Verschiedene Probleme Teil III

Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} t \cdot \sin(n \cdot t)\, \mathrm{d}t} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int\limits_0^{\pi} t \cdot \sin(n \cdot t) + \int\limits_{\pi}^{2\pi} (t - 2\pi) \cdot \sin(n \cdot t)\right]$$

Das Integral über $t \cdot \sin(n \cdot t)$ kann man auch gut durch Parameterdifferentiation lösen ($\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind stetig differenzierbare Funktionen):

$$\int t \cdot \sin(n \cdot t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \int \cos(n \cdot t)\, \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[\frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot t)\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot t) - \frac{1}{n} \cdot t \cdot \cos(n \cdot t)$$

Setzen wir nun noch die Grenzen ein, so ergibt sich für das erste Integral:

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} t \cdot \sin(n \cdot t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot t)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot t \cdot \cos(n \cdot t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

Kommen wir nun zum zweiten Integral:

$$I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} (t - 2\pi) \cdot \sin(n \cdot t) = \int\limits_{\pi}^{2\pi} t \cdot \sin(n \cdot t)\, \mathrm{d}t - 2\pi \cdot \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin(n \cdot t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot t)\Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{1}{n} \cdot t \cdot \cos(n \cdot t)\Big|_{\pi}^{2\pi} +$$

$$+ \frac{2\pi}{n} \cdot \cos(n \cdot t)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} = \frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1}$$

Damit folgt für den Koeffizienten b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot (I_1 + I_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1} + \frac{\pi}{n} \cdot (-1)^{n+1}\right) = \boxed{2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}}$$

Der Koeffizient a_n verschwindet; wir rechnen das explizit nach:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} t \cdot \cos(n \cdot t)\, \mathrm{d}t} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\int\limits_0^{\pi} t \cdot \cos(n \cdot t) + \int\limits_{\pi}^{2\pi} (t - 2\pi) \cdot \cos(n \cdot t)\right]$$

Das Integral kann auch wieder durch Parameterdifferentiation gelöst werden:

$$\int t \cdot \cos(n \cdot t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \cdot \int \sin(n \cdot t)\, \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot t)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \cos(n \cdot t) + \frac{1}{n} \cdot t \cdot \sin(n \cdot t)$$

Setzen wir wieder die Grenzen ein:

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} t \cdot \cos(n \cdot t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} \cdot \cos(n \cdot t)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \cdot t \cdot \sin(n \cdot t)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{n^2}$$

$$I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} (t - 2\pi) \cdot \cos(n \cdot t) = \frac{1}{n^2} \cdot \cos(n \cdot t)\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{n} \cdot t \cdot \sin(n \cdot t)\Big|_{\pi}^{2\pi} + -2\pi \frac{\sin(n \cdot t)}{n}\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n$$

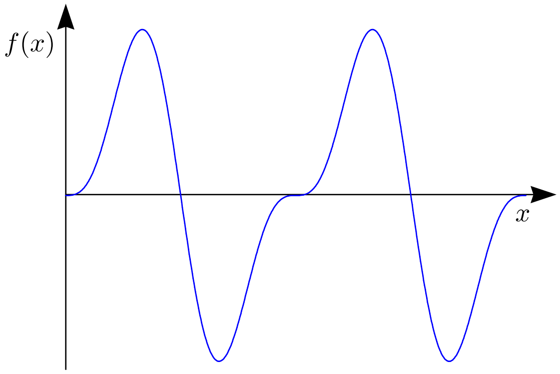
$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot (I_1 + I_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n\right) = \boxed{0}$$

Man hätte hier auch argumentieren können, dass der Koeffizient a_n verschwindet, da $t \cdot \cos(n \cdot t)$ eine ungerade Funktion ist (siehe Musterlösung), aber die Rechnung sollte einmal explizit durchgeführt werden.

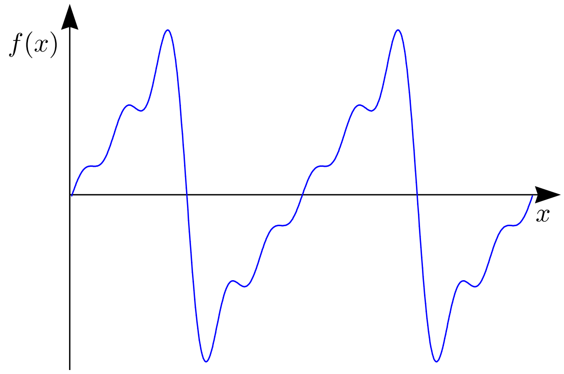
Man kann über jedes Intervall integrieren, dessen Länge einer Periode T entspricht. In gewissen Büchern (beispielsweise „Gelbes Rechenbuch“) findet man beispielsweise, dass die Integration von $-\frac{T}{2}$ bis $\frac{T}{2}$ läuft und nicht von 0 bis T wie auf dem Übungsblatt angegeben. Man integriert immer über das geschickteste Intervall; im Falle der Sägezahnfunktion ist dies $[-\pi, \pi]$.

