Verschiedene Probleme Teil II

Aufgabe 2

b.)

Wir gehen aus von der Hamiltonfunktion:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2$$

Mittels der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen erhalten wir:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)$$

Die Berechnung der zweiten Hamiltonschen Gleichung ist etwas mühsamer. Wir müssen dabei beachten, dass $\vec{p}$ und $\vec{r}$ als voneinander unabhängige Variablen betrachtet werden analog zu $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ in der Lagrangefunktion.

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{mc}\vec{p}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^2(\vec{r},t) + q\phi(\vec{r},t)\right) = \frac{q}{mc}\vec{\nabla}(\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\vec{p}) - \frac{q^2}{2mc^2}\vec{\nabla}A^2(\vec{r},t) - q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$$

Was ist nun $\vec{\nabla}\vec{A}^2(\vec{r},t)$?

$$(\vec{\nabla}\vec{A}^2)_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j A_j^2 = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}A_j^2 = \sum_j 2A_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{A}^2 = \sum_j 2A_j\vec{\nabla}A_j = 2\left[A_1\vec{\nabla}A_1 + A_2\vec{\nabla}A_2 + A_3\vec{\nabla}A_3\right]$$

Mittels des kanonischen Impulses $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)$ folgt aus der Gleichung für $\dot{\vec{p}}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= \frac{q}{mc}\vec{\nabla}\left[\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\left(m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)\right] - \frac{q^2}{2mc^2}\vec{\nabla}^2\vec{A}^2(\vec{r},t) - q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) = \\
&= \frac{q}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}) + \frac{q^2}{mc^2}[A_1\vec{\nabla}A_1 + A_2\vec{\nabla}A_2 + A_3\vec{\nabla}A_3] - \frac{q^2}{2mc^2}\cdot 2\left[A_1\vec{\nabla}A_1 + A_2\vec{\nabla}A_2 + A_3\vec{\nabla}A_3\right] - q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) = \\
&= \frac{q}{c}\vec{\nabla}(\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}) - q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

Der zweite Term in der zweiten Zeile folgt aus der Tatsache, dass hier $\vec{\nabla}$ nur auf eines der beiden $\vec{A}(\vec{r},t)$ wirkt, jedoch nicht auf beide. Mit

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_i = \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial A_i}{\partial t} = \sum_j\left(\dot{x}_j\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\right)A_i + \frac{\partial A_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

folgt $\ddot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\vec{r}} &= \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{q}{mc}\frac{\mathrm{d}\vec{A}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\vec{p}}}{m} - \frac{q}{mc}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{q}{mc}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = \\
&= \frac{q}{mc}\vec{\nabla}(\vec{A}(\vec{r},t)\cdot\dot{\vec{r}}) - \frac{q}{mc}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r},t) - \frac{q}{mc}\frac{\mathrm{d}\vec{A}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{m}\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)
\end{aligned}$$

Mit $\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) - \vec{A}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}) = \dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ und $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ folgt die Bewegungsgleichung der Elektrodynamik:

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = q\vec{E} + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\times\vec{B}}$$

Aufgabe 3

a.)

Ihr wolltet wissen, wie man geschickt die HAMILTONfunktion $\mathcal{H}$ aus der LAGRANGEfunktion $\mathcal{L}$ erhält. Am besten ist es wohl immer, wenn man die zeitlichen Ableitungen der kanonischen Variablen erst am Ende durch die kanonischen Impulse ersetzt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = p_1\dot{\phi}_1 + p_2\dot{\phi}_2 - \mathcal{L} = (m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + m_2l^2\dot{\phi}_2^2 + m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 - \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\phi}_1^2 - \\
+ m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\phi_2^2 = \\
= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1^2 + m_2l^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\phi_2^2
\end{aligned}
$$

