm{d}^3\vec{x}' x'_j j_i(\vec{x}') = \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}' x'_j \vec{\nabla}'\left(x'_j\vec{j}(\vec{x}')\right) \qquad (\star\star\star)$$

  Durch partielle Integration folgt:

  $$\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}' x'_j \vec{\nabla}'\left(x'_j\vec{j}(\vec{x}')\right) = -\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}' x'_i j_j(\vec{x}') + \underbrace{\text{Randterme}}_{0}$$

  Wir subtrahieren die Terme a und b, woraus sich dann ergibt:

  $$2b = -\int \mathrm{d}\vec{x}'\left[\vec{x}\times\left(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right)\right]$$

  Der Term II lautet somit:

  $$+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left[\left(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right)\times\vec{x}\right]$$

Damit folgt endgültig für das Vektorpotential:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|^3}\vec{m}\times\vec{x} \text{ mit } \vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right)}$$

$\vec{m}$ nennen wir das <u>magnetische Dipolmoment</u> und $\mathcal{M}(\vec{x}') = \frac{1}{2}\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')$ ist die sogenannte <u>Dipoldichte</u>. Wir wollen nun das resultierende Feld für $\vec{x} \neq \vec{o}$ berechnen:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\vec{m}\times\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right)$$

Wir lösen das doppelte Kreuzprodukt wiederum auf, woraus folgt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\right) - \left(\vec{m}\cdot\vec{\nabla}\right)\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right]$$

Des weiteren gilt ja, daß der erste Term gleich 0 ist, da:

$$\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\vec{\nabla}\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}} = -\triangle\frac{1}{|\vec{x}|} = 0$$

Somit folgt:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\vec{x}\left(\vec{m}\cdot\vec{x}\right) - \vec{m}\vec{x}^2}{x^5}}$$

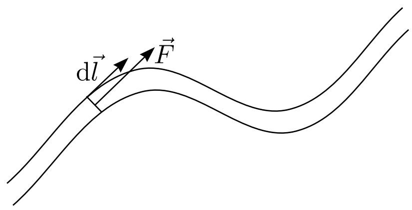
Wir erkennen die Analogie zum elektrischen Dipol.

Einfache Beispiele:

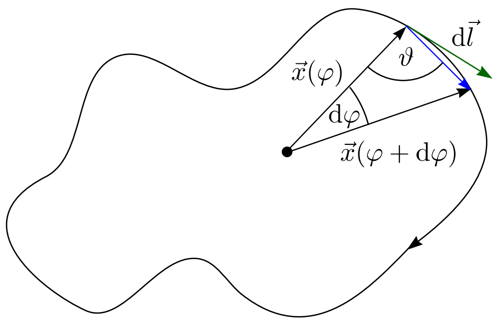
a.) Stromschleife beliebiger Form in einer Ebene:

$$\int \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{j}(\vec{x}) = \int \mathrm{d}\vec{l}\mathrm{d}\vec{F}\vec{j}(\vec{x}) = \int \mathrm{d}\vec{l}I$$

$\vec{j}(\vec{x})$ sei die Stromdichte und I der Strom.



$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{x}\times\vec{j}(\vec{x}) = I\frac{1}{2}\oint_C \vec{x}\times\mathrm{d}\vec{l}$$



$\displaystyle\frac{1}{2}\oint_{\text{Schleife}} |\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{l}|$ ist die Fläche, die von der Schleife umfahren wird.

Dies kann folgendermaßen begründet werden.

- Möglichkeit 1:

  Für infinitesimal kleine Winkel $\mathrm{d}\varphi$ gelte $\vec{x}(\varphi) \approx \vec{x}(\varphi+\mathrm{d}\varphi)$. Dann kann auch $\mathrm{d}\vec{l}$ näherungsweise durch den Verbindungsvektor von $\vec{x}(\varphi)$ und $\vec{x}(\varphi+\mathrm{d}\varphi)$ ersetzt werden, wobei der Winkel ϑ etwa 90° beträgt:

  $$|\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{l}| = |\vec{x}|\cdot|\mathrm{d}\vec{l}|\cdot\sin\varphi \approx |\vec{x}|\cdot|\mathrm{d}\vec{l}|$$

  Wir haben hier also die Fläche des von den Vektoren $\vec{x}$ und $\mathrm{d}\vec{l}$ aufgespannten Rechtecks. Damit wird die Fläche des Dreiecks bekommen, müssen wir einen Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigen. Außerdem erhalten wir für dieses Dreieck:

  $$\sin(\mathrm{d}\varphi) = \frac{|\mathrm{d}\vec{l}|}{|\vec{x}|} \Leftrightarrow |\mathrm{d}\vec{l}| = |\vec{x}|\sin(\mathrm{d}\varphi) \approx |\vec{x}|\mathrm{d}\varphi$$

Der letzte Schritt gilt für infinitesimal kleine $\mathrm{d}\varphi$. Also folgt $|\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{l}| = |\vec{x}|^2 \,\mathrm{d}\varphi$. Wir erhalten damit folgende Beziehung:

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\text{Schleife}} |\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{l}| = \frac{1}{2} \oint\limits_{\text{Schleife}} |\vec{x}|^2 \,\mathrm{d}\varphi$$

Dabei handelt es sich um die aus der Mathematik bekannte Sektorformel, welche die Fläche des Gebiets angiebt, welches von der Kurve C berandet wird.

- Möglichkeit 2:
  Wir legen folgendes fest:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; \mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}$$

Damit gilt also für das Kreuzprodukt:

$$\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{l} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_z \cdot (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

Damit gilt nun:

$$\frac{1}{2} \oint\limits_{\text{Schleife}} |\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{l}| = \frac{1}{2} \oint\limits_{\text{Schleife}} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$$

Mittels des Gaußschen Satzes in der Ebene erhalten wir außerdem folgende Erkenntnis:

$$\iint\limits_{G} \mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial G} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \frac{1}{2} I(G)$$

Es handelt sich damit um den Inhalt der Fläche.

Also folgt für $|\vec{m}|$:

$$\boxed{|\vec{m}| = I \cdot F}$$

$\vec{m}$ steht senkrecht auf der Ebene.

b.) Punktladungen q_i an den Punkten x_i mit Geschwindigkeiten v_i:

$$\vec{j}(\vec{x}) = \sum_i q_i \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

x_i hängt hierbei von der Zeit ab:$x_i(t)$. Damit folgt:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3\vec{x}\, \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot (\vec{x}_i(t) \times \vec{v}(t)) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\vec{x}_i \times \frac{\vec{p}_i}{M_i} \right)$$

Mit dem Drehimpuls $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ und der Masse M_i der Teilchen folgt:

$$\boxed{\vec{m} = \sum_i \frac{q_i}{2} \frac{\vec{L}_i}{M_i}}$$

Das System habe Teilchen, bei denen sich Ladung zu Masse gleich verhalten:

$$\frac{q_i}{M_i} = \frac{q}{M}$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{M} \sum \vec{L}_i = \frac{1}{2} \frac{q}{M} \vec{L}}$$

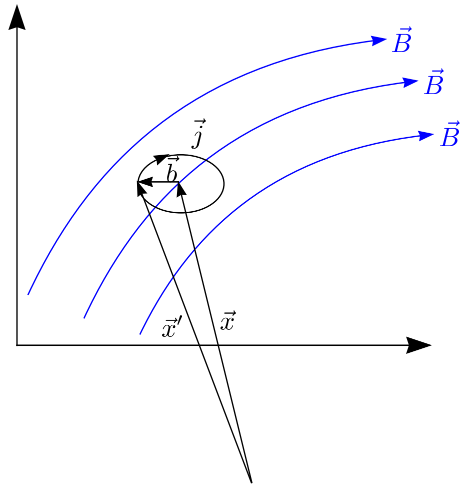
$\vec{L}$ ist hierbei der Gesamtdrehimpuls. Den Faktor $\boxed{\frac{q}{2M}}$ nennt man auch gyromagnetisches Verhältnis.

4.5 Kraft und Drehmoment eines äußeren Feldes auf lokalisierte Stromverteilungen

$$\boxed{\vec{F} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})} \qquad (\star)$$

Diese Kraft wollen wir jetzt in Verallgemeinerung von $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$ für eine Leiterschleife berechnen. Für das Drehmoment gilt:

$$\boxed{\vec{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{x} \times \left(\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\right)} \qquad (\star\star)$$



$\vec{B}(\vec{x}')$ sei am Punkt x' für langsam veränderlich:

$$\vec{B}(\vec{x}') = \vec{B}(\vec{x}) + \left(\vec{b} \cdot \vec{\nabla}_x\right) \vec{B}(\vec{x})$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{b}$$

Dann gilt:

1.) $\boxed{\vec{F} = \vec{\nabla}_x \left(\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{x})\right)}$

2.) $\boxed{\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{x})}$

Beweis der 2.Beziehung:

$$\vec{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\vec{x}' \times \left(\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{x}')\right)$$

Folgende Näherung ist dabei sinnvoll:

$$\vec{B}(\vec{x}') \approx \vec{B}(\vec{x}) = \text{const.}$$

Wir können $\vec{B}$ somit als Konstante vor das Integral ziehen:

$$\vec{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\vec{x}' \times \left(\vec{j}(\vec{x}') \times \vec{B}(\vec{x})\right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{b}$$

Wir integrieren nur für kleine $\vec{b}$ und machen eine Variablensubstitution $\vec{x}' \mapsto \vec{b}$ und setzen $\vec{j}(\vec{x}') \mapsto \vec{j}(\vec{b})$. Dann folgt:

$$\vec{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{b}\,\vec{b} \times \left(\vec{j}(\vec{b}) \times \vec{B}(\vec{x})\right)$$

Das doppelte Kreuzprodukt wird wieder aufgelöst:

$$\vec{N} = \int \mathrm{d}^3\vec{b}\,\vec{j}(\vec{b}) \left(\vec{b} \cdot \vec{B}(\vec{x})\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{j}(\vec{b})\right) \vec{B}(\vec{x})$$

Gleichung $(\star\star\star)$ ist äquivalent zu:

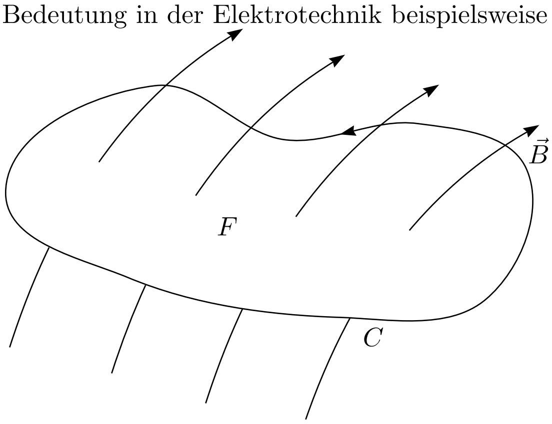
$$\int \mathrm{d}^3\vec{b}\,(j_i b_j + j_j b_i) = 0$$

$$\int \mathrm{d}^3\vec{b}\vec{j} \left(\vec{b} \cdot \vec{B}(\vec{x})\right) = \vec{m} \times \vec{B}(\vec{x})$$

4.6 Zeitabhängige Felder, Maxwell-Gleichungen

4.6.1 Faraday Gesetz

Wir wollen nun die Wirkung zeitlich veränderlicher Magnetfelder untersuchen. Dieses hat eine sehr große Bedeutung in der Elektrotechnik beispielsweise bei Generatoren oder Transformatoren.



Der Fluß durch eine Leiterschleife C berechnet sich nach:

$$\phi = \int_F \mathrm{d}\vec{F} \cdot \vec{B}$$

Die zeitliche Änderung von ϕ induziert eine Ringspannung oder elektromotorische Kraft. Diese Ringspannung $\mathcal{E}$ ist folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \mathrm{d}\vec{l}\vec{E}$$

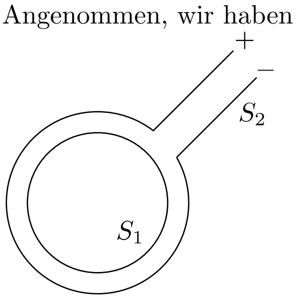
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi}$$

Dies ist das Faradaysche Gesetz. Das Vorzeichen ist bestimmt durch die Lenzsche Regel.

Der induzierte Strom fließt so, daß das dadurch hervorgerufene Magnetfeld der Änderung entgegenwirkt.

Extremes Beispiel:

Angenommen, wir haben einen Normal-Leiter S_2 und eine supraleitende Spule S_1:



Zunächst sei der Strom in S_1 gleich Null und in S_2 ungleich Null. Ein Abschalten des Stromes in S_2 induziert einen Strom in S_1, so daß der Fluß ungeändert bleibt. Wir nehmen an, wir haben einen dünnen Leiter mit der Leitfähigkeit σ und dem Querschnitt f. Dann folgt:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen der Ringspannung und dem Strom herstellen:

$$\mathcal{E} = \oint\limits_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{E} = \oint\limits_C \mathrm{d}\vec{l}\,\frac{\vec{j}}{\sigma}$$

$\vec{j}$ sei parallel zu $\mathrm{d}\vec{l}$. Außerdem folgt für die Stromdichte:

$$|\vec{j}| = \frac{I}{f}$$

f ist der Querschnitt des Leiters. Dann ergibt sich:

$$\mathcal{E} = \oint \frac{I}{f\sigma}\,|\mathrm{d}\vec{l}| = I\frac{l}{f\sigma}$$

l ist hierbei natürlich die Länge der Leiterschleife. Der Ausdruck $\frac{l}{f\sigma}$ ist einfach der Widerstand R des Leiters. $\mathcal{E}$ ist nun die Ringspannung, welche nötig ist, den Strom I gegen den Widerstand R aufrechtzuerhalten. Nach dem Faradayschen Gesetz ergibt sich nun für den induzierten Strom:

$$\boxed{I = -\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi}$$

Mikroskopische Interpretation:

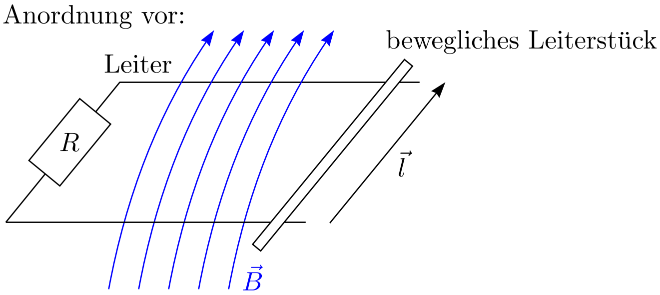
Bewegt man einen Leiter im Magnetfeld, so wirkt auf die Ladungsträger die Lorentzkraft:

$$\vec{K} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Diese Kraft wirkt auf einen bewegten Beobachter wie ein elektrisches Feld:

$$\vec{E}' = \gamma\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v} \times \vec{B}'$$

Die gestrichenen Größen sind diese im mitbewegten System. $\vec{B}$ sei homogen. Wir stellen uns nun folgende Anordnung vor:



$$\int \vec{E}'\,\mathrm{d}\vec{l} = \left(\vec{v} \times \vec{B}'\right) \cdot \vec{l} = v \cdot |\vec{B}'| \cdot l$$

Des weiteren gilt folgende Beziehung zwischen der Fläche und der Geschwindigkeit, mit dem sich das Leiterstück bewegt:

$$v \cdot l = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\text{Fläche}$$

Somit folgt mit $B \cdot \text{Fläche} = \text{Fluß}$:

$$\boxed{\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi}$$

An dieser Stelle wollen wir zur differentiellen Form des Faradayschen Gesetzes übergehen. Wir wollen die Änderung des Flusses nur dadurch hervorrufen, daß wir das Magnetfeld ändern; die Fläche F sei zeitunabhängig.

$$\underbrace{\int\limits_F \mathrm{d}\vec{F}\,\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi} + \underbrace{\oint\limits_C \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}}_{\mathcal{E}} = 0$$

Das zweite Linienintegral wandeln wir mittels des Stokesschen Satzes in ein Flächenintegral um:

$$\oint\limits_C \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int\limits_F \vec{\nabla} \times \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{F}$$

Nun folgt daraus:

$$\boxed{0 = \int\limits_F \mathrm{d}\vec{F}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = 0}$$

Dies gilt für beliebige F. Wir nehmen an, daß das elektrische Feld auch unabhängig vom Leiter induziert wird. Daraus folgt eben, daß gelten muß:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{o}}$$

Wir haben hier nun die differentielle Form des Faradayschen Gesetzes vor uns, dem in der Elektrotechnik eine sehr große Bedeutung zukommt.

