Für die Klausur

Ableitungsregeln

- Produktregel: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- Quotientenregel: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)u'(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$
- Kettenregel: $(u(w(x)))' = u'(w(x)) \cdot w'(x)$ (u wird nach dem Argument $w(x)$ abgeleitet und w nach dem Argument x)

Hyperbolische Funktionen

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ und $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$

$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x)$

Integration

Substitution

1.) Ersetzen einer Funktion im Integranden

2.) **und des Differentials**, so dass der Integrand einfacher wird

$$\int\limits_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x \overset{\substack{u(x)=v,\\ \mathrm{d}v=u'(x)\,\mathrm{d}x}}{=} \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(v)\,\mathrm{d}v$$

Zu beachten:

1.) entweder Integrationsgrenzen mitsubstituieren und das bestimmte Integral mit den substituierten Grenzen berechnen oder

2.) Grenzen weglassen und das unbestimmte Integral ohne Grenzen berechnen, im Endergebnis nach allen Rücksubstitutionen die ursprünglichen Grenzen einsetzen

Partielle Integration

Zurückführung auf ein neues Integral, das einfacher zu berechnen ist:

$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x$$

Beispiel:

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$$

Drehungen

Bedingungen, so dass D eine Drehmatrix ist:

1.) $DD^\intercal = \mathbf{1}$ bzw. $D^\intercal D = \mathbf{1}$ (eine der beiden zu zeigen)

2.) $\det(D) = 1$

Passive Drehungen

Drehung der Vektoren im mathematisch negativen Sinne (mit dem Uhrzeiger):

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \; D_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ und } D_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Koordinatensystem im Hintergrund dreht sich entgegengesetzt, also im mathematisch positiven Sinne (mit dem Uhrzeiger).

Aktive Drehungen

Drehung der Vektoren im Koordinatensystem im mathematisch positiven Sinne (gegen den Uhrzeiger):

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \; D_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ und } D_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung der charakteristischen Größen einer Drehung

1.) Drehachse $\vec{\phi}$: über die Bedingung $D\vec{\phi} = \vec{\phi}$ (Lösung dieses Gleichungssystems)

2.) Drehwinkel:

   a.) Suche einen Vektor $\vec{\phi}_\perp$ senkrecht zur Drehachse.

   b.) Wende die Drehmatrix auf diesen Vektor an, woraus sich $\vec{\phi}'_\perp$ ergibt.

   c.) Berechne den Drehwinkel ϕ über:

$$\cos(\phi) = \frac{\vec{\phi}_\perp \cdot \vec{\phi}'_\perp}{|\vec{\phi}_\perp| \cdot |\vec{\phi}'_\perp|}$$

Generator einer Drehung

Ableitung der Drehmatrix für Drehwinkel $\varphi = 0$ (Tangentialraum der Gruppe):

$$T_x = \frac{\partial}{\partial\varphi} D_x \Big|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix}\Bigg|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analog für T_y und T_z

Durch Exponieren der Generatoren ergibt sich wieder die Drehmatrix:

$D_x = \exp(\varphi T_x)$, $D_y = \exp(\varphi T_y)$, $D_z = \exp(\varphi T_z)$

Bahnkurven

Parameterdarstellung als Vektor $\vec{r}(t)$, wobei der Parameter t als Zeit interpretiert werden kann.

1.) Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

2.) Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Bogenlänge

$$L(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{v}(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\vec{r}}(t)| \, \mathrm{d}t$$

Formale Symbole

Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

Levi-Civita-Symbol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \{i,j,k\} \text{ zyklisch aus } \{1,2,3\} \text{ (also } \{1,2,3\}, \{2,3,1\}, \{3,1,2\}) \\ -1 & \text{für} \quad \{i,j,k\} \text{ antizyklisch aus } \{1,2,3\} \text{ (also } \{3,2,1\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1.) Totale Antisymmetrie: $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ (Produktion eines Minuszeichen beim Vertauschen von **benachbarten** Indizes)

2.) verschwindet, wenn zwei Indizes gleich sind (folgt aus der Antisymmetrie)

Einige Integrale aus der Klausur 2004/2005

Aufgabe 1 — 3 Punkte

a.)

Das Integral kann geschickt mit partieller Integration gelöst werden:

$$\int \underset{v}{x} \cdot \underset{u'}{\exp(-x)}\,\mathrm{d}x = -\underset{u}{\exp(-x)} \cdot \underset{v}{x}\Big| + \int \underset{u}{\exp(-x)} \cdot \underset{v'}{1}\,\mathrm{d}x = \boxed{-\exp(-x)\cdot(1+x)}$$ 1 Punkt

b.)

Auch hier ist partielle Integration sinnvoll:

$$\int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int \underset{u}{\cos\varphi} \cdot \underset{v'}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \underset{v}{\sin\varphi} \cdot \underset{u}{\cos\varphi}\Big| + \int \underset{u'}{\sin\varphi} \cdot \underset{v}{\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \sin\varphi\cdot\cos\varphi| + \int \left(1-\cos^2\varphi\right)\,\mathrm{d}\varphi = \sin\varphi\cdot\cos\varphi| + \varphi| - \int \cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Nun müssen wir nur noch das Integral auf der rechten Seite nach links bringen und durch zwei dividieren:

$$\int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{1}{2}\cdot(\varphi + \sin\varphi\cdot\cos\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\left(\varphi + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)}$$ 1 Punkt

Eine andere Möglichkeit, das Integral zu berechnen, ist, die Beziehung $\cos(2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1$ auszunutzen. Damit gilt nämlich:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\varphi)) \Rightarrow \int \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \boxed{\frac{1}{2}\cdot\left(\varphi + \frac{1}{2}\cdot\sin(2\varphi)\right)}$$ 1 Punkt

Es gibt unabhängig von der gewählten Rechnung einen Punkt.

c.)

Dieses Integral lösen wir durch Partialbruchzerlegung:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cdot\int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-3}\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\left[\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\cdot(\ln(1)-\ln(3)) = \boxed{-\frac{1}{4}\ln(3)}$$ 1 Punkt