Verschiedene Probleme Teil IV

Aufgabe 1

a.)

Die Poisson-Klammern wurden in der Vorlesung folgendermaßen definiert:

$$\{A,B\} = \sum_k \left(\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right)$$

Dies können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\{A,B\} = \vec{\nabla}_r A \vec{\nabla}_p B - \vec{\nabla}_p A \vec{\nabla}_r B$$

Nun berechnen wir die benötigten Terme:

$$\vec{\nabla}_r \vec{r}^2 = \vec{\nabla}_r (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\vec{r} \text{ und } \vec{\nabla}_p \vec{r}^2 = \vec{o}$$

$$\vec{\nabla}_r \vec{p}^2 = \vec{o} \text{ und } \vec{\nabla}_p \vec{p}^2 = 2\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = 2\vec{p}$$

Hieraus folgt also $\{\vec{r}^2, \vec{p}^2\} = 4\vec{r}\cdot\vec{p}$.

b.)

Gegeben ist die Hamiltonfunktion H und die x-Komponente des Drehimpulses:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{r}^2 \text{ und } L_x = r_y p_z - r_z p_y$$

Wir gehen so vor wie zuvor:

$$\vec{\nabla}_r H = m\omega_0^2 \vec{r} \text{ und } \vec{\nabla}_p H = \frac{\vec{p}}{m}$$

$$\vec{\nabla}_r L_x = \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{\nabla}_p L_x = \begin{pmatrix} 0 \\ -r_z \\ r_y \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$\{H, L_x\} = m\omega_0^2 \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -r_z \\ r_y \end{pmatrix} - \frac{1}{m}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ p_z \\ -p_y \end{pmatrix} = m\omega_0^2(-r_y r_z + r_z r_y) - \frac{1}{m}(p_y p_z - p_z p_y) = \boxed{0}$$

Man kann dies auch mit den Rechenregeln der Poissonklammern erhalten. Zuerst nutzen wir Linearität aus:

$$\begin{aligned}\{H, L_x\} &= \left\{\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{r}^2, r_y p_z - r_z p_y\right\} = \left\{\frac{\vec{p}^2}{2m}, r_y p_z\right\} - \left\{\frac{\vec{p}^2}{2m}, r_z p_y\right\} + \left\{\frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{r}^2, r_y p_z\right\} - \left\{\frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{r}^2, r_z p_y\right\} = \\ &= \frac{1}{2m}\{\vec{p}^2, r_y p_z\} - \frac{1}{2m}\{\vec{p}^2, r_z p_y\} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\{\vec{r}^2, r_y p_z\} - \frac{1}{2}m\omega_0^2\{\vec{r}^2, r_z p_y\}\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich unter Ausnutzung der Produktregel (und wieder der Linearität) für die einzelnen Terme:

$$\{\vec{p}^2, r_y p_z\} = \sum_{k=1}^{3}\{p_k^2, r_y p_z\} = \sum_{k=1}^{3} 2p_k\{p_k, r_y p_z\} = \sum_{k=1}^{3}\Big(2p_k r_y \underbrace{\{p_k, p_z\}}_{=0} + 2p_k \underbrace{\{p_k, r_y\}}_{=\delta_{ky}} p_z\Big) = 2p_y p_z$$

Analog folgt $\{\vec{p}^2, r_z p_y\} = 2p_z p_y$.

$$\{\vec{r}^2, r_y p_z\} = \sum_{k=1}^{3}\{r_k^2, r_y p_z\} = \sum_{k=1}^{3} 2r_k\{r_k, r_y p_z\} = \sum_{k=1}^{3}\Big(2r_k p_y \underbrace{\{r_k, p_z\}}_{\delta_{kz}} + 2r_k \underbrace{\{r_k, r_y\}}_{=0} p_z\Big) = 2p_z p_y$$

Auch hier gilt analog $\{\vec{r}^2, r_z p_y\} = 2p_z p_y$. Damit folgt auch hier wieder $\{H, L_x\} = 0$. Hier ist es doch wohl geschickter, die direkte Definition der Poissonklammern zu benutzen.

Aufgabe 2

a.)