4.6.2 Maxwell-Gleichungen

Notieren wir unsere bisherigen Erkenntnisse:

- Quellen des elektrischen Feldes:

  $$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

- Magnetostatik:

  $$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0\vec{j} \qquad (\star)$$

- Faraday-Gesetz:

  $$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{o}$$

- Abwesenheit von magnetischen Monopolen:

  $$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Für zeitabhängige Ströme und Felder ist die Gleichung $(\star)$ inkonsistent. Wir bilden einfach die Divergenz:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = \mu_0\vec{\nabla}\vec{j}$$

Der erste Term ist immer 0, da die Divergenz einer Rotation immer 0 ist. Somit folgt:

$$0 = \mu_0\vec{\nabla}\vec{j} = \mu_0\left(-\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0}$$

Diese Inkonsistenz wurde nun von Maxwell beseitigt. Gleichung ($\star$) wird nun in Analogie zum Faraday-Gesetz so abgeändert, daß $\vec{j}$ durch $\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$ ersetzt wird. $\frac{\partial E}{\partial t}$ ist der sogenannte Verschiebungsstrom. Dann ergibt sich;

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\vec{\nabla}\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)=\mu_0\left(\vec{\nabla}\vec{j}+\varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho\right)\right)$$

$$\mu_0\left(\vec{\nabla}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial t}\varrho\right)=0$$

Dies folgt wegen der Kontinuitätsgleichung. Gleichung ($\star$) wird somit ersetzt durch:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E=\mu_0\vec{j}}$$

Wir fassen also zusammen:

1.) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$

2.) $\vec{\nabla}\times\vec{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\mu_0\vec{j}$

3.) $\vec{\nabla}\times\vec{E}-\frac{\partial B}{\partial t}=0$

4.) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

Die Gleichungen 1.) und 2.) nennt man inhomogene Maxwellgleichungen, 3.) und 4.) sind die homogenen Maxwellgleichungen. $\vec{E}$, $\vec{B}$, ϱ und $\vec{j}$ hängen ab von $\vec{x}$ und t. Empirisch folgt die sehr wichtige Gleichung

$$\boxed{\mu_0\varepsilon_0=\frac{1}{c^2}}$$

4.6.3 Übergang zu Vektor- und skalarem Potential

Wegen $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ ist der Ansatz $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ auch für zeitabhängige Felder möglich. Dann ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ automatisch erfüllt wegen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)=0$$

Also läßt sich diese Gleichung aufgrund der Wirbelfreiheit als Gradient eines skalaren Potential schreiben:

$$\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\vec{\nabla}\phi$$

Also folgt:

$$\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}\phi$$

Beide homogenen Maxwellgleichungen sind per Konstruktion erfüllt. Die Analogie in der Elektrostatik ist so, daß $\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{o}$ automatisch erfüllt ist, falls $\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$. Durch Bildung der Divergenz folgt für die erste inhomogene Maxwellgleichung:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{A}-\vec{\nabla}^2\phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

Für die zweite inhomogene Maxwellgleichung gilt:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}=\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}\phi\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi=\mu_0\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right) = -\mu_0\vec{j}}$$

Wir haben hier ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem vor uns. Die Entkopplung der Gleichungen erfolgt durch gezeigte Eichung. Wir wählen Potentiale speziell so, daß $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$. Aus der Lorentz-Gleichung werden 2 unabhängige Gleichungen:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}}$$

Es besteht die Eichfreiheit, wodurch die Potentiale frei gewählt werden können. Wir wählen spezielle Potentiale:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

Genauere Diskussion der Eichfreiheit:

$\vec{B}$ ändert sich nicht unter der Transformation:

$$\vec{A} \mapsto \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{x},t) \qquad (\star)$$

Wegen $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\nabla}\phi$ muß auch ϕ transformiert werden nach $\phi \mapsto \phi' - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{x},t)$. Man kann durch Eichtransformation immer erreichen, daß die Lorentzeichung erfüllt ist:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

Falls $\vec{A}$ und ϕ zwar das Magnetfeld $\vec{B}$ und das elektrische Feld $\vec{E}$ wie gewünscht liefern, aber $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi \neq 0 = f(\vec{x},t)$, dann suchen wir $\Lambda(\vec{x},t)$, so daß für neue Potentiale $\vec{A}'$ und ϕ' folgendes gilt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi' = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}^2\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda = 0$$

Die Forderung an Λ sei nun folgendes:

$$\left(-\vec{\nabla}^2 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Lambda(\vec{x},t) = f(\vec{x},t)$$

Λ ist Lösung der inhomogenen Wellengleichung. Eine Alternative wäre die sogenannte „Coulomb-Eichung“ oder „transversale Eichung“:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$$

Dann folgt:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\phi = -\frac{1}{\varepsilon_0}\varrho}$$

Die Poisson-Gleichung bleibt somit gültig, aber es ist ein Preis dafür zu bezahlen, weil dann nämlich die 2.Gleichung komplizierter wird:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi}$$

Speziell für verschwindende Quellen $\varrho = 0$ und $\vec{j} = \vec{o}$ folgt:

$$\boxed{\phi = 0}$$

Die Wellengleichung für $\vec{A}$ lautet:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = 0}$$

Und natürlich gilt in diesem speziellen Fall:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ und } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

4.7 Elektromagnetische Wellen im Vakuum

a.) Lösung der Maxwell-Gleichungen ohne Quellen:

Zuerst wollen wir betrachten $\varrho = 0$ und $\vec{j} = \vec{o}$. Ausgangspunkt ist wieder das System der Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Wir wollen nun eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, also die Wellengleichung, erhalten. Wir bilden jeweils die Rotation der beiden letzten Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Nun folgt wieder durch Auflösen des doppelten Kreuzproduktes:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right)}_{0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0}$$

Wir haben hier die Wellengleichung für $\vec{E}$ erhalten. Analog folgt für $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0}$$

b.) Allgemeine Diskussion der Wellengleichung:

Jede Komponente von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erfüllt die Wellengleichung:

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) f(\vec{x}, t) = 0}$$

Die Lösung kann man aus Funktionen der folgenden Form zusammensetzen:

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{n}\vec{x} - ct)$$

$\vec{n}$ habe hier eine beliebige Richtung und es gelte $\vec{n}^2 = 1$. Wir wollen beweisen, daß $f(\vec{x}, t)$ die Wellengleichung erfüllt. Es gilt durch Anwendung des Laplace-Operators:

$$\vec{\nabla}^2 f(\vec{n}\vec{x} - ct) = \vec{\nabla}\left(\vec{n} f'(\vec{n}\vec{x} - ct)\right) = \underbrace{\vec{n}^2}_{1} f''(\vec{n}\vec{x} - ct) = f''(\vec{n}\vec{x} - ct)$$

Durch Bildung der zweiten Ableitung nach der Zeit t folgt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\vec{n}\vec{x} - ct) = (-c)^2 f''(\vec{n}\vec{x} - ct)$$

Somit ergibt sich:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) f = f'' - f'' = 0$$

Es sei also eine Welle in Richtung $\vec{n}$ mit der Geschwindigkeit c. In einer Dimension ergibt sich:

$$f_1(x - ct) + f_2(-x - ct)$$

Spezielle Lösungen sind „ebene Wellen“ folgender Form:

$$A \cdot \exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{k}\vec{x}\right)$$

Dabei gibt einige wohldefinierte Zusammenhänge:

$$|\omega| = |\vec{k}|c, \vec{n} = \frac{c\vec{k}}{\omega} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

$\vec{n}$ sei die Ausbreitungsrichtung und ν die Frequenz. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist unabhängig von ω bzw. $\vec{k}$. Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung kann als Überlagerung von ebenen Wellen dargestellt werden. Dazu müssen wir uns kurz mit dem Problem der Fourier-Zerlegung beschäftigen.

4.7.1 Mathematischer Einschub:Fourier-Zerlegung, Fourier-Integral

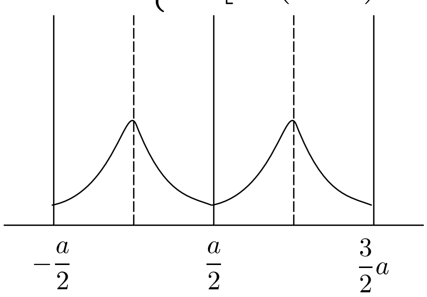
Ein Wellenzug beliebiger Form soll als Überlagerung von $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + kx}$ dargestellt werden. Wir erinnern uns an dieser Stelle an Kapitel 3:Fourier-Reihen. Jede Funktion $f(x)$ im Intervall $\left\langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right\rangle$ läßt sich darstellen als Fourier-Reihe:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) + B_m \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)}$$

$$\boxed{A_m = \frac{2}{a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{B_m = \frac{2}{a}\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\,\mathrm{d}x}$$

Das System $\left\{\sqrt{\frac{2}{a}}\left[\sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right), \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)\right]\right\}$ ist orthonormiert und vollständig.



Komplexe Darstellung:

$U_m(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Eine beliebige komplexe Funktion in $\left\langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right\rangle$ kann nun dargestellt werden als:

$$\boxed{f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} U_m(x) A_m = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_m A_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)} \text{ mit } A_m \in \mathbb{C}}$$

$$\boxed{A_m = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\, U_m^\star(x) f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{d}x'\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)} f(x')}$$

Für die U_m gilt:

$$\boxed{\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \mathrm{d}x\, U_m^\star(x) U_n(x) = \delta_{nm}}$$

Das System ist also orthonormiert. Wir Vollständigkeit sei folgendermaßen dargestellt:

$$\boxed{\sum_m U_m^\star(x) U_m(x') = \delta(x - x')}$$

Die Wellenzahlen $\frac{2\pi m}{a}$ nehmen nur diskrete Werte an. Mit wachsendem a liegen diese Werte immer dichter. Das Verhalten für $a \mapsto \infty$ ist:

$$\frac{2\pi}{a} m \mapsto k$$

k nehme kontinuierliche Werte an.

$$\sum_m \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}m = \frac{a}{2\pi} \int \mathrm{d}k, \sqrt{\frac{a}{2\pi}} A_m \mapsto A(k)$$

Und somit gilt:

$$f(x) = \int \mathrm{d}k \frac{a}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{2\pi}{a}} A(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

Erfreulicherweise kürzt sich a raus. Dann folgt:

$$\boxed{f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} A(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}$$

Mittels folgender Umkehrung kann $A(k)$ berechnet werden:

$$\boxed{A(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{\sqrt{2\pi}} f(x') \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}}$$

Vollständigkeit:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\left(x - x'\right)} = \delta(x - x')}$$

Wir vertauschen x und k:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\left(k-k'\right)} = \delta(k-k')}$$

Dies entspricht der <u>Orthonormiertheit</u>. Wir behaupten nun:

Die Lösung der Wellengleichung kann als Überlagerung von ebenen Wellen dargestellt werden.

$u(t,\vec{x})$ sei eine Lösung der Wellengleichung.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) u(t,\vec{x}) = 0$$

$u(t,\vec{x})$ bei fester Zeit kann als Fouriertransformierte geschrieben werden:

$$u(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \tilde{u}(t,\vec{k}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}$$

$$0 = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) u(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + k^2 \tilde{u}(t,\vec{k})\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}$$

Damit folgt nun:

$$\int \mathrm{d}^3 k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + k^2 \tilde{u}(t,\vec{k})\right] = 0$$

Somit muß der Ausdruck in der Klammer 0 ergeben:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + k^2 \tilde{u}(t,\vec{k}) = 0$$

Dann erhalten wir folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + \vec{k}^2 \tilde{u}(t,\vec{k}) = 0, \omega = |\vec{k}| \cdot c$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{u}(t,\vec{k}) + \omega^2 \tilde{u}(t,\vec{k}) = 0$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind einfach trigonometrische Funktionen, die man auch als komplexe Exponentialfunktion schreiben kann:

$$\boxed{\tilde{u}(t,\vec{k}) = \alpha(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \beta(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}$$

Eine allgemeine Lösung des Problems ist somit:

$$\boxed{u(t,\vec{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{\sqrt{2\pi}^3} \left(\alpha(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} + \beta(\vec{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}\right)}$$

Die Funktionen $\alpha(\vec{k})$ und $\beta(\vec{k})$ sind hierbei beliebig.

<u>**Anfangswertproblem:**</u>

Es sei $u(0,\vec{x}) = a(\vec{x})$ und $\left.\frac{\partial}{\partial t}u(t,\vec{x})\right|_{t=0} = b(\vec{x})$ gegeben. $\tilde{a}(\vec{k})$ und $\tilde{b}(\vec{k})$ sind die Fouriertransformierten von a und b.

$$\tilde{a}(\vec{k}) = \int \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} a(\vec{x})$$

$$\tilde{b}(\vec{k}) = \int \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} b(\vec{x})$$

$u(0,\vec{x}) \Rightarrow \alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k}) = \tilde{a}(\vec{k})$

$\left.\frac{\partial}{\partial t} u(t,\vec{x})\right|_{t=0} \mathrm{i}\omega \left(\alpha(\vec{k}) - \beta(\vec{k})\right) = \tilde{b}(\vec{k})$

Somit folgt durch Auslösen:

$$\boxed{2\alpha(\vec{k}) = \tilde{a} + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\tilde{b}}$$

$$\boxed{2\beta(\vec{k}) = \tilde{a} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\tilde{b}}$$

Spezielle Anfangsbedingung:

$D(t,\vec{x})$ sei so gewählt, daß folgendes gelte:

$D(0,\vec{x}) = 0;\ \left.\frac{\partial}{\partial t} D(t,\vec{x})\right|_{t=0} = \delta(\vec{x})$

Dann folgt daraus:

$\tilde{a}(\vec{k}) = 0$

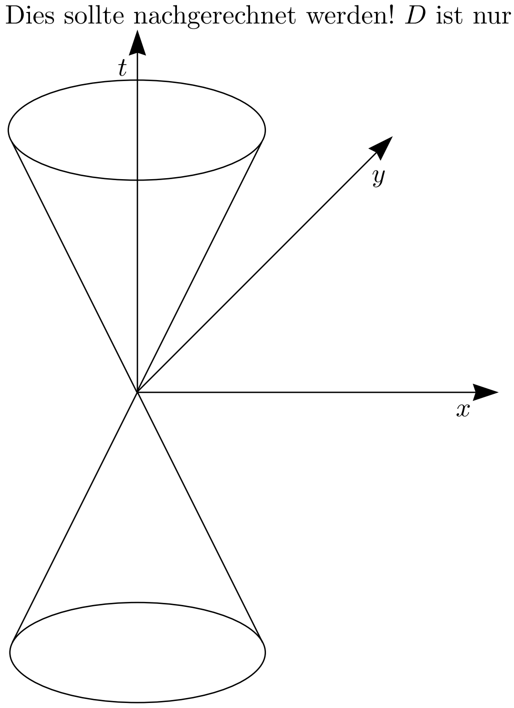
$\tilde{b}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}$

$D(t,\vec{x}) = (2\pi)^{-3} \int \mathrm{d}\vec{k} \frac{1}{2\mathrm{i}\omega} \cdot \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\vec{k}\vec{x}}\right)$ mit $\omega = |\vec{k}|c$

Wir wollen D nun auch noch explizit angeben:

$$\boxed{D(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{1}{|\vec{x}|}\left[\delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right]}$$

Dies sollte nachgerechnet werden! D ist nur auf dem Lichtkegel ungleich 0.



Die Wellengleichung ist:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right) D = 0$$

Später werden wir die „retardierte“ Greensche Funktion benötigen:

$$\boxed{G_R(t,\vec{x}) \equiv c^2\Theta(t)D(t,\vec{x})} \qquad (\star)$$

G_R erfüllt die inhomogene Gleichung.

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right)G_R(t,\vec{x})=\delta(t)\delta(\vec{x})}$$

Dann gilt:

$$\Psi(\vec{x},t)=\int \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}\vec{x}'\,G_R(t-t',\vec{x}-\vec{x}')f(\vec{x}',t')$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right)\Psi(\vec{x},t)=f(\vec{x},t)}$$

Wir wollen nun die Gleichung ($\star$) beweisen. Dazu betrachten wir zunächst $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_R$.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}c^2\Theta(t)D(t,\vec{x})=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\Theta(t)D(t,\vec{x})=\frac{\partial}{\partial t}\left[\delta(t)D(t,\vec{x})+\Theta(t)\frac{\partial}{\partial t}D(t,\vec{x})\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[D(0,\vec{x})+\Theta(t)\frac{\partial}{\partial t}D(t,\vec{x})\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\Theta(t)\dot{D}(t,\vec{x})\right]=\delta(t)\dot{D}(t,\vec{x})+\Theta(t)\ddot{D}(t,\vec{x})=\dot{D}(0,\vec{x})+\Theta(t)\ddot{D}(t,\vec{x})=\delta(\vec{x})+\Theta(t)\ddot{D}(t,\vec{x})$$

Somit ergibt sich nun:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_R=\delta(t)\delta(\vec{x})+\Theta(t)\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}c^2D(t,\vec{x})$$

$$-\vec{\nabla}^2G_R=-\Theta(t)\vec{\nabla}^2c^2D(t,\vec{x})$$

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_R=\delta(t)\delta(\vec{x})}+\underbrace{\Theta(t)\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right)c^2D(t,\vec{x})}_{=0}$$

Im folgenden wollen wir nun die Polarisation einer elektromagnetischen Welle besprechen. Damit wiederholen wir:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}_0(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}_0(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$$

Wobei $\omega=|\vec{k}|\cdot c$ ist.

- Die beiden Ansätze erfüllen die Wellengleichung.
- Nur der Realteil ist physikalisch sinnvoll.
- Außerdem muß $\vec{\nabla}\vec{E}=0$ und $\vec{\nabla}\vec{B}=0$ gelten.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ liefert $\vec{k}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ liefert $\vec{k}\cdot\vec{E}=0$

Ferner folgt aus $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

$$\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}=\mathrm{i}\omega\vec{B}$$

$$\vec{k}\times\vec{E}=\omega\vec{B}$$

Analog folgt:

$$\vec{k}\times\vec{B}=-\frac{1}{c^2}\omega\vec{E}$$

Die Vektoren $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$ stehen paarweise senkrecht aufeinander. Man sollte nachrechnen, daß $\vec{E}$ oder $\vec{B}$ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehen. Es handelt sich also um <u>transversale Wellen</u>.