Sägezahnfunktion

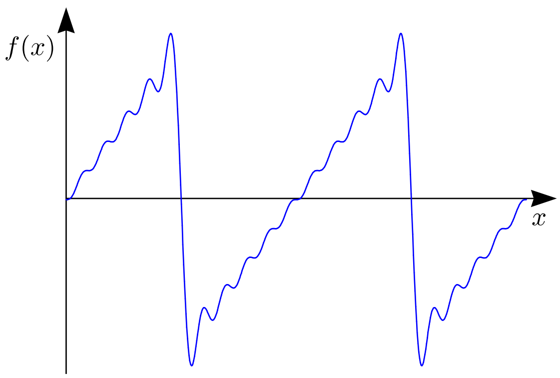
$$\boxed{f(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n \cdot t)}$$



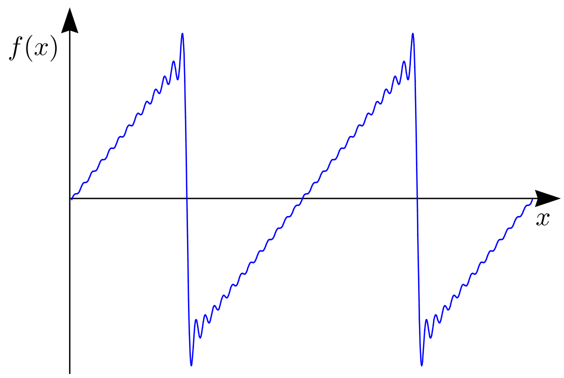
$n = 2$



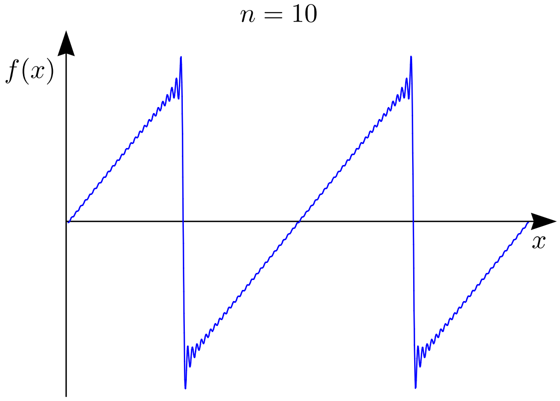
$n = 5$



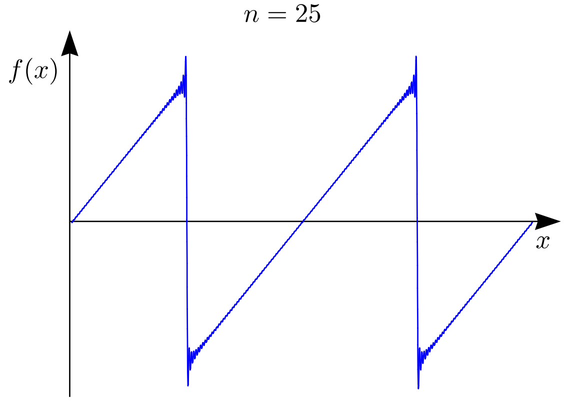
$n = 10$



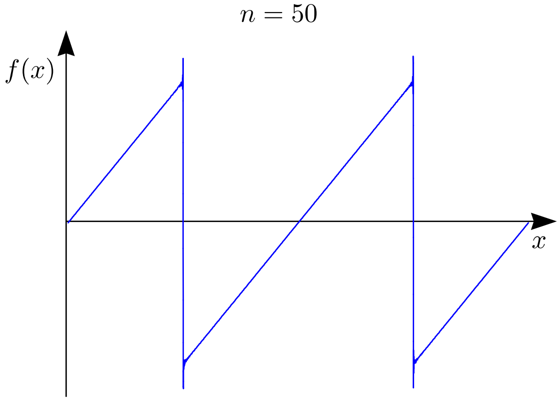
$n = 25$



$n = 50$



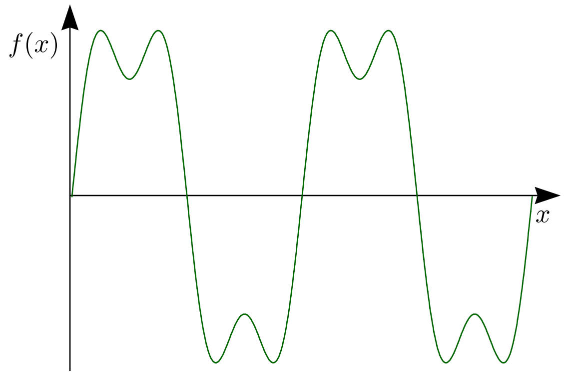
$n = 100$



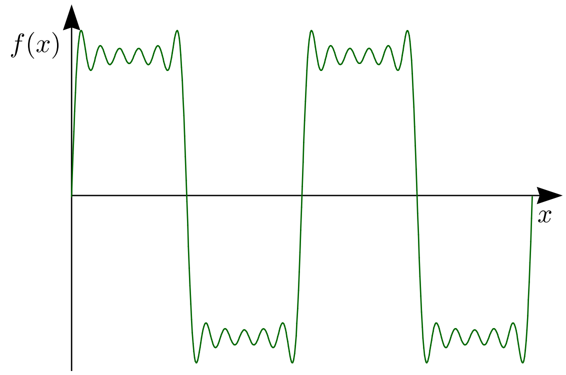
$n = 1000$

Rechteckfunktion

