Raumkurven

Elementare Kurven

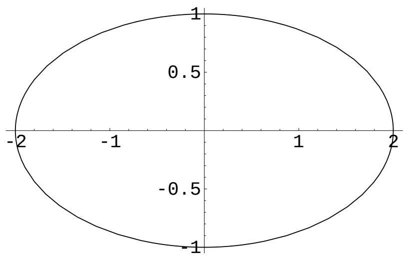
1.) Ellipse:

Die kartesische Gleichung besitzt folgende Form (wenn die Koordinatenachsen auf den Halbachsen liegen):

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Hierbei ist a die große und b die kleine Halbachse. In Parameterdarstellung gilt:

$$\begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) + x_0 \\ b\sin(t) + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi]$$



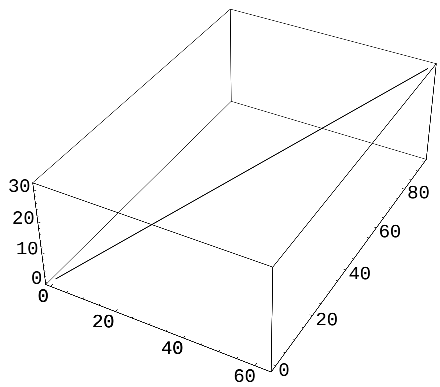
2.) Kreis:

Dabei handelt es sich um einen Spezialfall der Ellipse und zwar mit $a = b = r$, wobei r der Radius des Kreises ist.

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 1 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + x_0 \\ \sin(t) + y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi]$$

3.) Gerade im Raum:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot t + x_0 \\ b \cdot t + y_0 \\ c \cdot t + z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot t \\ b \cdot t \\ c \cdot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$



Eine Gerade im Raum besitzt keine kartesische Darstellung.

Die Darstellung dieser elementaren Kurven sollte man auswendig können.

Untersuchung von $|\vec{x}(t)|$

Manchmal hilft es, $|\vec{x}(t)|$ zu berechnen.

1.) Parameterabhängiger Radius $|\vec{x}(t)|$ (allgemein)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}(t)| = |a(t)|$$

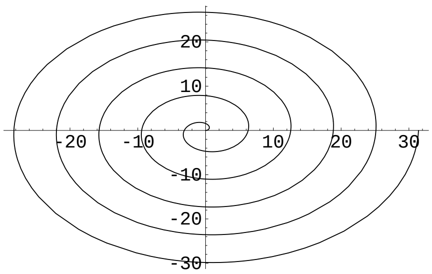
2.) Kreis:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}(t)| = 1$$

Der Radius ist für alle t konstant, also handelt es sich um einen Kreis.

3.) Archimedische Spirale:

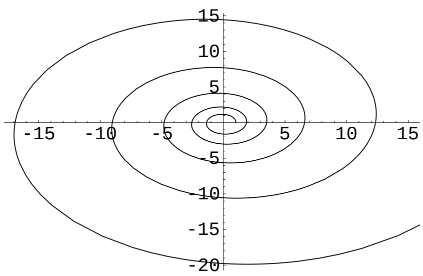
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}(t)| = |a||t|$$



Der Radius nimmt linear mit t zu, also ist $\vec{x}(t)$ eine Spirale.

4.) Logarithmische Spirale:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \exp(kt)\cos(t) \\ \exp(kt)\sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}(t)| = |a|\exp(kt)$$

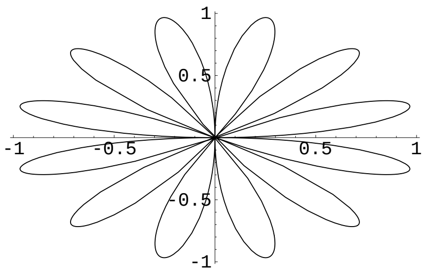


Da auch hier der Radius mit t zunimmt, handelt es sich wieder um eine Spirale. Jedoch nimmt der Radius im Gegensatz zu (b) exponentiell zu.

5.) Blume:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sin(at) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{x}| = |\sin(at)|$$

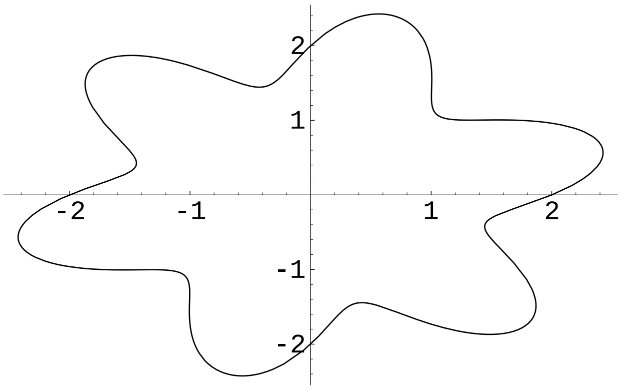
Der Radius $|\sin(at)|$ oszilliert zwischen 0 und 1. Damit hat die Kurve folgende Form:



