

MITSCHRIEB ZUR VORLESUNG: THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE I GRUNDLAGEN

Prof. Dr. Wölfe und Dr. Greiter

Vorlesung Wintersemester 2004/2005

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 19. Februar 2005

Mitschrieb der Vorlesung THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE I: GRUNDLAGEN
von Herrn Prof. Dr. SCHÖN und Dr. GREITER im Wintersemester 2004/2005
von MARCO SCHRECK.

Dieser Mitschrieb erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler und Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Quantenflüssigkeiten	5
1.1	BOSEgas	5
1.2	Zweiflüssigkeitsmodell	6
1.2.1	Dynamische Eigenschaften im hydrodynamischen Bereich	6
1.3	Energiespektrum der BOSEflüssigkeit (^4He)	8
1.3.1	Kriterium für Stabilität des Suprastroms	10
1.4	Nichtideales BOSEgas	11
2	Transporteigenschaften von Festkörpern	13
2.1	Quasiklassische Dynamik von BLOCHElektronen	13
2.1.1	Wiederholung des BLOCHtheorems	13
2.1.2	Beispiel: Statische Störstelle	15
2.2	Quasiklassische Bewegungsgleichungen für BLOCHElektronen	15
2.2.1	Elektrisches Feld	15
2.2.2	Magnetisches Feld	16
2.3	BLOCHElektronen im konstanten elektrischen Feld	16
2.3.1	Tunneln zwischen Energiebändern: elektrischer Durchbruch	17
2.3.2	Geschwindigkeit und effektive Masse der BLOCHElektronen	18
2.4	BLOCHElektronen im Magnetfeld	20
2.5	BOLTZMANN-Gleichung	22
2.5.1	Dissipative Transportprozesse	23
2.5.2	Elektrische Leitfähigkeit	24
2.5.3	Relaxationszeit für Störstellenstreuung	25
2.5.4	Elektrischer Widerstand durch Elektron-Elektron-Streuung	26
2.5.5	Elektron-Phonon-Streuung	26
2.6	Thermoelektrische Transporteigenschaften	27
2.7	Magnetotransporteigenschaften	29
3	Quanten-Hall-Effekt	31
3.1	Der ganzzahlige Effekt	31
3.2	LAUGHLINS Eichargument	32
3.3	LANDAU-Niveaus	33
3.4	Der nicht ganzzahlige Effekt	35
3.5	Nicht ganzzahlige Ladung	37
3.6	Nicht ganzzahlige Statistik	37

Kapitel 1

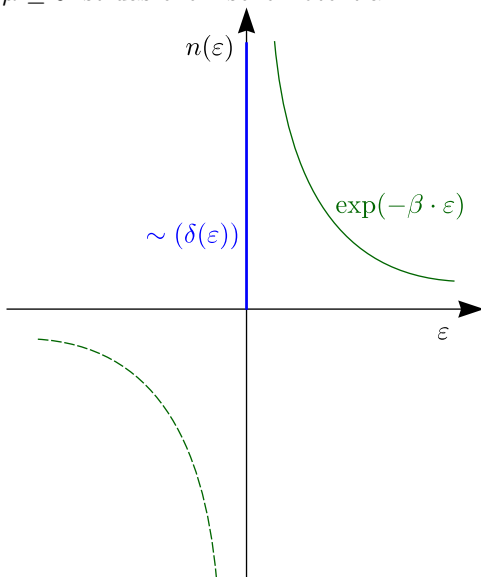
Quantenflüssigkeiten

1.1 Bosegas

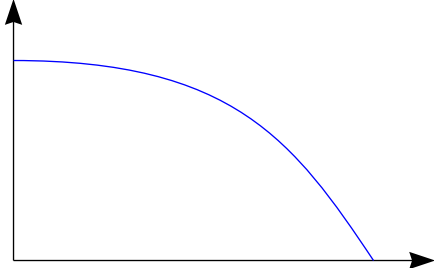
Einteilchenzustände können beim BOSEgas mehrfach besetzt werden. Die BOSE-EINSTEIN-Funktion ist gegeben durch:

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{\exp(\beta \cdot (\varepsilon - \mu)) - 1} \quad \text{für } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$\mu \leq 0$ ist das chemische Potential.



Ein makroskopischer Anteil N_0 Teilchen steckt bei $\varepsilon = 0$, im tiefsten Energiezustand. Dies bezeichnet man als BOSE-KONDENSATION.



Die charakteristische Länge ist gegeben durch:

$$k_B T_0 \sim \frac{\hbar^2}{m \cdot a_0^2} \text{ mit } a_0^3 = \frac{V}{N}$$

Es ist $\langle b_0^\dagger b_0 \rangle = N_0$. Zwischen den verschiedenen Untersystemen bestehen Korrelationen; man spricht von „off-diagonal long-range order“.

		i		

$$\langle b_0^\dagger b_0 \rangle = |\langle b_0 \rangle|^2 \text{ mit } \langle b_0 \rangle = |\langle b_0 \rangle| \cdot \exp(i\phi)$$

Der HAMILTON-Operator besitzt eine Symmetrie bezüglich der Phase ϕ . Der Grundzustand bricht eine Symmetrie des HAMILTON-Operators; man hat eine spontan gebrochene U(1)-Symmetrie. Man kann einen Operator $\hat{\phi}$ einführen, der mit der Teilchenzahl kanonische Vertauschungsrelationen erfüllt, also $[\hat{N}, \hat{\phi}] = i$ (aus $[b_0, b_0^\dagger] = 1$). Was ist die physikalische Interpretation von ϕ ? Die suprafluide Geschwindigkeit

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \phi$$

führt zum beeindruckenden Phänomen der **Suprafluidität** (Supraleitung von Metallen).

1.2 Zweiflüssigkeitsmodell

Wir wollen uns hier mit der phänomenologischen Theorie von Supraflüssigkeiten beschäftigen. LANDAU und TISZA haben sich um 1940 aufgrund von Experimenten mit ^4He damit beschäftigt. Man nimmt zwei Flüssigkeitskomponenten an, nämlich:

- a.) Suprafluide Komponente: Geschwindigkeit \vec{v}_s , Dichte ρ_s (Massendichte)
- b.) Normalfluide Komponente: Geschwindigkeit \vec{v}_n , Dichte ρ_n

Natürlich muss $\rho = \rho_s + \rho_n$ gelten. Die Impulsdichte des gesamten Systems ist gegeben durch Massendichte mal Geschwindigkeit, also $\vec{g} = \rho_s \cdot \vec{v}_s + \rho_n \cdot \vec{v}_n$. Diese Impulsdichte ist symmetrisch unter GALILEI-Transformationen: $\vec{v}_s \mapsto \vec{v}_s + \vec{u}$ und $\vec{v}_n \mapsto \vec{v}_n + \vec{u}$. Es gilt nämlich $\vec{g} \mapsto \vec{g} + \rho \vec{u}$. Für die Temperaturabhängigkeit erwarten wir $\rho_s \mapsto 0$ für $T \mapsto T_c$ und $\rho_n \mapsto 0$ für $T \mapsto 0$.

1.2.1 Dynamische Eigenschaften im hydrodynamischen Bereich

- 1.) Kontinuitätsgleichung:

Sie beschreibt bekanntlich die Erhaltung der Masse. Ändert sich die Dichte der Teilchen, so muss es auch einen Strom geben, der beschreibt, wo sich die Teilchen hinbewegen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = 0$$

- 2.) Impulserhaltung:

Hier gilt analog:

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \vec{\nabla} \overleftrightarrow{\Pi} = 0$$

$\overleftrightarrow{\Pi}$ ist der Tensor der Impulsstromdichte, der die Kräfte beschreibt, die auf ein Flüssigkeitselement wirken. Π_{ij} sind die Komponenten dieses Tensors. Es gilt $\Pi_{ij} = P\delta_{ij} + \text{Gradiententerme}$.

Wie kann man nun die Dynamik des Kondensats beschreiben? Um eine Bewegungsgleichung für \vec{v}_s zu erhalten, benötigen wir eine Bewegungsgleichung für $\hat{\phi}$. $\hat{\phi}$ ist ein quantenmechanischer Operator, womit dessen Bewegungsgleichung die HEISENBERG-Gleichung ist:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi} = [\hat{\phi}, \hat{H}] = -i \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{N}}$$

Wir betrachten die Mittelwerte:

$$\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = - \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{N}} \right\rangle = - \frac{\partial E}{\partial N} = -\mu$$

Man bezeichnet diese also JOSEPHSON-Gleichung. Damit ergibt sich weiter:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_s = -\frac{1}{m} \vec{\nabla} \mu} \quad (3)$$

Die normalfluide Komponente trägt den Wärmestrom bzw. den Entropiestrom (die suprafluide Komponenten **nicht**). Die suprafluide Komponente ist ja das Kondensat, bei dem alle Teilchen den Energiezustand $\varepsilon = 0$ besetzen, wodurch die Entropie verschwindet. Definieren wir nun eine Entropiedichte s und den Entropiestrom als $\vec{j}_s = s \cdot \vec{v}_n$. Bei Vernachlässigung dissipativer Prozesse gilt Entropieerhaltung. Auch hier gilt eine Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (s \vec{v}_n) = 0} \quad (4)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhalten wir:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 P}$$

Diese Gleichung beschreibt unter anderem die Ausbreitung von Schallwellen. In Gleichung (3) wollen wir außerdem die GIBBS-DUHEM-Relation

$$d\mu = \frac{1}{n} dP - \frac{s}{n} dT \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} P = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{g}$$

einsetzen:

$$\varrho_n \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_n - \vec{v}_s) = -s \vec{\nabla} T$$

Aus Gleichung (1) und (4) erhalten wir außerdem:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_n - \vec{v}_s) = \frac{1}{\varrho_s} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \vec{\nabla} v_n \right) = -\frac{\varrho}{\varrho_s \cdot s} \frac{\partial s}{\partial t}$$

Nun können wir die letzten beiden Gleichungen noch miteinander verarbeiten:

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\varrho_s \cdot s^2}{\varrho_n} \vec{\nabla}^2 T} \quad (5)$$

Diese Gleichung beschreibt nun die Dynamik des Systems. Wir schreiben δP und δT als totales Differential:

$$\delta P = \left(\frac{\partial P}{\partial \varrho} \right)_s \delta \varrho + \left(\frac{\partial P}{\partial s} \right)_\varrho \delta s \quad \text{und} \quad \delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial \varrho} \right) \delta \varrho + \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right) \delta s$$

$\frac{\partial P}{\partial s}$ und $\frac{\partial T}{\partial \varrho}$ beschreiben die thermische Ausdehnung, die wir vernachlässigen wollen. Damit erhalten wir aus

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 P$$

die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial P}{\partial \varrho} \right)_s \vec{\nabla}^2 \varrho \text{ mit } c_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \varrho} \right)_s}$$

c_1 ist die Schallgeschwindigkeit (1.Schall); die s - und n -Komponenten bewegen sich im Gleichtakt. Aus Gleichung (5) folgt:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\varrho_s \cdot s^2}{\varrho_m} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right) \vec{\nabla}^2 s \text{ mit } c_2 = \sqrt{\frac{\varrho_s}{\varrho_n} \cdot s^2 \cdot \frac{T}{C_V}}$$

Auch hier ist c_2 eine Schallgeschwindigkeit (2.Schall); die s - und n -Komponenten bewegen sich im Gegentakt (Temperaturwellen).