Dies können wir nicht mehr weiter zusammenfassen. Deshalb ersetzen wir nun die Zeitableitungen der kanonischen Variablen $\dot{\phi}_1$ und $\dot{\phi}_2$ durch ihre kanonischen Impulse $p_1 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_1}$ und $p_2 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_2}$. Dann ist es sinnvoll, nicht alles sofort auszumultiplizieren, sondern passend zusammenzufassen, womit einige Terme sofort herausfallen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2 \cdot \left(\frac{p_1-p_2}{m_1l^2}\right)^2 + m_2l^2\left(\frac{p_1-p_2}{m_1l^2}\right)\cdot\left(\frac{p_2}{m_2l^2} - \frac{p_1-p_2}{m_1l^2}\right) + \frac{1}{2}m_2l^2\left(\frac{p_2}{m_2l^2} - \frac{p_1-p_2}{m_1l^2}\right)^2 + \\
+ \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\phi_2^2 = \\
= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2\left(\frac{p_1-p_2}{m_1l^2}\right)^2 + m_2l^2\cdot\frac{(p_1-p_2)p_2}{m_1m_2l^4} - m_2l^2\cdot\frac{(p_1-p_2)^2}{(m_1l^2)^2} + \\
+ \frac{1}{2}m_2l^2\left(\frac{p_2^2}{(m_2l^2)^2} - \frac{2p_2(p_1-p_2)}{m_1m_2l^4} + \frac{(p_1-p_2)^2}{(m_1l^2)^2}\right) + \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\phi_2^2 = \\
= \left(\frac{p_1-p_2}{m_1l^2}\right)^2 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2}(m_1+m_2)l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2 - m_2l^2\right]}_{=\frac{1}{2}m_1l^2} + (p_1-p_2)p_2\underbrace{\left[\frac{m_2l^2}{m_1m_2l^4} - \frac{m_2l^2}{m_1m_2l^4}\right]}_{=0} + \frac{p_2^2}{2m_2l^2} + \\
+ \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\phi_2^2 = \\
= \boxed{\frac{(p_1-p_2)^2}{2m_1l^2} + \frac{p_2^2}{2m_2l^2} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)gl\phi_1^2 + \frac{1}{2}m_2gl\phi_2^2}
\end{aligned}
$$

b.)

Wir berechnen die Matrixelemente der Matrix $\hat{T}$ durch direkten Vergleich:

$$
\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \hat{T}\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}\dot{\phi}_1 + T_{12}\dot{\phi}_2 \\ T_{21}\dot{\phi}_1 + T_{22}\dot{\phi}_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} (m_1+m_2)l^2\dot{\phi}_1 + m_2l^2\dot{\phi}_2 \\ m_2l^2\dot{\phi}_2 + m_2l^2\dot{\phi}_1 \end{pmatrix}
$$

Hieraus folgt $T_{11} = (m_1+m_2)l^2$, $T_{12} = T_{21} = m_2l^2$ und $T_{22} = m_2l^2$. Wir erkennen also, dass die Matrix $\hat{T}$ symmetrisch ist.

$$
\hat{T} = l^2\begin{pmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{pmatrix}
$$

Wir können $\vec{p} = \hat{T}\dot{\vec{\phi}}$ durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung von links mit der inversen Matrix $\hat{T}^{-1}$ nach $\dot{\vec{\phi}}$ auflösen:

$$
\hat{T}^{-1}\vec{p} = \hat{T}^{-1}\hat{T}\dot{\vec{\phi}} \Rightarrow \dot{\vec{\phi}} = \hat{T}^{-1}\vec{p} \text{ da } \hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{T}\hat{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2
$$

Man muss aufpassen, dass man die Matrix wirklich auf beiden Seiten von links multipliziert, da die Matrizenmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist, das heißt: $\vec{A}\vec{B} \neq \vec{B}\vec{A}$! Weiterhin benötigen wir die Transponierte der Gleichung $\dot{\vec{\phi}} = \hat{T}^{-1}\vec{p}$, wobei wir beachten, dass $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$ ist:

$$
\dot{\vec{\phi}}^\intercal = (\hat{T}^{-1}\vec{p})^\intercal = \vec{p}^\intercal(\hat{T}^{-1})^\intercal
$$

Um $(\hat{T}^{-1})^\intercal$ zu berechnen, müssen wir zuerst bedenken, dass für eine beliebige Matrix $(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1}$ ist. Um zuerst zu zeigen, dass dies gilt, multiplizieren wir beide Seiten mit der transponierten Matrix $A^\intercal$ und nutzen $(A^{-1})^{-1} = A$ aus:

$$(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1} \Leftrightarrow A^\intercal(A^{-1})^\intercal = A^\intercal(A^\intercal)^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1}A)^\intercal = [(A^\intercal)^{-1}]^{-1}(A^\intercal)^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{1} = (A^\intercal(A^\intercal)^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Dies ist eine wahre Aussage, womit $(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1}$ gezeigt ist. Damit folgt weiter bei einer symmetrischen Matrix $A^\intercal = A$:

$$(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1} \xrightarrow{A^\intercal = A} (A^{-1})^\intercal = A^{-1}$$

Ist also eine Matrix A symmetrisch, so ist es auch ihre Inverse A^{-1}. Also folgt $\dot{\vec{\phi}}^\intercal = \vec{p}^\intercal \hat{T}^{-1}$ und damit die Hamiltonfunktion:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix} - \mathcal{L} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \underbrace{\hat{T}\hat{T}^{-1}}_{=\mathbf{1}_2} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \hat{T}^{-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + U\end{aligned}$$