4.7.2 Polarisation

Wähle spezielles Koordinatensystem:

$\vec{e}_3 \| \vec{k}$

Falls $\vec{E} \sim \vec{e}_1$ oder $\vec{E} \sim \vec{e}_2$, ist $\vec{E}$ linear polarisiert. Allgemein hat man:

$\vec{E}(\vec{r},t) = (E_1 \cdot \vec{e}_1 + E_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$

$\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ sind dabei komplex.

Spezialfälle:

a.) E_1 und E_2 haben gleiche Phase.

$(|E_1| \cdot \vec{e}_1 + |E_2| \cdot \vec{e}_2) = \vec{n}$

Dies ist eine lineare Polarisation längs $\vec{n}$.

b.) $|E_1| = |E_2|$ und relative Phase sei $\frac{\pi}{2}$, also gilt:

$E_2 = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\frac{\pi}{2}} E_1 = \pm \mathrm{i} E_1$

$E_\pm(\vec{r},t) = E_1\left(\vec{e}_1 \pm \mathrm{i}\vec{e}_2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$

Wir wählen o.B.d.A E reell, da hier nur der Realteil für die Physik relevant ist:

$\mathrm{Re}(E_\pm) = \mathrm{Re}\left(E_1\left(\vec{e}-1 \pm \mathrm{i}\vec{e}_2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right) = E_1\left(\vec{e}_1 \cdot \cos\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right) \mp \vec{e}_2 \cdot \sin\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)\right)$

Wir betrachten die x- und y-Komponente:

$\left(\mathrm{Re}E_\pm\right)_x = E_1 \cdot \cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$

$\left(\mathrm{Re}E_\pm\right)_y = \mp E_1 \cdot \sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$

$\left(E_x\right)^2 + \left(E_y\right)^2 = E_1^2$

Es liegt somit eine zirkulare Polarisation vor. Zu $\vec{E}(\vec{r},t) = (E_1\vec{e}_1 + E_2\vec{e}_2) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$ äquivalente Darstellung ist durch $E(\vec{r},t) = \left(E_+\vec{e}_+ + \vec{E}_-\vec{e}_-\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$ mit $\vec{e}_\pm = \vec{e}_1 \pm \mathrm{i}\vec{e}_2$ gegeben. Bei beliebigen E_1, E_2, $(E_+,\ E_-)$ ist eine elliptische Polarisation gegeben.

4.8 Wellengleichung für das Potential

4.8.1 Lorentz-Eichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\phi = 0$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle\right)\vec{A} = 0$$

Die Lorentzbedingung lautet:

$$\vec{\nabla}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

Wir verwenden den Ansatz:

$\phi(\vec{r},t) = \phi_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$

$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$

Die Lorentzbedingung liefert zusätzliche Einschränkung:

$$\vec{k}\vec{A}_0 - \frac{1}{c^2}\omega\phi_0 = 0$$

Hieraus kann man die Felder ableiten:

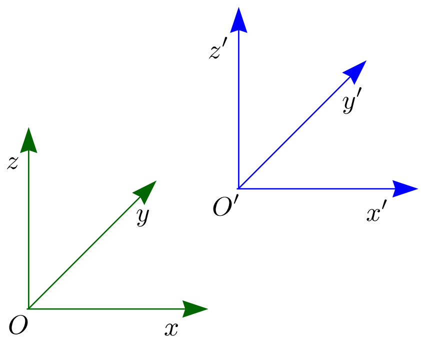
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mathrm{i}\left(\vec{k} \times \vec{A}_0\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$

Kapitel 5

Elemente der speziellen Relativitätstheorie

5.1 Postulate der speziellen Relativitätstheorie

- 1.Postulat:



Physikalische Gesetze erfüllen dieselben Gleichungen in O und O' (für entsprechend transformierte Größen).

Beispiel:

In der Newtonschen Mechanik sind die Gesetze invariant unter Galilei-Transformationen.

$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$

$t \mapsto t' = t$

Es gibt somit eine universelle Zeit.

- 2.Postulat:

Die Ausbreitung des Lichtes ist unabhängig von der Bewegung der Quelle.

Gesucht ist die Transformation, die den Koordinatenachsen beschreibt und verträglich mit den Postulaten der speziellen Relativitätstheorie ist.

$(ct, x, y, z) \mapsto (ct', x', y', z')$

Spezielle Lorentztransformationen sind folgende:

$ct' = \gamma\,(ct - \beta x)$

$x' = \gamma\,(x - \beta ct)$

$y' = y$

$z' = z$

Wobei hier folgende Definitionen festgelegt werden:

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Im Grenzfall $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über:

$$\boxed{t' = t \text{ und } x' = x - vt}$$

$$\boxed{\gamma \mapsto 1}$$

5.1.1 Fritz-Gerald-Lorentz-Kontraktion

Ein Stab der Länge L_0 befinde sich im System O' in Ruhe. x_1', x_2' seien Anfangs- und Endkoordinaten des Stabes, wobei $L_0 = x_2' - x_1'$ gilt. Für die Koordinaten des Stabes gilt nun:

$(t_1, x_1), (t_2, x_2)$

Die Lorentztransformation liefert folgenden Zusammenhang:

$x_1' = (x_1 - \beta c t_1)\gamma, x_2' = (x_2 - \beta c t_2)\gamma \qquad (\star)$

Wie mißt nun der Beobachter die Länge des Stabes in O? Dazu messen wir die Länge des Stabes in O, indem wir gleichzeitig ($t_1 = t_2$) Anfangs- und Endpunkt bestimmen. Die Länge L in O ist dann $L = x_2 - x_1$. Gleichung $(\star)$ liefert nun:

$L_0 = x_2' - x_1' = (x_2 - x_1) \cdot \gamma = L \cdot \gamma$

Damit folgt nun:

$$\boxed{L = \frac{1}{\gamma} L_0}$$

$\gamma > 1$ impliziert nun, daß $L < L_0$. Diesen Effekt bezeichnet man als Längenkontraktion.

5.1.2 Zeitdilatation

Instabile Teilchen können als Uhren verwendet werden. Man beobachtet verschiedene scheinbare Lebensdauern für verschieden schnelle Teilchen. Wir stellen uns vor, daß sich ein Teilchen im System O' am Ursprung und in Ruhe zur Zeit $t_1' = 0$ erzeugt wird. Der Zerfall dieses Teilchen soll zur Zeit $t_2' = T_0$ (wahre Lebensdauer im Ruhesystem des Teilchens) stattfinden. Wir haben somit zwei Ereignisse, nämlich:

- Erzeugung: $(0, 0)$
- Zerfall: $(T_0, 0)$

Was sind nun die Koordinaten der Ereignisse in O? Dazu verwenden wir nun genau unsere Lorentztransformationen, womit folgt:

- Erzeugung: $(0, 0)$
- Zerfall am Ort $\beta \cdot c \cdot T$ zur Zeit T, da sich O ja natürlich um $v \cdot T = \beta c T$ weiterbewegt hat.

Wie groß ist nun die scheinbare Lebensdauer T? Nun gilt ja folgender Zusammenhang mit der Lorentztransformation:

$cT_0 = ct_2' = \gamma \cdot (cT - \beta \cdot \beta c T) = \gamma \cdot (1 - \beta^2) c \cdot T = \frac{1}{\gamma} \cdot c \cdot T$

Dann ergibt sich mit $1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$:

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{\gamma} T}$$

Die Lebensdauer der Myonen ist somit im bewegten System größer.

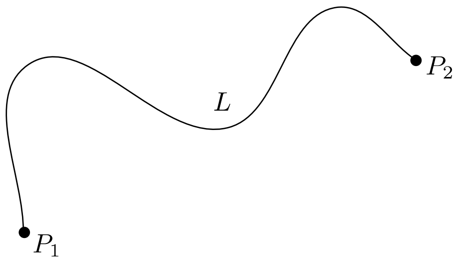
5.1.3 Eigenzeit

Folgende Analogie gibt es im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Wir besprechen nun Drehungen statt Lorentz-Transformationen. Eine Größe, die invariant unter Drehungen ist, ist der Betrag eine Vektors:

$$l^2 = \vec{x}^2 = \vec{x}'^2$$

Infinitesimal bedeutet dies:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2$$



Die Länge eines Kurvenstücks berechnet sich folgendermaßen:

$$\boxed{L = \int\limits_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}l = \int\limits_{P_1}^{P_2} \sqrt{\mathrm{d}l^2}}$$

Eine Kurve kann in verschiedenen Koordinatensystemen auf unterschiedliche Art und Weise parametrisiert werden:

$$x(u), y(u), z(u)$$

Es handelt sich als um drei Funktionen, wobei $u_1 \leq u \leq u_2$. Wir interpretieren nun obige Formel für die Längenberechnung eines Kurvenstücks:

$$\boxed{L = \int\limits_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}l = \int\limits_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\right)^2}\, \mathrm{d}u}$$

Gegeben sei nun eine Funktion $F(l)$, die entlang der Bahnkurve definiert ist. $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$ liefert bei Berechnung in verschiedenen Koordinatensystemen und mit verschiedenen Parametrisierungen immer das gleiche Resultat. Entsprechend für Lorentz-Transformationen wissen wir, daß $c^2\tau^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2$ invariant unter eben diesen Transformationen ist.

$$c^2\tau^2 = c^2t^2 - \vec{x}^2 = c^2t'^2 - \vec{x}'^2$$

Dies sollte für spezielle Lorentztransformationen nachgerechnet werden. Infinitesimal gilt hier wieder:

$$c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right)$$

Beispiel:

Bei vorgegebener Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ gilt:

$$\mathrm{d}\vec{x}^2 = \vec{v}^2\,\mathrm{d}t^2$$

$$\mathrm{d}\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathrm{d}t^2 \text{ (Zeitdilatation)}$$

τ ist hierbei die sogenannte Eigenzeit, die nun gegeben ist durch:

$$\tau = \int\limits_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}\tau$$

Dabei handelt es sich um die abgelaufene Zeit im Ruhesystem des Teilchens.

Beispiel:

Ein Elektron der Masse 0,51 MeV bewege sich auf einer Kreisbahn im Beschleuniger (Umfang von 28 km) mit einer Energie von 51 GeV. Was ist nun die abgelaufene Eigenzeit pro Umlauf?

5.1.4 Lorentz-Transformation, Vektoren, Tensoren

Wir erinnern uns hierbei an Drehungen im euklidischen Raum:

$$a_i' = D_{ik} a_k, \text{ wobei } \left(D^{-1}\right)_{ik} = D_{ki}$$

$$\sum_k D_{ik} D_{jk} = \delta_{ij}$$

Die Summenkonvention schreibt vor, daß über den gemeinsamen Index k summiert wird:

$$D_{ik} D_{jk} = \delta_{ij}$$

Die Spalten bzw. Zeilen sind orthonormiert, wobei $c^2t^2 - \vec{x}^2$ invariant ist. Hier kommt der erste interessante Gesichtspunkt auf. $c^2t^2 - \vec{x}^2$ kann nämlich größer oder kleiner als 0 sein! Wenn diese Kombination positiv ist, gibt es immer eine Lorentztransformation, so daß die Raumkoordinaten verschwinden und nur die Zeitkoordinaten übrig bleiben. Ist der Ausdruck kleiner als 0, so kann man die Zeitkoordinaten verschwinden lassen, wobei nur die Raumkoordinaten erhalten bleiben.

- Raumartig: $c^2t^2 - \vec{x}^2 < 0$
- Zeitartig: $c^2t^2 - \vec{x}^2 > 0$

Wir verwenden Vierervektoren:

$$x_\mu = (ct, x, y, z); \mu = 0, 1, 2, 3 \text{ sowie } x^\mu = (ct, -x, -y, -z)$$

$$\sum_\mu x^\mu \cdot x_\mu = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

x^μ nennt man kovariant und x_μ kontravariant. Wir können zwischen den beiden Vektoren folgendermaßen transformieren:

$$x_\mu = \mathcal{G}_{\mu\nu} \cdot x^\nu \text{ mit } \mathcal{G}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es werden nur kovariante mit kontravarianten Indizes kontrahiert. Zwei Indizes werden kontrahiert, heißt, daß ich über diesen gemeinsamen Index summiere.
Die spezielle Lorentz-Transformation für die Bewegung in x-Richtung wird durch eine Drehmatrix dargestellt:

$$\mathcal{A}_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; x_\mu' = \mathcal{A}_\mu^\nu x_\nu$$

A_μ^ν ist eine Transformationsmatrix und kein Tensor! Damit haben wir die Analogie zu Drehungen. Die allgemeine Lorentztransformation ergibt sich nun als Kombination von Drehung und speziellen Lorentztransformationen. Unter Lorentztransformationen gilt:

- Lorentz-Skalare:

  $$\phi \mapsto \phi' = \phi$$

- Vektoren:

  $$A_\mu \mapsto A_\mu' = a_\mu^\nu A_\nu$$

- Tensoren zweiter Stufe:

  $$\mathsf{F}_{\mu\nu} \mapsto \mathsf{F}_{\mu\nu}' = \mathsf{A}_\mu^\alpha \mathsf{A}_\nu^\beta \mathsf{F}_{\alpha\beta}$$

Ferner gilt:

$$\mathcal{A}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\mathcal{A}^{-1}\right)_{\mu\nu} = \left(\mathcal{A}^{T}\right)_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\nu\mu}$$

Zwei Lorentz-Transformationen in die gleiche Richtung mit β_1 bzw. β_2 liefern eine neue Lorentz-Transformation mit $\beta_{1+2} =?$. Dieses Problem soll als Übung aufgefaßt werden.

Beispiele für Vierervektoren:

Bestimme die Bahnkurve eines Teilchens $(ct, \vec{x}(t))$. Nichtrelativistisch gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t) = \vec{v}(t)$$

Hierbei handelt es sich um einer Dreier-Vektor. Relativistisch gilt jedoch:

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\,\mathrm{d}t^2 = \frac{\mathrm{d}t^2}{\gamma^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_\mu = \gamma\begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = u_\mu$$

u_μ ist die sogenannte Vierergeschwindigkeit. Das Quadrat von u_μ ist:

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2\left(c^2 - \vec{v}^2\right) = c^2\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2$$

Evident im Ruhesystem des Teilchens ist folgendes:

$$x_\mu = (ct, \vec{o}) = (c\tau, \vec{o})$$

$$\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = (c, \vec{o})$$

Nichtrelativistisch gilt:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Für den relativistischen Impuls (Vierergruppe) folgt:

$$\boxed{p_\mu = m u_\mu}$$

5.1.5 Volumenelement in 4 Dimensionen

In 3 Dimensionen gilt liefert $\int \mathrm{d}^3\vec{x}$ ein invariantes Integral. Analog ist d^4x ist invariant unter Lorentztransformationen, da gilt:

$$\boxed{\mathrm{d}^4x' = \underbrace{\frac{\partial(x_0', x_1', x_2', x_3')}{\partial(x_0, x_1, x_2, x_3)}}_{\text{Jakobi}-\text{Determinante}}\,\mathrm{d}^4x}$$

Das ist die Jakobi-Determinante, für die gilt:

$$\mathrm{Det}(a_\mu^\nu) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$$

Für die Ableitungen gilt in 3 Dimensionen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{x}} = \vec{\nabla}$$

Hierbei handelt es sich um einen Vektor. In 4 Dimensionen gilt analog:

$$\boxed{\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}}$$

$$\boxed{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}}$$

Anwendung:

In 3 Dimensionen gilt:

$$\underbrace{\vec{\nabla}_x}_{\text{Vektor}} \underbrace{(\vec{x} \cdot \vec{y})}_{\text{Skalar}} = \underbrace{\vec{y}}_{\text{Vektor}}$$

Für 4 Dimensionen folgt:

$$\partial_\nu (x^\mu y_\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (x^\mu y_\mu) = y_\nu$$

5.2 Relativistische Kinematik

Für den Viererimpuls gilt:

$$p_\mu = m \cdot u_\mu$$

Außerdem gilt im beliebigen System:

$$p_\mu p^\mu = c^2 m^2 \gamma^2 \left(1 - \beta^2\right) = m^2 c^2$$

Identifiziere $p_0 = \frac{E}{c}$ und $\vec{p}$ als relativistische Definition von Energie und Impuls.

$$\boxed{p_0^2 = m^2 c^2 + \vec{p}^2}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall gilt:

$$E = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} = mc^2 + E_{kin,nichtrel}$$

Bei Erzeugung und Zerfall und bei Streuung von Teilchen ist der Vierer-Impuls des gesamten Systems erhalten.

