Verschiedene Probleme Teil I

Aufgabe 3

a.)

Die Bewegungsgleichung des Systems ergibt sich aus der LAGRANGEfunktion $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}} - \frac{\alpha}{r}$ durch Auswerten der LAGRANGEgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = 0$$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}$ zu berechnen, ist hier kein Problem; dies ist einfach $m\dot{r}$. Was ist jedoch $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}$? Dies ist nichts anderes als der Gradient von $\mathcal{L}$. Um diesen auszuwerten, betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall einer Funktion f, die von r abhängt, wobei man bedenken muss, dass r gegeben ist durch $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)^\mathsf{T}$. Zuerst berechnen wir:

$$\frac{\partial r(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} = \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{r}$$

Nun kommen wir zum Gradienten, wobei wir uns vorerst mit der i-ten Komponente begnügen:

$$[\vec{\nabla} f(r)]_i = \frac{\partial f(r(x_1, x_2, x_3)))}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = f'(r) \cdot \frac{x_i}{r}$$

Dies ergibt sich mittels der Kettenregel. Verallgemeinert auf alle drei Raumkomponenten gilt:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(r) = f'(r)\frac{\vec{r}}{r} = f'(r)\vec{e}_r}$$

Dieses Ergebnis sollte man sich merken. Damit folgt nun:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}} = \vec{\nabla}\mathcal{L} = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$$

Damit folgt die Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}}$$

Die zeitliche Ableitung des LENZschen Vektors kann man auch folgenderweise (anders als in der Musterlösung) berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}V_{Lenz}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{m\ddot{\vec{r}}} \times \vec{L} + \underbrace{\vec{p} \times \dot{\vec{L}}}_{=\vec{o}\text{ da }\dot{\vec{L}}=\vec{o}} - m\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \overset{m\ddot{\vec{r}}=-\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}}{=} -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r} \times \vec{L} - m\alpha\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Ausgenutzt wurde hier die Bewegungsgleichung. Nun beachtet man $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{L} = L\vec{e}_z$ und $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$:

$$\frac{\mathrm{d}V_{Lenz}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{r^3} \cdot r \cdot L(\vec{e}_r \times \vec{e}_z) - m\alpha \cdot \frac{L}{mr^2}\vec{e}_\varphi = \frac{L\alpha}{r^2}\vec{e}_\varphi - \frac{L\alpha}{r^2}\vec{e}_\varphi = \boxed{0}$$

Ausgenutzt wurde hier, dass die Einheitsvektoren der Polarkoordinaten ein Rechtssystem bilden. Dann gilt nämlich $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$, $\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r$ und $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$.

c.)

Wir machen eine TAYLORentwicklung der transformierten LAGRANGEfunktion $\mathcal{L}(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t)$ und den „Entwicklungspunkt“ $(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{r} + \delta\vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}}, t) &= \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}(\vec{r} + \delta\vec{r} - \vec{r}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}(\dot{\vec{r}} + \delta\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}) + O((\delta\vec{r})^2, (\delta\dot{\vec{r}})^2) = \\ &= \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}}\delta\vec{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}} + O((\delta\vec{r})^2, (\delta\dot{\vec{r}})^2)\end{aligned}$$

Da es sich um eine infinitesimale (also unendlich kleine) Transformation handelt, berücksichtigen wir nur die linearen Terme in $\delta\vec{r}$, $\delta\dot{\vec{r}}$. Alle höheren Terme (also quadratische, kubische, usw.) werden als vernachlässigbar betrachtet. Dies ist ein **sehr wichtiges** Prinzip und sollte für künftige Vorlesungen im Hinterkopf behalten werden. (Ihr werdet das oft benötigen, vor allem in Teilchenphysik!) Damit folgt also:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{r}+\delta\vec{r}, \dot{\vec{r}}+\delta\dot{\vec{r}}, t) - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}}$$

Die Behauptung ist nun, dass sich $\delta\mathcal{L}$ als totale Zeitableitung einer Funktion $\xi(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ schreiben lässt, dass also gilt $\delta\mathcal{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\varepsilon$, wobei hier der infinitesimale Parameter ε für die infinitesimale Transformation steht.

c,i.)

Um nun zu zeigen, dass die angegebene Größe zeitlich konstant ist, differenzieren wir diese nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}}\frac{\delta\vec{r}}{\varepsilon}\right) - \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}}\right] = 0$$

c,ii.)