1.3 Energiespektrum der Boseflüssigkeit (^4He)

Es handelt sich wieder um eine phänomenologische Theorie, die auf LANDAU im Jahre 1941 zurückgeht. Man fasst nun gewisse Variablen als Quantenvariablen auf; man spricht auch von einer quantenhydrodynamischen Beschreibung der Energie in den Variablen Dichte $\varrho(\vec{r})$ und Geschwindigkeit. Betrachten wir also das Energiefunktional:

$$E(\varrho, \vec{v}) = \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\vec{r}) \vec{v}^2(\vec{r}) + E_{int}(\varrho)$$

Wir wollen nach kleinen Dichteänderungen entwickeln, also $\varrho(\vec{r}) = \varrho_0 + \delta\varrho(\vec{r})$. Das Integral über $\delta\varrho$ muss verschwinden:

$$\int d^3r \delta\varrho = 0$$

Für den Wechselwirkungsanteil ergibt sich:

$$E_{int}(\varrho) = E_{int}(\varrho_0) + \underbrace{\int \frac{\partial E_{int}}{\partial \varrho} \delta\varrho d^3r}_{=0 \text{ wegen } E'_{int}=C} + \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \underbrace{\frac{\partial^2 E_{int}}{\partial \varrho(r) \partial \varrho(r')}}_{E''_{int}(\vec{r}-\vec{r}')} \delta\varrho(\vec{r}) \delta\varrho(\vec{r}') + \dots$$

Wir erhalten damit:

$$E = E_{int}(\varrho_0) + \frac{1}{2} \varrho_0 \int \vec{v}^2 d^3r + \frac{1}{2} \iint E''_{int}(\vec{r}-\vec{r}') \delta\varrho(\vec{r}) \delta\varrho(\vec{r}') d^3r d^3r'$$

Es besteht ein Zusammenhang zwischen ϱ und \vec{v} durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\varrho \vec{v}) = 0$$

Die Fluktuation von ϱ_0 können wir vernachlässigen, da \vec{v} schon eine kleine Größe ist, und damit folgt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho_0 \vec{\nabla} \vec{v} = 0$$

Wir haben hier eine lineare partielle Differentialgleichung, die wir immer mit einem FOURIER-Ansatz lösen können:

$$\delta\varrho(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \delta\varrho_{\vec{p}} \exp(i\vec{p} \cdot \vec{r})$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich $\dot{\varrho}_{\vec{p}} + \varrho_0 i \vec{p} \cdot \vec{v}_p = 0$ mit $\vec{v}_p \sim \vec{p}$.

$$\vec{v}_p = i \cdot \frac{\dot{\varrho}_{\vec{p}}}{\varrho_0} \cdot \frac{\vec{p}}{p^2} \text{ mit } \int v^2(\vec{r}) d^3 r = \int |v_{\vec{p}}|^2 d^3 p$$

Damit folgt für die Energie:

$$E = E_{int}(\varrho_0) + \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{|\delta \dot{\varrho}_{\vec{p}}|^2}{\varrho_0 p^2} + \frac{1}{2} E''_{\vec{p}} \cdot |\delta \varrho_{\vec{p}}|^2 \right)$$

Dabei handelt es sich um ein System entkoppelter harmonischer Oszillatoren. Wir fassen $\delta \varrho_{\vec{p}}$ als eine Auslenkung auf. Für die Mode \vec{p} bekommen wir die Oszillatorfrequenz $\omega_p^2 = \varrho_0 p^2 E''_p$.

$$E = E_{int}(\varrho_0) + \sum_{\vec{p}} \hbar \omega_p \left(n_p + \frac{1}{2} \right)$$

$n_p = 0, 1, 2, \dots$ ist die Besetzungszahl der Mode p . Die bosonsche Anregungsenergie für dieses System ist also gegeben durch $\varepsilon_p = \hbar \omega_p$. Die Grundzustandsenergie ist:

$$E_0 = E_{int}(\varrho_0) + \sum_p \frac{1}{2} \omega_p \text{ mit } \hbar = 1$$

$$\frac{1}{2} \omega_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle |\delta \dot{\varrho}_p| \rangle_0}{\varrho_0 \cdot p^2} + \frac{1}{2} E''_p \langle |\delta \varrho_p|^2 \rangle_0 = E''_p \langle |\delta \varrho_p| \rangle_0$$

Für einen harmonischen Oszillator gilt (ob klassisch oder quantenmechanisch) $\langle \langle E_{kin} \rangle \rangle = \langle \langle E_{pot} \rangle \rangle$. Mit $\omega_p^2 = \varrho_0 E''_p p^2$ ergibt sich dann:

$$\omega_p = \frac{\varrho_0 \cdot E''_p \cdot p^2}{\frac{2}{V} \cdot E''_p \cdot \langle |\delta \varrho_p|^2 \rangle_0}$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll, den Strukturfaktor zu definieren:

$$S(\vec{p}) = \frac{1}{V m \varrho_0} \cdot \langle \delta \varrho_{\vec{p}} \delta \varrho_{-\vec{p}} \rangle_0$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für Neutronenstreuung $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ist proportional zu diesem Strukturfaktor $S(p)$, wobei \vec{p} der übertragene Impuls ist. Wir betrachten nun die Dichtekorrelationsfunktion, welche die FOURIERtransformierte von $S(p)$ ist:

$$S(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{n_0} \cdot \langle (n(\vec{r}) - n_0)(n(\vec{r}') - n_0) \rangle_0$$

Diese Funktion gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Teilchen bei \vec{r}' zu finden, wenn man ein Teilchen bei \vec{r} betrachtet. Der Dichteoperator lässt sich schreiben als:

$$\hat{n}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$$

$$S(\vec{r}) = \frac{1}{n_0} \left\langle \left(\sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) - n_0 \right) \left(\sum_{i=1}^N \delta(\vec{r}_i - n_0) \right) \right\rangle = \frac{1}{n_0} \left\langle \delta(\vec{r}) \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r}_j) + \sum_{i \neq j}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \delta(\vec{r}_i) - n_0 \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) - n_0 \sum_i \delta(\vec{r}_i) \right\rangle$$

Mit

$$\left\langle \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right\rangle = n(\vec{r}) = n_0$$

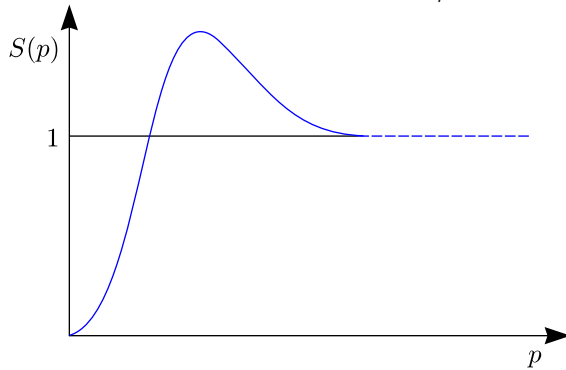
ergibt sich:

$$S(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) + \frac{1}{n_0} \left\langle \sum_{i \neq j}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \delta(\vec{r}_i) \right\rangle - n_0$$

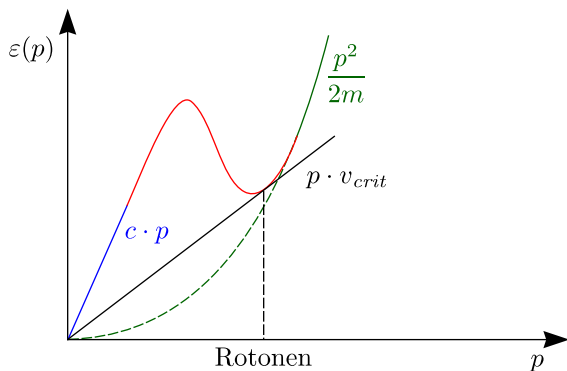
Für kleine r gilt $S(\vec{r}) \mapsto \delta(\vec{r})$ und damit $S(p) \mapsto 1$ für $p \mapsto \infty$. Für große r tragen durch $\delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$ Teilchen bei, die weit entfernt sind und durch $\delta(\vec{r}_i)$ Teilchen um den Nullpunkt herum. Zwischen diesen Teilchen besteht keine Wechselwirkung und damit ergibt sich:

$$\left\langle \sum_{i \neq j} \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \delta(\vec{r}_i) \right\rangle = \left\langle \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \right\rangle \left\langle \sum_i \delta(\vec{r}_i) \right\rangle = n_0^2$$

Nach längerer Rechnung gilt $S(\vec{r}) \propto \frac{1}{r^4}$ und damit $S(p) \propto p$.



$$\boxed{\varepsilon(p) = \frac{p^2}{2mS(p)}}$$



LANDAU hatte diesen Begriff der Rotonen eingeführt, weil er gedacht hatte, dass es sich um Wirbelanregungen handelt.

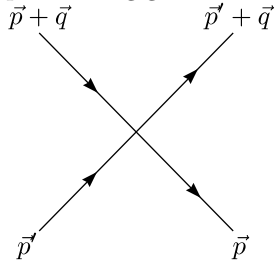
1.3.1 Kriterium für Stabilität des Suprastroms

Wir machen eine GALILEItransformation in das mit \vec{v}_s bewegte System. Dann ist ε_p gegeben durch $\varepsilon_p + \vec{p} \cdot \vec{v}_s$. Wenn $\varepsilon_p + \vec{p} \cdot \vec{v}_s < 0$ ist, findet eine Energieabsenkung durch Erzeugung von Anregungen (Quasiteilchen) statt; der Suprastrom wird damit gedämpft.

$$v_s < \left(\frac{\varepsilon_p}{p} \right)_{\min} \equiv v_{crit}$$

1.4 Nichtideales Bosegas

Wir stellen uns vor, dass es eine kurzreichweitige abstoßende Wechselwirkung U gibt, so dass wir deren Impulsabhängigkeit vernachlässigen können.



Damit können wir den HAMILTONoperator schreiben als:

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{\vec{p}^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{U}{2V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}'+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}}' a_{\vec{p}+\vec{q}}$$
 mit $U = \frac{4\pi a}{m}$

a ist hierbei die s-Wellen-Streulänge. Im Jahre 1947 hat BOGOLYUBOV das Problem durch folgende Idee gelöst. Man betrachtet ein BOSEKondensat mit $\hat{a}_{\vec{p}=\vec{0}} \simeq \langle \hat{a}_{\vec{p}=\vec{0}} \rangle = a_0 = \sqrt{N_0} \gg 1$. $N_0 < N$ ist die Zahl der Teilchen im Kondensat. Bei tiefen Temperaturen können wir diesen Wechselwirkungsterm schreiben als:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{q}} a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_1+\vec{q}} &= a_0^\dagger a_0^\dagger a_0 a_0 + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left(a_0^\dagger a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} a_0 + a_{\vec{p}}^\dagger a_0^\dagger a_0 a_{\vec{p}} + \dots \right) + \sum_{\vec{p}_1 \neq 0, \vec{p}_2 \neq 0, \vec{q} \neq 0} a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2+\vec{q}}^\dagger a_{\vec{p}_2} a_{\vec{p}_1+\vec{q}} = \\ &= N_0^2 \cdot \left[1 + \frac{1}{N_0} \sum_{\vec{p} \neq 0} \left(4a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) + O\left(\frac{1}{N_0^2}\right) \right] \end{aligned}$$

Den Term der Ordnung $\frac{1}{N_0^2}$ vernachlässigen wir. An dieser Stelle benutzen wir, dass der Teilchenzahloperator zusammenhängt über die Summe des Teilchenzahloperators für den Zustand $\vec{p} = 0$ und für die Zustände $\vec{p} \neq 0$:

$$\hat{N} = N_0 + \sum_{\vec{p} \neq 0} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}$$

Damit ersetzen wir N_0 und erhalten für den HAMILTONoperator:

$$H = \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \frac{\vec{p}^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{U}{2V} \left(\hat{N} - \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \right)^2 + \frac{U}{2V} \left(\hat{N} - \sum_{\vec{p}} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \cdot \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \left(4a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) + O(1) \right)$$

Mit $u = U \cdot \frac{N}{V}$ erhalten wir schließlich:

$$H = uN + \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \left[\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + u \right) a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{u}{2} \left(a_{\vec{p}} a_{-\vec{p}} + a_{\vec{p}}^\dagger a_{-\vec{p}}^\dagger \right) \right]$$

Dieser HAMILTONoperator ist quadratisch in $a_{\vec{p}}$ und $a_{\vec{p}}^\dagger$. Wie findet man nun die Eigenwerte dieses HAMILTONoperators? Wir machen dazu eine BOGOLYUBOV-Transformation:

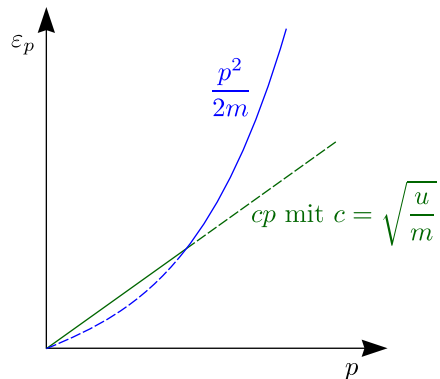
$$\hat{a}_{\vec{p}} = \frac{1}{\sqrt{1 - A_{\vec{p}}^2}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} + A_{\vec{p}} \alpha_{-\vec{p}}^\dagger \right), \quad \hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1 - A_{\vec{p}}^2}} \left(\hat{a}_{-\vec{p}}^\dagger + A_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}} \right) \quad \text{mit } A_{\vec{p}} = A_{-\vec{p}}$$

Damit erhalten wir: Wir wählen den Vorfaktor des letzten Ausdrucks gleich null durch geeignete Wahl von $A_{\vec{p}}$, nämlich:

$$A_{\vec{p}} = \frac{1}{u} \left[-\frac{\vec{p}^2}{2m} - u + \sqrt{\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + u \right)^2 - u^2} \right]$$

Damit erhalten wir folgenden transformierten HAMILTONoperator:

$$H = \frac{1}{2}uN - \frac{1}{2} \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \left[\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + u \right) - \sqrt{\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + u \right)^2 - u^2} \right] + \sum_{\vec{p} \neq \vec{0}} \varepsilon_p \alpha_{\vec{p}}^\dagger \alpha_{\vec{p}} \text{ mit } \varepsilon_{\vec{p}} = \sqrt{\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + u \right)^2 - u^2}$$



Kapitel 2

Transporteigenschaften von Festkörpern

2.1 Quasiklassische Dynamik von Blochelektronen

Es befinde sich ein Elektron im äußeren Feld mit charakteristischer Länge λ , wobei λ viel größer als die Ausdehnung Δx der Wellenpakete sei und dies wiederum viel größer als a .