Beispiel:

Wir betrachten folgenden Zerfall von Elementarteilchen:

$$\pi^- \mapsto \mu^- + \nu$$

$$m_\pi = 140\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$$

$$m_\mu = 105\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$$

$$m_\nu = 0$$

Somit gilt:

$$\boxed{p_\pi^\alpha = p_\mu^\alpha + p_\nu^\alpha}$$

Im Schwerpunktsystem ($\equiv$ Ruhesystem des π) gilt:

$$\boxed{m_\pi c^2 = E_\pi = E_\mu + E_\nu}$$

$$\boxed{\vec{o} = \vec{p}_\pi = \vec{p}_\mu + \vec{p}_\nu}$$

Außerdem ergibt sich durch Betrachtung der Beträge der Impulse aus der 2.Gleichung:

$|\vec{p}_\mu| = |\vec{p}_\nu| \equiv p$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung folgt:

$$\boxed{m_\pi c^2 = \sqrt{m_\mu^2 c^4 + p^2 c^2} + pc}$$

Auflösen nach p ergibt:

$$\boxed{\frac{p}{c} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi}}$$

E_μ und E_ν sollen als Übung berechnet werden.

Kapitel 6

Lorentzinvariante Formulierung der Elektrodynamik

<u>Viererstrom:</u>

Ausgangspunkt ist die Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0}$$

Wir definieren $\vec{j}_\mu = (c\varrho, \vec{j})$ als Viererstrom.

$$\partial^\mu j_\mu = \partial^0 j_0 + \partial^i j_i = \frac{\partial}{\partial(ct)}(c\varrho) + \frac{\partial}{\partial x_i} j_i = 0$$

$\partial^r j_r = 0$ ist invariant, gilt also in jedem Bezugssystem. Wir definieren den Laplace-Operator:

$$\Box = \partial_0^2 - \triangle$$

$\triangle$ ist invariant unter Drehungen; $\Box$ ist invariant unter Lorentztransformationen. Die Wellengleichung für Potentiale (6.3) nach Anwendung der Lorentz-Eichung lautet:

$$\boxed{\Box\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \text{ und } \Box\vec{A} = \mu_0\vec{j}}$$

Wir verwenden $\mu_0 c_0 = \frac{1}{c^2}$ und können damit schreiben:

$$\Box\phi = c^2\mu_0\varrho = \mu_0 c(c\varrho)$$

Wir definieren nun $A_\mu := \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ als Vierervektor. Damit können wir die beiden obigen Wellengleichungen für die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ als eine einzige Gleichung notieren:

$$\boxed{\Box A_\mu = \mu_0 j_\mu}$$

Die Lorentz-Eichung haben wir früher folgendermaßen definiert:

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \vec{\nabla}\vec{A} = 0}$$

In unserer jetzigen Schreibweise lautet diese:

$$\boxed{\partial^\mu A_\mu = 0}$$

An dieser Stelle ist es außerdem sinnvoll, den Feldstärke-Tensor einzuführen:

$$\mathsf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Dies ist ein antisymmetrischer Tensor. Er besitzt also 6 unabhängige Komponenten.

$$F_{00} = F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_i - \vec{\nabla}\frac{1}{c}\phi = \frac{1}{c}E_i$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\partial^1 A_2 + \partial^2 A_1 = -\left(\partial^1 A_2 - \partial^2 A_1\right) = -\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_3 = -\vec{B}_3$$

Durch weitere Rechnung kann festgestellt werden:

$F_{13} = B_2$ und $F_{23} = -B_1$

Damit können wir schließlich den Tensor notieren:

$$\mathsf{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & +B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zunächst die inhomogenen Maxwell-Gleichungen:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \partial^\mu\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) = \Box A_\nu - \partial_\nu \underbrace{\partial^\mu A_\mu}_{=0} = \mu_0 j_\nu$$

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu} = \mu_0 j_\nu}$$

Für die homogenen Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\boxed{\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0}$$

$$\boxed{\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0}$$

Wir fassen zusammen:

- Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

  $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho$$

  $$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \mu_0\vec{j}$$

  $$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \text{ für } \nu = 0,1,2,3 \qquad (\star)$$

- Homogene Maxwell-Gleichungen:

  $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

  $$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{o}$$

  $$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \text{ für } \nu = 0,1,2,3 \qquad (\star\star)$$

$$\tilde{\mathsf{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\mathsf{F}_{\varrho\sigma}$$

ε ist ein total antisymmetrischer Tensor.

$$\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu,\ \nu,\ \varrho,\ \sigma = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ und symmetrische Permutation} \\ -1 & \text{für antisymmetrische Permutation von } \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog zu ε^{ijk} in 3 Dimensionen. $(\star\star)$ entspricht:

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0$$

Für λ, μ und $\nu = \begin{Bmatrix} 0,1,2 \\ 3,0,1 \\ 2,3,0 \\ 1,2,3 \end{Bmatrix}$.

6.1 Kovariante Formulierung der Lorentzkraft

Die nichtrelativistische Lorentzkraft lautet:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad (\star)$$

Die Energieänderung eines geladenen Teilchens im Feld bei einer Verschiebung ist gegeben durch:

$$\Delta E = e\Delta\vec{x} \cdot \vec{E}$$

Wir betrachten nun die Energieänderung pro Zeiteinheit:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = e\vec{v} \cdot \vec{E} \text{ mit } \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} \qquad (\star\star)$$

Die Gleichungen $(\star)$ und $(\star\star)$ sind vier Gleichungen für Komponenten. Der $\mathsf{F}_{\mu\nu}$-Tensor lautet:

$$\mathsf{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & +B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u^\nu = \gamma\left(c, \vec{v}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$$

Damit können wir also mittels dieses Tensors schreiben:

$$\gamma\vec{v}\frac{\vec{E}}{c} = F_{0\nu}u^\nu$$

Analog folgt für $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = eF_{\mu\nu}u^\nu}$$

Kapitel 7

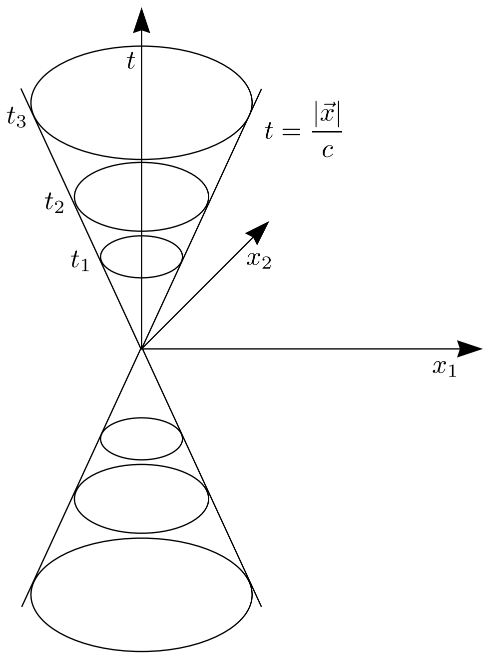
Abstrahlung/Lösung der Maxwellgleichungen mit zeitabhängigen Quellen

<u>**Erinnerung:**</u>

Wir hatten die Lösung der homogenen Wellengleichung hergeleitet:

$$D(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{1}{|\vec{x}|}\left[\delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{|\vec{x}|}{c}\right)\right]$$

<u>**Lichtblitz:**</u>



$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \triangle\right) D(t,\vec{x}) = 0}$$

Ferner gilt:

$$\underbrace{G_R(t,\vec{x})}_{\text{retardiert}} = c^2\Theta(t)D(t,\vec{x})$$

$$\boxed{G_R(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|}\delta\left(t - \frac{|\vec{x}|}{c}\right)}$$

Dies ist die Greensche Funktion zur Wellengleichung, d.h.

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \triangle\right) G_R(t,\vec{x}) = \delta(t)\delta(\vec{x})$$

Die Maxwellgleichungen für die Potentiale in Lorentzeichung lauten:

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \triangle\right) \vec{A}(\vec{x},t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x},t)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \triangle\right) \phi(\vec{x},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho(\vec{x},t)$$

Außerdem gilt:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

Nun wollen wir tatsächlich zeitabhängige Ladungsverteilungen und Ströme von oszillierender Form betrachten:

$$\varrho(\vec{x},t) = \varrho(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \vec{j}(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Anmerkung:

Eine Quelle mit beliebiger Zeitabhängigkeit kann als Fourier-Überlagerung von oszillierenden Quellen verschiedener Frequenz beschrieben werden:

$$\boxed{\varrho(\vec{x},t) = \int \mathrm{d}\omega\, \tilde{\varrho}(\vec{x},\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\partial_t \varrho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$$

Hier folgt dann durch Einsetzen:

$$-\mathrm{i}\omega\varrho(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \vec{\nabla}\vec{j}(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Division durch $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \neq 0$ ergibt dann:

$$\mathrm{i}\omega\varrho = \vec{\nabla}\vec{j}$$

Die Lösung der Maxwellgleichung für $\vec{A}$ lautet:

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \mu_0 \int \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}^3\vec{x}' G_R\left(t-t', \vec{x}-\vec{x}'\right)\vec{j}(t',\vec{x}')$$

Wir überprüfen dies:

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \triangle\right) \vec{A}(t,\vec{x}) = \mu_0 \int \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}^3\vec{x}'\delta(t-t')\delta(\vec{x}-\vec{x})'\vec{j}(t',\vec{x}') = \mu_0\vec{j}(t,\vec{x})$$

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \mu_0 \int \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}^3\vec{x}' \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\cdot\delta\left(t-t'-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)\vec{j}(\vec{x}')\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t'}$$

Aufgrund der Delta-Funktion ist dieses vierdimensionale Integral faktisch nur dreidimensional, womit folgt:

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \mu_0 \int \mathrm{d}^3\vec{x}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|}\vec{j}(\vec{x}')\cdot\exp\left(-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\omega\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)$$

Wir spalten den zeitabhängigen Faktor $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ von $\vec{A}(\vec{x},t)$ ab.

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Wir verwenden außerdem $\frac{\omega}{c} = k$ (=Betrag des Wellenvektors), womit dann für $\vec{A}(\vec{x})$ folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{j}(\vec{x}') \qquad (\star)$$

Analog resultiert:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|} \varrho(\vec{x}')$$

Eine geschlossene Lösung für beliebige $\vec{x}$, ϱ und $\vec{j}$ ist im allgemeinen nicht möglich. d sei nun die Ausdehnung der Quelle, also $|\vec{x}'| \leq d$. $|\vec{x}| = r$ sei der Abstand des Beobachters vom Zentrum der Quelle. Schlußendlich haben wir die Wellenlänge λ:

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k}$$

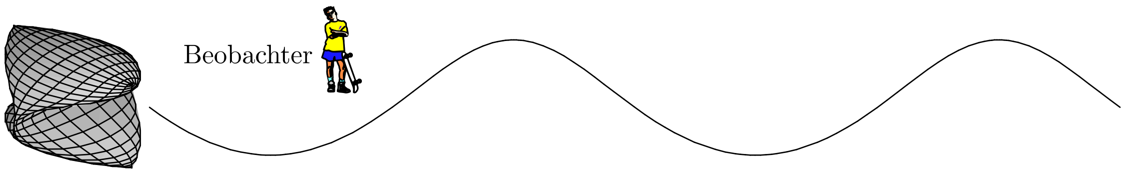
Wir betrachten den Fall $d \ll \lambda$, wie dies beispielsweise in Atomen der Fall ist. Für den Bohr-Radius des Wasserstoffatoms gilt:

$$r_B = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

λ sei für sichtbares Licht etwa $3{,}8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ bis $7{,}5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ ($10^{-7}\,\mathrm{m}$=1 Å). Wir unterscheiden nun folgenden Zonen:

- Nahzone:

  $d \ll |\vec{x}| \ll \lambda \Rightarrow |\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ und $|\vec{x}|k \ll 1$

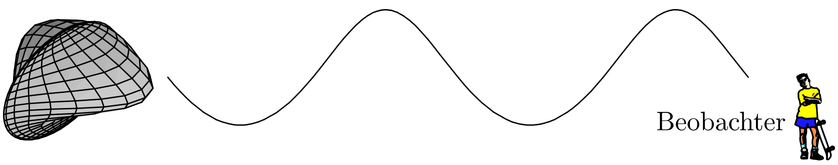


- Übergangszone:

  $d \ll |\vec{x}| \approx \lambda \Rightarrow |\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ und $|\vec{x}|k \approx O(1)$

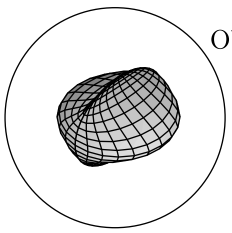
- Fernzone (Strahlung):

  $d \ll \lambda \ll |\vec{x}| \Rightarrow |\vec{x}'| \ll |\vec{x}|$ und $|\vec{x}|k \gg 1$



Wir zeigen im Folgenden, daß es in der Nahzone „quasistatische“ Felder ($|\vec{x}|$-Abhängigkeit wie bei statischen Lösungen) gibt. Der Abfall der Felder in der Nahzone ist mindestens wie $\frac{1}{|\vec{x}|^2}$, dem $\omega \neq 0$-Anteil wie $\frac{1}{|\vec{x}|^3}$ oder schneller. In der Fernzone (Strahlungszone) ist der Abfall proportional zu $\frac{1}{|\vec{x}|}$ ($\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{x}$).

$$\int \mathrm{d}\,(\text{Oberfläche})\, |\vec{E}|^2 = \text{const.}$$



Die Lösung von ($\star$) geht in der Nahzone ($k|\vec{x} - \vec{x}'| \ll 1$) mit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx 1$ über in:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Die Berechnung von $\vec{A}$ und ϕ verläuft nun wie im statischen Fall.

7.1 Dipolnäherung

* Fernzone:

Die eigentlich aufwendige Rechnung ist diejenige in der Fernzone:

$$k|\vec{x}-\vec{x}'| = \underbrace{k|\vec{x}|}_{\gg 1}\left(1-\frac{\vec{x}\vec{x}'}{|\vec{x}|^2}\right) = k|\vec{x}|\left(1-\frac{\vec{n}\vec{x}'}{|\vec{x}|}\right) \text{ mit } \vec{n}=\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Nun folgt:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|}\left(1+\frac{\vec{x}\vec{x}'}{|\vec{x}|^2}\right) = \frac{1}{|\vec{x}|}\left(1+\vec{n}\frac{\vec{x}'}{|\vec{x}|}\right)$$

Der führende Term lautet:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\vec{j}(\vec{x}')}$$

Wir formen dieses Integral um, wobei wir aufgrund der Übersichtlichkeit in folgender Nebenrechnung auf gestrichene Größen verzichten wollen:

$$0 = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\vec{\nabla}\left(x_i\vec{j}(\vec{x})\right) = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\nabla_k\left(x_i j_k(\vec{x})\right) = \int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\left(\delta_{ki}j_k + x_i\nabla_k j_k\right) = \boxed{\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\left(j_i + x_i\vec{\nabla}\vec{j}\right)}$$

Damit ergibt sich nun direkt, indem man den einen Term auf die linke Seite bringt:

$$\boxed{\int_V \mathrm{d}^3x\vec{j}(\vec{x}) = -\int_V \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{x}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right)}$$

Mit partieller Integration ergibt sich dies auch schneller:

$$\int \mathrm{d}^3x\vec{j}(\vec{x}) = \int \mathrm{d}^3x\left(\vec{j}(x)\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{x} = -\int \mathrm{d}^3x\,\vec{x}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x})\right)$$

Eine eindimensionale Analogie ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,f(x) = -\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right)$$

Somit folgt:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}(-1)\cdot\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{x}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right)$$

Mittels der Kontinuitätsgleichung resultiert:

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}(-\mathrm{i}\omega)\cdot\underbrace{\int \mathrm{d}^3\vec{x}\,\vec{x}\varrho(\vec{x})}_{\equiv\vec{p}\text{ Dipolmoment}}}$$

$\vec{A}$ fällt somit wie $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$ ab. Wir berechnen also $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus $\vec{A}$ durch Ableiten:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \text{ und } \boxed{\partial_t\vec{E} = c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}}$$

Zur Erinnerung:

$$\vec{\nabla}f(|\vec{x}|) = f'(|\vec{x}|)\vec{n} \text{ mit } \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

Somit folgt mit $\vec{c}$ als konstanten Vektor:

$$\vec{\nabla}\times(f(|\vec{x}|)\vec{c}) = \left(\vec{\nabla}f(|\vec{x}|)\right)\times\vec{c}$$

$f(|\vec{x})$ ist hier $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$. Durch Ableiten ergibt sich:

$$f'(|\vec{x}|) = \frac{\mathrm{i}k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{\vec{x}^2}$$

Der erste Term ist führend für große $|\vec{x}|$.

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{-\mathrm{i}\mu_0\omega}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\vec{p}\right) = \frac{-\mathrm{i}\mu_0\omega}{4\pi}\mathrm{i}k\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}(\vec{n}\times\vec{p})$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}(\vec{n}\times\vec{p})}$$

$\vec{E}$ folgt aus $\partial_t\vec{E} = c^2\vec{\nabla}\times\vec{B}$. Analog zu eben folgt nun:

$$-\mathrm{i}\omega\vec{E} = \mathrm{i}k\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = c\vec{B}\times\vec{n}}$$

Aus diesen Gleichungen kann man nun ablesen:

- $\vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{n}$
- $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$

Die radiale Abhängigkeit von E, B und A lautet damit folgendermaßen:

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|-\mathrm{i}\omega t}}{|\vec{x}|}}$$

Es handelt sich um eine Kugelwelle. Auf der Kugeloberfläche haben alle die gleiche Phase.