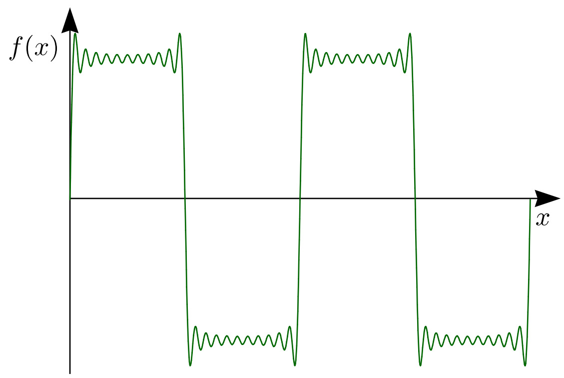
$$\boxed{f(t) = \frac{4 \cdot t_0}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1) \cdot t]}{2n+1}}$$



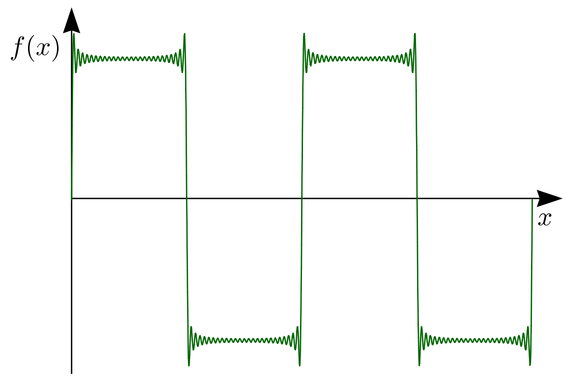
$n = 1$



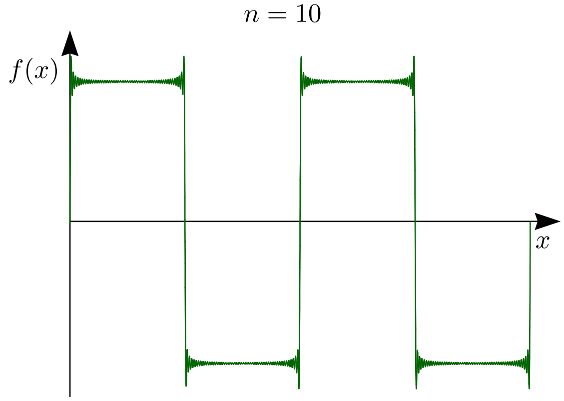
$n = 5$



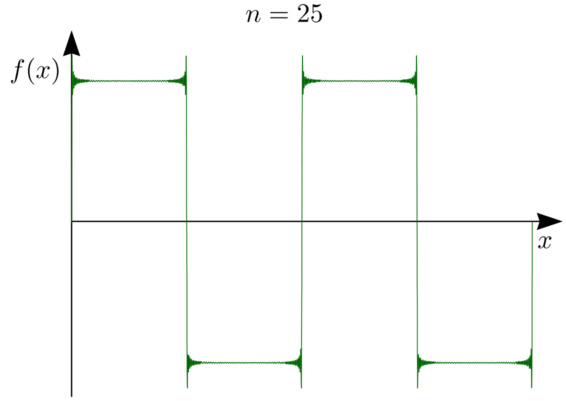
$n = 10$



$n = 25$



$n = 50$



$n = 100$

Gibbs-Phänomen in Unstetigkeitsstellen:

Für hinreichend große n überschwingen alle Partialsummen der Fourier-Entwicklung den Sprung um 17,89%.