Vorbereitung zur ersten Klausur

1 Harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft der Form $F_0 \cos(\omega t)$

1.1 Lösung mittels Green-Funktion

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,t') \cdot \theta(t-t') \cdot f(t') = F_0 \cdot \int_{-\infty}^{t} G(t,t') \cdot \cos(\omega \cdot t') = \frac{F_0}{\Omega} \cdot \int_{-\infty}^{t} \sin[\Omega \cdot (t-t')] \cdot \exp(-\gamma \cdot [t-t']) \cdot \cos(\omega \cdot t') \,\mathrm{d}t' =$$

$$= \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \frac{F_0}{\Omega} \cdot \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2\mathrm{i}} \cdot [\exp[\mathrm{i}\Omega \cdot (t-t')] - \exp[-\mathrm{i}\Omega \cdot (t-t')]] \cdot \exp(\gamma \cdot t') \cdot \frac{1}{2} \cdot [\exp(\mathrm{i}\omega t') + \exp(-\mathrm{i}\omega t')] =$$

$$= \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \frac{F_0}{\Omega} \cdot \frac{1}{4\mathrm{i}} \cdot \Bigg[\exp(\mathrm{i}\Omega t) \cdot \int_{-\infty}^{t} \exp(-\mathrm{i}\Omega t') \cdot \exp(\gamma \cdot t') \cdot [\exp(\mathrm{i}\omega t') + \exp(-\mathrm{i}\omega t')] -$$

$$+ \exp(-\mathrm{i}\Omega t) \cdot \int_{-\infty}^{t} \exp(\mathrm{i}\Omega t') \cdot \exp(\gamma \cdot t') \cdot [\exp(\mathrm{i}\omega t') + \exp(-\mathrm{i}\omega t')]\Bigg] =$$

$$= \frac{F_0}{\Omega} \cdot \frac{\exp(-\gamma \cdot t)}{4\mathrm{i}} \cdot \Bigg[\exp(\mathrm{i}\Omega t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{t} \exp[(\mathrm{i}(\omega - \Omega) + \gamma) \cdot t'] + \int_{-\infty}^{t} \exp[(-\mathrm{i}(\Omega + \omega) + \gamma) \cdot t']\right) -$$

$$+ \exp(-\mathrm{i}\Omega t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{t} \exp[(\mathrm{i}(\Omega + \omega) + \gamma) \cdot t'] + \int_{-\infty}^{t} \exp[(-\mathrm{i}(\omega - \Omega) + \gamma) \cdot t']\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{F_0}{\Omega} \cdot \frac{\exp(-\gamma \cdot t)}{4\mathrm{i}} \cdot \Bigg[\exp(\mathrm{i}\Omega t) \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{i}(\omega - \Omega) + \gamma} \cdot \exp[(\mathrm{i}(\omega - \Omega) + \gamma) \cdot t] + \frac{1}{-\mathrm{i}(\Omega + \omega) + \gamma} \cdot \exp[(-\mathrm{i}(\Omega + \omega) + \gamma) \cdot t]\right) -$$

$$+ \exp(-\mathrm{i}\Omega t) \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{i}(\Omega + \omega) + \gamma} \cdot \exp[(\mathrm{i}(\Omega + \omega) + \gamma) \cdot t] - \frac{1}{-\mathrm{i}(\omega - \Omega) + \gamma} \cdot \exp[(-\mathrm{i}(\omega - \Omega) + \gamma) \cdot t]\right)\Bigg] =$$

$$= \frac{F_0}{\Omega} \cdot \left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{4} \cdot \left(\frac{1}{\Omega - \omega + \mathrm{i}\gamma} - \frac{1}{-\Omega - \omega + \mathrm{i}\gamma}\right) + \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{4} \cdot \left(\frac{1}{\Omega + \omega + \mathrm{i}\gamma} - \frac{1}{\omega - \Omega + \mathrm{i}\gamma}\right)\right] =$$

$$= \frac{F_0}{\Omega} \cdot \left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{4} \cdot \left(\frac{-2\Omega}{-(\Omega^2 - \omega^2) - 2\mathrm{i}\gamma\Omega - \gamma^2}\right) + \left(\frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{4} \cdot \frac{-2\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2) + 2\mathrm{i}\gamma\Omega - \gamma^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{F_0}{2} \cdot \left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega} + \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega}\right] =$$

$$= \frac{F_0}{2} \cdot \left[\frac{(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} + \frac{(\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right] =$$

$$= \boxed{F_0 \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega t) + 2\gamma\omega \cdot \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = A \cdot \cos(\omega t - \varphi)}$$

1.2 Lösung mittels Fourier-Transformation

Wir berechnen die Fourier-Transformierte von $\cos(\omega t)$:

$$\widetilde{f}(\omega') = F_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t) \exp(-\mathrm{i}\omega' t) \,\mathrm{d}t = \frac{F_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} [\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)] \cdot \exp(-\mathrm{i}\omega' t) \,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{F_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\mathrm{i}(\omega - \omega')t] \,\mathrm{d}t + \frac{F_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\mathrm{i}(-\omega - \omega')t] \,\mathrm{d}t =$$

$$= F_0 \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega') + \delta(\omega + \omega')]$$

Durch Rücktransformation berechnen wir $x(t)$:

$$x(t) = F_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} \, \frac{\exp(\mathrm{i}\omega' t)}{-\omega'^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega' + \omega_0^2} \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega') + F_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} \, \frac{\exp(\mathrm{i}\omega' t)}{-\omega'^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega' + \omega_0^2} \cdot \pi \cdot \delta(\omega + \omega') =$$

$$= \frac{F_0}{2} \cdot \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t)}{-\omega^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega + \omega_0^2} + \frac{F_0}{2} \cdot \frac{\exp(-\mathrm{i}\omega t)}{-\omega^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega + \omega_0^2} =$$

$$= \frac{F_0}{2} \cdot \left[\frac{\exp(\mathrm{i}\omega t) \cdot \left[-\omega^2 + \omega_0^2 - 2\mathrm{i}\gamma\omega\right] + \exp(-\mathrm{i}\omega t) \cdot \left[-\omega^2 + \omega_0^2 + 2\mathrm{i}\gamma\omega\right]}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \right] =$$

$$= F_0 \cdot \frac{(-\omega^2 + \omega_0^2)}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cdot \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t) + \exp(-\mathrm{i}\omega t)}{2} + \frac{2\gamma\omega}{(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \cdot \frac{\exp(\mathrm{i}\omega t) - \exp(-\mathrm{i}\omega t)}{2\mathrm{i}} =$$

$$= \boxed{F_0 \cdot \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega t) + 2\gamma\omega \cdot \sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = A \cdot \cos(\omega t - \varphi)}$$