Verschiedenes

Exponieren einer Matrix

Wir betrachten als Beispiel folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann die Funktion $f(A)$ einer Matrix A so berechnen, indem man auf die Reihendarstellung der Funktion $f(x)$ zurückgeht. Im Falle der Exponentialfunktion ist diese Reihendarstellung von folgender Form:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \ldots$$

Man schreibt also eine Funktion als Linearkombination von $\{1, x, x^2, \ldots\}$, was eine Basis des Raumes der Polynome ist.

$$\exp(\mathrm{i}\alpha A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{i}^k \alpha^k A^k$$

Man spaltet nun die Reihe auf in zwei verschiedene Reihen mit geraden Koeffizienten $k = 2n$ und ungeraden Koeffizienten $k = 2n + 1$ mit $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \mathrm{i}^{2n} \alpha^{2n} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n+1} \frac{1}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} A^{2n+1}$$

Als nächstes schauen wir uns A^{2n} und A^{2n+1}, also geradzahlige und nicht geradzahlige Potenzen der Matrix A an.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2 \Rightarrow A^{2n} = (A^2)^n = \mathbf{1}_2^n = \mathbf{1}_2$$

$$A^{2n+1} = A^{2n} \cdot A = \mathbf{1}_2 \cdot A = A$$

Geradezahlige Potenzen von A sind also die zweidimensionale Einheitsmatrix $\mathbf{1}_2$ und nicht geradzahlige Potenzen wieder die Matrix A selbst. Mit $\mathrm{i}^{2n} = (-1)^n$ und $\mathrm{i}^{2n+1} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^{2n} = \mathrm{i}(-1)^n$ folgt weiter:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} A^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} \mathbf{1}_2 + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} A =$$
$$= \mathbf{1}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} + \mathrm{i} A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1}$$

Die Einheitsmatrix $\mathbf{1}_2$ und die Matrix A lassen sich aus der Summe herausziehen, da diese natürlich nicht vom Summationsindex abhängen. Verwenden wir nun noch die Reihendarstellungen der Sinus- und Kosinusfunktionen, also

$$\cos(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} \text{ und } \sin(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1}$$

so ergibt sich:

$$\mathbf{1}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \alpha^{2n} + \mathrm{i} A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} = \mathbf{1}_2 \cos(\alpha) + \mathrm{i} A \sin(\alpha)$$

Nun können wir noch die ursprüngliche Matrix A einsetzen:

$$\mathbf{1}_2 \cos(\alpha) + \mathrm{i} A \sin(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos(\alpha) + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \mathrm{i}\sin(\alpha) \\ \mathrm{i}\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \exp(\mathrm{i}\alpha A)$$

Das Levi-Civita-Symbol

Das Levi-Civita-Symbol wird auch als total antisymmetrischer ε-Tensor bezeichnet. Ein Tensor ist ein Objekt, das durch ein bestimmtes Transformationsverhalten bei Koordinatensystemtransformationen charakterisiert ist. Darauf wollen wir doch jetzt nicht näher eingehen. Es ist jedoch sinnvoll, auf den Begriff der totalen Antisymmetrie einzugehen. Dies bedeutet, dass sich das Vorzeichen von ε_{ijk} ändert, sobald man zwei Indizes vertauscht:

$$\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk},\ \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$$

Setzen wir zwei Indizes gleich (also beispielsweise $i = j$), so gilt $\varepsilon_{iik} = -\varepsilon_{iik}$, was nur für $\varepsilon_{iik} = 0$ erfüllt ist. Analog funktioniert dies für die anderen Indizes. Sind also zwei oder mehr Indizes gleich, so verschwindet das Levi-Civita-Symbol. Setzt man $\varepsilon_{123} = 1$, so gilt:

$$\varepsilon_{123} = 1,\ \varepsilon_{231} = 1,\ \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{321} = -1,\ \varepsilon_{213} = -1,\ \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{111} = 0,\ \varepsilon_{112} = 0,\ \varepsilon_{113} = 0,\ \varepsilon_{121} = 0,\ \varepsilon_{131} = 0,\ \varepsilon_{311} = 0,\ \ldots$$

Zusammenfassend kann man sagen:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j,k) \text{ zyklisch aus } (1,2,3) \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ antizyklisch aus } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst (zwei oder drei Indizes gleich)} \end{cases}$$