Wir berechnen für diesen speziellen Fall mit $\vec{A} = (-By, 0, 0)^\intercal$ den Hamiltonoperator:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2 = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} p_x + \frac{q}{c}By \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2m}\left[\left(p_x + \frac{q}{c}By\right)^2 + p_y^2 + p_z^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[(p_x + Dy)^2 + p_y^2 + p_z^2\right] \text{ mit } D := \frac{q}{c}B$$

Kommen wir nun zu den Hamiltonschen Gleichungen:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \dot{\vec{q}} \text{ und } -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}} = \dot{\vec{p}}$$

Komponentenweise Auswertung ergibt sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{1}{m}(p_x + Dy),\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_y} = \frac{p_y}{m},\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = \frac{D}{m}(p_x + Dy),\ \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = 0$$

Die sechs Gleichungen lauten nun:

$$\boxed{\dot{x} = \frac{1}{m}(p_x + D_y),\ \dot{y} = \frac{p_y}{m},\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}}$$

$$\boxed{\dot{p}_x = 0,\ \dot{p}_y = -\frac{D}{m}(p_x + Dy),\ \dot{p}_z = 0}$$

b.)

Wie können wie nun diese gekoppelten Differentialgleichungen lösen? Das Verfahren hier ist, bestimmte Gleichungen noch einmal nach t abzuleiten und dann eine andere Gleichung einzusetzen. Durch Differentiation der dritten Gleichung und anschließendes Einsetzen der sechsten folgt:

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m} = 0 \Rightarrow \boxed{z(t) = a \cdot t + b}$$

Das Teilchen vollführt in z-Richtung damit eine gleichförmige Bewegung. Weiterhin ist aus den Gleichungen $\dot{p}_x = 0$ und $\dot{p}_z = 0$ ersichtlich, dass sowohl die x- als auch die z-Komponente des Impulses Erhaltungsgrößen sind, sich also zeitlich nicht ändern. Durch Ableiten der zweiten Gleichung und Einsetzen der fünften ergibt sich nun weiter:

$$\ddot{y} = \frac{\dot{p}_y}{m} = -\frac{D}{m^2}(p_x + Dy)$$

In der Aufgabe war angegeben, dass die Bahn des Teilchens eine Schraubenlinie ist. Dabei handelt es sich um eine periodische Bewegung, weshalb der Ansatz $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + B$ sinnvoll ist. (Möglich wäre natürlich auch $y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + C$ oder $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + B$. Dann ist nur die Phasenverschiebung φ anders festgelegt.)

$$\dot{y}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \text{ und } \ddot{y}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$$-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -\frac{D}{m^2}p_x - \frac{D^2}{m^2}A\cos(\omega t+\varphi) - \frac{D^2}{m^2}B \Leftrightarrow \left(\frac{D^2}{m^2}-\omega^2\right)A\cos(\omega t+\varphi) = -\frac{D}{m^2}p_x - \frac{D^2}{m^2}B$$

Diese Gleichung ist für beliebige t nur erfüllt, wenn:

$$\frac{D^2}{m^2}-\omega^2 = 0 \text{ und } -\frac{D}{m^2}p_x - \frac{D^2}{m^2}B = 0$$

Hieraus folgt:

$$\omega^2 = \frac{D^2}{m^2} \Rightarrow \omega = \frac{D}{m} = \frac{qB}{mc} \text{ und } B = -\frac{D}{m^2}p_x \cdot \frac{m^2}{D^2} = -\frac{p_x}{D}$$

$$\boxed{y(t) = A\cos\left(\frac{qB}{mc}t+\varphi\right) - \frac{p_x c}{qB}}$$

Wir können nun $y(t)$ in die erste Gleichung einsetzen, woraus $\dot{x}(t)$ folgt:

$$\dot{x}(t) = \frac{p_x}{m} + \frac{D}{m}y = \frac{p_x}{m} + \frac{qB}{mc}A\cos\left(\frac{qB}{mc}t+\varphi\right) + \frac{qB}{mc}\cot\left(-\frac{p_x c}{qB}\right) = \frac{qB}{mc}A\cos\left(\frac{qB}{mc}t+\varphi\right)$$

Durch Integration erhalten wir $x(t)$:

$$\boxed{x(t) = A\sin\left(\frac{qB}{mc}t+\varphi\right) + C}$$

A, φ und C sind Konstanten, welche durch Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Aufgabe 3

a.)

Die Zwangsbedingung ist gegeben durch $F(x,z) = Cx^2 - z = 0$. Die LAGRANGEgleichung erster Art lautet nun:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{phys} + \lambda\vec{\nabla}F$$

$\vec{F}_{phys}$ ist die äußere physikalische Kraft (also nicht die Zwangskraft), die auf das System wirkt. In diesem Falle ist es die Gravitationskraft $F_{phys} = -mg\vec{e}_z$. Damit folgt:

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2Cx\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = 2C\lambda x} \text{ und } \boxed{m\ddot{z} = -mg-\lambda}$$

Die zweite Gleichung lösen wir nach λ auf und erhalten $\lambda = -mg - m\ddot{z}$. Mit $\dot{z} = 2Cx\dot{x}$ und $\ddot{z} = 2C\dot{x}^2 + 2Cx\ddot{x}$ erhalten wir:

$$m\ddot{x} = 2C\lambda x = 2C\left[-mg - 2mC\dot{x}^2 - 2mCx\ddot{x}\right]\cdot x$$

$$\boxed{\ddot{x} = -2Cgx - 4C^2\dot{x}^2x - 4C^2x^2\ddot{x}}$$

Prinzipiell können wir noch nach $\ddot{x}$ auflösen.

b.)