2.1.1 Wiederholung des Blochtheorems

Wir betrachten ein periodisches Potential $U(\vec{r}) = U(\vec{r} + \vec{R})$. Die FOURIERtransformierte von $U(\vec{r})$ lautet:

$$U(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} U_{\vec{G}} \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r})$$

Wir betrachten die Streuung im Impulsraum:

$k \in 1.$ BRILLOUIN-Zone ist eine gute Quantenzahl. Damit folgt:

$$\psi_{\vec{k}n}(\vec{r} + \vec{R}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}) \psi_{\vec{k}n}(\vec{r})$$

$$\psi_{\vec{k}n}(\vec{r}) \simeq \sum_{\vec{R}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}) \psi_n(\vec{r} - \vec{R})$$

ψ_n sind die atomaren Zustände $H\psi_n = E\psi_n$. $\psi_{\vec{k}n}$ lassen sich exakt durch WANNIER-Funktionen darstellen:

$$\psi_{\vec{k}n}(\vec{r}) = \sum_{\vec{R}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}) \phi_n(\vec{r} - \vec{R})$$

$\phi(\vec{r} - \vec{R})$ sind nun die WANNIER-Funktionen. Durch umgekehrte FOURIERtransformation folgt:

$$\phi_n(\vec{r} - \vec{R}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{1.\text{BZ}} \underbrace{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R}) \psi_{kn}(\vec{r})}_{\psi_{nm}(\vec{r} - \vec{R})} d^3k$$

Die WANNIERfunktionen sind orthogonal und vollständig:

$$\frac{(2\pi)^3}{V} \int d^3\vec{r} \phi_n^*(\vec{r} - \vec{R}) \phi_{n'}(\vec{r} - \vec{R}') = \delta_{\vec{R}\vec{R}'} \delta_{nn'}$$

$$\sum_{n, \vec{R}} \phi_n^*(\vec{r} - \vec{R}) \phi_{n'}(\vec{r} - \vec{R}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet:

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{r}, t) = (H_0 + U^{ext})\psi(\vec{r}, t)$$

$\psi(\vec{r}, t)$ lässt sich nun durch die WANNIERfunktionen darstellen;

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{n_1, \vec{R}_1} a_{n_1}(\vec{R}_1, t)\phi_{n_1}(\vec{r} - \vec{R}_1)$$

$a_{n_1}(\vec{R}_1, t)$ sind Entwicklungskoeffizienten. Die BLOCHZustände ψ_{kn} sind Eigenzustände von $H_0 = H_{kin} + U$. Wir lassen nun H_0 auf ϕ_{n_1} wirken:

$$\begin{aligned} H_0\phi_{n_1}(\vec{r} - \vec{R}_1) &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{1.BZ} d^3k \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{R}) E_{\vec{k}n} \cdot \sum_{\vec{R}'} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{R}') \phi_n(\vec{r} - \vec{R}') = \\ &= \sum_{\vec{R}'} E_n(\vec{R} - \vec{R}') \phi_n(\vec{r} - \vec{R}') \text{ mit } E_n(\vec{R}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{1.BZ} d^3k \exp[i\vec{k} \cdot (\vec{R}' - \vec{R})] E_{n\vec{k}} \end{aligned}$$

Damit folgt für die SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$\sum_{n_1, \vec{R}_1} \left[i\hbar\partial_t a_{n_1}(\vec{R}_1, t)\phi_{n_1}(\vec{r} - \vec{R}_1) - \left(\sum_{\vec{R}'} E_{n_1}(\vec{R}_1 - \vec{R}')\phi_{n_1}(\vec{r} - \vec{R}') + U^{ext} \right) a_{n_1}(\vec{R}_1, t) \right] = 0$$

Wir multiplizieren

$$\frac{(2\pi)^3}{V} \int d^3V \phi_n^*(\vec{r} - \vec{R})$$

von links an die SCHRÖDINGER-Gleichung, womit wir unter Ausnutzung der Orthonormalitätsrelationen erhalten:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t a_n(\vec{R}, t) &= \sum_{\vec{R}_1, n_1} \left[\delta_{nn_1} E_n(\vec{R}_1 - \vec{R}) + U_{n\vec{R}n_1\vec{R}_1}^{ext} \right] a_{n_1}(\vec{R}_1, t) \text{ mit} \\ \text{mit } U_{n\vec{R}n_1\vec{R}_1}^{ext} &= \frac{(2\pi)^3}{V} \int d^3\vec{r} \phi_n^*(\vec{r} - \vec{R}) U^{ext}(\vec{r}) \phi_{n_1}(\vec{r} - \vec{R}_1) \approx \delta_{nn_1} \delta_{\vec{R}\vec{R}_1} U^{ext}(\vec{R}) \end{aligned}$$

Für $\vec{R} = \vec{R}_1$ ist U^{ext} ein Erwartungswert für die Energie eines Elektrons im gestörten Potential. Unter Ausnutzung obiger Näherung für $U_{n\vec{R}n_1\vec{R}_1}^{ext}$ folgt mit dem Translationsoperator:

$$\sum_{\vec{R}_1} E_n(\vec{R}_1 - \vec{R}) a_{n_1}(\vec{R}_1, t) = \sum_{\vec{R}_1} E_n(\vec{R}_1) a_{n_1}(\vec{R}_1 + \vec{R}, t) = \sum_{\vec{R}_1} E_n(\vec{R}_1) \exp[i\vec{R}_1 \cdot (-i\vec{\nabla}_{\vec{r}})] a_{n_1}(\vec{R}, t)$$

Dies folgt nämlich aus:

$$f(x+a) = f(x) + a \frac{\partial}{\partial x} f(x) + \dots = \exp\left(a \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x) = \exp\left(ia \left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) f(x)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass der Impuls der Generator für Translationen ist. Dies ist nun wieder eine FOURIER-Transformierte:

$$\sum_{\vec{R}_1} E_n(\vec{R}_1) \exp[i\vec{R}_1 \cdot (-i\vec{\nabla}_{\vec{R}})] a_{n_1}(\vec{R}, t) \equiv E_{\vec{k}n} |_{\vec{k}=-i\vec{\nabla}_{\vec{R}}}$$

Daraus folgt nun eine relativ einfache SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$i\hbar\partial_t a_n(\vec{r}, t) = \left[E_{\vec{k}n} |_{\vec{k}=-i\vec{\nabla}} + U^{ext}(\vec{r}, t) \right] a_n(\vec{r}, t)$$

Dies ist die SCHRÖDINGER-Gleichung für BLOCH-Elektronen.

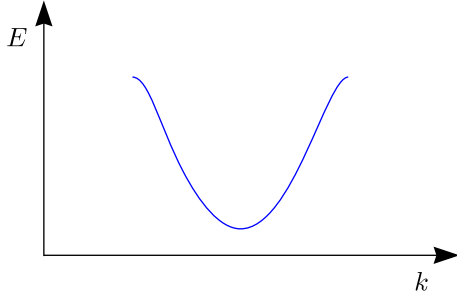
2.1.2 Beispiel: Statische Störstelle

Wir betrachten das Störstellenpotential:

$$U^{ext}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{\epsilon r}$$

Es sei $q = +e > 0$ im Halbleiter. Entwicklung untere Bandkante:

$$E(k) \approx E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$



Wir betrachten die gebundenen Zustände im Wasserstoffatom:

$$E_n = \frac{m^* e^4}{2\epsilon^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

Aus $m^* = 0,1m$ und $\epsilon \approx 10$ ergibt sich $E_1 \approx 10^{-3}$ Ry.

2.2 Quasiklassische Bewegungsgleichungen für Blochelektronen

Man ersetzt $-i\hbar\vec{\nabla}$ durch den klassischen Impuls \vec{p} . Außerdem ersetzen wir:

$$H_{eff} = E_n(-i\vec{\nabla}) + U^{ext}(\vec{r}) \mapsto H_{kl} = E_n\left(\frac{\vec{p}}{\hbar}\right) + U^{ext}(\vec{r})$$

Damit erhalten wir die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} H_{kl} \quad \text{und} \quad \dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} H_{kl}$$

2.2.1 Elektrisches Feld

Betrachten wir ein elektrisches Feld

$$U^{ext} = -e\phi \quad \text{mit} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

und rechnen weiter:

$$\dot{\vec{p}} = \hbar \dot{\vec{k}} = -e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad \text{und} \quad \dot{\vec{r}} = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_n(\vec{k}) \Big|_{\vec{k} = \frac{\partial E_{\vec{k}}}{\partial (\hbar \vec{k})} = \frac{\vec{p}}{\hbar}} \equiv v_{\vec{k}n}$$

$v_{\vec{k}n}$ ist die Gruppengeschwindigkeit der BLOCHElektronen.

2.2.2 Magnetisches Feld

\vec{B} ist gegeben durch $\vec{\nabla} \times \vec{A}$. Der mechanische Impuls $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ wird ersetzt durch $\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$. Damit ist die klassische HAMILTONfunktion gegeben durch:

$$H_{kl} = E_n \left(\frac{\vec{p}}{\hbar} + \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \right)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial}{\partial x_i} H_{kl} = -\sum_j \frac{\partial E_n(\vec{k})}{\partial k_j} \frac{e}{\hbar c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -\sum_j (v_{\vec{k}n})_j \cdot \frac{e}{c} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = -\sum_j (v_{\vec{k}n})_j \cdot \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= -\sum_j (v_{\vec{k}n})_j \cdot \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) - \sum_j (v_{\vec{k}n})_j \cdot \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = -\frac{e}{c} (\vec{v}_n \times \vec{B})_i - \frac{e}{c} (\vec{v}_{\vec{k}n} \cdot \vec{\nabla}) A_i \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}(t), t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}(t), t) + (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r}(t), t) \Leftrightarrow \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{r}(t), t) - \frac{e}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}(t), t) = \frac{e}{c} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}(\vec{r}(t), t)$$

und $\phi = 0$ folgt schließlich in Vektorschreibweise:

$$\hbar \dot{\vec{k}} = \dot{\vec{p}} + \frac{e}{c} \frac{d}{dt} \vec{A} = -e \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{e}{c} (\vec{v}_{\vec{k}n} \times \vec{B}) = -e \vec{E} - \frac{e}{c} (\vec{v}_{\vec{k}n} \times \vec{B}) \Rightarrow \boxed{\hbar \dot{\vec{k}} = -e \vec{E} - \frac{e}{c} (\vec{v}_{\vec{k}n} \times \vec{B})}$$

Auf den ersten Blick sehen diese Gleichungen ähnlich aus wie in der klassischen Mechanik. \vec{k} ist nun aber eine komplizierte Funktion, die periodisch im k -Raum ist.

2.3 Blochelektronen im konstanten elektrischen Feld

Wir gehen aus von der Gleichung

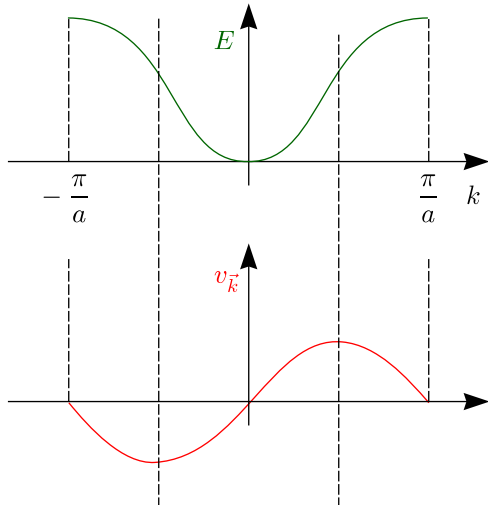
$$\hbar \dot{\vec{k}} = -e \vec{E}$$

Da \vec{E} zeitunabhängig ist, können wir die Gleichung sofort integrieren:

$$\boxed{\vec{k}(t) = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot t + \vec{k}(0)}$$

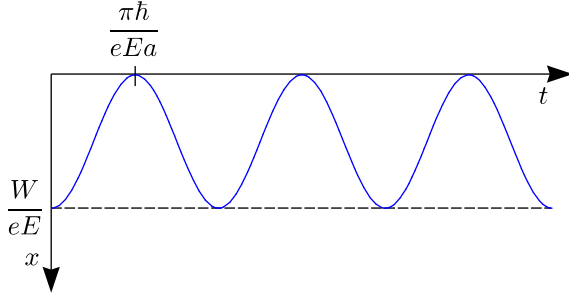
$\vec{k}(t)$ wächst also linear mit der Zeit, was einsichtig ist. Des weiteren gilt:

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}_{\vec{k}}(t') dt'$$

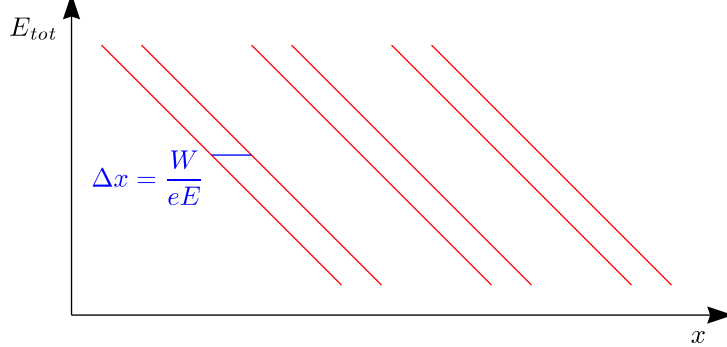


v_{k_x} ist beschränkt, womit $\vec{r}(t)$ oszilliert. Wir betrachten ein Modellbeispiel in einer Dimension, nämlich $E_k = -\frac{W}{2} \cos(ak)$, wobei W die Bandbreite und a die Gitterkonstante ist (tight-binding-Modell). Durch Differenzieren erhalten wir $v_k = \frac{W}{2} \frac{a}{\hbar} \sin(ak)$.

$$x(t) = \int_0^t \frac{W}{2} \frac{a}{\hbar} \sin\left(\frac{e}{\hbar} E t' a\right) dt' = -\frac{W}{2eE} \left[\cos\left(\frac{e}{\hbar} E t a\right) - 1 \right] + x(0)$$



Wir betrachten nun das Bild der „gekippten Bänder“: $E_{total} = E_k - eEx$.



