Zur Konservativität von Kraftfeldern

Definition

Professor Nierste hat in seiner Vorlesung zwei Bedingungen angegeben, wann ein Kraftfeld konservativ ist:

1.) $\dfrac{\partial F}{\partial t} = 0$, also keine direkte Zeitabhängigkeit des Kraftfeldes und

2.) $\oint \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = 0$ für alle geschlossenen Wege

Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\operatorname{rot}\vec{F}$ verschwindet und $\vec{F}$ regulär ist, also keine Polstellen aufweist (bzw. das Integrationsgebiet einfach zusammenhängend ist).

Verschiedene Fälle

1.) Nichtverschwindende Rotation:

Wir betrachten das Kraftfeld $\vec{F}_1(x, y, z)$:

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der Rotations führt auf:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{o}$$

Damit sind keine weiteren Untersuchungen notwendig; das Kraftfeld ist aufgrund der nichtverschwindenden Rotation nicht konvervativ. Die Berechnung des Potential scheitert:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \stackrel{!}{=} -y \Rightarrow U(x, y) = \int -y\,\mathrm{d}x = -xy + C(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + \frac{\partial C(y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} x \Rightarrow C'(y) = 2x \Rightarrow C(y) = 2xy + D$$

Dies ist ein Widerspruch, da die Funktion $C(y)$ nur von y (aber nicht von x) abhängen darf.

2.) Verschwindende Rotation

a.) Kraftfeld an allen Punkten (x, y, z) definiert/regulär (Menge einfach zusammenhängend)

$$\vec{F}_2 = -\begin{pmatrix} x\exp(-(x^2+y^2)) \\ y\exp(-(x^2+y^2)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie zuvor berechnen wir die Rotation:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 &= -\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ y\exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2x) - x\exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2y) \end{pmatrix} = \\ &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2xy\exp(-(x^2+y^2)) + 2xy\exp(-(x^2+y^2)) \end{pmatrix} = \vec{o}\end{aligned}$$

Das ist schon einmal gut. Da außerdem das Kraftfeld aus regulären Funktionen zusammengesetzt ist, besitzt es den einfach zusammenhängenden Definitionsbereich $\mathbb{R}^3$. Das Kraftfeld ist also konservativ.

b.) Kraftfeld an endlich vielen Punkten nicht definiert/singulär

Hier betrachten wir das schon aus dem vorletzten Blatt bekannte Kraftfeld

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{r^2}\vec{r} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Erneut berechnen wir die Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_3 = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\begin{pmatrix} -2yz+2yz \\ -2xz+2xz \\ -2xy+2xy \end{pmatrix} = \vec{o}$$

Also verschwindet die Rotation. Das Problem ist jetzt, dass das Kraftfeld im Ursprung (0,0,0) nicht definiert ist. Das Kraftfeld ist kugelsymmetrisch, also kann dies durch Einführung von Kugelkoordinaten $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ gezeigt werden:

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Für $r \mapsto 0$ (also den Ursprung) nehmen alle drei Komponenten einen unendlich großen Wert an.

Der Definitionsbereich $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{o}\}$ ist jedoch (entgegen meiner ursprünglichen Meinung) trotzdem einfach zusammenhängend, da sich ein Weg um den Ursprung doch zu einem Punkt zusammenziehen lässt, indem man ihn außerhalb der Ebene, die durch den Ursprung geht, zusammenzieht. Dies ist möglich, da die Menge ja dreidimensional ist. Da die Erklärung euch wahrscheinlich zu fadenscheinig vorkommt, kann man auch das Wegintegral entlang eines geschlossenen Weges um den Ursprung berechnen. Hierbei ist es (aus funktionentheoretischen Gründen, die ihr nicht zu wissen braucht) unabhängig, wie man diesen Weg wählt, man wählt also einen besonders einfachen, nämlich einen Kreis um den Ursprung mit Radius 1.