- Nahzone (Quasi-Statischer Fall):

$$k|\vec{x}|\ll 1, |\vec{x}'|k\ll 1, |\vec{x}'|\ll|\vec{x}|$$

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}\varrho(\vec{x}')$$

Die Exponentialfunktion kann nun durch 1 angenähert werden. Damit folgt das Potential in der Elektrostatik:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\varrho(\vec{x}')$$

Durch Entwicklung folgt wieder:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}|}\int\mathrm{d}\vec{x}'\left(1+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{|\vec{x}|}\right)\varrho(\vec{x}')$$

Mit $\int\mathrm{d}\vec{x}'\,\varrho(\vec{x}') = 0$ folgt:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{x}|^2}(\vec{n}\cdot\vec{p})\ \text{ mit }\vec{p} = \int\mathrm{d}^3\vec{x}'\,\vec{x}'\,\varrho(\vec{x}')$$

$$\vec{E} = (\text{Dipolfeld wie in der Elektrostatik})\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

7.2 M1- und E2-Strahlung

Wir behandeln im folgenden Dipol- und Quadrupol-Strahlung. Falls $\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\vec{j}(\vec{x}') = 0$, dann behandeln wir den nächsten Term des Integranten bei der Taylor-Entwicklung.

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}-\vec{x}'|}\vec{j}(\vec{x}') = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\left(1+\frac{\vec{x}\vec{x}'}{\vec{x}^2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|\left(1-\frac{\vec{n}\vec{x}'}{|\vec{x}|}\right)}\right)\vec{j}(\vec{x}') =$$
$$= \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}}}{|\vec{x}|}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left(1+\frac{\vec{n}\vec{x}'}{|\vec{x}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{x}'}\vec{j}(\vec{x}')}$$

In der Fernzone gilt:

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}}}{|\vec{x}|}\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{x}'}\vec{j}(\vec{x}')}$$

Somit hängt das Integral nicht mehr von $\vec{x}$ ab. Außerdem gilt durch Entwicklung der Exponentialfunktion:
$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{x}'} = 1 - \mathrm{i}k\vec{n}\vec{x}'$

In der Dipol-Näherung geht dies gegen $-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{x}'$.

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}(-\mathrm{i}k)\cdot\int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,(\vec{n}\cdot\vec{x}')\,\vec{j}}$$

Wir wollen nun dieses Integral auswerten. Dazu formen wir um:

$$(\vec{n}\cdot\vec{x}')\,\vec{j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\vec{x}'\times\vec{j}\right)\times\vec{n}}_{\text{antisymmetrisch bezüglich } \vec{x}'\leftrightarrow\vec{j}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\vec{n}\cdot\vec{x}')\,\vec{j}+\left(\vec{n}\cdot\vec{j}\right)\vec{x}'\right]}_{\text{symmetrisch bezüglich } \vec{x}'\leftrightarrow\vec{j}}$$

- ✳ <u>1.Term:</u> Magnetische Dipolstrahlung

  $$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}(\mathrm{i}k)\,(\vec{n}\times\vec{m})\ \text{ mit } \vec{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\vec{x}'\,\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')}$$

  Erinnerung an Magnetostatik

- ✳ <u>2.Term:</u> Elektrische Quadrupolstrahlung

Das $\vec{B}$-Feld ergibt sich dann aus dieser Gleichung:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}k^2\,(\vec{n}\times\vec{m})\times\vec{n}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}}$$

Für das $\vec{E}$-Feld gilt:

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi}k^2c\,(\vec{n}\times\vec{m})\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}}$$

Die Übersetzungstabelle zwischen E1- und M1-Strahlung lautet:

E1	$\leftrightarrow$	M1
$\vec{E}$	$\leftrightarrow$	$c\vec{B}$
$\vec{B}$	$\leftrightarrow$	$-\frac{\vec{E}}{c}$
$\vec{p}$	$\leftrightarrow$	$\vec{m}$

Für den zweiten Term (E2) folgt:

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{2\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{k^2\omega}{6}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\vec{x}}}{|\vec{x}|}\cdot\vec{n}\times\vec{Q}(\vec{n})}$$

$Q(\vec{n})_i = Q_{ik}n_k$

$$Q_{ik} = \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\left(3x_i'x_k' - \delta_{ik}\vec{x}'^2\right)\varrho(\vec{x}')$$

Kapitel 8

Energie-Strom-Dichte (Poynting-Vektor)

In Abschnitt II, 3d hatten wir im Rahmen der Elektrostatik herausgefunden:

$$\boxed{U_{\vec{E}} = \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}(x)|^2}$$

Analog gilt (ohne Herleitung):

$$\boxed{U_{\vec{B}} = \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}(x)|^2}$$

Im folgenden wollen wir die Energiebilanz bei der Abstrahlung diskutieren. Ausgangspunkt ist hierbei die Lorentz-Kraft:

$$\boxed{\vec{K} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right]}$$

Für die Energieänderung der Punktladung gilt:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = e\vec{v} \cdot \vec{E}} \qquad (\star)$$

Das $\vec{B}$-Feld hat also keinen Einfluß auf die Energie. Der Bewegung des Teilchens kann außerdem eine Stromdichte zugeordnet werden:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = e\vec{v}(t) \cdot \delta\left(\vec{x}'(t) - \vec{x}\right) \qquad (\star\star)$$

$\vec{x}'(t)$ beschreibt hierbei die Bahn der Punktladung. Die δ-Funktion kommt daher, weil natürlich nur an dem Ort, an welchem sich das Teilchen gerade befindet, ein Strom vorhanden ist. Damit können wir nun für die Energieänderung schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}\, \vec{j}(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(\vec{x}, t)$$

Diese Gleichung liefert dann $(\star)$, wenn $(\star\star)$ eingesetzt wird. Diese Energie, die das Teilchen gewinnt, geht aufgrund der Energieerhaltung dem Feld verloren. V umfaßt den Bereich, in dem $\vec{j} \neq 0$ ist. Im folgenden werden wir nun dieses Integral mittels der Maxwell-Gleichungen umformen, bis wir einen Ausdruck erhalten, der nur noch die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ umfaßt. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j}$$

Dies ist eine Gleichung, bei der die Größen von $\vec{x}$ und t abhängen. Für die Energieänderung folgt nun:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}\right) \cdot \vec{E} \qquad (\star)$$

Wir formen den Integranten um, bis wir einen Ausdruck der folgenden Form erhalten:

$$\partial_t \left(E^2 + B^2\right) + \ldots \int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}\, \vec{E} \times \vec{B}$$

Mit der Produktregel folgt wieder:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot \vec{B} - \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{E}$$

Nun gilt mittels der Maxwell-Gleichungen:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{E} = -\left(\partial_t \vec{B}\right) \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

Dieses Ergebnis wird in ($\star$) eingesetzt:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mu_0} \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x} \left[-\left(\partial_t \vec{B}\right) \vec{B} - \frac{1}{c^2} \left(\partial_t \vec{E}\right) \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right]$$

Mit $\left(\partial_t \vec{B}\right) \vec{B} = \frac{1}{2} \partial_t \vec{B}^2$ und $\frac{1}{c^2} \left(\partial_t \vec{E}\right) \cdot \vec{E} = -\frac{1}{2c^2} \partial_t \vec{E}^2$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{x}, t)\right) + \int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x} \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$$

Mittels des Gaußschen Satzes folgt dann schließlich für die Änderung des Energie des geladenen Teilchens:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int\limits_V \mathrm{d}^3\vec{x} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{x}, t) + \varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{x}, t)\right)}_{\text{Änderung der Feldenergie}} + \underbrace{\int\limits_O \mathrm{d}\vec{F} \cdot \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}_{\substack{\text{Fluß durch} \\ \text{die Oberfläche}}} = 0}$$

Der Poynting-Vektor ist nun definiert durch:

$$\boxed{\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)}$$

$\vec{S}$ beschreibt den Energiefluß.

8.1 Zeitlich gemittelte Größen

Für eine physikalische Größe gilt folgender Zusammenhang mit der mathematischen komplexen Größe:

$$\vec{E}_{phys} = \mathrm{Re}\left(\vec{E}\right) = \frac{1}{2} \left(\vec{E}(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \vec{E}^\star(\vec{x}) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\right)$$

$$\vec{B}_{phys} = \mathrm{Re}\left(\vec{B}\right) = \frac{1}{2} \left(\vec{B}(\vec{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \vec{B}^\star(\vec{x}) \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\right)$$

Für die Energieflußdichte gilt:

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_{phys} \times \vec{B}_{phys}}$$

Wir interessieren uns nun für zeitlich gemittelte Größen.

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \lim_{T \mapsto \infty} \frac{1}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{d}t\, \vec{S}(t)$$

Es tauchen hier folgende Integrale auf:

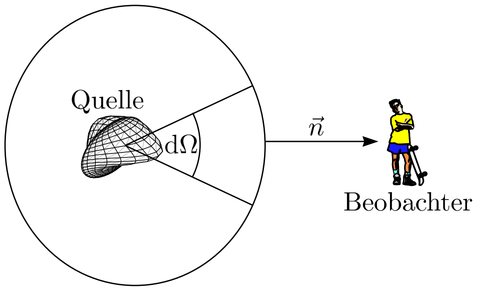
- $\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\cdot \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = 1$

- $\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} = \frac{\mathrm{i}}{2\omega T}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega T} - \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega T}\right) \xrightarrow{T\mapsto\infty} 0$

Nun gilt:

$$\left\langle \vec{S}\right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{4}\cdot\left(\vec{E}(\vec{x}\times\vec{B}^\star(\vec{x}) + \vec{E}^\star(\vec{x}\times\vec{B}(\vec{x})\right) = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{x})\times\vec{B}^\star(\vec{x})\right)$$

Fluß durch Kugeloberfläche::



Die abgestrahlte Leistung durch die Oberfläche ist gegeben durch:

$$P = \int \mathrm{d}\vec{F}\,\vec{S} = \int \vec{S}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}f = \int \vec{S}\cdot\vec{n}\cdot|\vec{x}|^2\,\mathrm{d}\Omega$$

Für die Leistung in einem bestimmten Raumwinkel gilt:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = |\vec{x}|^2\cdot\vec{S}\cdot\vec{n}$$

Wir wenden dies auf die Dipolstrahlung an:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\vec{E}(\vec{x})\times\vec{B}^\star(\vec{x})\right)\cdot\vec{n}\vec{x}^2 = \frac{1}{2\mu_0}\vec{x}^2\left(\frac{\mu_0 ck^2}{4\pi|\vec{x}|}\right)^2 c\cdot\mathrm{Re}\left([(\vec{n}\times\vec{p})\times\vec{n}]\times[\vec{n}\times\vec{p}]^\star\right)\cdot\vec{n}$$

Uns hilft bei dieser Menge an Kreuzprodukten die Grassmann-Formel weiter:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\times\vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$$

Damit gilt dann:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{2c}\frac{\omega^4}{(4\pi)^2}\mathrm{Re}\left(\vec{n}|\vec{n}\times\vec{p}|^2 - (\vec{n}\times\vec{p})^\star\underbrace{(\vec{n}\times\vec{p})\cdot\vec{n}}_{0}\right)$$

Nun folgt schlußendlich:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^4}{8\pi c}|\vec{n}\times\vec{p}|^2}$$

Anwendung auf E1-Strahlung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^4}{8\pi c}|\vec{n}\times\vec{p}|^2}$$

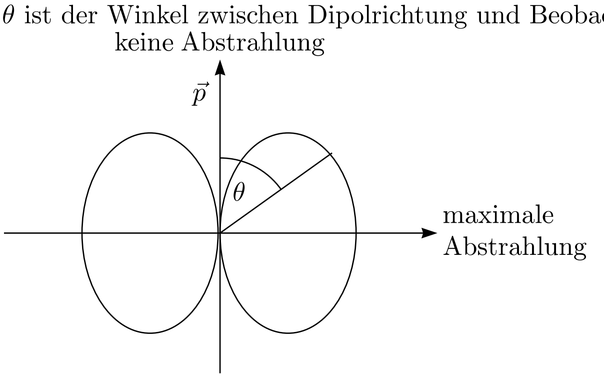
Wir machen nun die Annahme, daß $\vec{p}$ reell sei. Es handelt sich dann um eine ganz besondere Form des Dipols; die Ladung oszilliert linear in eine bestimmte Richtung. Es gilt für den Betrag eines Kreuzproduktes:

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}||\sin\theta|$$

Damit folgt dann:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^4}{8\pi c}|\vec{p}|^2 \sin^2\theta$$

θ ist der Winkel zwischen Dipolrichtung und Beobachter-Richtung.



$$P = \int \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega^4}{8\pi c}|\vec{p}|^2 \underbrace{\int \mathrm{d}\Omega \cdot \sin^2\theta}_{2\pi\cdot\frac{4}{3}} = \boxed{\frac{\mu_0}{12\pi}\frac{\omega^4}{c}|\vec{p}|^2}$$

Drei einfache Beispiele:

1.) Wir betrachten einen linearen oszillierenden Dipol. Die zeitliche Ladungsverteilung sehe folgendermaßen aus:

$t = 0$	$t = \frac{\pi}{2\omega}$	$t = \frac{\pi}{\omega}$
$+$		$-$
	$\pm$	
$-$		$+$

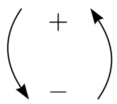
$$\vec{x}_+ = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cos(\omega t)$$

$$\vec{x}_- = -\vec{x}_+$$

$$\vec{d} = a\cdot Q\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[\underbrace{a\cdot Q\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{p}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

Es handelt sich um eine lineare Polarisation, denn $\vec{n}\times\vec{p}\sim\vec{B}$ ist reell und $\vec{B}_{phys}(\vec{x},t)\sim\vec{n}\times\vec{p}\cos(\omega t)$.

2.) Ein in der x-y-Ebene rotierender Dipol



$$\vec{x}_+ = \frac{a}{2}\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_- = -\vec{x}_+$$

$$\vec{d} = Q\cdot a\cdot\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\\ 0\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[a\cdot Q\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ 0\end{pmatrix}\right]$$

Somit folgt:

$$\boxed{\vec{p} = aQ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Dies führt somit zu einer zirkularen Polarisation in z-Richtung. In z-Richtung ist:

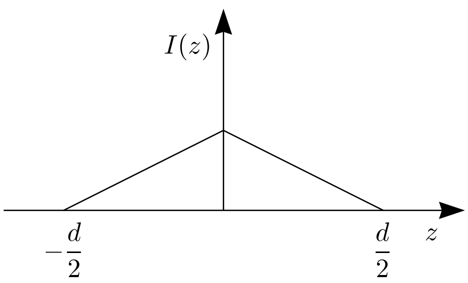
$$\vec{b} \sim \vec{n} \times \vec{p} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

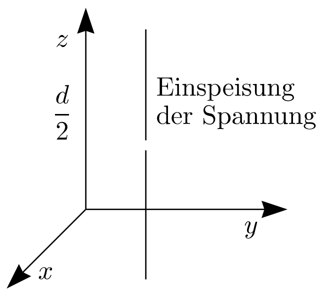
$$\vec{B}(\vec{x},t) \sim \mathrm{Re}\left[\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es stellt sich nun die Frage, was sich für den Beobachter in x- bzw. y-Richtung ergibt.

3.) Lineare Antenne

Für den Strom gilt:





$$I(z,t) = I(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Die Ladung pro Längeneinheit ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\varrho = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left(\vec{\nabla}\vec{j}\right), \vec{\nabla}\vec{j} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}I(z)$$

$$\varrho = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} I_0 \frac{2}{d} \cdot \begin{cases} -1 & \text{für} \quad z > 0 \\ +1 & \text{für} \quad z < 0 \end{cases}$$

$$\varrho(z) = \pm\frac{2\mathrm{i}I_0}{\omega d}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int\limits_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}z\, z\varrho(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{2\mathrm{i}I_0}{\omega d} \cdot 2 \underbrace{\int\limits_0^{\frac{d}{2}} \mathrm{d}z\, z}_{\frac{d^2}{4}}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{i}I_0 d}{2\omega}$$

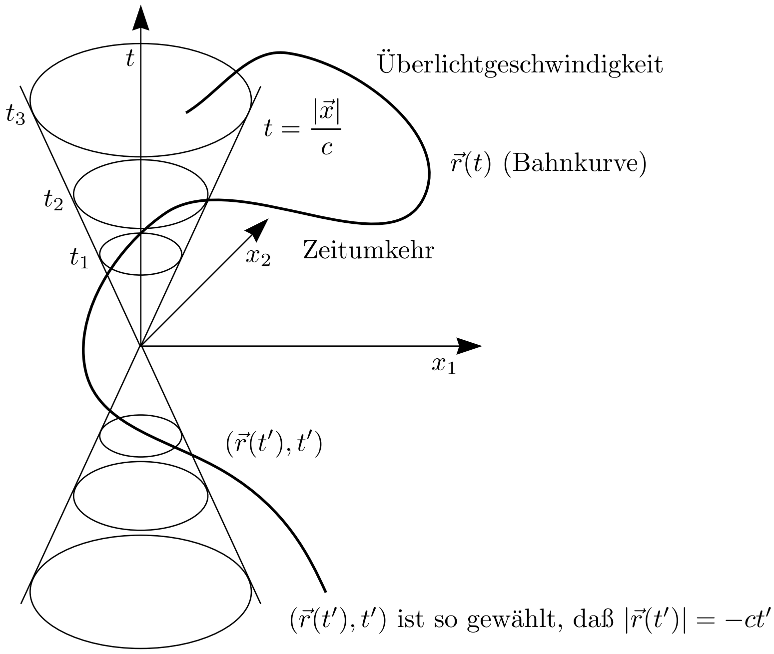
Für die abgestrahlte Leistung gilt:

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 \omega^2 d^2 I_0^2}{48\pi c}}$$

8.2 Abstrahlung von einer bewegten Punktladung

1.) Lienard-Wiechert-Potentiale und Felder

Es bewege sich eine Punktladung auf der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und der Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$. Für den Beobachter bei $\vec{x} = 0$ und $t = 0$ ist das von der Punktladung bei den retardierten Koordinaten erzeugte Potential relevant.



