Drehmatrizen

Für eine Drehmatrix D müssen die Bedingungen $\det(D) = 1$ **und** $DD^\intercal = \mathbf{1}$ bzw. $D^\intercal D = \mathbf{1}$ erfüllt sein. Zuerst eine kleine Vorbemerkung:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; D^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$DD^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{1n}a_{2n} & \dots \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + \ldots + a_{n1}a_{n2} & a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2 = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$$

$$a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2 = 0 \Rightarrow a_{21} = a_{22} = \ldots = a_{2n} = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2 = 0 \Rightarrow a_{n1} = a_{n2} = \ldots = a_{nn} = 0$$

Aus $DD^\intercal = \mathbf{0}$ folgt also, dass D die Nullmatrix ist. Kommen wir jetzt zum wesentlichen:

$$D^\intercal D = \mathbf{1} \Rightarrow DD^\intercal D = D \Rightarrow (DD^\intercal)(DD^\intercal) = DD^\intercal \Rightarrow DD^\intercal[DD^\intercal - \mathbf{1}] = \mathbf{0}$$

Hieraus folgt also entweder $DD^\intercal = \mathbf{0}$ oder $DD^\intercal = \mathbf{1}$. $DD^\intercal = \mathbf{0}$ ist wegen obiger Betrachtung auszuschließen, da D dann die Nullmatrix ist und die Voraussetzung $D^\intercal D = \mathbf{1}$ sowieso nicht gilt. Also folgt aus $DD^\intercal = \mathbf{1}$ auch $D^\intercal D = \mathbf{1}$ und umgekehrt; das heißt, es reicht eine dieser beiden Bedingungen zu zeigen.

1.) Aus $DD^\intercal = \mathbf{1}$ folgt:

$$\det(DD^\intercal) = \det(D) \cdot \det(D^\intercal) \stackrel{\det(D)=\det(D^\intercal)}{=} \det(D)^2 = 1 \Rightarrow \det(D) = \pm 1$$

Aus $DD^\intercal = \mathbf{1}$ (bzw. $D^\intercal D = \mathbf{1}$) resultiert also nicht unbedingt, dass D eine Drehmatrix ist. Es ist dann nämlich nicht zwingend $\det(D) = 1$. Eine Matrix mit $\det(D) = -1$ beschreibt keine Drehung sondern eine Spiegelung. Beispielsweise wird eine Spiegelung an der y-Achse (in der x-y-Ebene) durch folgende Matrix mit Determinante -1 charakterisiert:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir erkennen:

$$S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die y-Achse bleibt also gleich, aber die Richtung der x-Achse dreht sich um.

2.) Es genügt auch nicht, nur $\det(D) = 1$ zu zeigen.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

Ist A also eine Drehmatrix? Natürlich nicht, man hat keine Chance, den Drehwinkel zu bestimmen! Eine Matrix mit Determinante 1 muss also nicht zwingend eine Drehmatrix sein.

Fazit: Es ist also immer $\det(D) = 1$ **und** $DD^\intercal = \mathbf{1}$ oder $\det(D) = 1$ **und** $D^\intercal D = \mathbf{1}$ zu prüfen. $DD^\intercal$ bzw. $D^\intercal D$ entspricht der Bedingung, dass die Zeilen bzw. die Spalten einer Drehmatrix **orthonormiert** sein müssen. Das bedeutet, dass der Betrag einer Zeile/Spalte gleich 1 sein muss und das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher Zeilen/Spalten gleich 0.