Wir differenzieren die angegebene Größe nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{r}\right) = \alpha\frac{r\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{b}\cdot\vec{r}) - (\vec{b}\cdot\vec{r})\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}}{r^2}$$

Was die Zeitableitung von r und $(\vec{b}\cdot\vec{r})$ ist, müssen wir uns im folgenden überlegen. Dabei bedenken wir, dass r von x_1, x_2, x_3 abhängt und die x_i wiederum von der Zeit t, dass also $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $x_i \equiv x_i(t)$ gilt. Damit erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^3}}\cdot[2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) + 2x_3(t)\dot{x}_3(t)] =$$
$$= \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r}$$

Hierbei haben wir die verallgemeinerte Kettenregel ausgenutzt:

$$\frac{\mathrm{d}r(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}$$

Damit folgt also:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\alpha\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{r}\right) = \alpha\frac{r(\vec{b}\cdot\dot{\vec{r}}) - \frac{\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}}{r}(\vec{b}\cdot\vec{r})}{r^2} = \alpha\frac{r^2(\vec{b}\cdot\dot{\vec{r}} - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})(\vec{b}\cdot\vec{r}))}{r^3}$$

Mit $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$ und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}}$ ergibt sich:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}\delta\vec{r} + \frac{\partial}{\partial\dot{\vec{r}}}\delta\dot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^3}\underbrace{\vec{r}\cdot\left[(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r}\right]}_{=0 \text{ da } \vec{r}\perp(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r}}\varepsilon + m\dot{\vec{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r}\right] = m\dot{\vec{r}}\left[(\vec{b}\times\ddot{\vec{r}})\times\vec{r} + (\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}\right] =$$
$$= \left(m\dot{\vec{r}}[(\vec{b}\times\ddot{\vec{r}})\times\vec{r}] + \underbrace{m\dot{\vec{r}}\cdot[(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}]}_{=0 \text{ da } \dot{\vec{r}}\perp(\vec{b}\times\dot{\vec{r}})\times\dot{\vec{r}}}\right)\varepsilon = \varepsilon\dot{\vec{r}}(\vec{b}\times m\ddot{\vec{r}})\times\vec{r}$$

An dieser Stelle ersetzen wir nun $m\ddot{\vec{r}}$ mittels der Bewegungsgleichung durch $-\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}$, wobei wir $\frac{\alpha}{r^3}$ als Skalar aus dem Vektorprodukt herausziehen können. Außerdem beachten wir, dass das Vektorprodukt antikommutativ ist, dass also $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ gilt:

$$\delta\mathcal{L} = \varepsilon\frac{\alpha}{r^3}\dot{\vec{r}}[\vec{r}\times(\vec{b}\times\vec{r})] = \frac{\alpha}{r^3}\varepsilon\dot{\vec{r}}[\vec{b}\vec{r}^2 - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{b})] = \frac{\alpha}{r^3}\varepsilon\left[r^2(\vec{b}\cdot\dot{\vec{r}}) - (\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})(\vec{b}\cdot\vec{r})\right]$$

Benutzt wurde hier die „bac-cab-Regel“ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, die ihr euch **unbedingt** merken solltet, besonders für Theoretische Physik C! Nun leiten wir noch mittels der im ersten Aufgabenteil angegebenen Formel die Erhaltungsgröße I her, wobei wir auch wieder die „bac-cab-Regel“ berücksichtigen:

$$
\begin{aligned}
I &= m\dot{\vec{r}}(\vec{b} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} \overset{m\dot{\vec{r}}=\vec{p}}{=} \vec{p} \cdot [-\vec{r} \times (\vec{b} \times \dot{\vec{r}})] - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} = -\vec{p}[\vec{b}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{b})] - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} = \\
&= -[(\vec{b} \cdot \vec{p})(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\vec{b} \cdot \vec{r})(\vec{p} \cdot \dot{\vec{r}})] - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} = -\vec{b}[\vec{p}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \vec{r}(\vec{p} \cdot \dot{\vec{r}})] - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} \overset{m\dot{\vec{r}}=\vec{p}}{=} \\
&= -\frac{\vec{b}}{m}[\vec{p}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{p})] - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} = -\frac{\vec{b}}{m}(-\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{p})) - \alpha \frac{\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} \overset{\vec{r}\times\vec{p}=\vec{L}}{=} \\
&= \frac{\vec{b}}{m}(\vec{p} \times \vec{L}) - \frac{1}{m} \cdot \frac{m\alpha\vec{b} \cdot \vec{r}}{r} = \boxed{\frac{1}{m}(\vec{V}_{Lenz} \cdot \vec{b})}
\end{aligned}
$$