Für die Stromdichte folgt:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = e\vec{v}(t)\delta\left(\vec{x} - \vec{r}(t)\right)$$

$$j_0(\vec{x}, t) = \varrho(\vec{x}, t) \cdot c = e \cdot c\delta\left(\vec{x} - \vec{r}(t)\right)$$

Wir wollen nun $A_\mu(t, \vec{x})$ berechnen. Dazu verwenden wir wieder die retardierten Potentiale.

$$A_\mu(\vec{x}, t) = \mu_0 \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\mathrm{d}t'\, G_R\left(t - t', \vec{x} - \vec{x}'\right) j_\mu(\vec{x}', t') =$$
$$= \frac{\mu_0 ec}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\,\mathrm{d}t' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\delta\left(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}\right)\beta_\mu(t')\delta\left(\vec{x}' - \vec{r}(t)\right), \text{ wobei } \beta_\mu = \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) \qquad (\star)$$

Hier sei Vorsicht geboten. β_μ ist kein Vierer-Vektor! Wir bezeichnen nun $\vec{R}(t') = (\vec{x} - \vec{r}(t))$ und $R(t') = |\vec{R}(t')|$.

$$\boxed{A_\mu(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} ec \int \mathrm{d}t' \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right)}{R(t')}\beta_\mu(t')}$$

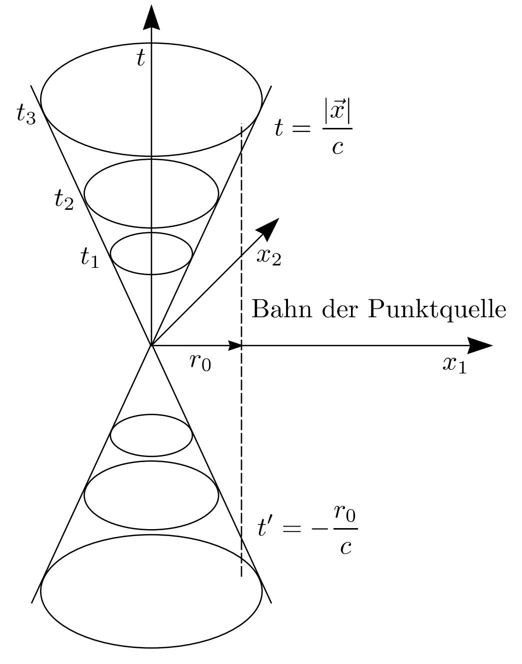
Beispiel für retardierten Aufpunkt:

Der Beobachter sei bei $\vec{x} = 0$, $t = 0$.

1.) $\vec{r}(t') = \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Die Ladung ruhe:

$$|\vec{r}(t')| = -t'c$$

$$\boxed{t' = -\frac{r_0}{c}}$$



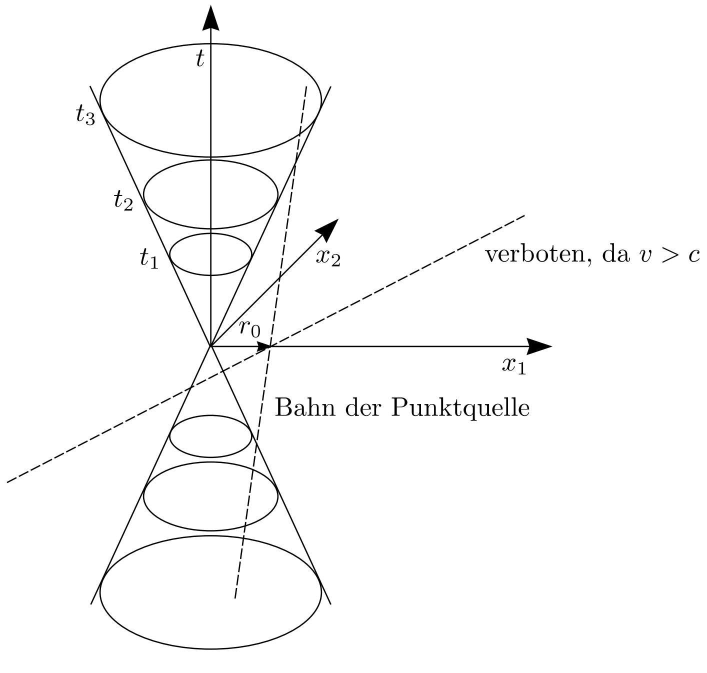
2.) $\vec{r}(t') = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t' = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t'$

Wir stellen die Forderung:

$$\boxed{t' = -\frac{r_0 + v_0 t'}{c}}$$

$$\boxed{t' = -\frac{\frac{r_0}{c}}{1 + \frac{v_0}{c}}}$$

Die Geschwindigkeit ist kleiner als c. Die Bahn stößt nur einmal durch den Rückwärtskegel.



Wir wollen nun die δ-Funktion in Gleichung $(\star)$ auswerten.

$$\boxed{A_\mu(t, \vec{x}) = \frac{\mu_0 e c}{4\pi} \int \mathrm{d}t' \, \frac{\delta\left(t - t' - \frac{R(t')}{c}\right) \beta_\mu(t')}{R(t')}} \text{ mit } \vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{r}(t'), R = |\vec{R}| \qquad (\star\star)$$

Wir erinnern uns dabei an die Eigenschaften der δ-Funktion:

$$\int \mathrm{d}x\, g(x)\delta(x-a) = g(a)$$

Haben wir innerhalb der δ-Funktion eine stetige Funktion $f(x)$, so folgt:

$$\boxed{\int \mathrm{d}x\, g(x)\delta\left(f(x)\right) = \left[\frac{1}{|f'(x)|}g(x)\right]_{f(x)=0}}$$

Wir wenden diese Beziehung auf unser Beispiel an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(t-t'-\frac{R(t')}{c}\right) = -1-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}R(t') = -1-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}|\vec{x}-\vec{r}(t')| = -1+\vec{n}\cdot\vec{\beta}(t'),\ \text{wobei } \vec{n}\equiv\frac{\vec{R}}{R}$$

Wir wollen dies beweisen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}R^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\vec{R}^2$$

$$2R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}R = 2\vec{R}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\vec{R} = 2\vec{R}\left(-\vec{v}(t')\right)$$

Damit gilt dann:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}R = -\frac{\vec{R}}{R}\cdot\vec{v}(t') = -\vec{n}\cdot\vec{v}(t')}$$

Damit folgt also:

$$\boxed{A_\mu(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0 ec}{4\pi}\frac{1}{\kappa R(t')}\beta_\mu(t') \text{ mit } \kappa = 1-\vec{n}\cdot\vec{\beta} \text{ und } R(t') = |\vec{x}-\vec{r}(t')|} \qquad (\star\star\star)$$

t' ist die retardierte Zeit. Diese Gleichung läuft unter dem Namen <u>Lienard-Wichert-Potential</u>. Wir haben hier die relativistische Verallgemeinerung der Formeln der Potentiale, die wir zu Anfang der Vorlesung diskutiert hatten. Aus Gleichung $(\star\star\star)$ können nun die Felder berechnet werden. Etwas bequemer geht dies auch mit Gleichung $(\star\star)$.

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} \text{ mit } \phi(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0 ec^2}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}t'}{R(t')}\delta\left(t-t'-\frac{R(t')}{c}\right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 ec}{4\pi}\int\frac{\mathrm{d}t'}{R(t')}\delta\left(t-t'-\frac{R(t')}{c}\right)\beta(t')$$

Die $\vec{x}$-Abhängigkeit steckt in $R = |\vec{x}-\vec{r}(t')|$. Damit folgt für den Gradienten mittels Kettenregel:

$$\vec{\nabla}R = \left(\vec{\nabla}R\right)\frac{\partial}{\partial R} = \vec{n}\frac{\partial}{\partial R}$$

Die genaue Rechnung findet man im Jackson:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)}{\kappa^3\gamma^2R^2}}_{\substack{\text{Geschwindig-}\\ \text{keitsfeld}}} + \underbrace{\frac{1}{\kappa^3Rc}}_{\substack{\text{Strahl-}\\ \text{feld}}}\underbrace{\vec{n}\times\left(\left(\vec{n}-\vec{\beta}\right)\times\dot{\beta}\right)}_{\text{Beschleunigungsfeld}}\right]_{ret}}$$

Für das Geschwindigkeitsfeld folgt:

$$\boxed{\text{Abfall} \sim R^{-2}}$$

Für das Strahlfeld folgt:

$$\boxed{\text{Abfall} \times R^{-1}}$$

$$\vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{n}$$

Spezialfälle entstehen für:

- $\beta = 0$
- $\dot{\beta} = 0$

Der Grenzfall für nichtrelativistische Bewegung ($|\beta| \ll 1$) folgt mit:

$$\kappa = 1 - \vec{n}\vec{\beta} \approx 1$$

$$\vec{n} - \vec{\beta} \approx \vec{n}$$

Für das Beschleunigungsfeld folgt:

$$\vec{E} \approx \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{Rc^2} \, \vec{n} \times \left(\vec{n} \times \dot{\vec{v}}\right)\Big|_{ret}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n} \times \vec{E}$$

Für den Energiefluß (Poynting-Vektor) in der Strahlungszone folgt:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c}\vec{E} \times \left(\vec{n} \times \vec{E}\right) = \frac{1}{\mu_0 c}\left(\vec{n}\vec{E}^2 - \vec{E}\underbrace{\left(\vec{E} \cdot \vec{n}\right)}_{=0}\right)$$

Für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel folgt:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = R^2\vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{e^2}{\mu_0 c}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\right)^2 \left|\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \dot{\vec{v}}\right)\right|^2 = \frac{e^2}{4\pi c}\frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\left|\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \dot{\vec{v}}\right)\right|^2}_{\dot{\vec{v}}^2 \sin^2\theta}$$

θ ist hierbei der Winkel zwischen $\dot{\vec{v}}$ und $\vec{n}$. $\dot{\vec{v}}$ ist zur retardierten Zeit zu nehmen. Für die totale abgestrahlte Leistung folgt durch Integration über den gesamten Winkel:

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega \, \sin^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{\mu_0}{4\pi}\dot{v}^2}$$

Dies ist die sogenannte Larmor-Formel.

Übungsaufgabe: Oszillierende Ladung

$$x(t) = a\cos(\omega t)$$

Es soll die Leistung P berechnet werden.

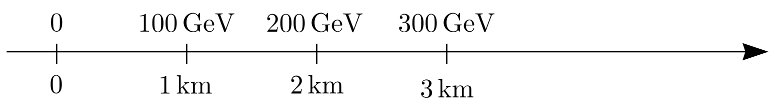
Übergang zum relativistischen Resultat (ohne Herleitung):

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\gamma^6\left[\dot{\vec{\beta}}^2 - \left(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}\right)^2\right]}$$

a.) Lineare Beschleunigung:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\gamma^6\dot{\beta}^2$$

Wir beschleunigen ein ruhendes Teilchen linear bis zu ultrarelativistischen Energien.



Vergleiche die bei der Beschleunigung abgestrahlte Energie mit der kinetischen Energie der Teilchen. Mit $E = mc^2\gamma$ und $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ resultiert:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}t = mc^2\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta c} = \frac{mc}{\beta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = mc\gamma^3\dot{\beta}$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{1}{m^2}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

Vergleiche P, also die Strahlungsleistung, mit der Energieänderung:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\beta\cdot c \approx \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\cdot c,\text{ da } \beta \approx 1$$

$$\boxed{\frac{P}{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(mc^2)^2}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}}$$

Für $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 10^{14}\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{m}}$ ist die rechte Seite der Gleichung ist ungefähr gleich 1. Die abgestrahlte Leistung im Linearbeschleuniger ist somit völlig zu vernachlässigen.

b.) Zirkulare Beschleunigung:

Mit $\vec{\beta} \perp \dot{\vec{\beta}}$, $\dot{\vec{\beta}}^2 = \dot{\beta}^2$ und $\left|\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\right| = \beta\cdot\dot{\beta}\cdot\underbrace{\sin\theta}_{=1}$ erhalten wir:

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\gamma^6\left[\dot{\beta}^2 - \beta^2\dot{\beta}^2\right] = \boxed{\frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\gamma^4\dot{\beta}^2}$$

Für die Beschleunigung auf der Kreisbahn mit dem Radius ϱ gilt:

$$\dot{v} = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{\beta^2c^2}{\varrho},\ \dot{\beta} = \frac{\beta^2 c}{\varrho} \approx \frac{c}{\varrho}$$

$$\boxed{P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{E^4}{(mc^2)^4}\frac{c^2}{\varrho^2}}$$

Es gelten also folgende Proportionalitäten:

$$\text{Leistung} \sim \frac{E^4}{\varrho^2},\ \mathrm{d}E \mathrel{\hat{=}} \frac{\text{Abgestrahlte Leistung}}{\text{Umlauf}} \sim \frac{E^4}{\varrho}$$

Numerisch gilt dann, wie durch Einsetzen der Zahlenwerte überprüft werden kann:

$$\mathrm{d}E\,[\mathrm{MeV}] = 8{,}8\cdot 10^{-2}\cdot\frac{(E\,[\mathrm{GeV}])^4}{\varrho\,[\mathrm{m}]}$$

Speziell für das LEP folgt aus $E = 100\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{Strahl}}$ und $\varrho = 4\cdot 10^3\,\mathrm{m}$ ein Wert von $\mathrm{d}E = 2{,}5\,\mathrm{GeV}$.

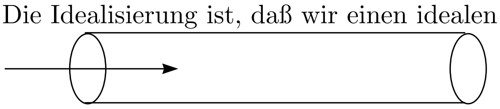
Kapitel 9

Hohlleiter

9.1 Einleitung

- Technische Anwendungen
- Koaxialkabel
- Hohlraum-Resonatoren
- Mikrowellen-Antennen

Die Idealisierung ist, daß wir einen idealen Leiter als Begrenzung haben.

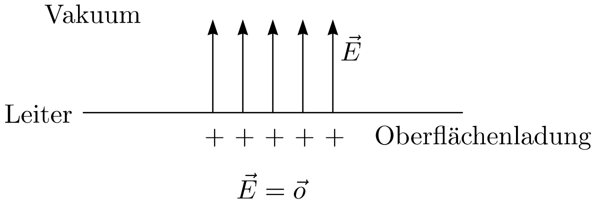


1.) <u>Randbedingungen:</u>

1.) <u>$\vec{E}$-Feld:</u>

$\vec{E} \perp$Oberfläche

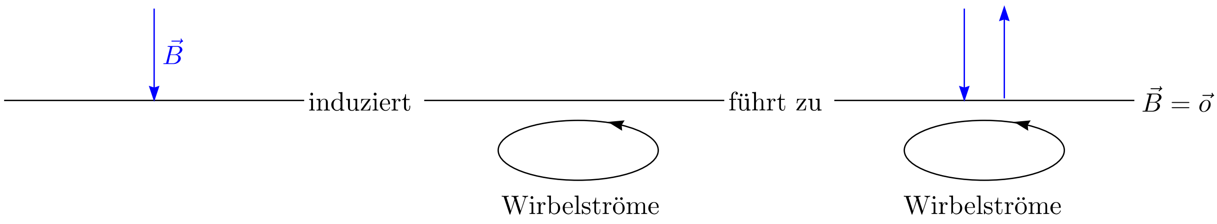
Der Aufbau der Oberflächenladung sei „instantan".



Die Oberflächenladung kompensiert das elektrische Feld im Innern des Leiters.

2.) <u>$\vec{B}$-Feld:</u>

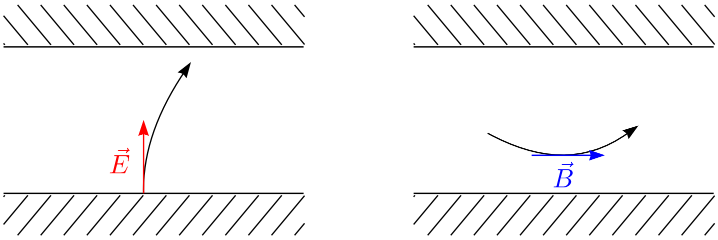
Wir betrachten ein zeitlich schnell veränderliches Magnetfeld. Dieses wird durch Induktionsströme abgeschirmt (keine Dämpfung).



Außerhalb, aber nahe an einem idealen Leiter, gilt:

$\vec{E} \parallel \vec{n}$ und $\vec{B} \perp \vec{n}$

$\vec{E}$ steht also senkrecht zu Oberfläche, während $\vec{B}$ parallel zu dieser steht.