6.) Stern:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (a + b\sin(ct)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit } b < a \text{ und } c > 1 \Rightarrow |\vec{x}| = |a + b\sin(ct)|$$

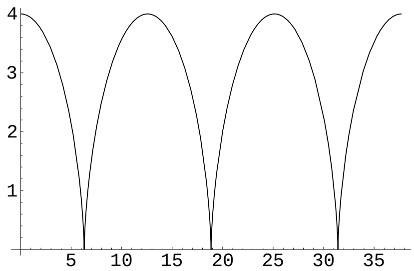
Hier oszilliert der Radius zwischen $|a - b|$ und $|a + b|$:



Überlagerung (Superposition) von Kurven

1.) Zykloide:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt - \cos(t) \\ r - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rt \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

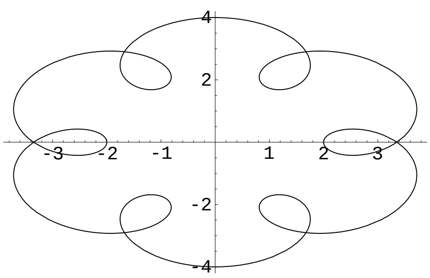


Die gesamte Kurve ist eine Überlagerung aus einer Geraden $\vec{x}(t) = (rt, r)$ und eines Kreises $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Eine Zykloide ist also die Bahnkurve eines Punktes auf dem Rand eines rollenden Kreises.

2.) Epizykloide:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(t) - \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ R\sin(t) - \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{R+r}{r}t\right) \\ \sin\left(\frac{R+r}{r}t\right) \end{pmatrix}$$

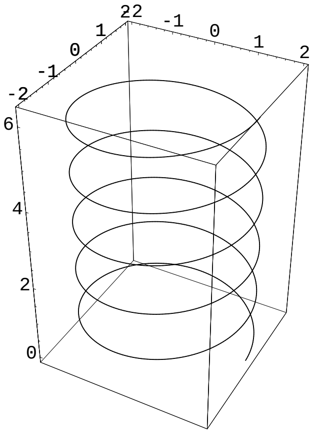
Die Epizykloide entsteht durch Überlagerung einer Kreisbewegung (Radius R) mit einer Kreisbewegung mit der Frequenz $\omega = (R + r)/r$. Sie ist also die Bahnkurve eines Punktes auf dem Rand eines Kreises mit dem Radius r, der auf einem großen Kreis mit Radius R abrollt. (Die Frequenz ω folgt aus der Rollbedingung $v = \omega r$, die für den rollenden Kreis mit Radius r erfüllt sein muss.)



3.) Schraubenlinie:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ bt \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + bt\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

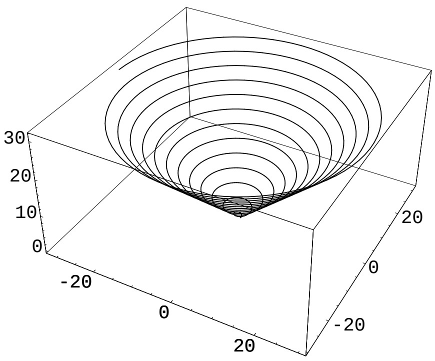
Der erste Summand ist ein Kreis parallel zur x_1-x_2-Ebene und der zweite Term beschreibt eine gleichförmige Bewegung in x_3-Richtung.



4.) Schraubenkegel:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at\cos(t) \\ at\sin(t) \\ bt \end{pmatrix} = at \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + bt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der erste Term stellt eine archimedische Spirale parallel zur x_1-x_2-Ebene dar und der zweite Term eine gleichförmige Bewegung in x_3-Richtung.



Vorsicht bei Substitutionen

Wir gehen aus von

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) \qquad (1)$$

und berechnen das Integral von 0 bis 1:

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(0) - \arcsin(1) = -\frac{\pi}{2}$$

Berechnen wir auf der anderen Seite das Integral ohne (1) mit der Substitution $x = \sin(\phi)$, so müssen wir die Betragsstriche beachten, weil der Kosinus für $\pi/2 \le \phi < \pi$ negativ ist:

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1-\sin^2(\phi)}}\,\mathrm{d}\phi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(\phi)}{|\cos(\phi)|}\,\mathrm{d}\phi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos(\phi)}{-\cos(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = -\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

In Aufgabe (3) auf dem letzten Blatt muss man die nicht beachten, weil der Wertebereich des Arkussinus nur das Intervall $I = [-\pi/2, \pi/2]$ ist. Weil ϕ über $\phi = \arcsin(y/y_0)$ gegeben ist, gilt also $\phi \in I$ und $\cos(\phi) \ge 0$ für $[-\pi/2, \pi/2]$.