Verschiedene Probleme Teil III

Aufgabe 1

Man kann Poissonklammern folgendermaßen geschickt berechnen:

$$\{L_x, L_y\} = \vec{\nabla}_r L_x \cdot \vec{\nabla}_p L_y - \vec{\nabla}_p L_x \cdot \vec{\nabla}_r L_y = \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_z \\ 0 \\ -r_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -r_z \\ r_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -p_z \\ 0 \\ p_x \end{pmatrix} =$$

$$= p_y r_x - r_y p_x = L_z$$

Aufgabe 2

b.)

Wie kommt man mathematisch auf die dort angegebene Erhaltungsgröße? Wir betrachten dazu $f = f(x, y(x), y'(x))$ und bilden die totale Ableitung nach x, wobei wir die Kettenregel ausnutzen:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \frac{\partial f}{\partial x}$$

An dieser Stelle verwenden wir die zweite Lagrangegleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right) + \frac{\partial f}{\partial x}$$

Hier haben wir die Produktregel der Differentiation ausgenutzt. Wir bringen nun alle totalen Ableitungen nach links und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f - \frac{\partial f}{\partial y'}y'\right] = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Hängt nun f nicht explizit von x ab, so folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f - \frac{\partial f}{\partial y'}y'\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y'}y' - f = \text{const.}}$$

Damit ist die angegebene Größe erhalten. Sie entspricht im Lagrange-Formalismus gerade der Hamiltonfunktion und x entspricht der Zeit t.

c.)

Wir interessieren uns für das folgende Integral, das bei der Lösung der Differentialgleichung benötigt wird:

$$\int \sqrt{\frac{h}{b-h}}\,\mathrm{d}h$$

Dazu substituieren wir als erstes den Ausdruck unter der Wurzel:

$$\frac{h}{b-h} = w^2 \Leftrightarrow h(w^2+1) = bw^2 \Leftrightarrow h = \frac{bw^2}{w^2+1} \Rightarrow \mathrm{d}h = \frac{(w^2+1)\cdot 2bw - bw^2 \cdot 2w}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w = \frac{2bw}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w$$

Durch diese Substitution geht das Integral über in:

$$\int \frac{2bw^2}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w$$

Um dieses Integral nun weiter zu behandeln, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Der Nenner bestitzt zwei komplexe doppelte Nullstellen, nämlich $w = \pm\mathrm{i}$, womit wir folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung machen:

$$\frac{2w^2}{(w^2+1)^2} = \frac{A}{w-\mathrm{i}} + \frac{B}{(w-\mathrm{i})^2} + \frac{C}{w+\mathrm{i}} + \frac{D}{(w+\mathrm{i})^2}$$

Dies funktioniert analog zum reellen Fall. Nun multiplizieren wir mit dem Nenner $(w^2+1)^2 = (w+\mathrm{i})^2(w-\mathrm{i})^2$ durch und erhalten:

$$2w^2 = A(w^2+1)(w+\mathrm{i}) + B(w+\mathrm{i})^2 + C(w^2+1)(w-\mathrm{i}) + D(w-\mathrm{i})^2$$

$$2w^2 = Aw^3 + A\mathrm{i}w^2 + Aw + A\mathrm{i} + Bw^2 + 2B\mathrm{i}w - B + Cw^3 - C\mathrm{i}w^2 + Cw - \mathrm{i}C + Dw^2 - 2D\mathrm{i}w - D$$

$$2w^2 = w^3(A+C) + w^2(A\mathrm{i} + B - C\mathrm{i} + D) + w(A + 2\mathrm{i}B + C - 2\mathrm{i}D) + (A\mathrm{i} - B - C\mathrm{i} - D)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich zuerst $A = -C$. Dann folgt aus dem dritten Term $B = D$ und anschließend aus dem vierten $A = -\mathrm{i}B$. Schlussendlich resultiert aus dem zweiten Term $B = \frac{1}{2}$ und damit folgende Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2w^2}{(w^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-\mathrm{i}}{w-\mathrm{i}} + \frac{1}{(w-\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{w+\mathrm{i}} + \frac{1}{(w+\mathrm{i})^2}\right]$$

Dies können wir nun integrieren:

$$\begin{aligned}\int \frac{2w^2}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w &= \int \frac{1}{2}\left[\frac{-\mathrm{i}}{w-\mathrm{i}} + \frac{1}{(w-\mathrm{i})^2} + \frac{\mathrm{i}}{w+\mathrm{i}} + \frac{1}{(w+\mathrm{i})^2}\right]\mathrm{d}w = \\ &= \frac{1}{2}\left[-\mathrm{i}\ln(w-\mathrm{i}) - \frac{1}{w-\mathrm{i}} + \mathrm{i}\ln(w+\mathrm{i}) - \frac{1}{w+\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{i}\ln\left(\frac{w+\mathrm{i}}{w-\mathrm{i}}\right) - \frac{2w}{w^2+1}\right]\end{aligned}$$

Da wir komplexe Zahlen betrachten, erübrigt sich beim Logarithmus die Betragsstriche. Man kann nämlich auch den Logarithmus einer negativen oder gar komplexen Zahl bilden:

$$\ln(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\cdot\arg(z)$$

(Dies behandelt man in HM III oder Funktionentheorie.) Wir zerlegen also die obige komplexe Zahl in Real- und Imaginärteil:

$$z = \frac{w+\mathrm{i}}{w-\mathrm{i}} = \frac{w^2+2\mathrm{i}w-1}{w^2+1} = \frac{w^2-1}{w^2+1} + \mathrm{i}\frac{2w}{w^2+1}$$

Was ist der Betrag und das Argument dieser komplexen Zahl?

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{\left(\frac{w^2-1}{w^2+1}\right)^2 + \left(\frac{2w}{w^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{w^4-2w^2+1+4w^2}{(w^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{(w^2+1)^2}{(w^2+1)^2}} = 1$$

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{2y}{y^2+1}}{\frac{y^2-1}{y^2+1}}\right) = \arctan\left(\frac{2y}{y^2-1}\right) = -\arctan\left(\frac{2y}{1-y^2}\right)$$

Wir erhalten also:

$$\int \frac{2w^2}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2w}{1-w^2}\right) - \frac{w}{w^2+1}$$

Nun benötigen wir noch das Additionstheorem des Tangens:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

Wir setzen $x = y = \arctan(w)$ und erhalten:

$$\tan(2\arctan(w)) = \frac{2\tan(\arctan(w))}{1-\tan^2(\arctan(w))} = \frac{2w}{1-w^2} \Rightarrow \arctan(w) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2w}{1-w^2}\right)$$

Damit können wir das Integral noch einmal umschreiben:

$$\int \frac{2w^2}{(w^2+1)^2}\,\mathrm{d}w = \arctan(w) - \frac{w}{w^2+1}$$

Nun führen wir noch die Rücksubsitution durch und erhalten:

$$\int \sqrt{\frac{h}{b-h}}\,\mathrm{d}h = b\arctan\left(\sqrt{\frac{h}{b-h}}\right) - b\cdot\frac{\sqrt{\frac{h}{b-h}}}{\frac{h}{b-h}+1} = b\arctan\left(\sqrt{\frac{h}{b-h}}\right) - b\cdot\frac{1}{b}\sqrt{\frac{h}{b-h}}\cdot(b-h) =$$

$$= \boxed{b\arctan\left(\sqrt{\frac{h}{b-h}}\right) - \sqrt{h(b-h)}}$$

Dies ist das Ergebnis aus der Musterlösung. Puhhh!