Das Elektron wird durch BRAGGSTREUUNG an den Bandgrenzen reflektiert. Dies bezeichnet man als **Bloch-Oszillationen**. In unreinen Festkörpern treten diese Oszillationen nicht auf, da die Elektronen beispielsweise durch Elektron-Elektron-Streuung oder auch durch Streuung an Phononen in andere Energiezustände gelangen und damit das Band durchlaufen, ohne reflektiert zu werden. Der Effekt wurde erst vor etwa 15 Jahren an sehr reinen Festkörpern experimentell nachgewiesen. Außerdem werden die Oszillationen gestört durch Tunnelprozesse zwischen den Energiebändern.

2.3.1 Tunneln zwischen Energiebändern: elektrischer Durchbruch

Am Bandrand (BRILLOUINZONENGRENZE) sind die Zustände $|\vec{k}\rangle$ und $|\vec{k} - \vec{G}\rangle$ näherungsweise entartet; es gilt also $E_{\vec{k}}^0 \simeq E_{\vec{k} - \vec{G}}^0$ für $\vec{k} \simeq \frac{\vec{G}}{2}$. Die Wellenfunktion $\psi_{\vec{k}}$ ist dann keine reine BLOCHWELLE mehr:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = c_{\vec{k}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + c_{\vec{k} - \vec{G}} \exp(i(\vec{k} - \vec{G}) \cdot \vec{r})$$

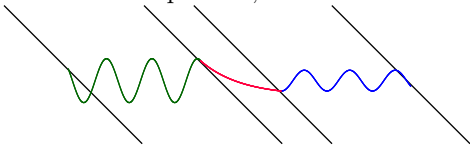
Die Energieeigenwertbedingung hatten wir schon früher berechnet:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E \right) \left(\frac{\hbar^2 (\vec{k} - \vec{G})^2}{2m} - E \right) = |U_{\vec{G}}|^2$$

Wir verlangen, dass nun die Energie E in der Energielücke liegt. Damit ist \vec{k} nicht mehr reell, sondern komplex: $k = \frac{1}{2}G + iq$ (q ist reell und $\vec{k}, \vec{q} \parallel \vec{G}$). Für $q \ll G$ folgt durch Einsetzen:

$$\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = \frac{1}{4} \frac{|U_G|^2}{2E_{\frac{G}{2}}^0} \Rightarrow q = \frac{G}{2} \frac{E_{Lücke}}{2E_{\frac{G}{2}}^0}$$

Da k nun komplex ist, haben wir in der Energielücke eine exponentiell abklingende Wellenfunktion.



Die Tunnelwahrscheinlichkeit ist gegeben durch:

$$P \sim [\exp(-qd)]^2 \text{ mit } d = \frac{E_{\text{Lücke}}}{eE}$$

Mit $G = \frac{2\pi}{a}$ ergibt sich weiter:

$$P \sim \exp \left[-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{\text{Lücke}}^2}{eEaE_{\frac{G}{2}}^0} \right]$$

Für $eEa \gtrsim \frac{E_{\text{Lücke}}^2}{W}$ liegt die Tunnelwahrscheinlichkeit in der Größenordnung von eins und wird haben damit einen elektrischen Durchbruch. Dies lässt sich bekanntlich bei Isolatoren beobachten, wenn man eine große Spannung anlegt.

2.3.2 Geschwindigkeit und effektive Masse der Blochelektronen

Die Gruppengeschwindigkeit war gegeben durch:

$$v_{\vec{k}n} = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}n}$$

Die effektive Masse definieren wir durch:

$$(m_{\vec{k}n}^{-1})_{ij} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E_{\vec{k}n}}{\partial k_i \partial k_j}$$

Wir betrachten die Beschleunigung von Ladungsträgern im elektrischen Feld:

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_{\vec{k}n,i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{\vec{k}n}}{\partial k_i} \right) = \frac{1}{\hbar} \sum_j \frac{\partial^2 E_{\vec{k}n}}{\partial k_i \partial k_j} \frac{dk_j}{dt}$$

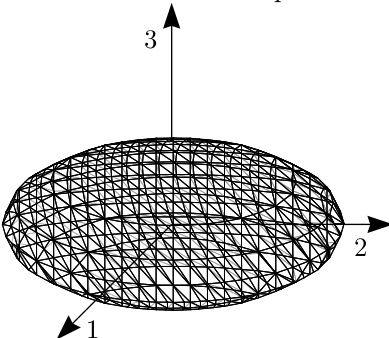
Mit $\frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{e}{\hbar} \vec{E}$ erhalten wir:

$$\overleftarrow{m} \cdot \dot{\vec{v}} = -e\vec{E}$$

\overleftarrow{m} ist das Inverse von $(m^{-1})_{ij}$.

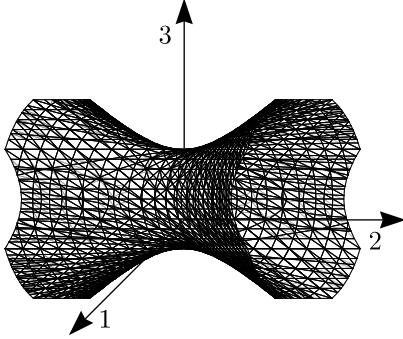
1.Beispiel:

Wir betrachten eine ellipsoide FERMIFläche. Die Eigenwerte m_i von \overleftarrow{m} sind größer null.



2.Beispiel:

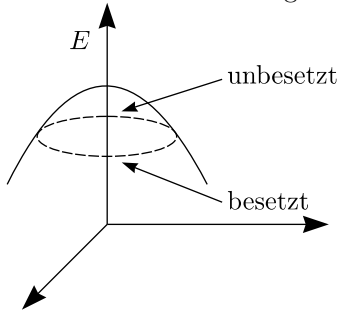
Die FERMIflache berschneide sich mit den Rändern der BRILLOUINzone.



Dies ist zum Beispiel bei Edelmetallen der Fall.

3.Beispiel:

Wir betrachten ein fast gefülltes Band:



Hier sind alle $m_i < 0$. Anstelle von den Elektronen betrachten wir die Löcher („holes“). Die Energie der Löcher ist dann $E_{L\vec{k}} = E_V - E_{\vec{k}}$ und für die effektive Masse gilt $\vec{m}_h = -\vec{m}$.

$$\boxed{\vec{m}_h \cdot \vec{v} = e\vec{E}}$$

Der Beitrag eines gefüllten Bands zum elektrischen Strom verschwindet:

$$\vec{j}_{el} = 2 \int_{1.BZ} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(-e\vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \right) = 0$$

$E_{\vec{k}}$ ist periodisch, also gilt:

$$\int_{1.BZ} d^3k E_{\vec{k}+\vec{q}} = \text{Wert unabhängig von } \vec{q}$$

$$\int d^3k \vec{\nabla}_{\vec{q}} E_{\vec{k}+\vec{q}} = 0 = \int d^3k \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}+\vec{q}} = 0$$

Für $\vec{q} = \vec{o}$ folgt obige Behauptung.

$$\vec{j}_{el} = -e \sum_{\sigma} \int_{\text{besetzt}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}} = e \sum_{\sigma} \int_{\text{unbesetzt}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}}$$

Wir können also nur mit den Löchern rechnen.

2.4 Blochelektronen im Magnetfeld

Wir betrachten nochmals die Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}_{\vec{k}} = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}}$$

$$\dot{\vec{k}} = -\frac{e}{\hbar c} \vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}$$

Wir berechnen nun:

$$\dot{E}_{\vec{k}} = \vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{k}} = \hbar \vec{v}_{\vec{k}} \cdot (\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}) \cdot \left(-\frac{e}{\hbar c}\right) = 0$$

Die Bahnkurven $\vec{k}(t)$ sind Schnittkurven von Ebenen senkrecht \vec{B} mit den Energieflächen. Wie erhalten wir die Bahnkurven im Ortsraum $\vec{r}(t)$? Dazu operieren wir mit $\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$ auf die zweite Gleichung:

$$\hat{B} \times \hbar \dot{\vec{k}} = -\frac{eB}{c} (\dot{\vec{k}} - \hat{B}(\hat{B} \cdot \dot{\vec{r}})) = -\frac{eB}{c} \dot{\vec{r}}_{\perp}$$

Diese Gleichung können wir nun integrieren:

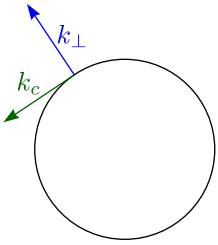
$$\boxed{\vec{r}_{\perp}(t) - \vec{r}_{\perp}(0) = -\frac{\hbar c}{eB} \hat{B} \times (\vec{k}(t) - \vec{k}(0))}$$

Die Bahnkurven $\vec{r}(t)$ ergeben sich aus $\vec{k}(t)$ durch Rotation um 90° und Skalierung mit dem Faktor $-\frac{\hbar c}{eB}$. Im Falle geschlossener Bahnen $\vec{k}(t)$ haben wir eine periodische Bewegung. Die Umlaufzeit ist dann gegeben durch:

$$T_0 = \oint_C \frac{dk_c}{|\dot{\vec{k}}|} = \frac{\hbar^2 c}{eB} \oint_C \frac{dk_c}{|\vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}}|_{\perp}}$$

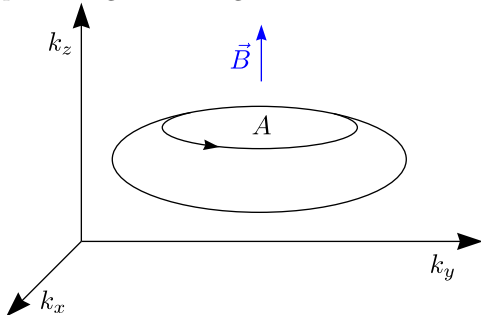
Wir definieren die von der Bahnkurve eingeschlossene Fläche A :

$$A = \int_{E_{\vec{k}} \leq E_F} dk_c dk_{\perp} = \int dk_c \left(\frac{dk_{\perp}}{dE} \right) dE = \int dk_c \left(\frac{1}{|\vec{\nabla}_{\vec{k}} E_{\vec{k}}|_{\perp}} \right) dE$$



$$\boxed{T_0 = \frac{\hbar^2 c}{eB} \frac{\partial A(E, k_z)}{\partial E}}$$

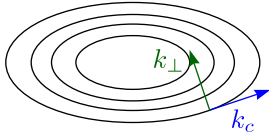
T_0 lässt sich also in Zusammenhang bringen mit der Änderung der von der Bahnkurve eingeschlossenen Fläche pro Energieänderung.



Es ergeben sich im konstanten \vec{B} -Feld periodische Bewegungen mit der Umlaufzeit T_0 .

$$T_0 = \frac{\hbar^2 c}{eB} \frac{\partial A(E, k_z)}{\partial E}$$

A ist die von der (ebenen) Bahnkurve eingeschlossene Fläche. Vergrößert sich die Energie, so wird auch die Fläche größer. Wir projizieren das ganze in die k_x - k_y -Ebene:



k_{\perp} zeigt in Richtung des Gradienten der Energie.

$$dk_{\perp} = \frac{dE}{\left| \frac{dE}{dk_{\perp}} \right|}$$

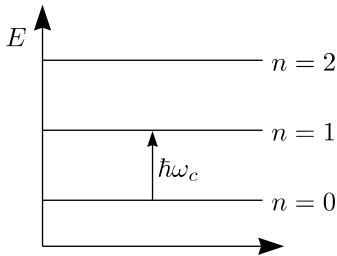
$$A = \int_C dk_c dk_{\perp} = \int dk_c \frac{dE}{\left| \vec{\nabla}_k E_k \right|_{\perp}}$$

Man bezeichnet nun $\omega_c(E, k_z) = \frac{2\pi}{T_0}$ als **Zyklotronfrequenz**. In Erinnerung an die Mechanik schreiben wir die Zyklotronfrequenz ω_c durch Einführung der Zyklotronmasse m^* :

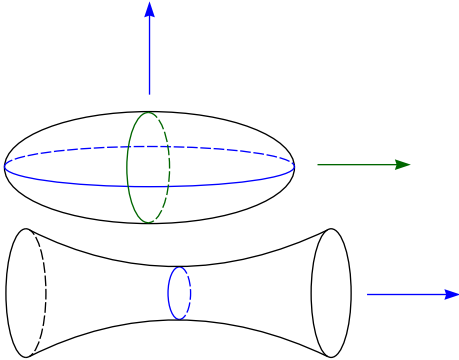
$$\omega_c(E, k_z) = \frac{eB}{cm^*(E, k)} \quad \text{mit} \quad m^*(E, k_z) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial A(E, k_z)}{\partial E}$$

Wir können diese periodische Bewegung nun quantisieren:

$$E_{n, cycl} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$



Die Absorption von elektromagnetischer Strahlung ist am stärksten für ω_c , die extremalen Flächen entsprechen.