2.) Wellengleichungen:

Wir betrachten die Wellenausbreitung in einem Hohlleiter, dessen Querschnitt beliebig aber konstant sein soll. Der Symmetrieachse durch den Hohlleiter liege dabei in z-Richtung. Der zu verwendende Ansatz lautet:

$$\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{B}(\vec{x})\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$$

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}(\vec{x})\exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right)$$

Leiten wir diese beiden Gleichungen nach t ab, so ergibt sich ein Faktor $-\mathrm{i}\omega$. Die Maxwellgleichungen in Vakuum ($\varrho = j = 0$) lauten:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \mathrm{i}\omega\vec{B}; \vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\vec{E}; \vec{\nabla}\vec{E} = 0$$

Damit gilt:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \mathrm{i}\omega\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

$$-\triangle\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla}\right)}_{=0} = \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$$

$$\boxed{\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E}(\vec{x}) = 0}$$

Analog gilt:

$$\boxed{\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{B}(\vec{x}) = 0}$$

Vor einigen Wochen hatten wir:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\exp\left(\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}\right) \Rightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\vec{E}_0 = 0$$

Ansatz:Wellenausbreitung in z-Richtung

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}(x,y)\exp\left(\mathrm{i}kz\right)$$

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(x,y)\exp\left(\mathrm{i}kz\right)$$

k ist zunächst unbekannt (eventuell komplex). Wir definieren nun einen transversalen Laplace-Operator:

$$\vec{\nabla}_T^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \equiv \triangle - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Die Wellengleichung geht wegen der speziellen z-Abhängigkeit über in:

$$\left(\vec{\nabla}_T^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left\{\begin{array}{c}\vec{E}(x,y)\\ \\ \vec{B}(x,y)\end{array}\right\} = 0$$

Wir haben somit sechs Gleichungen für die Komponenten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Unser Ziel ist es, eine Gleichung für E_z (oder B_z) zu erhalten und die restlichen fünf Komponenten durch Differentiation aus E_z (oder B_z) zu bekommen. Dazu zerlegen wir $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in Anteile senkrecht und parallel zu $\vec{e}_z$.

$$\vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_z$$

$$\vec{E}_z = \vec{e}_z \cdot \left(\vec{E} \cdot \vec{e}_z\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_t = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Umrechnung der Maxwell-Gleichungen (Jackson, Greiner (Seiten 374/375, 2 Seiten)) folgt:

$$\vec{B}_\perp = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \left[\vec{\nabla}_T \partial_z B_z + \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} \left(\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_T\right) E_z\right] \qquad (\star\star)$$

$$\vec{E}_\perp = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \left[\vec{\nabla}_T \partial_z E_z - \mathrm{i}\omega \left(\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_T\right) B_z\right] \qquad (\star\star\star)$$

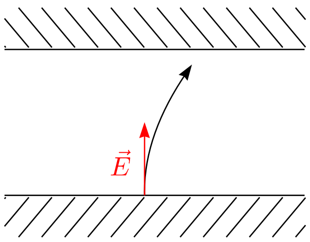
Vorsicht ist geboten, denn aufgrund der Randbedingungen gilt:

$$\boxed{k^2 \neq \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Randbedingungen:

$\vec{E}_\perp$ auf Leiteroberfläche

$$E_z\big|_{\text{Oberfläche}} = 0$$



$\vec{B}$ ist parallel zur Leiteroberfläche.

$$\vec{B} \cdot \vec{n}\Big|_O = 0 \Rightarrow \vec{B}_T \cdot \vec{n}\Big|_O = 0$$

Aus $\vec{B}_T \cdot \vec{n}\Big|_O = 0$ und $(\star\star)$ folgt:

$$\frac{\partial B_z}{\partial n}\bigg|_O = 0$$

Beweis:

Wir multiplizieren Gleichung $(\star\star)$ mit $\vec{n}$. Dann folgt mit $\vec{n} \cdot \vec{e}_z = 0$:

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_T\right) = \vec{n} \cdot \left(\vec{e}_z \times \left(\vec{\nabla} - \underbrace{\vec{e}_z \vec{e}_z \vec{\nabla}}_{=0}\right)\right)$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_T\right) = \vec{n} \cdot \left(\vec{e}_z \times \vec{\nabla}\right) = -\vec{e}_z \cdot \vec{n} \times \vec{\nabla}$$

$\left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) E_z \Big|_O$ enthält nur die Ableitung in Richtung der Oberfläche:

$$E_z|_O = 0$$

Damit folgt:

$$\left(\vec{n} \times \vec{\nabla}\right) E_z = 0$$

Und somit gilt:

$$\vec{n}\vec{B}_T \Big|_O = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \cdot \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \partial_z B_z \Bigg|_O$$

$$\partial_z B_z = \mathrm{i}kB_z$$

$$0 = \vec{n}\vec{\nabla}B_z \Big|_O \stackrel{\wedge}{=} \frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_O = 0$$

Das Ziel ist nun, die Abhängigkeit von E_z und B_z aus den zweidimensionalen partiellen Differentialgleichungen ($\star$) und den Randbedingungen $B_\perp$ und $E_\perp$ aus ($\star\star$) und ($\star\star\star$) zu bestimmen.

9.1.1 Klassifikation der Lösungen

Wir unterscheiden folgende Arten von Lösungen:

- Transversal magnetische Lösungen (TM):

  $$B_z(x,y) \equiv 0$$

  $$E_z(x,y) \neq 0$$

  Das ändert nichts daran, daß die Randbedingungen erfüllt sein müssen:

  $$E_z|_O = 0$$

- Transversal elektrische Lösungen (TE):

  $$E_z(x,y) \equiv 0$$

  $$B_z(x,y) \neq 0$$

  $$\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_O = 0$$

- Transversale elektrische und magnetische Lösungen (TEM):

  $E_z(x,y) \equiv 0$ und $B_z(x,y) \equiv 0$

  Schaut man die obigen Gleichungen ($\star\star$) und ($\star\star\star$) an, so müßte man vermuten, daß alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes gleich Null sind. Dies ist aber nicht so, da nun folgendes gilt:

  $$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0$$

  Die Beziehungen ($\star\star$) und ($\star\star\star$) gelten somit nicht mehr. Die Ausbreitung findet mit Lichtgeschwindigkeit statt, als ob keine Randbedingungen bestehen würden. Damit werden wir uns später genauer auseinandersetzen.

9.1.2 Diskussion der transversal magnetischen Lösungen

$B_z(x,y) \equiv 0$

Es gilt nun:

$$\vec{B}_T = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} \left(\vec{e}_z \times \vec{\nabla}_T\right) E_z$$

$$\vec{E}_T = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \vec{\nabla}_T \partial_z \vec{E}_z = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \vec{\nabla}_T \left(\mathrm{i}kE_z\right)$$

Aus der zweiten Gleichung folgt dann:

$$\vec{\nabla}_T E_z = \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}{\mathrm{i}k} \vec{E}_T$$

Somit lösen wir nach $\vec{B}_T$ und $\vec{E}_T$ auf und erhalten:

$$\boxed{\vec{B}_T = \frac{\omega}{kc^2} \vec{e}_z \times \vec{E}_T}$$

$$\boxed{\vec{E}_T = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2} \mathrm{i}k \vec{\nabla}_T E_z}$$

Für E_z gilt die zweidimensionale Differentialgleichung.

$$\left(\vec{\nabla}_T^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_z(x,y) = 0$$

Die Randbedingung lautet:

$$E_z(x,y)\big|_O = 0$$

Alle Felder ergeben sich aus einer Funktion $E_z(x,y)$. Analog gilt für die transversal elektrischen Lösungen:

$$\vec{E}_T = -\frac{\omega}{k} \vec{e}_z \times \vec{B}_T$$

$$\vec{B}_T = \frac{\mathrm{i}k}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \vec{\nabla}_T B_z$$

$$\left(\vec{\nabla}_T^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) B_z(x,y) = 0 \text{ und } \left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_O = 0$$

Entscheidend ist nun folgende Wellengleichung:

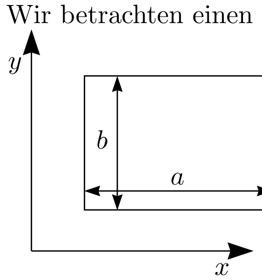
$$\boxed{\left(\vec{\nabla}_T^2 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right) \begin{pmatrix} B_z \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \text{ (mit den richtigen Randbedingungen)}}$$

Es handelt sich dabei um eine partielle Differentialgleichung 2.Ordnung für den transversal elektrischen und den transversal magnetischen Fall. Wir setzen nun folgendes fest:

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \gamma^2$$

Spezialfall:

Wir betrachten einen rechteckigen Leiter:



Wir untersuchen nun den transversal elektrischen Fall:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right) B_z(x,y) = 0$$

$$\left.\frac{\partial B_z}{\partial n}\right|_O = 0 \text{ für } x = 0, a \text{ und } y = 0, b$$

Wir nehmen folgenden Ansatz zur Lösung der Differentialgleichung:

$$\boxed{B_z^{mn} = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}$$

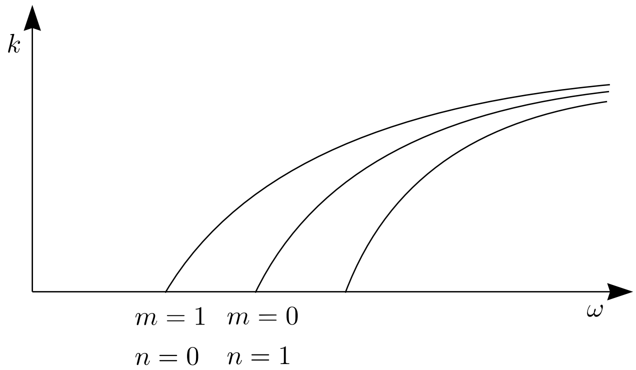
Dieser Ansatz erfüllt die Randbedingungen. Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung ein, womit sich dann ergibt:

$$\boxed{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] - \gamma^2 = 0}$$

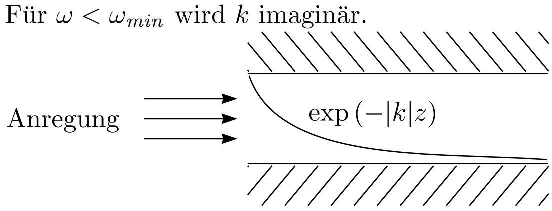
Wir lösen nach k auf:

$$k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}$$

$$\omega_{min} = c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$



Für $\omega < \omega_{min}$ wird k imaginär.



B_z fällt infolgedessen exponentiell ab. Der Zusammenhang zwischen dem Wellenvektor k und ω definiert hierbei die Phasengeschwindigkeit:

$$\frac{\omega}{k} = v_{ph} = \boxed{\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \pi^2 c^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}} \cdot c}$$

Der Nenner ist größer als 1. Die Phasengeschwindigkeit ist somit größer als die Lichtgeschwindigkeit. Von Bedeutung ist aber die Gruppengeschwindigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}} = \boxed{\frac{\sqrt{\omega^2 - \pi^2 c^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}}{\omega} \cdot c}$$

Der Ausdruck geht gegen Null für $\omega \mapsto \omega_{min}$.

9.1.3 TEM-Lösung

$E_z = B_z = 0$

$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2$

$$\boxed{\vec{\nabla}_T \begin{pmatrix} \vec{E}_{TEM}(x,y) \\ \vec{B}_{TEM}(x,y) \end{pmatrix} = 0}$$

Diese Gleichungen erinnern dan die Ausbreitung im Vakuum ohne Hohlleiter. Mit den Maxwellgleichungen gilt:

$$\vec{B} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_T = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix}, E_z \equiv 0$$

$\partial_z = \mathrm{i}k$

Also gilt damit:

$$\vec{B} \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}k \cdot E_y \\ \mathrm{i}k \cdot E_x \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$$

Mit $B_z = 0$ folgt:

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{B} \perp \vec{E} \perp \vec{e}_z$

Wegen $B_z = 0$ muß gelten:

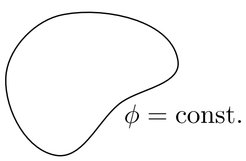
$$\boxed{\partial_x E_y - \partial_y E_x = 0}$$

Dabei handelt es sich um die Integrabilitätsbedingung in zwei Dimensionen. $\vec{E}_T$ läßt sich als Quadrat eines Potential darstellen.

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \phi(x,y)$$

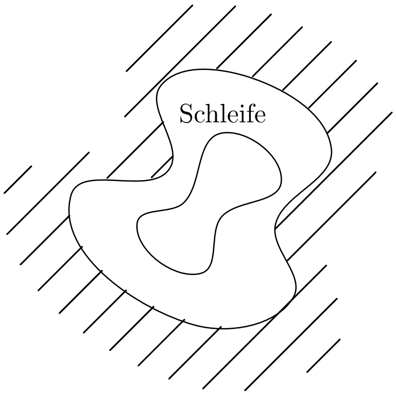
Dies ist also die Lösung eines zweidimensionalen Potential-Problems:

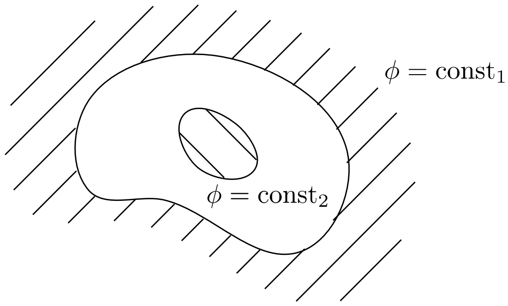
$$\boxed{\left(\partial_x^2 + \partial_y^2\right) \phi(x,y) = 0 \text{ mit } \left.\phi\right|_O = \text{const.}}$$



$\phi = \text{const.}, E = 0$

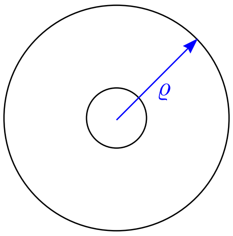
Dies ist der Fall, wenn das Gebiet einfach zusammenhängend ist.





Es handelt sich um ein Koaxialkabel. Da wir eine lineare Dispersionsrelation haben, breitet sich jeder Puls mit gleicher Geschwindigkeit aus.

Beispiel:



Eine mögliche Lösung des Problems ist:

$$\phi = A \ln \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

Die Konstanten A und ϱ_0 werden an die Randbedingungen $\phi(\varrho_1)$ und $\phi(\varrho_2)$ angepaßt:

$$\boxed{\vec{E}(\varrho, \varphi) = \frac{A}{\varrho}\vec{e}_\varrho}$$

Kapitel 10

Elektrodynamik in kontinuierlichen Medien

1.) <u>Elektrostatik:</u>

Wir betrachten Moleküle in der Größenordnung von $10^{-10}\,\mathrm{m} = 1\,\text{Å}$. Bei sichtbarem Licht beträgt die Wellenlänge $\lambda = 3,8 - 7,5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Selbst bei Ausbreitung und zum Teil bei Streuung wird über viele Moleküle gemittelt. Mehrdimensionale Felder und Ladungsverteilungen sind räumlich und zeitlich veränderlich. Relevant sind somit gemittelte Größen. $\vec{\varepsilon}$, $\vec{b}$, η, $\vec{j}$ seien die mikroskopischen Größen (verschoben mit ε-Polarisierbarkeit). $\vec{E}$, $\vec{B}$, ϱ seien die mehrdimensionalen Größen., wobei gilt:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} \mathrm{d}\vec{j}\vec{E}(\vec{x},\vec{j}) = \langle \vec{E}(\vec{x})\rangle$$

ΔV ist hierbei ein geeignet gewähltes Volumen. Wir mittel somit über zeitlich veränderliche Größen:

$$\varrho(\vec{x}) = \langle \eta(x)\rangle = \frac{1}{\Delta L}\int\limits_{x}^{x+\Delta L} \mathrm{d}x\,\eta(x)$$

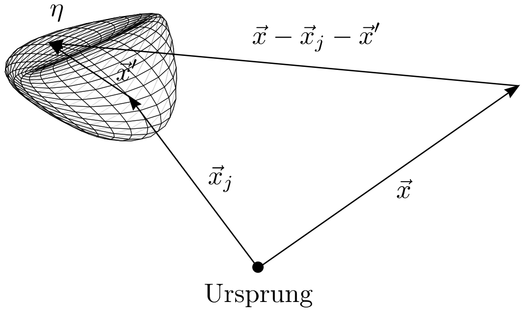
Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}\vec{E}(\vec{x},t) = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \varepsilon(\vec{x},t)\right\rangle$$

Ähnlich gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{x},t) = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon(\vec{x},t)\right\rangle = 0 \text{ für Statik}$$

Wir betrachten nun den Beitrag der Ladungsdichte η_j eines Moleküls mit Index j zum Feld am Punkt $\vec{x}$. Dazu verwenden wir den Gaußschen Satz:



$\vec{x} \mathrel{\hat{=}}$ Beobachter

$\vec{x}_j \mathrel{\hat{=}}$ Schwerpunktskorrdinaten des Moleküls

$\vec{x}' \mathrel{\hat{=}}$ Relative Koordinate

$|\vec{x}'| \leq O(1\,\text{Å}) \leq |\vec{x} - \vec{x}_j - \vec{x}'|$

Mit dem Gaußschen Satz erhalten wir für das mehrdimensionale Feld:

$$\varepsilon_j(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla} \int\limits_{\text{Molekül } j} \frac{\eta_j(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}_j - \vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3\vec{x}'$$

Mit der Taylor-Entwicklung folgt:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \left(\vec{\nabla}_j \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|}\right) \cdot \vec{x}'$$

$$\varepsilon_j(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{e_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} + \left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|}\right) \cdot \vec{p}_j\right)$$

Mit der Gesamtladung e_j:

$$e_j = \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \eta_j(\vec{x}')$$

Und dem Dipolmoment:

$$\vec{p}_j = \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \eta_j(\vec{x}') \cdot \vec{x}'$$

Für den Beitrag aller Moleküle folgt durch Summation:

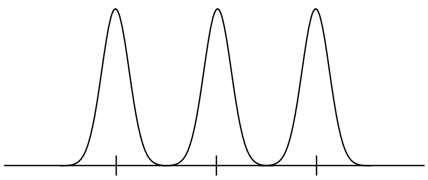
$$\varrho_{mol}(\vec{x}'') = \sum_j e_j\, \delta\left(\vec{x}'' - \vec{x}_j\right)$$

$$\vec{\Pi}_{mol}(\vec{x}) = \sum_j \vec{p}_j\, \delta\left(\vec{x}'' - \vec{x}_j\right)$$

$\varepsilon = \sum\limits_j \varepsilon_j$ wird nun umgeschrieben in ein Integral:

$$\boxed{\vec{\varepsilon}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\int \mathrm{d}x''\left[\frac{\varrho(x'')}{|\vec{x} - \vec{x}''|} + \vec{\Pi}(\vec{x}'') \cdot \left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}''|}\right)\right]}$$

$\varepsilon(\vec{x})$ ist immer noch schnell veränderlich, da $\vec{\varrho}(\vec{x}'')$ schnell veränderlich ist.



