Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

Lösung 1

Mittels des Ansatzes $y(x) = \exp(\lambda x)$ ergibt sich mit $y''(x) = \lambda^2 \exp(\lambda x)$ und $y'(x) = \lambda \exp(\lambda x)$:

$\lambda^2 \exp(\lambda x) + 3\lambda \exp(\lambda x) + 2 \exp(\lambda x) = 0$

Wir dividieren durch $\exp(\lambda x) \neq 0$ und erhalten das **charakteristische Polynom**:

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

Es ergibt sich $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$. Damit erhalten wir den **Lösungsraum** (Linearkombination beider Lösungen mit reellen Koeffizienten C_1 und C_2):

$y(x) = C_1 \exp(-x) + C_2 \exp(-2x)$ mit $C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$

Aus den Bedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$ ergibt sich das folgende zweidimensionale Gleichungssystem

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

mit der Lösung $C_1 = 1$ und $C_2 = -1$. Also gilt schließlich:

$\boxed{y(x) = \exp(-x) - \exp(-2x)}$

Aufgabe 2

a.)

Bestimmen Sie die reelle Lösung der Differentialgleichung

$y'''(x) + 2y''(x) + y'(x) + 2y(x) = 0$

b.)

Bestimmen Sie die freien Parameter der Lösung so, dass $y(0) = 0$ und $\lim_{x \mapsto \infty} y(x) = 0$ ist.

Lösung 2

a.)

Wir machen den Ansatz $z(x) = \exp(\lambda x)$. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich mit $z'''(x) = \lambda^3 \exp(\lambda x)$, $z''(x) = \lambda^2 \exp(\lambda x)$ und $z'(x) = \lambda \exp(\lambda x)$:

$\lambda^3 \exp(\lambda x) + 2\lambda^2 \exp(\lambda x) + \lambda \exp(\lambda x) + 2 = 0$

Wir dividieren die Gleichung durch $\exp(\lambda x) \neq 0$ und kommen auf das sogenannte **charakteristische Polynom**:

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

Durch Probieren folgt die erste Lösung $\lambda_1 = -2$. Mittels Polynomdivision ergibt sich weiter:

$(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2) : (\lambda + 2) = \lambda^2 + 1$

Also erhalten wir aus $\lambda^2 + 1 = 0$ die zwei weiteren Lösung $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Das **Fundamentalsystem** (also die Funktionen, welche den **Lösungsraum** aufspannen) ist gegeben durch:

$$\boxed{\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{\exp(-2x), \exp(\mathrm{i}x), \exp(-\mathrm{i}x)\}}$$

Dabei handelt es sich um ein komplexes Fundamentalsystem, da zwei der Funktionen komplex sind. Die allgemeine Lösung mit komplexen Koeffizienten C_1, C_2 und C_3 ist gegeben als Linearkombination der **Basisfunktionen** aus dem Fundamentalsystem:

$$\boxed{z(x) = C_1 \exp(-2x) + C_2 \exp(\mathrm{i}x) + C_3 \exp(-\mathrm{i}x) \text{ mit } C_1,\, C_2,\, C_3 \in \mathbb{C}}$$

Wollen wir die reelle Lösung (und auch das reelle Fundamentalsystem), so müssen wir den Realteil bilden:

$y(x) = \mathrm{Re}(z(x)) = \mathrm{Re}(C_1)\exp(-2x) + \mathrm{Re}(C_2 \exp(\mathrm{i}x)) + \mathrm{Re}(C_3 \exp(-\mathrm{i}x))$ mit $D_1 = \mathrm{Re}(C_1)$

$\mathrm{Re}(C_2 \exp(\mathrm{i}x)) = \mathrm{Re}\left\{[\mathrm{Re}(C_2) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(C_2)][\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)]\right\} = \mathrm{Re}(C_2)\cos(x) - \mathrm{Im}(C_2)\sin(x)$

$\mathrm{Re}(C_3 \exp(-\mathrm{i}x)) = \mathrm{Im}\left\{[\mathrm{Re}(C_3) + \mathrm{i}\mathrm{Im}(C_3)][\cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)]\right\} = \mathrm{Re}(C_3)\cos(x) + \mathrm{Im}(C_3)\sin(x)$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{Re}(z(x)) = \mathrm{Re}(C_2)\cos(x) - \mathrm{Im}(C_2)\sin(x) + \mathrm{Re}(C_3)\cos(x) + \mathrm{Im}(C_3)\sin(x) = \\ &= (\mathrm{Re}(C_2) + \mathrm{Re}(C_3))\cos(x) + (\mathrm{Im}(C_3) - \mathrm{Im}(C_2))\sin(x) \equiv D_2\cos(x) + D_3\sin(x) \text{ mit } D_2,\, D_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Also ist die reelle Lösung und das reelle Fundamentalsystem gegeben durch:

$$\boxed{y(x) = D_1 \exp(-2x) + D_2 \cos(x) + D_3 \sin(x)}$$

$$\boxed{\mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{\exp(-2x), \cos(x), \sin(x)\}}$$

b.)

Wir gehen von der reellen Lösung $y(x)$ aus. Um die Bedingung $\lim_{x\mapsto\infty} y(x) = 0$ erfüllen zu können, muss $D_2 = D_3 = 0$ sein, da die oszillierenden Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x \mapsto \infty$ keinen Grenzwert besitzen. Aus der Bedingung $y(0) = 1$ ergibt sich außerdem $D_1 = 1$ und damit ist die Lösung, welche diese Bedingungen erfüllt, gegeben durch $\boxed{y(x) = \exp(-2x)}$.

Tricks für Aufgabe 1 auf dem Übungsblatt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}^2(t) = 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) \Rightarrow \int \dot{x}(t)\ddot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\dot{x}^2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x^2(t) = 2x(t)\dot{x}(t) \Rightarrow \int x(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2(t)$$