Man kann damit Rückschlüsse auf FERMIFLÄCHEN schließen.

2.5 Boltzmann-Gleichung

Wir beschreiben die Dynamik der BLOCHElektronen quasiklassisch und die Wechselwirkungsprozesse quantenmechanisch. Der zentrale Begriff der quasiklassischen Transporttheorie ist die Verteilungsfunktion der Elektronen im Phasenraum (im Sinne der klassischen Mechanik): $f_{\vec{k}n}(\vec{r}, t)$. Man spricht auch von der mittleren Besetzung der BLOCHZustände $|\vec{k}, n\rangle$, wobei $0 < f_{\vec{k}n} < 1$ gilt. Wodurch ändert sich $f_{\vec{k}n}(\vec{r}, t)$ im Laufe der Zeit?

- 1.) Strömung der Teilchen:

Da sich die Teilchen mit der Geschwindigkeit \vec{v}_k bewegen, gilt für kleine Zeiten $f_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = f_{\vec{k}}(\vec{r} - \vec{v}_k t, 0)$. Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Strömung}} = -\vec{\nabla}_k \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_{\vec{k}}$$

Es handelt sich um die Strömung im Ortsraum.

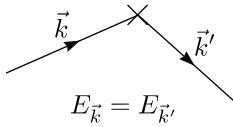
- 2.) Einfluss äußerer Felder:

Hier betrachten wir gewissermaßen eine Strömung im \vec{k} -Raum:

$$f_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = f_{\vec{k}-\dot{\vec{k}}t}(\vec{r}, 0) \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{Feld}} = -\dot{\vec{k}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_{\vec{k}}$$

- 3.) Stöße von Teilchen miteinander (mit Phononen, Störstellen)

- a.) Störstellenstreuung

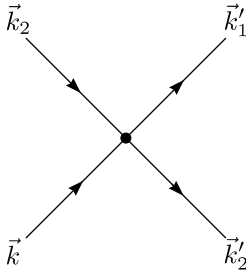


Es handelt sich um eine elastische Streuung, womit Energieerhaltung gilt. Wir berücksichtigen außerdem durch den Faktor $1 - f_{\vec{k}'}$, dass der Zustand \vec{k}' nicht besetzt ist:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = I_{\text{imp}}(f_{\vec{k}}) = - \int_{\vec{k}'} W_{\vec{k}\vec{k}'} [f_{\vec{k}}(1 - f_{\vec{k}'}) - f_{\vec{k}'}(1 - f_{\vec{k}})] \delta(E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}'}) = - \int_{\vec{k}'} W_{\vec{k}\vec{k}'} [f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}'}]$$

Wir müssen natürlich auch den umgekehrten Prozess betrachten, dass nämlich ein Elektron mit \vec{k}' durch Streuung in \vec{k} übergeht. Es ist $W_{\vec{k}'\vec{k}} = W_{\vec{k}\vec{k}'}$, da wir eine Störstelle betrachten, für die Zeitumkehrinvarianz gilt. Dies gilt beispielsweise nicht für magnetische Störstellen, die durch Spins charakterisiert werden.

- b.) Elektron-Elektron-Streuung



$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll, el-el}} &= I_{\text{el-el}}(f_{\vec{k}}) = \\ &- \int_{\vec{k}_2} \int_{\vec{k}_1'} \int_{\vec{k}_2'} W_{\vec{k}\vec{k}_2, \vec{k}_1'\vec{k}_2'} f_{\vec{k}} f_{\vec{k}_2} (1 - f_{\vec{k}_1'}) (1 - f_{\vec{k}_2'}) - (1 - f_{\vec{k}}) (1 - f_{\vec{k}_2}) f_{\vec{k}_1'} f_{\vec{k}_2'} \times \\ &\times \delta_{\vec{k} + \vec{k}_2, \vec{k}_1' + \vec{k}_2' + \vec{G}} \cdot \delta(E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}_2} - E_{\vec{k}_1'} - E_{\vec{k}_2'}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich die BOLTZMANNgleichung für BLOCHElektronen:

$$\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_{\vec{k}} + \dot{\vec{k}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_{\vec{k}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad \text{mit } \dot{\vec{r}} = v_{\vec{k}}, \quad \hbar \dot{\vec{k}} = -e\vec{E} - \frac{e}{c}(\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B})$$

Der Term auf der rechten Seite beschreibt also die Kollisionen. Für ein globales Gleichgewicht ist $f_{\vec{k}}$ orts- und zeitunabhängig und außerdem $\dot{\vec{k}} = \vec{0}$. Damit ist die linke Seite gleich null, womit auch das Stoßintegral verschwinden muss. Bei der Elektron-Elektron-Streuung ist dies nur möglich, wenn der Ausdruck in der Klammer verschwindet:

$$f_{\vec{k}_1} f_{\vec{k}_2} (1 - f_{\vec{k}'_1})(1 - f_{\vec{k}'_2}) - (1 - f_{\vec{k}})(1 - f_{\vec{k}_2}) f_{\vec{k}'_1} f_{\vec{k}'_2} = 0$$

Wir nehmen an, dass $f_{\vec{k}}$ die FERMIfunktion

$$f_{\vec{k}} = \frac{1}{\exp(\beta(E_{\vec{k}} - \mu)) + 1}, \quad 1 - f_{\vec{k}} = \frac{\exp(\beta(E_{\vec{k}} - \mu))}{\exp(\beta(E_{\vec{k}} - \mu)) + 1} \quad \text{mit } \beta = \frac{1}{k_B T}$$

ist uns setzen diese ein:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \cdot 1 \cdot \exp(\beta(E_{\vec{k}'_1} - \mu)) \cdot \exp(\beta(E_{\vec{k}'_2} - \mu)) - \exp(\beta(E_{\vec{k}} - \mu)) \cdot \exp(\beta(E_{\vec{k}_2 - \mu})) \cdot 1 \cdot 1}{(\exp(\beta(E_{\vec{k}} - \mu)) + 1) \cdot (\exp(\beta(E_{\vec{k}_2} - \mu)) + 1) \cdot (\exp(\beta(E_{\vec{k}'_1} - \mu)) + 1) \cdot (\exp(\beta(E_{\vec{k}'_2} - \mu)) + 1)} = \\ & = \frac{\exp(\beta(E_{\vec{k}'_1} - \mu)) + \beta(E_{\vec{k}'_2} - \mu) \cdot [1 - \exp(-\beta(E_{\vec{k}} + E_{\vec{k}_2} - E_{\vec{k}'_1} - E_{\vec{k}'_2}))]}{(\exp(\beta(E_{\vec{k}} - \mu)) + 1) \cdot (\exp(\beta(E_{\vec{k}_2} - \mu)) + 1) \cdot (\exp(\beta(E_{\vec{k}'_1} - \mu)) + 1) \cdot (\exp(\beta(E_{\vec{k}'_2} - \mu)) + 1)} = 0 \end{aligned}$$

Dies gilt aufgrund der Energieerhaltung! Das Stoßintegral ist gleich null für jede Verteilungsfunktion mit der Form einer FERMIfunktion mit einem beliebigen chemischen Potential und einer beliebigen Temperatur. Das Stoßintegral verschwindet auch für eine **lokale Gleichgewichtsverteilung**:

$$f_{\vec{k}}^l = \frac{1}{\exp(\beta(\vec{r}, t)(E_{\vec{k}} - \mu(\vec{r}, t))) + 1}$$

Die Bestimmung von $\mu(\vec{r}, t)$ und $\beta(\vec{r}, t)$ ergibt sich aus der Teilchenzahlerhaltung durch

$$n(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\sigma, n} f_{\vec{k}\sigma, n}(\vec{r}, t) \stackrel{!}{=} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\sigma, n} f_{\vec{k}\sigma, n}^l(\vec{r}, t)$$

und der Energiedichte mit

$$\varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\sigma, n} E_{\vec{k}\sigma, n} f_{\vec{k}\sigma, n} \stackrel{!}{=} \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}\sigma, n} E_{\vec{k}\sigma, n} f_{\vec{k}\sigma, n}^l$$

Wie kann man das physikalisch interpretieren? Die Relaxation aus einem Nicht-Gleichgewichtszustand läuft in zwei Stufen ab, nämlich:

- 1.) Schnelle Relaxation (beispielsweise Femtosekunden-Skala) in einen lokalen Gleichgewichtszustand mit der korrekten Dichte und Energiedichte (die durch Temperatur geregelt wird)
- 2.) Langsame Relaxation ins volle Gleichgewicht

2.5.1 Dissipative Transportprozesse

Diese werden durch die Abweichung von $f_{\vec{k}}$ von der lokalen Gleichgewichtsverteilung beschrieben:

$$\delta f_{\vec{k}} = f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}}^l$$

Fast immer ist $\delta f_{\vec{k}}$ klein, wir können damit in $\delta f_{\vec{k}}$ linearisieren. Wir wollen also die BOLTZMANNgleichung in Abweichung vom lokalen Gleichgewicht linearisieren. Die Abweichung ist nämlich klein für:

☞ kleine äußere langsam variierende Felder (Störungen)

☞ lange räumliche und zeitliche Skalen

Dies bedeutet, dass $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ und $\vec{\nabla}_{\vec{k}}$ klein sind.

Für $\frac{1}{k_F L} \ll 1$ ist

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} f_{\vec{k}}(\vec{r}) \sim \frac{1}{L} \quad \text{und} \quad \frac{\hbar^2 \vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}}}{E_F^2} \ll 1$$

Wir dürfen damit auf der linken Seite der Gleichung bei den Ableitungen $f_{\vec{k}}$ durch $f_{\vec{k}}^l$ ersetzen.

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} f_{\vec{k}}^l = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \frac{1}{\exp(\beta(\vec{r})(E_{\vec{k}} - \mu(\vec{r}))) + 1} \simeq \frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E_{\vec{k}}} \frac{1}{\beta} \left[(E_{\vec{k}} - \mu) \vec{\nabla} \beta - \beta \vec{\nabla} \mu \right] = -\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E_{\vec{k}}} \left[\frac{E_{\vec{k}} - \mu}{T} \vec{\nabla} T + \vec{\nabla} \mu \right]$$

$$\dot{\vec{k}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_{\vec{k}} \simeq -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^0 - \frac{e}{\hbar c} (\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{k}} f_{\vec{k}}^l + \vec{\nabla}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k}}) = -\frac{e}{\hbar} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E_{\vec{k}}} \hbar \vec{v}_{\vec{k}} - \frac{e}{\hbar c} (\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}) \cdot \left(\hbar \vec{v}_{\vec{k}} \frac{\partial f_{\vec{k}}^l}{\partial E_{\vec{k}}} + \vec{\nabla}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k}} \right)$$

$$\boxed{-\frac{\partial f}{\partial E_{\vec{k}}} \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \left[\vec{\nabla} T \left(\frac{E_{\vec{k}} - \mu}{T} \right) + e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \mu \right) \right] = \left(\frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t} \right)_{coll} \underbrace{-\vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} \delta f_{\vec{k}}}_{\simeq 0} + \frac{e}{\hbar c} (\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k}} - \frac{\partial f_{\vec{k}}}{\partial t}}$$

Den Term $\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \mu$ bezeichnet man als elektrochemisches Feld. Die BOLTZMANN-Gleichung ist damit linearisiert.