Wir führen eine Mittelung durch und betrachten somit den Beitrag von $\varrho_{mol}(\vec{x}'')$.

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\varrho + \vec{\varepsilon}_\Pi$$

$$\langle\vec{\varepsilon}_\varrho(\vec{x})\rangle = -\frac{\vec{\nabla}}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\Delta V \text{ um } \vec{x}} \mathrm{d}\vec{\xi} \int \mathrm{d}\vec{x}''\, \frac{\varrho_{mol}(\vec{x}'')}{|\vec{x} - \vec{x}'' + \vec{\xi}|}$$

Wir führen eine Variablensubstitution durch:

$$\vec{x}'' \mapsto x' = \vec{x}'' - \vec{\xi}$$

Die Mittelung verläuft über ϱ:

$$\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V} \mathrm{d}\vec{\xi}\, \varrho(\vec{x}' + \xi) = \frac{1}{\Delta V}\sum_{\Delta V} e_j$$

$$\vec{E}_\varrho(\vec{x}) = \langle\vec{e}_\varrho(\vec{x})\rangle\rangle = -\frac{\vec{\nabla}}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}\vec{x}'\, \frac{N(\vec{x}')e_{mol}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$N(\vec{x}') \triangleq$ Dichte der Moleküle

$e_{mol}(\vec{x}') \triangleq$ Mittlere Ladung (gemittelt über ΔV)

$$\frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \mathrm{d}^3\vec{\xi}\, \vec{\Pi}_{mol}(\vec{x}' + \xi) = N(\vec{x}')\vec{p}_{mol}(\vec{x}')$$

$$\vec{E}_{\Pi}(\vec{x}) = \langle \varepsilon_{\Pi}(\vec{x}) \rangle = -\frac{\vec{\nabla}}{4\pi\varepsilon_0} \int \mathrm{d}^3\vec{x}'\, N(\vec{x}')\vec{p}_{mol}(\vec{x}') \cdot \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

$\vec{p}_{mol}(\vec{x}')$ ist das mittlere Dipolmoment eines Moleküls am Punkt $\vec{x}'$. Wir definieren nun die mittlere Ladungsdichte und die Dipolmoment-Dichte (makroskopische elektrische Polarisation):

$$\varrho(\vec{x}) \equiv N(\vec{x}) \cdot e_{mol}(\vec{x})$$

$$\vec{p}(\vec{x}) \equiv N(\vec{x}) \cdot \vec{p}_{mol}(\vec{x})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\varrho} + \vec{E}_{\Pi}$$

$$4\pi\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \int \mathrm{d}\vec{x}' \left(\frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{p}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

Beachte:

$$-\vec{\nabla}\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$4\pi \left(\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x}) \right) = -\vec{\nabla} \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Definiere $\vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{p}(\vec{x})$ als „elektrische Verschiebungsdichte“. Damit gilt dann:

$$\boxed{\vec{D}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \mathrm{d}\vec{x}'\, \frac{\varrho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

Außerdem gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{D} = \varrho(\vec{x})}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \text{ in der Elektrostatik}}$$

Experimentelle Information:

Für langsam veränderliche, nicht extrem starke elektrische Felder hängen $\vec{p}$ und $\vec{E}$ linear zusammen.

$$p_i(\vec{x}) = a_{ij} E_j(x)$$

a_{ij} ist im allgemeinen ein Tensor. In einem isotropen Medium ist $a_{ij} \sim \delta_{ij}$:

$$\vec{p}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \chi \vec{E}(\vec{x})$$

χ ist eine Materialkonstante, nämlich die sogenannte Suszeptibilität. Diese gibt an, wie gut sich ein Medium polarisieren läßt.

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \text{ mit } \varepsilon = 1 + \chi$$

Beispiel:

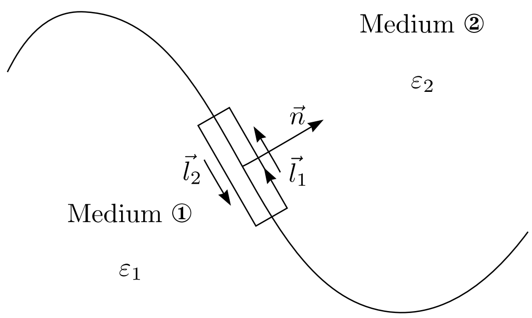
Material	ε
Glas	4
Paraffin	2,8
Wasser	82

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\varrho}$$

Wobei ϱ die freie gemittelte Ladung beschreibt. Die Felder sind reduziert um den Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$. Die Kapazität eines gefüllten Kondensators ist um den Faktor ε erhöht.

2.) Randwertprobleme:

Unser Ziel ist, zu zeigen, daß die Komponente parallel zur Oberfläche stetig ist.



Wir verwenden den Stokesschen Satz:

$$\int\limits_C \mathrm{d}\vec{l}\,\vec{E} = \int\limits_F \mathrm{d}\vec{F}\,\underbrace{\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)}_{=0}$$

Somit folgt nach Durchlaufen des Weges:

$$0 = \vec{E}_1\vec{l}_1 + \vec{E}_2\vec{l}_2 \text{ mit } \vec{l}_1 = -\vec{l}_2 = \vec{l}$$

$$\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\vec{l} = 0$$

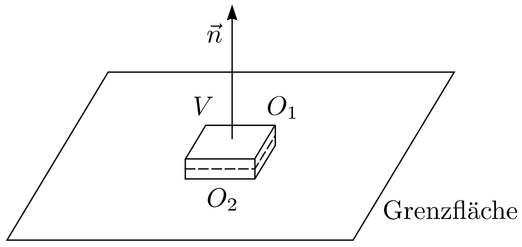
Damit ist gezeigt, daß die Komponente von $\vec{E} \parallel \vec{l}$ stetig ist. Mit der Flächennormalen $\vec{n}$ gilt dann:

$$\boxed{\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\times\vec{n} = 0}$$

Für $\vec{D}$ gilt:

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \varrho$$

Wir betrachten wieder die Grenzschicht:



Nun gilt mittels der Maxwell-Gleichungen:

$$\int\limits_V \vec{\nabla}\vec{D} = \int\limits_V \varrho(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit dem Gaußschen Satz resultiert:

$$\int\limits_O \mathrm{d}\vec{F}\,\vec{D} = \sigma O_1$$

Lassen wir die Dicke des Quaders gegen Null gehen, so gilt:

$$O = O_1 + O_2 + \text{kleine Randterme}$$

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\cdot\vec{n}\cdot O_1 = \sigma O_1$$

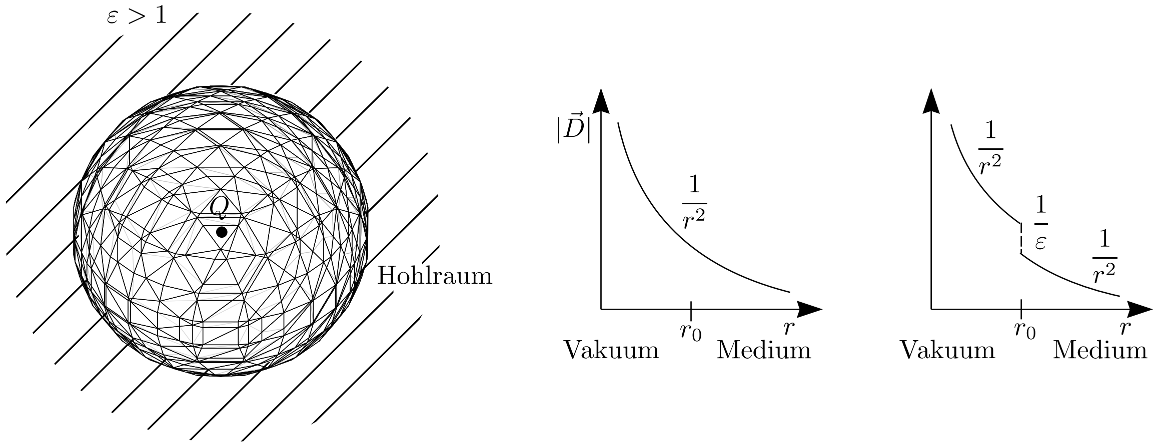
$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\cdot\vec{n} = \sigma$$

Falls keine Oberflächenladungen (makroskopischer freier Beitrag) vorliegen, gilt:

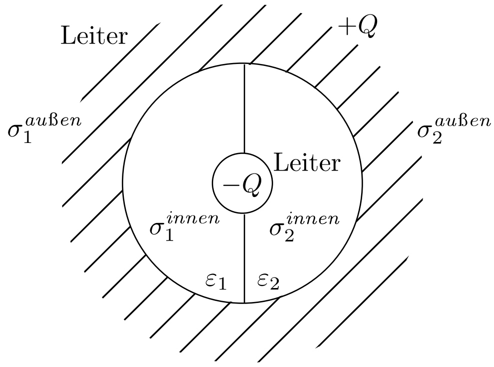
$$\boxed{\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\cdot\vec{n} = 0}$$

3.) <u>Einfache Beispiele:</u>

A.) Ladung Q im Hohlraum ($\varepsilon = 1$), der von einem Dielektrikum ($\varepsilon > 1$) umgeben ist:



B.) 2 leitende, entgegengesetzt geladene Kugeln, von 2 Dielektrika getrennt:



Das Potential muß auf innerer und äußerer Kugel jeweils gleich sein. Man erhält die Potentialdifferenz durch Integration über das elektrische Feld von innen nach außen:

$$\Delta U = -\int\limits_{\text{innen}}^{\text{außen}} \vec{E}_1\,\mathrm{d}\vec{l}_1 = \int\limits_{\text{innen}}^{\text{außen}} \vec{E}_2\,\mathrm{d}\vec{l}_2$$

Da $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ wie $\frac{1}{r^2}$ abfallen und außerdem die beiden Integrale gleich sind, dann folgt daraus, daß auch E_1 und E_2 gleich sind.

$$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1; \vec{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2$$

Damit ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$\boxed{\frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{D_2}{\varepsilon_2}}$$

Wegen $\nabla\vec{D} = \varrho$ gilt folgender Zusammenhang zwischen der Flächenladungsdichte:

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}}$$

Die Ladungen sind also nicht gleichmäßig verteilt. Je höher die Polarisierbarkeit an einer Stelle ist, umso mehr Ladung wird man an dieser Stelle antreffen. Dies gilt sowohl auf der Innen- (r) als auch auf der Außenkugel (R).

$$Q = \frac{4\pi r^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = 4\pi r^2 \frac{\sigma_2}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1\right) = 4\pi r^2 \sigma_2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_2}$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

Somit gilt:

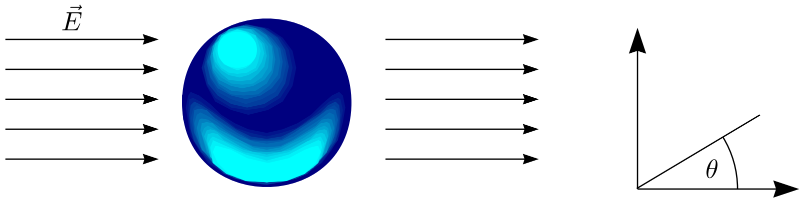
$$D_1 = \frac{Q}{r^2}\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$D_2 = \frac{Q}{r^2}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Die Beträge der $\vec{E}$-Felder sind gleich:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\left(\frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right)$$

C.) In konstantem elektrische Feld wird eine Kugel mit Radius a und Dielektrizitätskonstante ε gebracht:



Kugel

Für das Potential gilt mit der Entwicklung in Kugelflächenfunktionen:

$$\phi_{innen} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)$$

Aufgrund der Axialsymmetrie gibt es keine φ-Abhängigkeit:

$$\phi_{außen} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}\right] P_l(\cos\theta)$$

Für $r \mapsto \infty$ bleibt als führender Anteil nur das konstante elektrische Feld:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Somit gilt für das Potential:

$$\phi \xrightarrow[r\mapsto\infty]{} -E_0 \cdot r\cos\theta = -E_0 \cdot z$$

Damit folgt für die Koeffizienten B_l:

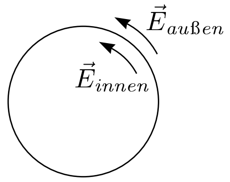
$$B_1 = -E_0$$

$$B_l = 0 \text{ für } l > 1$$

Wir definieren $B_0 = 0$ als Nullpunkt des Potentials. Für die Randbedingungen gilt:

⁕ E ist stetig in tangentialer Richtung.

$E_\theta(\text{innen}) = E_\theta(\text{außen})$



$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_{innen} = -\frac{\partial}{\partial\theta}\phi_{außen}} \qquad (1)$$

⁕ D ist stetig in radialer Richtung.

$$\boxed{-\varepsilon\frac{\partial}{\partial r}\phi_{innen} = -\frac{\partial}{\partial r}\phi_{außen}}$$

$D_r(\text{innen}) = D_r(\text{außen})$

$\varepsilon_0\varepsilon E_r(\text{innen}) = \varepsilon_0 E_r(\text{außen}) \qquad (2)$

Wir betrachten nun:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\theta}$$

$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$

Somit gilt folgende Bilanzgleichung:

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l'(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^{-(l+1)} P_l'(\cos\theta) - E_0 a P_1'(\cos\theta)$$

Dies muß für jedes l getrennt gelten. $l = 0$ trägt nicht bei ($P_0' = 0$). Für $l = 1$ folgt:

$$\boxed{A_1 a = C_1 a^{-2} - E_0 a}$$

Wir erhalten als ersten Satz von Gleichungen:

$$\boxed{A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3}} \qquad (\star)$$

$$\boxed{A_l = C_l a^{-(2l+1)} \text{ für } l > 1}$$

Für den radialen Sprung (Gleichung 2) gilt:

$$\boxed{-\varepsilon A_1 = 2C_1 a^{-3} + E_0 \text{ für } l = 1} \qquad (\star\star)$$

$$\boxed{-\varepsilon l A_l = (l+1) C_l a^{-(2l+1)} \text{ für } l > 1}$$

Durch Kombination dieser beiden Gleichungen folgt dann schließlich:

$$C_l = -\frac{l+1}{\varepsilon l} C_l \text{ für } l > 1 \text{ und beliebige } \varepsilon$$

$C_l = 0$ für $l > 1$

$A_l = 0$ für $l > 1$

Wir addieren die Gleichungen ($\star$) und ($\star\star$):

$$\boxed{A_1 = E_0\left(\frac{-3}{\varepsilon + 2}\right)}$$

$$\boxed{C_1 a^{-3} = E_0 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)}$$

Für $C_0 = 0$ gibt es keinen $\frac{1}{r}$-Term. Mit $B_0 = C_0 = 0$ wird das Potential normiert.

$$\phi_{innen} = -\left(\frac{3}{\varepsilon + 2}\right) E_0 \underbrace{r P_1'(\cos(\theta))}_{z}$$

$$\phi_{außen} = -E_0 \underbrace{r P_1(\cos\theta)}_{z} + E_0 \frac{a^3}{r^2}\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right) P_1(\cos\theta)$$

Innen hat man somit ein konstantes Feld in z-Richtung mit der Strärke $E_0\left(\frac{3}{\varepsilon+2}\right)$. Außen existiert ein konstantes Feld in z-Richtung mit Stärke E_0 plus Dipolfeld mit dem Dipolmoment p:

$$p = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\right) E_0 a^3$$

4.) Magnetostatik:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = j(x)}$$

Da es keine Quellen des Magnetfelds gibt, gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{B} = 0}$$

Wir definieren die Größe H durch eine Kombination mit dem $\vec{B}$-Feld in der Magnetisierung $\vec{M}$ (molekulare Ströme):

$$\vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$$

Die Maxwell-Gleichungen in Materie lauten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \vec{o}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = \vec{j}$$