Anwendungen des Levi-Civita-Symbols sind beispielsweise das Kreuzprodukt und die Determinante:

1.) Kreuzprodukt:

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist wieder ein Vektor (der auf diesen beiden Vektoren senkrecht steht). Die k-te Komponente dieses neuen Vektors $\vec{c}$ lässt sich mit dem Levi-Civita-Symbol schreiben:

$$c_k = (\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

Summiert wird über die beiden Indizes i und j. Der Index k ist frei, über diesen wird nicht summiert. Führen wir also die Summationen aus:

$$\begin{aligned} c_1 &= (\vec{a} \times \vec{b})_1 = \\ &= \underbrace{\varepsilon_{111}}_{=0} a_1 b_1 + \underbrace{\varepsilon_{121}}_{=0} a_1 b_2 + \underbrace{\varepsilon_{131}}_{=0} a_1 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{211}}_{=0} a_2 b_1 + \underbrace{\varepsilon_{311}}_{=0} a_3 b_1 + \underbrace{\varepsilon_{221}}_{=0} a_2 b_2 + \underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{=-1} a_3 b_2 = \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned}$$

Für die anderen beiden Komponenten gilt (wobei wir nun die ε_{ijk} mit zwei oder drei gleichen Indizes sofort gleich null setzen):

$$c_2 = (\vec{a} \times \vec{b})_2 = \varepsilon_{132} a_1 b_3 + \varepsilon_{312} a_3 b_1 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = (\vec{a} \times \vec{b})_3 = \varepsilon_{123} a_1 b_2 + \varepsilon_{213} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Zusammenfassend gilt also (wie wir aus der Schule wissen):

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

2.) Determinante einer Matrix:

a.) zweidimensionale Matrix:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Hier haben wir also das zweidimensionale ε-Symbol verwendet, das analog zum dreidimensionalen definiert ist. Es gilt also:

$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, $\varepsilon_{ii} = 0$

$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$

b.) dreidimensionale Matrix:

$$\begin{aligned}\det(A) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} &= \varepsilon_{123}a_{11}a_{21}a_{31} + \varepsilon_{231}a_{12}a_{23}a_{31} + \varepsilon_{312}a_{13}a_{21}a_{32} \\ &+ \varepsilon_{132}a_{11}a_{23}a_{32} + \varepsilon_{321}a_{13}a_{22}a_{31} + \varepsilon_{213}a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

Das ist nichts anderes als die bekannte Sarrussche Regel.

Determinanten höherdimensionaler Matrizen kann man mit einem entsprechenden höherdimensionalen Levi-Civita-Symbol definieren, das dieselben Eigenschaften hat. Damit wollen wir uns jedoch jetzt nicht beschäftigen.

Kommutatoren

Kommutatoren sind wichtige Formalismen in der Algebra bzw. der Quantenmechanik in der Physik. Mittels der Berechnung eines Kommutators wird überprüft, ob man die Reihenfolge der Multiplikation von mathematischen Objekten vertauschen darf. Der Kommutator von A, B ist definiert durch:

$[A, B] := A \cdot B - B \cdot A$

Ist $[A, B] \neq 0$, so darf man A und B nicht vertauschen. Das ist nur im Falle $[A, B] = 0$ möglich! Aus der Definition des Kommutators kann man außerdem folgende Eigenschaften (Antisymmetrie!) ablesen:

$[B, A] = B \cdot A - A \cdot B = -(A \cdot B - B \cdot A) = -[A, B]$ und $[A, A] = A \cdot A - A \cdot A = 0$

Natürlich ist der Kommutator einer Größe mit sich selbst gleich null. Schauen wir uns einige Beispiele an:

1.) Reelle Zahlen:

$[3, \pi] = 3 \cdot \pi - \pi \cdot 3 = 3 \cdot \pi - 3 \cdot \pi = 0$

Natürlich ist die Multiplikation von reellen Zahlen vertauschbar (kommutativ). Das Kommutativgesetz kennen wir seit der fünften Klasse. Algebraisch bilden die reellen Zahlen (sowohl bezüglich Addition als auch Multiplikation) einen sogenannten Körper.