2.5.2 Elektrische Leitfähigkeit

Diese wird bestimmt durch Streuprozesse der Elektronen:

- 1.) Störstellenstreuung
- 2.) Elektron-Elektron-Streuung
- 3.) Elektron-Phonon-Streuung

Bei tiefen Temperaturen $T \ll \theta_D$ (DEBYE-Temperatur) ist die Störstellenstreuung dominant, womit wir zuerst diese Art der Streuung betrachten wollen.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = - \int W(\vec{k}, \vec{k}') [f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}'}] = - \int W(\vec{k}, \vec{k}') [f_{\vec{k}}^l + \delta f_{\vec{k}} - f_{\vec{k}'}^l - \delta f_{\vec{k}'}] d^3 k' \simeq -\frac{1}{\tau_{\vec{k}}} \delta f_{\vec{k}}$$

Diese Näherung bezeichnet man als Relaxationszeitnäherung. Die lineare BOLTZMANN-Gleichung lässt sich nun durch FOURIER-Transformation lösen. Wir betrachten außerdem ein zeitabhängig \vec{E} -Feld der folgenden Form:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_{\omega} \exp(-i\omega t)$$

Außerdem verwenden wir den FOURIERANSATZ $\delta f_{\vec{k}}(t) = \delta f_{\vec{k},\omega} \exp(-i\omega t)$:

$$-\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E_{\vec{k}}} e \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{E}_{\omega} = -\frac{1}{\tau_{\vec{k}}} \delta f_{\vec{k},\omega} + i\omega \delta f_{\vec{k},\omega}$$

Wir erhalten damit:

$$\delta f_{\vec{k},\omega} = \frac{\tau_{\vec{k}}}{1 - i\omega \tau_{\vec{k}}} \frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E_{\vec{k}}} e \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{E}_{\omega}$$

Wie erhalten wir nun den elektrischen Strom?

$$\vec{j}_{\omega} = 2 \cdot \int_{1.BZ} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (-e) \vec{v}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k},\omega} = \frac{1}{4\pi^3} \int dE_{\vec{k}} \int \frac{dS_{\vec{k}}}{\hbar |\vec{v}_{\vec{k}}|} e^2 \frac{\tau_{\vec{k}}}{1 - i\omega \tau_{\vec{k}}} \left(-\frac{\partial f^0}{\partial E_{\vec{k}}} \right) \vec{v}_{\vec{k}} (\vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{E}_{\omega})$$

Es gilt nun $\frac{\partial f^0}{\partial E_{\vec{k}}} \approx \delta(E_{\vec{k}} - \mu)$. Man kann nun $\vec{j}_\omega = \overleftarrow{\sigma} \cdot \vec{E}_\omega$ schreiben, wobei $\overleftarrow{\sigma}$ der Leitfähigkeitstensor ist. Dieser Tensor ist symmetrisch:

$$\sigma_{ij}(\omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{e^2}{h} \int \frac{dS_F}{|\vec{v}_{\vec{k}}|} v_{k_i} v_{k_j} \frac{\tau_{\vec{k}}}{1 - i\omega\tau_{\vec{k}}}$$

Für ein isotropes System reduziert sich dieser Tensor auf die DRUDE-Leitfähigkeit:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n}{m} \cdot \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}$$

$\overleftarrow{\sigma}(\omega = 0)$ ist reell und symmetrisch, lässt sich damit durch eine Hauptachsentransformation auf folgende Form bringen:

$$\overleftarrow{\sigma}(\omega = 0) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Für das System mit geringster Symmetrie (triklines System) besitzt der Tensor drei verschiedene Eigenwerte.

2.5.3 Relaxationszeit für Störstellenstreuung

$$W(\vec{k}, \vec{k}') d^3 k' = \delta(E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}'}) \Gamma(\vec{k}, \vec{k}') dE_{\vec{k}'} d\Omega_{\vec{k}'}$$

$d\Omega_{\vec{k}'}$ ist das Raumwinkelelement. Wir definieren $\tau_{\vec{k}}$ durch:

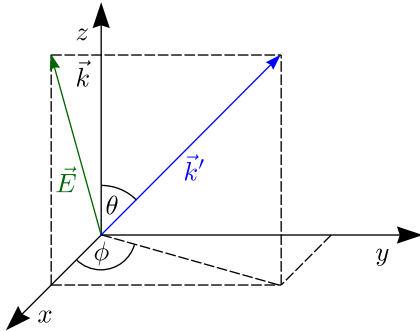
$$\delta f_{\vec{k}} = \left(-\frac{\partial f_{\vec{k}}^0}{\partial E_{\vec{k}}} \right) e\vec{E} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} \tau_{\vec{k}}$$

Für $\omega = 0$ ergibt sich:

$$\vec{v}_{\vec{k}'} \cdot \vec{E} = \int d\Omega_{\vec{k}'} \left[\tau_{\vec{k}} v_{\vec{k}'} \cdot \vec{E} - \tau_{\vec{k}'} \vec{v}_{\vec{k}'} \cdot \vec{E} \right] \Gamma(\hat{k}, \hat{k}')$$

Wir betrachten als Spezialfall eine isotrope Bandstruktur mit $\Gamma = \Gamma(\hat{k} \cdot \hat{k}')$ und erhalten folgende Lösung:

$$\frac{1}{\tau_{\vec{k}}} = \frac{1}{\tau} = 2\pi \int (1 - \cos\theta) \Gamma(\cos\theta) d(\cos\theta)$$



$$v_k E_{\parallel} = \tau \int d(\cos\theta) d\phi v_k \left[E_{\parallel} - E_{\parallel} \cos\theta - \underbrace{E_{\perp} \sin\theta \cos\phi}_{=0} \right] \Gamma$$

$\Gamma(\cos\theta)$ ist gegeben durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer Störstelle:

$$\Gamma(\cos\theta) = N_i v_F \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

N_i ist die Dichte der Störstellen.

$$\frac{1}{\tau} = 2\pi N_i v_F \int_{-1}^1 d(\cos \theta) (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

Elektronen, die gestreut werden, ohne die Richtung zu ändern, liefern keinen Beitrag. Für Rückwärtsstreuung wird der Beitrag maximal. Der Faktor $1 - \cos \theta$ gewichtet Streuprozesse nach der Größe des Impulsübertrags.

$$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}' \Rightarrow q^2 = k_F^2 + k_F^2 - 2k_F^2 \cos \theta = 2k_F^2(1 - \cos \theta)$$

2.5.4 Elektrischer Widerstand durch Elektron-Elektron-Streuung

Dieser ist gegeben durch:

$$\varrho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{e^2 n} \frac{1}{\tau}$$

Die Relaxationsrate $\frac{1}{\tau}$ wird durch das PAULIprinzip, also durch die Besetzung der Elektronenzustände stark eingeschränkt (siehe Quasiteilchen-Zerfallsrate in FERMIFlüssigkeiten). Damals hatten wir abgeschätzt, dass $\frac{1}{\tau}$ ungefähr gegeben ist durch $\frac{(k_B T)^2}{\hbar E_F}$. (Infolgedessen spielt die Elektron-Elektron-Streuung nur bei tiefen Temperaturen $T \ll \theta_D$ eine Rolle, außer wenn $E_F \approx E_F^* \ll E_F^0$ (renormierte FERMIENERGIE). Reine Elektron-Elektron-Streuung führt wegen Impulserhaltung zu $\varrho \mapsto 0$. Wir benötigen also weitere Möglichkeiten für das Elektronensystem, damit es Impuls abgeben können. Betrachten wir also Prozesse, die dem Elektronensystem Impuls entziehen:

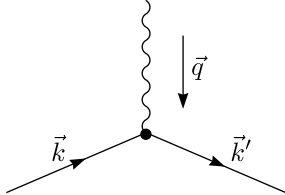
- ☞ Störstellenstreuung (auch für kleine Konzentrationen)
- ☞ Umklappstreuung, BRAGG-Streuung am Gitter mit Impulsübertrag $\hbar \vec{G}$

Bei einem solchen Streuprozess klappt der \vec{k} -Vektor von der einen in die andere BRILLOUINzone um.

Das Resultat ist, dass $\varrho(T) \sim T^2$, da die Elektron-Elektron-Streuung der Kanal ist, welcher die Temperaturabhängigkeit bestimmt.

2.5.5 Elektron-Phonon-Streuung

Die Dynamik des Gitters wird bekanntlich durch Phononen, also quantisierte Gitterschwingungen beschrieben.



Das Stoßintegral ergibt sich durch:

$$I_{e-ph} = - \int_{\vec{k}', \vec{q}} W(\vec{k}, \vec{k}'; \vec{q}) [f_{\vec{k}}(1 - f_{\vec{k}'})n_{\vec{q}} - f_{\vec{k}'}(1 - f_{\vec{k}})(1 + n_{\vec{q}})]$$

Der zweite Term beschreibt die Rückstreuung. Wir definieren wieder die Relaxationsrate

$$\frac{1}{\tau} = \int_{\vec{k}', \vec{q}} W(\vec{k}, \vec{k}'; \vec{q})(1 - f_{\vec{k}'})n_{\vec{q}}$$

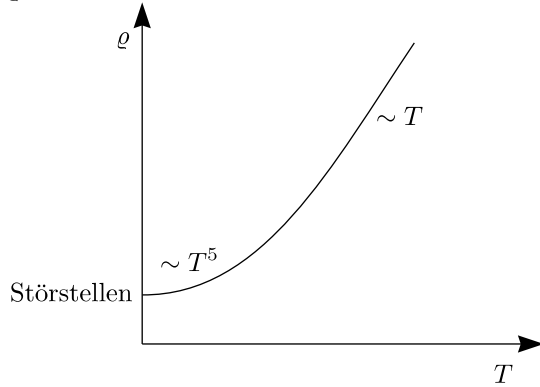
und betrachten die Streuung bei hohen Temperaturen ($T \gg \theta_D$). $n_{\vec{q}}$ für die Phononen ist gegeben durch die BOSEfunktion:

$$n_{\vec{q}} = \frac{1}{\exp(\beta\omega_{\vec{q}}) - 1} \approx \frac{1}{1 + \beta\omega_{\vec{q}} + \dots - 1} \approx \frac{k_B T}{\omega_{\vec{q}}}$$

Die Besetzung der Phononzustände ist proportional zur Temperatur. Damit ist $\frac{1}{\tau}$ und ϱ proportional zu T . Bei tiefen Temperaturen $T \ll \theta_D$ liegen nur noch akustische Phononen vor. Diese haben ein lineares Spektrum, nämlich $\omega_q = cq$. Wir ziehen die langsam veränderliche Funktion W als Mittelwert aus dem Integral heraus. Außerdem ist $E_F \simeq 0$, womit sich ergibt:

$$\frac{1}{\tau} \approx \langle W \rangle \int_0^\infty d\varepsilon' \int_0^\infty d\omega \omega^2 \frac{1}{\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1} \delta(\varepsilon - \varepsilon' + \omega) \approx \theta(\varepsilon) \langle W \rangle \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{\exp\left(\frac{\omega}{T}\right) - 1} \approx \theta(\varepsilon) \langle W \rangle T^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\exp(x) - 1}$$

In sehr reinen Kristallen kompensiert der **Rückstreuterm** den T^3 -Beitrag exakt! Eine genaue Rechnung ergibt $\varrho \propto T^5$ nach BLOCH und GRÜNEISEN.



2.6 Thermoelektrische Transporteigenschaften

Thermodynamische Felder, die Ströme treiben, sind:

$$\vec{E}_{el.chem.} = \vec{E} + \frac{1}{e} \vec{\nabla} \mu \text{ und } \vec{\nabla} T$$

Im Bereich des linearen Response ergibt sich für den elektrischen Strom:

$$\vec{j} = e^2 \overleftrightarrow{K}_0 \cdot \vec{E}_{el.chem.} + \frac{-e}{T} \overleftrightarrow{K}_1 \cdot (-\vec{\nabla} T)$$

Für den Wärmestrom ergibt sich eine ähnliche Form:

$$\vec{j}_Q = -e \overleftrightarrow{K}_1 \cdot \vec{E}_{el.chem.} + \frac{1}{T} \overleftrightarrow{K}_2 \cdot (-\vec{\nabla} T)$$

Aus der BOLTZMANN-Gleichung in Relaxationszeitnäherung ergibt sich:

$$\delta f_{\vec{k}} = \left(\frac{\partial f^0}{\partial E_{\vec{k}}} \right) \tau_{\vec{k}} \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \left[-e \vec{E}_{el.chem.} + \frac{E_{\vec{k}} - \mu}{T} (-\vec{\nabla} T) \right]$$

Wir setzen $\delta f_{\vec{k}}$ in

$$\vec{j} = -e \int \frac{d^3 k}{4\pi^3} \vec{v}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k}} \text{ und } \vec{j}_Q = \int_{\vec{k}} (E_{\vec{k}} - \mu) \vec{v}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k}}$$

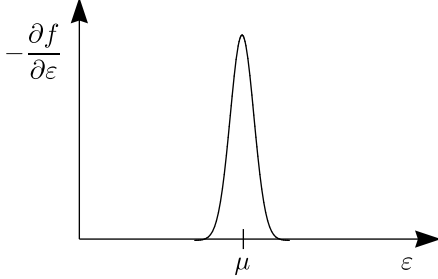
ein und erhalten:

$$(\overleftarrow{K}_n)_{ij} = \frac{1}{4\pi^3} \int dE_k \int \frac{dS_F}{\hbar|v_{\vec{k}}|} v_{\vec{k},i} v_{\vec{k},j} \tau_{\vec{k}} (E_{\vec{k}} - \mu)^n \left(-\frac{\partial f^0}{\partial E_{\vec{k}}} \right) \text{ für } n = 0, 1, 2$$

Die Indizes 0, 1 und 2 bedeuten also, in welcher Potenz $E_{\vec{k}} - \mu$ in den jeweiligen Ausdrücken vorkommt. Wir berechnen nun die einzelnen Tensoren für $n = 0, 1, 2$:

$$(\overleftarrow{K}_0(\mu))_{ij} = \frac{1}{4\pi^3 \hbar} \int \frac{dS_F}{|v_{\vec{k}}|} \tau_{\vec{k}} v_{\vec{k},i} v_{\vec{k},j}$$

Kommen wir zum $E_{\vec{k}}$ -Integral in \overleftarrow{K}_1 :



$$\int dE G(E) (E - \mu) \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right)$$

Wir verwenden folgende Entwicklung für $-\frac{\partial f}{\partial E}$:

$$-\frac{\partial f}{\partial E} = \delta(E - \mu) + \frac{\pi^2}{6} T^2 \delta''(E - \mu) + \dots$$

Der Faktor $\frac{\pi^2}{6}$ ergibt sich durch:

$$\int dE (E - \mu)^2 \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) = \frac{\pi^2}{6} T^2$$

Dies führt also auf folgendes Integral:

$$\begin{aligned} \int dE G(E) (E - \mu) \delta''(E - \mu) &= - \int dE \frac{d}{dE} (G(E - \mu)) \delta'(E - \mu) = - (G'(E - \mu) + G) \delta(E - \mu) + \\ &\int dE [G' + G'] \delta(E - \mu) = 2G'(\mu) \end{aligned}$$

$$(\overleftarrow{K}_1)_{ij} = \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2 \frac{\partial}{\partial \mu} (\overleftarrow{K}_0(\mu))_{ij}$$

$$(\overleftarrow{K}_2)_{ij} = \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2 (\overleftarrow{K}_0(\mu))_{ij}$$

Die Tatsache, dass sowohl beim elektrischen Strom als auch beim Wärmestrom der Tensor \overleftarrow{K}_1 vorkommt, bezeichnet man als ONSAGER-Symmetrie. Überkreuzte Transportkoeffizienten sind „gleich“.

