Verschiedene Probleme Teil I

Substitution

Allgemein gilt bei der Substitution:

$$\boxed{\int_a^b g(v(x)) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u}$$

Liest man die Gleichung von links nach rechts, so ersetzt man die Funktion $v(x)$ durch eine neue Variable u und auch das Differential:

$$v(x) = u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = v'(x) \Rightarrow v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

Beispiel:

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Wir substituieren den Ausdruck im Nenner des Bruches, also die Funktion $v(x) = x^2 + 1$ durch eine neue Integrationsvariable u. Dann gilt $\mathrm{d}u = v'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x$ und wir erhalten:

$$I = \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln(u)|_1^2 = \boxed{\ln(2)}$$

Man kann die obige Gleichung jedoch auch von rechts nach links lesen; man substituiert in diesem Falle die Integrationsvariable u durch eine Funktion $v(x)$:

$$u = v(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = v'(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel:

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{u^2 \cdot \sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

Hier substituieren wir $u = \cos(x)$ und weiter $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$. Außerdem müssen wir die Integrationsgrenzen anpassen:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4},\ \cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2(x) \cdot \sqrt{1-\cos^2(x)}} \cdot (-\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\tan(x)|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\sqrt{3}-1}$$

Fazit:

Man kann also die Integrationsvariable durch eine Funktion substituieren wie im zweiten Beispiel oder eine Funktion durch eine Variable wie im ersten Beispiel.

Oft genügt es, das Differential zu substituieren, indem man nach dem Argument der Funktion ableitet, die in der Substitution auftaucht. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Beispiel:

$$\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$$

Hier ist es sinnvoll, $\cos(x) = u$ zu verwenden, also eine Funktion durch die Substitutionsvariable u auszudrücken. Man differenziert nun nach x und kann so auch das Differential $\mathrm{d}x$ mittels der neuen Variablen u schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Die explizite Rechnung findet sich auf dem Blatt mit den Integralen und soll hier nicht mehr durchgeführt werden. Statt dessen ist es jedoch auch möglich, nach x aufzulösen und nach u abzuleiten:

$$\cos(x) = u \Rightarrow x = \arccos(u)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$$

Dann ergibt sich für das Integral:

$$\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sqrt{1-\cos^2(x)})^3\,\mathrm{d}x = \int \left(1-\cos^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = -\int (1-u^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = -\int (1-u^2)\,\mathrm{d}u =$$
$$= -u + \frac{1}{3}u^3 = \boxed{-\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x)}$$

Der erste Weg ist jedoch einfacher; man muss beispielsweise die Ableitung vom Arcuskosinus nicht wissen!

Taylor-Reihe

Also lässt sich allgemein die Reihendarstellung (um den Entwicklungspunkt $x = 0$) einer genügend differenzierbaren Funktion $f(x)$ folgendermaßen ermitteln:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(0) \cdot x^n}$$

Man bezeichnet diese auch als TAYLOR-Reihe der Funktion $f(x)$.

Beispiel:

Die Exponentialfunktion $\exp(x)$ kann man bekannterweise beliebig oft ableiten und man erhält immer wieder dieselbe Exponentialfunktion. Alle Ableitungen besitzen demnach an der Stelle $x = 0$ den Wert $\exp(0) = 1$. Damit ergibt sich nach obiger Formel:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot 1 \cdot x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n}$$

Diese habt ihr auf dem ersten Übungsblatt auch hergeleitet, aber hier ging es schneller!

Kleine Umformung

Diese hilft unter anderem beim Integral in Aufgabe 4c):

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) + \cos^2(x) - \cos^2(x) = 1 \Rightarrow 2\cos^2(x) = 1 + \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 + \cos(2x)$

$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1}$

Anmerkung zum Integral in Aufgabe 4d)

Das Ergebnis an der Tafel stimmte; man kann den Ausdruck folgendermaßen umformen:

$$A = \ln\left(\frac{2 + \exp(x) + \exp(-x)}{4}\right) = \ln\left(\frac{2 + \exp(x) + \exp(-x)}{4} \cdot \frac{\exp(-x)}{\exp(-x)}\right) = \ln\left(\frac{2\exp(-x) + 1 + \exp(-2x)}{4\exp(-x)}\right) =$$

$$= \left(\frac{(\exp(-x) + 1)^2}{4\exp(-x)}\right) = \ln\left((\exp(-x) + 1)^2\right) - \ln(4) - \ln\left(\exp(-x)\right) = 2\ln\left(1 + \exp(-x)\right) + x - 2 \cdot \ln(2)$$

Dies ist genau das Ergebnis aus der Musterlösung!