2.) Matrizen:

Die Matrixmultiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ. Man darf die Matrizen also bei der Multiplikation nicht einfach miteinander vertauschen. (Die Matrizen bilden bezüglich der Multiplikation einen sogenannten Ring.) Sei beispielsweise

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

so gilt:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [A, B] = A \cdot B - B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Eine Matrix, die man bei der Multiplikation mit jeder anderen Matrix vertauschen darf, ist die Einheitsmatrix:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow [A, E] = A \cdot E - E \cdot A = \mathbf{0}$

Wir berechnen den Kommutator für folgende drei Matrizen:

$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$[A_1, A_2] = A_1 \cdot A_2 - A_2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = 2\mathrm{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\mathrm{i} A_3$$

$$[A_1, A_3] = A_1 \cdot A_3 - A_3 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -2\mathrm{i} A_2$$

$$[A_2, A_3] = A_2 \cdot A_3 - A_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = 2\mathrm{i} A_1$$

Mit der obigen Betrachtung gilt also außerdem:

$[A_2, A_1] = -2\mathrm{i} A_3$, $[A_3, A_1] = 2\mathrm{i} A_2$, $[A_3, A_2] = -2\mathrm{i} A_1$

$[A_1, A_1] = [A_2, A_2] = [A_3, A_3] = 0$

Wenn man jetzt das ganze scharf ansieht, kann das Ergebnis ganz kurz mit dem Levi-Civita-Symbol geschrieben werden:

$$[A_i, A_j] = 2\mathrm{i} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_k$$

Beispielsweise gilt:

$[A_1, A_2] = 2\mathrm{i}(\varepsilon_{121} A_1 + \varepsilon_{122} A_2 + \varepsilon_{123} A_3) = 2\mathrm{i} A_3$

$[A_2, A_1] = 2\mathrm{i}(\varepsilon_{211} A_1 + \varepsilon_{212} A_2 + \varepsilon_{213} A_3) = -2\mathrm{i} A_3$

$[A_1, A_1] = 2\mathrm{i}(\varepsilon_{111} A_1 + \varepsilon_{112} A_2 + \varepsilon_{113} A_3) = 0$

Die totale Antisymmetrie des Levi-Civita-Symbols spiegelt also die Antisymmetrie des Kommutators wieder, also $[A_i, A_j] = -[A_j, A_i]$ und $[A_i, A_i] = 0$.

Landau-Symbole

$\varphi(x) = o(\psi(x))$ für $x \mapsto x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

$\varphi(x) = O\left(\psi(x)\right)$ für $x \mapsto x_0 \Leftrightarrow \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ bleibt für $x \mapsto x_0$ beschränkt.

In der Physik verwendet man (fast) ausschließlich das große Landau-Symbol O. Beispielsweise gilt:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + O(x^2) = 1 + x + \ldots$$

Mit $O(x^2)$ bezeichnet man alle restlichen Terme der Potenz 2 und höher (Ordnung!), also:

$$O(x^2) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots$$

Es ist also

$$\frac{\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} x + \ldots$$

und damit für $x \mapsto 0$ beschränkt (nämlich $1/2$), so wie es nach Definition sein muss. Weiterhin gilt:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + O(x^3) \text{ mit } O(x^3) = -\frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots$$

$$\frac{-\frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} x^2 + \ldots$$

ist also beschränkt für $x \mapsto 0$ (nämlich $-1/3!$). Ihr könnt auf dem Blatt einfach alle Landau-Symbole gleich null setzen.

Herleitung des Winkels beim letzten Blatt, Aufgabe (2c)

a.) Wir suchen einen Vektor, der senkrecht auf der Drehachse steht.
Das wird beispielsweise erfüllt von

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

wegen $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b.) Wir berechnen den gedrehten Vektor $\vec{b}'$ durch Multiplikation mit D:

$$\vec{b}' = D\vec{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c.) Nun berechnen wir den Winkel zwischen dem ursprünglichen Vektor $\vec{b}$ und dem gedrehten $\vec{b}'$:

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{b} \cdot \vec{b}'}{|\vec{b}| \cdot |\vec{b}'|}$$

Mit

$$\vec{b} \cdot \vec{b}' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2\sqrt{2} - 1$$

und

$$|\vec{b}|^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+1 \\ 1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}^2 = 4, \; |\vec{b}'|^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}^2 = 4$$

folgt:

$$\cos\vartheta = \frac{2\sqrt{2}-1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}(2\sqrt{2}-1) \Rightarrow \boxed{\vartheta = 62^\circ\, 47'\, 57{,}95''}$$