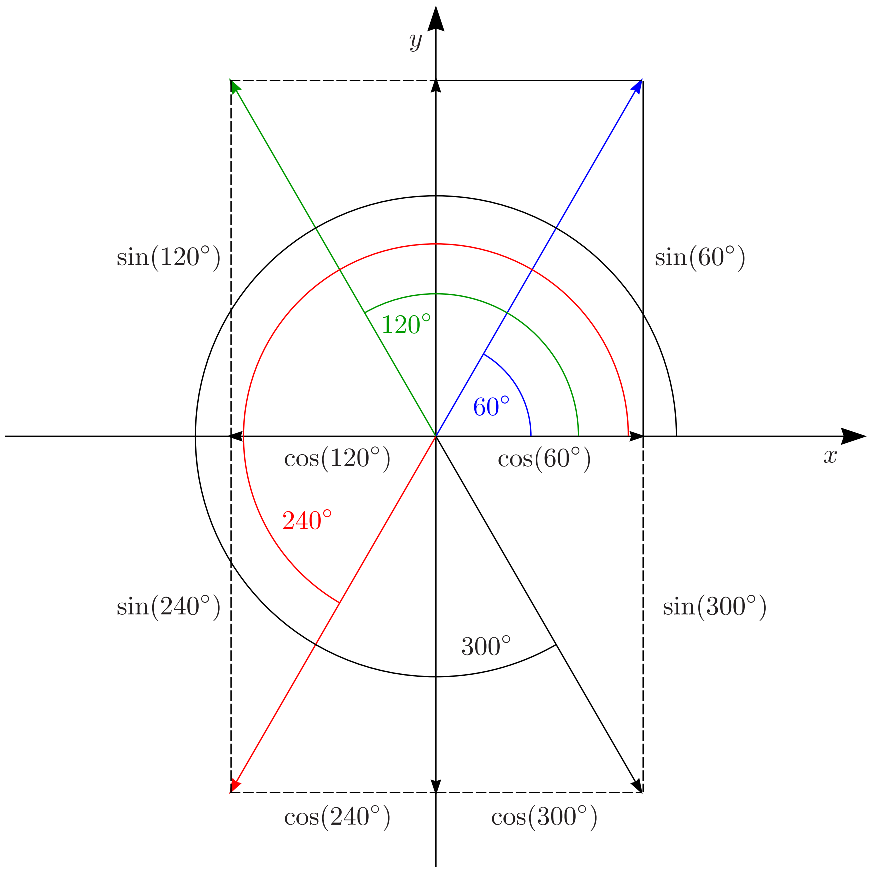
Sonstige Probleme

Winkelberechnung



Wir wissen, dass $\cos(60°) = 0.5$ und $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (erster Quadrant) ist. Daraus lassen sich die restlichen herleiten:

- Zweiter Quadrant: $\cos(120°) = -0,5$ und $\sin(120°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
  Dies gilt, da im zweiten Quadranten der Sinus positiv und der Kosinus negativ ist (siehe Zeichnung).
  $$\tan(120°) = \frac{\sin(120°)}{\cos(120°)} = -\sqrt{3}$$
- Dritter Quadrant: $\cos(240°) = -0,5$ und $\sin(240°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
  Im dritten Quadranten sind sowohl Sinus als auch Kosinus negativ.
  $$\tan(240°) = \frac{\sin(240°)}{\cos(240°)} = \sqrt{3}$$
- Vierter Quadrant: $\cos(300°) = 0,5$ und $\sin(300°) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
  Hier ist der Kosinus wieder positiv, aber der Sinus weiterhin negativ.
  $$\tan(300°) = \frac{\sin(300°)}{\cos(300°)} = -\sqrt{3}$$

Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

Ich bin noch gefragt worden, wie man $\sin(\arctan(y))$ bzw. $\cos(\arctan(y))$ berechnet:

$$\sin(\arctan(y)) = \frac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \cos(\arctan(y)) = \frac{1}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Dies folgt unter anderem aus $\sin(x) = \tan(x) \cdot \cos(x) = \tan(x)\sqrt{1 - \sin^2(x)}$, was nach $\sin(x)$ aufgelöst werden kann: $\sin(x) = \tan(x)/\sqrt{1 + \tan^2(x)}$. Daraus ergeben sich dann die obigen Formeln.

Drehachse

Wie ich es zuerst sagte, darf man auch bei der Berechnung der Drehachse den Faktor vor der Matrix nicht weglassen. Tut man dies im Falle der Matrix aus Aufgabe 2, so gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$-\phi_1 - \phi_3 = \phi_1 \qquad (1)$$

$$\sqrt{2}\phi_2 = \phi_2 \qquad (2)$$

$$\phi_1 - \phi_3 = \phi_3 \qquad (3)$$

Aus Gleichung (2) ergibt sich $\phi_2 = 0$. Hier können wir eigentlich schon aufhören, weil $\phi_2 = 1$ in der richtigen Drehachse $= 1$ ist. Weiterhin ergibt sich $\phi_1 = \phi_3 = 0$, also erhalten wir als Drehachse den Nullvektor $\vec{o}$ und das kann nicht sein!
Den Vorfaktor **muss** man also berücksichtigen, weil ansonsten die Spalten bzw. Zeilen der Drehmatrix nicht mehr auf 1 normiert sind und den Betrag eines Vektors (auch der Drehachse!) ändern. Damit wird es unmöglich, aus der Bedingung $D\vec{\phi} = \vec{\phi}$ die Drehachse zu erhalten!