1.) Elektrische Leitfähigkeit: $\overleftarrow{\sigma} = e^2 \overleftarrow{K}_0$

2.) Thermische Leitfähigkeit:

$$\vec{j}_Q = \overleftarrow{\kappa} \cdot (-\vec{\nabla} T)$$

Für $\vec{j} = \vec{\sigma}$ ergibt sich:

$$\vec{E}_{el.chem} = -\frac{1}{e^2} \overleftarrow{K}_0^{-1} \cdot \overleftarrow{K}_1 \frac{e}{T} \vec{\nabla} T$$

$$\overleftarrow{\kappa} = \frac{1}{T} (\overleftarrow{K}_2 - \overleftarrow{K}_1 \cdot \overleftarrow{K}_0^{-1} \cdot \overleftarrow{K}_1)$$

3.) Thermokraft: $\vec{E} = \overleftarrow{Q} \cdot \vec{\nabla}T$

$$\overleftarrow{Q} = -\frac{1}{eT} \frac{\pi^2}{3} (k_B T)^2 \overleftarrow{K}_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \overleftarrow{K}_0$$

Dies ist ein reeller symmetrischer Tensor. Die Eigenwerte von \overleftarrow{Q} sind Q_i . Es besteht eine Relation mit den Eigenwerten σ_i von $\overleftarrow{\sigma}$, nämlich:

$$Q_i = -\frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2 T}{e} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(\sigma_i(\mu))$$

Meist ist $Q_i < 0$ und der zweite Ausdruck in $\overleftarrow{\kappa}$ vernachlässigbar, womit sich ergibt:

$$\overleftarrow{\kappa} = \frac{\pi^2}{3} \frac{k_B^2}{e^2} T \overleftarrow{\sigma}$$

Dies ist das WIEDEMANN-FRANZ-Gesetz.

2.7 Magnetotransporteigenschaften

$$e\vec{E} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} \left(-\frac{\partial f^0}{\partial E_{\vec{k}}} \right) = -\frac{1}{\tau_{\vec{k}}} \delta f_{\vec{k}} + \frac{e}{\hbar c} (\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{k}} \delta f_{\vec{k}}$$

Wir betrachten ein sphärisches Band; für dieses gilt $\vec{v}_{\vec{k}} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$ und $\tau_{\vec{k}} = \tau$. Damit können wir die BOLTZMANN-Gleichung nach $\delta f_{\vec{k}}$ auflösen:

$$\delta f_{\vec{k}} = -\left(\frac{\partial f^0}{\partial E_{\vec{k}}} \right) (-e)\tau \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{X} \quad \text{wobei} \quad \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{E} = \vec{v}_{\vec{k}} \cdot \vec{X} - \omega_c \tau (\vec{v}_{\vec{k}} \times \vec{B}) \cdot \vec{X} \quad \text{mit} \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$$j_i = e^2 \tau \int \frac{dS_F}{|\vec{v}_{\vec{k}}|} v_{\vec{k},i} \sum_j v_{\vec{k},j} \cdot X_j = e^2 \tau \cdot \frac{v_F^2}{v_F} \frac{k_F^2}{3\pi^2} \cdot X_i = \sigma_0 X_i \quad \text{mit} \quad \sigma_0 = \frac{e^2 \tau n}{m}$$

Damit finden wir folgenden Zusammenhang:

$$\vec{E} = \vec{X} - \omega_c \tau (\vec{B} \times \vec{X}) = \varrho_0 \left(\vec{j} - \omega_c \tau (\vec{B} \times \vec{j}) \right) = \overleftarrow{\varrho} \cdot \vec{j}$$

$\overleftarrow{\varrho}$ ist der Tensor des elektrischen Widerstands. Legen wir das \vec{B} -Feld in \hat{z} -Richtung, so ergibt sich:

$$\varrho_{ij} = \varrho_0 \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau & 0 \\ -\omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Leitfähigkeitstensor hat damit aufgrund des Magnetfeldes nichtdiagonale Komponenten. Für ein paralleles \vec{E} -Feld folgt $E_{\parallel} = \varrho_0 j_{\parallel}$. Für ein HALL-Feld gilt $E_H = -\varrho_0 \omega_c \tau j$. Für die HALLkonstante ergibt sich:

$$R = \frac{E_H}{B \cdot j} = -\frac{\text{sign}(m)}{nec} = \begin{cases} < 0 & \text{für Elektronen} \\ > 0 & \text{für Löcher} \end{cases}$$

Für offene Bahnen im \vec{k} -Raum wie beispielsweise parallel zur \hat{y} -Achse im \vec{k} -Raum (und damit parallel zu \hat{x} im \vec{r} -Raum) gilt $\langle v_{\vec{k}x} \rangle = \dot{x} = \text{const}$. Dann ist $\sigma_{xx} \sim \sigma_0$.

$$\sigma_{ij} \propto \varrho_0 \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & (\omega_c \tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\omega_{yy} \propto B^2}$$

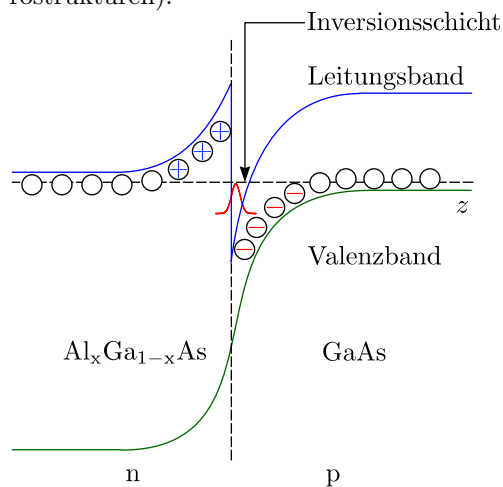
Dies ist eine wichtige Methode, um die FERMIfläche festzulegen.

Kapitel 3

Quanten-Hall-Effekt

3.1 Der ganzzahlige Effekt

Wir betrachten ein zweidimensionales Elektronensystem im Silizium-Mosfet (später GaAs-Al_xGa_{1-x}As Heterostrukturen).



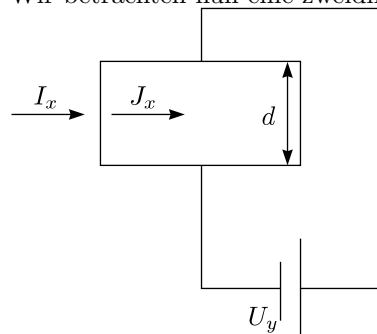
Alle Elektronen befinden sich im Grundzustand. Die dreidimensionale Wellenfunktion lautet:

$$\psi_{3D}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\tilde{z}_i) \psi_{2D}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

ψ_{2D} ist eine zweidimensionale Wellenfunktion.

$\psi_{2D}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \equiv \psi(z_1, \dots, z_N)$ mit $z = x + iy$

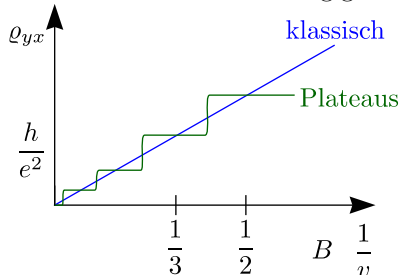
Wir betrachten nun eine zweidimensionale Anordnung, wobei das \vec{B} -Feld in x - y -Richtung zeigen soll:



Wir berechnen ρ_{yx} :

$$\rho_{yx} = \frac{E_y}{j^x} = \frac{U_y \cdot d}{I_x \cdot d} = \frac{U_y}{I_x} = \frac{1}{enc} \cdot B = R_H \cdot B \text{ mit } R_H = \frac{1}{enc}$$

Dies ist eine lineare Abhängigkeit:



ν ist der LANDAU-Füllfaktor:

$$\nu \equiv \frac{\text{Anzahl der Elektronen im zweidimensionalen Elektronensystem}}{\text{Anzahl der Zustände im LANDAU-Niveau}}$$

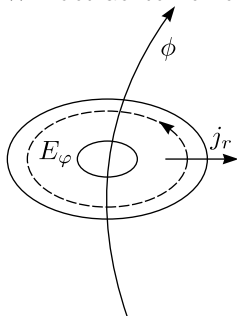
Der Nenner beschreibt den magnetischen Fluss durch die Probe in DIRAC-Quanten:

$$\phi_0 = \frac{hc}{e} = 2\pi \frac{\hbar c}{e}$$

VON-KLITZING fand nun im einen zweidimensionalen Elektronensystem nicht den klassischen Verlauf, sondern Plateaus bei $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Das Experiment wurde im Jahre 1981 veröffentlicht.

3.2 Laughlins Eichargument

Wir betrachten einen Ring eines zweidimensionalen Elektronengases:



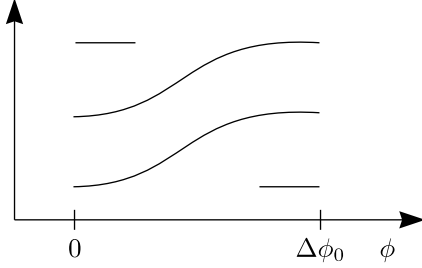
Der Ring werde durch eine Fluss ϕ_0 durchtreten. Wir verändern den Fluss adiabatisch um einen DIRAC-Fluss ϕ_0 , also $\phi \mapsto \phi' = \phi + \phi_0$. Für das geschlossene Integral über \vec{E} gilt nach MAXWELL:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = E_\varphi \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Die Ladung wird von innen nach außen transportiert:

$$\Delta Q = \int j_x \cdot 2\pi r dt = \int \sigma_{xy} \cdot E_y \cdot 2\pi r dt = -\sigma_{xy} \frac{\Delta \phi}{c}$$

Wenn $\Delta \phi = \phi_0$ ist, ändert sich der HAMILTON-Operator H_0 nicht unter Eichtransformationen. Die Ein-Teilchen-Zustände $|\psi\rangle$ bleiben gleich, aber die Besetzung der Zustände können sich (eventuell) geändert haben.



ΔQ ist eine ganze Zahl multipliziert mit der Elementarladung e ; ΔQ ist also gequantelt, genauso wie die Leitfähigkeit:

$$\sigma_{xy} = \text{Ganze Zahl} \cdot \frac{e \cdot c}{\phi_0} = \text{Ganze Zahl} \cdot \frac{e^2}{h} = \frac{1}{\varrho_{yx}}$$

Dies gilt, da die Diagonalelemente $\varrho_{xx} = \sigma_{xx}$ verschwinden. Die Theorie bis jetzt erklärt die Quantisierung, aber nicht die Plateaus.

3.3 Landau-Niveaus

Wir gehen aus von den komplexen Koordinaten $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{da } x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{und } y = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

$$\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Für den konjugiert komplexen Operator ∂^\dagger gilt:

$$\partial^\dagger = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\dagger + i \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\dagger \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] = -\bar{\partial}$$

Man kann sich das folgendermaßen klarmachen. Da der Impuls p ein hermitescher Operator ist, muss nämlich gelten:

$$p_x^\dagger = \frac{\hbar}{-i} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\dagger = \frac{\hbar}{-i} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} = p_x$$

Außerdem definieren wir folgende Impulsoperatoren:

$$p \equiv p_x + ip_y = \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) + i \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) = -2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

$$\bar{p} = p_x - ip_y = -2i \frac{\partial}{\partial z}$$

Wir betrachten nun ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} = -B\hat{z}$, wobei sich das zweidimensionale Elektronensystem in der x - y -Ebene befinden soll.

