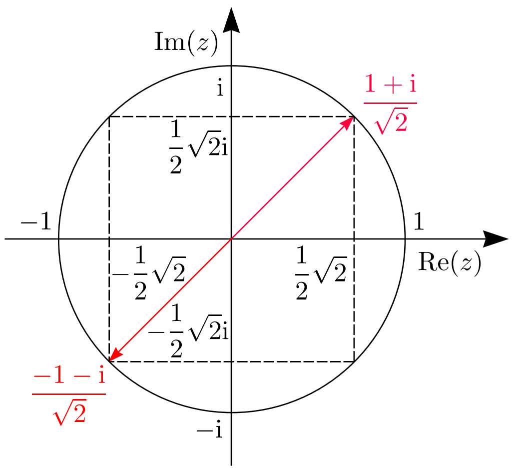
Verschiedene Probleme Teil II

Komplexe Wurzeln

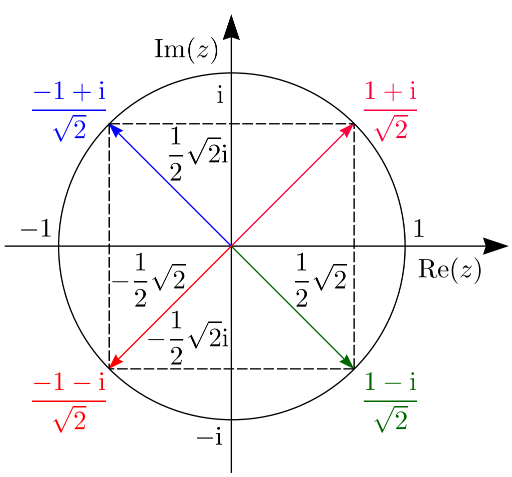
Ganz am Ende des Tutoriums, als der Großteil schon gegangen war, tauchte noch ein Problem bezüglich des letzten Aufgabenteils der Aufgabe 8 auf. Es ging darum, die Wurzel der imaginären Einheit i, also $\sqrt{\mathrm{i}}$ zu berechnen. Das Ergebnis der Rechnung waren zwei Werte, nämlich:

$$\boxed{\sqrt{\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}}$$



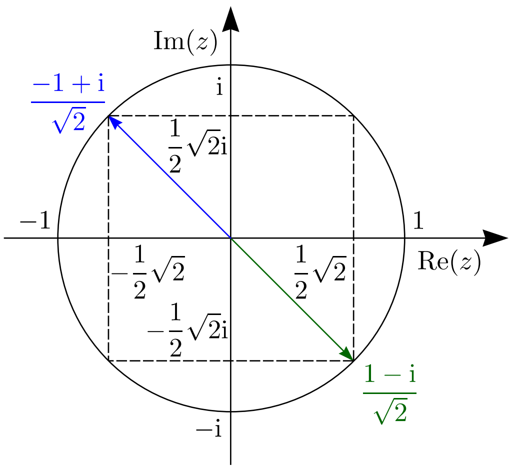
Dann wurde gefragt, ob es nicht vier Lösungen geben müsste da ja $\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt[4]{-1}$ ist und $\sqrt[4]{-1}$ (laut Vorbereitungskurs) vier Wurzeln hat; diese sind:

$$\boxed{\sqrt[4]{\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}}$$



Der scheinbare Widerspruch löst sich in Luft auf, wenn man die Gleichung $w^4 = -1$ betrachtet. Diese Gleichung hat im Zahlenbereich der komplexen Zahlen vier Lösungen, die oben angegebenen vierten Wurzeln von -1. Zieht man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung die Quadratwurzel, so folgt $w^2 = \pm\mathrm{i}$. Man beachte das Minuszeichen! Auf dem Übungsblatt sind wir von der Gleichung $w^2 = \mathrm{i}$ ausgegangen, die zwei Lösungen besitzt, nämlich die von uns berechneten. Berücksichtigt man nun noch das Minuszeichen, geht also von der Gleichung $w^2 = -\mathrm{i}$ aus, so kommt man auf:

$$w = \pm\mathrm{i} \cdot \sqrt{\mathrm{i}} = \pm\mathrm{i} \cdot \left(\pm\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left(\frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$$



Dies sind gerade die beiden anderen komplexen Wurzeln von -1, die bei unserer Berechnung von $\sqrt{\mathrm{i}}$ nicht aufgetaucht sind.

Fazit

Das Fazit ist also, dass sich für $\sqrt{\mathrm{i}}$ zwei komplexe Werte angeben lassen, nämlich die von uns in Aufgabe 8 berechneten, da wir von der Gleichung $w^2 = \mathrm{i}$ ausgegangen sind und die zusätzliche Gleichung $w^2 = -\mathrm{i}$ (die man aus $w^4 = -1$ erhält) nicht berücksichtigt haben. Deshalb besitzt -1 vier komplexe Wurzeln und i nur zwei.