$$W = \int \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}\varphi = 0$$

Dies gilt für alle Wege, die den singulären Urpsrung einschließen (und wegen $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{o}$) sowieso für alle anderen Wege außerhalb des Ursprungs. Damit ist dieses Feld konservativ und das Potential resultiert aus folgender Überlegung:

$$\frac{\partial}{\partial x}U \overset{!}{=} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow U(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + C(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}U = \frac{y}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C = C(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}U = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} + \frac{\partial C(z)}{\partial y} \overset{!}{=} \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial C(z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C(z) = C$$

Also gilt:

$$U(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2) + C = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2} + C = \ln|\vec{r}| + C$$

d.) Kraftfeld an unendlich vielen Punkten nicht definiert/singulär:

Wir betrachten nun zum Schluss das problematische Vektorfeld

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vom letzten Übungsblatt ist uns bekannt, dass $\vec{\nabla} \times \vec{F}_4 = \vec{o}$ ist. Durch Einsetzen von Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ zeigt man:

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi/r \\ \cos\varphi/r \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $r \mapsto 0$ streben also x- und y-Komponenten des Kraftfelds (unabhängig von z) gegen unendlich. Das bedeutet, dass die komplette z-Achse eine Singularität darstellt und aus dem Definitionsbereich entfernt werden muss. Dieser ist also gegeben durch $\mathbb{R} \setminus \{z\vec{e}_z\}$. Dieses Gebiet ist nun wirklich nicht einfach zusammenhängend, da man einen geschlossenen Weg um die z-Achse wirklich nicht an der z-Achse vorbei zu einem Punkt zusammenziehen kann. Wenn einem das als Begründung wieder nicht genügt, berechnet man wieder das Wegintegral entlang eines Kreises mit Radius 1 um den Ursprung. Vom letzten Übungsblatt wissen wir, dass der Wert dieses Integrals gleich 2π ist. Somit ist das Kraftfeld $\vec{F}_4$ nicht konservativ.

Bestürzend ist, dass jedoch trotzem ein skalares Potential existiert. (Die spontane Rechnung an der Tafel war also sogar richtig!)

$$\vec{\nabla}U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich der ersten beiden Komponenten folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \int U \,\mathrm{d}x = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

Differenzieren wir U nach y, so folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\frac{x^2}{y^2}+1} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} + f'(y) \stackrel{!}{=} \frac{x}{x^2+y^2}$$

Damit gilt $f'(y) = 0$ und $f = C(z)$. Dazu jedoch die partielle Ableitung nach z verschwindet (dritte Komponente), so hängt die Funktion f auch nicht von z ab und ist damit nur eine Konstante. Damit erhalten wir schlussendlich (durch Berücksichtigung des Konventionsminuszeichens):

$$U(x,y,z) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C$$

Fazit

Die Existenz eines Potentials reicht also wirklich nicht für die Konservativität. Das ist schon krass, weil es eigentlich in allen Büchern, die ich habe, so steht. Professor Nierste meinte auch, dass dies in vielen Büchern falsch dargestellt wird. Also würde ich sagen, ihr richtet euch wirklich nach der Definition der Vorlesung:

1.) Hängt $\vec{F}$ von der Zeit oder der Geschwindigkeit ab? Wenn ja, ist das Feld nicht konservativ und man ist sofort fertig. Ansonsten ist wie folgt vorzugehen:

2.) Berechnung der Rotation von $\vec{F}$

Ist $\vec{F} \neq \vec{o}$, so sind keine weiteren Betrachtungen notwendig. Das Kraftfeld ist auf jeden Fall nicht konservativ. Gilt $\vec{F} = \vec{o}$, so wird zum nächsten Punkt übergegangen.

3.) Untersuchung der Regularität des Kraftfeldes

Ist der Definitionsbereich des Kraftfeldes der ganze $\mathbb{R}^3$, so ist man fertig und hat die Konservativität des Kraftfeldes gezeigt. Gibt es Polstellen (Singularitäten), geht man zum nächsten Punkt.

4.) Berechnung des Wegintegrals entlang eines geschlossenen Weges um den singulären Punkt

Hier ist es ausreichend, den einfachsten Weg, nämlich einen Kreis mit Radius 1 um die Singularität zu wählen. Verschwindet das Integral, so ist das Feld konservativ, andernfalls nicht.

5.) Berechnung des Potentials (falls verlangt)