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right)^2 \quad \text{mit } A_i = \frac{1}{2} B \varepsilon_{ij} r_j, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} By \\ -Bx \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ε_{ij} ist der zweidimensionale total antisymmetrische ε -Tensor. Wir können den HAMILTON-Operator also schreiben als:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{\hbar}{2e^2} y \right)^2 + \left(p_y - \frac{\hbar}{2e^2} x \right)^2 \right] = \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ p - \frac{i\hbar}{2e^2} z, \bar{p} + \frac{i\hbar}{2e^2} \bar{z} \right\}$$

Wir können H also mit diesem Antikommutator schreiben, wie man selbst nachrechnen kann. Mit unseren oben definierten Operatoren ergibt sich:

$$H = \frac{1}{4m} \left[-2i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{i\hbar}{2e^2} z, -2i\hbar \frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\hbar}{2e^2} \bar{z} \right] = \frac{\hbar^2}{2me^2} \{a, a^\dagger\}$$

Dies gilt mit:

$$a \equiv \frac{ie}{\sqrt{2}} \left(-2i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{i}{2e^2} z \right) \quad \text{und} \quad a^\dagger \equiv -\frac{ie}{\sqrt{2}} \left(2i \left(-\frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{i}{2e^2} \bar{z} \right)$$

Der Kommutator von a und a^\dagger ist gerade gleich eins, also $[a, a^\dagger] = 1$. Damit lässt sich der HAMILTON-Operator schreiben als:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \cdot \frac{eB}{mc} \cdot \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \omega_C = \frac{eB}{mc}$$

ω_C ist die Zyklotronfrequenz. Wir können a und a^\dagger auf elegante Art und Weise folgendermaßen aufschreiben:

$$a = \sqrt{2}e \exp\left(-\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \exp\left(\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right)$$

$$a^\dagger = -2\sqrt{2}e \exp\left(\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right) \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(-\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right)$$

Wir definieren den Drehimpuls um den Ursprung:

$$L_z = \varepsilon_{ij} r_i p_j = \hbar (b^\dagger b - a^\dagger a) \quad \text{mit} \quad b = \sqrt{2}e \exp\left(-\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right) \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right)$$

Es gilt $[b, b^\dagger] = 1$ und $[a, b] = [a, b^\dagger] = 0$. Wir betrachten nun Ein-Teilchen-Zustände in der Drehimpuls-Basis:

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} |0, 0\rangle \quad \text{mit} \quad a|0, 0\rangle = b|0, 0\rangle = 0$$

$|0, 0\rangle$ ist der Vakuumzustand. Man kann sich davon überzeugen, dass gilt:

$$\langle \vec{r} | 0, 0 \rangle = \langle z, \bar{z} | 0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi e^2}} \exp\left(-\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right)$$

Da H mit L_z vertauscht, sind $|n, m\rangle$ simultane Eigenzustände dieser beiden Operatoren:

$$H|n, m\rangle = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2} \right) |n, m\rangle$$

$$L_z|n, m\rangle = \hbar(m - n)|n, m\rangle$$

Mit

$$z = \sqrt{2}e (a + b^\dagger) \quad \text{und} \quad p = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}e} (a - b^\dagger)$$

folgt weiter:

$$\psi_m(z, \bar{z}) = \langle \vec{r} | 0, m \rangle = \frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \langle \vec{r} | 0, 0 \rangle = N (a + b^\dagger)^m \cdot \exp\left(-\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right) = z^m \exp\left(-\frac{1}{e^2} \bar{z}z\right)$$

Mit $\bar{z}z = r^2$ ergibt sich:

$$|\psi_m|^2 = (r^2)^m \exp\left(-\frac{1}{2e^2} r^2\right)$$

Das Maximum befindet sich bei r_m :

$$\frac{\partial |\psi_m|^2}{\partial (r^2)} = \left(\frac{m}{r^2} - \frac{1}{2e^2} \right) \cdot |\psi_m|^2 = 0 \Rightarrow r_m = \sqrt{2me^2}$$

Jeder Zustand besetzt ein Gebiet $2\pi e^2$. Im niedrigsten Landau-Niveau haben wir so viele Zustände wie DIRAC-Fluss-Quanten; es ist $m = 0, 1, 2, \dots$. Anstelle der Notation z, \bar{z} wollen wir nun die Bezeichnungen z_1 und z_2 benutzen:

$$\psi(z_1, z_2, \dots) = \mathcal{A} [z_1^0 z_2^1 \dots z_N^{N-1}] \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4e^2} |z_i|^2\right)$$

\mathcal{A} ist der Antisymmetrisierungsoperator.

$$\mathcal{A} [z_1^0 z_2^1 \dots z_N^{N-1}] = \prod_{i < j} (z_i - z_j)$$

Dies kann durch vollständige Induktion gezeigt werden. Der allgemeinste Ein-Teilchen-Zustand im niedrigsten LANDAU-Niveau ist:

$$\psi(z) = f(z) \exp\left(-\frac{1}{4e^2} \bar{z}z\right)$$

$f(z)$ ist eine in z analytische Funktion (ohne \bar{z} !). Ein N -Teilchen-Zustand schreibt man

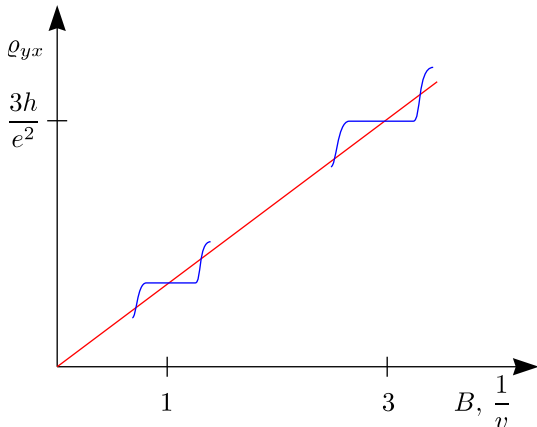
$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4e^2} |z_i|^2\right)$$

f ist hierbei eine analytische Funktion aller Koordinaten. f ist außerdem antisymmetrisch für Fermionen und symmetrisch für Bosonen. Was sind die Eigenschaften von $f(z_1, z_2, \dots, z_N)$ (beispielsweise auf kompakten Oberflächen wie beispielsweise einer Kugel oder einem Torus)? $f(z)$ oder $f(z_1, z_2, \dots, z_N)$ muss genauso viele Nullstellen (von z) haben wie es Zustände in der Probe im niedrigsten LANDAU-Niveau gibt (\equiv Anzahl von DIRAC-Quanten). Fermionen haben mindestens eine Nullstelle an der Position von anderen Teilchen.

$$f(z_1, z_2, \dots, z_N) = P(z_1, z_2, \dots, z_N) \cdot \prod_{i < j} (z_i - z_j)$$

Die Funktion $P(z_1, z_2, \dots, z_N)$ ein symmetrisches Polynom. Beim niedrigsten LANDAU-Niveau befinden sich die Nullstellen dort, wo sich alle anderen Teilchen befinden.

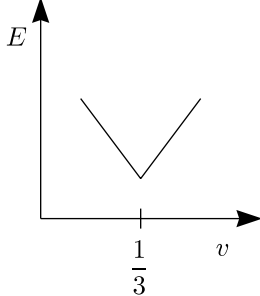
3.4 Der nicht ganzzahlige Effekt



Eich-Argument:

$$\Delta Q_{\phi \rightarrow \phi + \phi_0} = \sigma_{xy} \cdot \frac{\phi_0}{c} = \frac{e}{3}$$

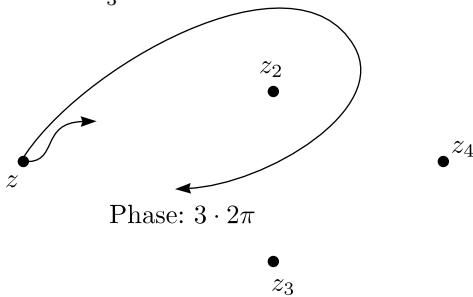
Dies ist ein Viel-Teilchen-Phänomen! Numerisch: 10 Elektronen mit $30 \phi_0$



Wir gehen aus von der allgemeinsten Wellenfunktion, die folgende Form hat:

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = P(z_1, z_2, \dots, z_N) \prod_{i < j} (z_i - z_j) \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4e^2} |z_i|^2\right)$$

Für $\nu = \frac{1}{3}$ haben wir dreimal mehr Nullstellen als Elektronen. (Bei N Elektronen sind dies also $3N$ Nullstellen.)



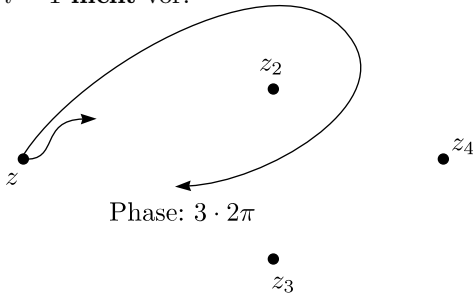
Die Wellenfunktion lautet (nach LAUGHLIN, 1983)

$$\psi_0(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{1}{4e^2} |z_i|^2\right)$$

Die Nullstellen befinden sich an den Orten, wo sich die Teilchen aufhalten, was sehr effektiv ist, um andere Teilchen fernzuhalten.

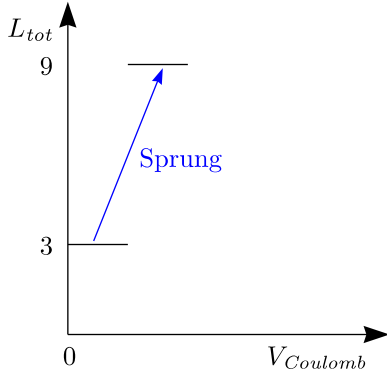
$$\langle \psi_0 | \psi_{\text{exakt}} \rangle \approx 0,99 \text{ für } N = 6$$

Für fermionen sind nur die ungeraden Drehimpulsquantenzahlen $l = 1, 3, 5, \dots$ erlaubt. In ψ_0 kommt jedoch $l = 1$ **nicht** vor!

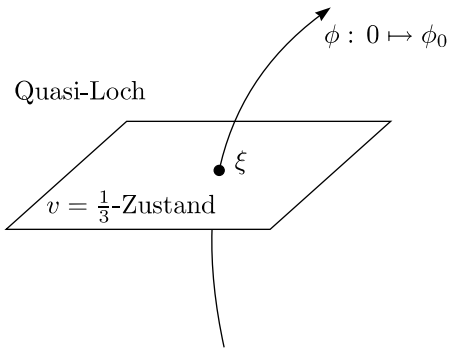


Es handelt sich effektiv um „Superfermionen“ (Kombination dreier Nullstellen der Wellenfunktion). ψ_0 : langreichweitige Physik

LAUGHLIN hat seiner Zeit drei Elektronen im Magnetfeld mittels eines Computer simuliert:



3.5 Nicht ganzzahlige Ladung



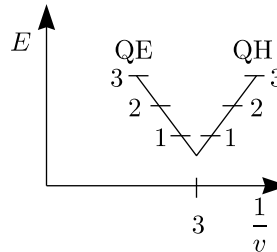
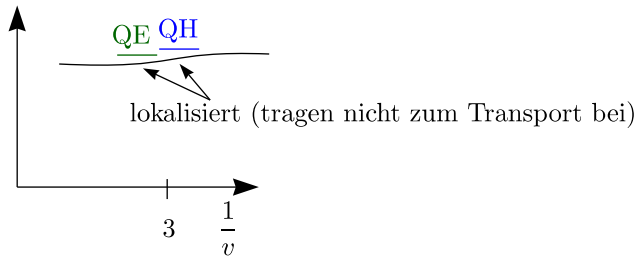
H sei wie am Anfang bis auf eine Eichtransformation.

$$\psi_{\xi}^{QM}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i (z_i - \xi)^3 \psi_0(z_1, z_2, \dots, z_N)$$

Wir haben ein Loch der Ladung $+1$. Machen wir jedoch den Übergang $0 \mapsto 3\phi_0$, so liegt ein Quasi-Loch der Ladung $\frac{1}{3}$ vor.

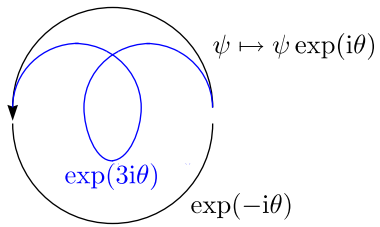
$$\psi_{\xi}^{QE}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i (z_i - \xi)^1 \psi_0(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i (\sqrt{2}lb_i^{\dagger} - \xi) \psi_0(z_1, z_2, \dots, z_N)$$

$$\psi_{\xi}^{QE}(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i (\sqrt{2}lb_i - \bar{\xi}) \psi_0(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_i \exp\left(-\frac{1}{4e^2}|z_i|^2\right) \left[\prod_i \left(2e \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{\eta}\right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^3 \right]$$



3.6 Nicht ganzzahlige Statistik

In zwei Dimensionen: Windungszahl



θ ist ein statistischer Parameter $[-\pi, \pi]$.