Für kleine x können wir alle quadratischen und höhren Terme vernachlässigen, also $\dot{x}^2x$ und $x^2\ddot{x}$, womit folgt: $\ddot{x} = -2Cgx$. Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators und besitzt die allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \text{ mit } \omega = \sqrt{2Cg}}$$

Wenn man dies nicht weiß, macht man wieder den Ansatz $A\cos(\omega t+\varphi)$.

c.)

Die kinetische und potentielle Energie ist gegeben durch:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 4C^2x^2\dot{x}^2) \text{ und } V = mgz = mgCx^2$$

Damit ergibt sich die LAGRANGEfunktion:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 4C^2x^2\dot{x}^2) - mgCx^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4C^2x^2)\dot{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + 4mC^2x^2\ddot{x} + 8mC^2x\dot{x}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 4mC^2x\dot{x}^2 - 2mgCx$$

Daraus ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\ddot{x} + 4mC^2x\dot{x}^2 + 4mC^2x^2\ddot{x} + 2mgCx$$

$$\boxed{\ddot{x} + 4C^2x\dot{x}^2 + 4C^2x^2\ddot{x} + 2gCx = 0}$$

Dies ist natürlich dieselbe Differentialgleichung aus Aufgabenteil a.)!

d.)

Wir erhalten für den kanonischen Impuls:

$$p = \frac{\partial \updownarrow}{\partial \dot{x}} = m(1 + 4C^2x^2)\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m(1 + 4C^2x^2)}$$

Damit können wir die HAMILTONfunktion ausrechnen:

$$\mathcal{H} = p\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p^2}{m(1 + 4C^2x^2)} - \frac{m}{2}(1 + 4C^2x^2) \cdot \frac{p^2}{m^2(1 + 4C^2x^2)^2} + mgCx^2 = \boxed{\frac{p^2}{2m(1 + 4C^2x^2)} + mgCx^2}$$

Aufgabe 4

a.)

Das System lässt sich geschickt durch Kugelkoordinaten beschreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \text{ und } \dot{\vec{x}} = R\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \cos\vartheta\sin\varphi\dot{\vartheta} + \sin\vartheta\cos\varphi\dot{\varphi} \\ -\sin\vartheta\dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die kinetische und potentielle Energie:

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{m}{2}R^2\Big[\cos^2\vartheta\cos^2\varphi\dot{\vartheta}^2 - 2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \\ &\quad + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi\dot{\vartheta}^2 + 2\cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi\sin\varphi\dot{\vartheta}\dot{\varphi} + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\vartheta}^2\Big] = \\ &= \frac{m}{2}R^2\Big[(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos^2\vartheta\dot{\vartheta}^2 + (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\vartheta}^2\Big] = \\ &= \frac{m}{2}R^2\Big[(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\Big] = \frac{m}{2}R^2\Big[\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\Big] \end{aligned}$$

$$V = -mgz = -mgR\cos\vartheta$$

$$\boxed{\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}R^2\Big[\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\omega^2\Big] + mgR\cos\vartheta \text{ mit } \omega = \dot{\varphi}}$$

b.)

Wir berechnen die Bewegungsgleichung für ϑ:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\vartheta} = mR^2\dot\vartheta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\vartheta} = mR^2\ddot\vartheta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = mR^2\omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - mgR\sin\vartheta$$

$$\boxed{\ddot\vartheta = \omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{g}{R}\sin\vartheta}$$

c.)

Aus $\vartheta = \text{const.}$ folgt $\dot\vartheta = \ddot\vartheta = 0$ und wir erhalten folgende Bestimmungsgleichung für ϑ:

$$0 = \sin\vartheta\left[\omega^2\cos\vartheta - \frac{g}{R}\right]$$

Aus $\sin\vartheta = 0$ folgt $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. Eine weitere Lösung folgt aus:

$$\omega^2\cos\vartheta - \frac{g}{R} = 0 \Rightarrow \vartheta = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)$$

Diese Lösung existiert jedoch nur für $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$, da $|\cos(x)| \leq 1$.

Aufgabe 5

a.)

Das Funktional der Laufzeit T des Lichtes ist gegeben durch:

$$T[x,y,y'] = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \frac{\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}{\frac{c}{\sqrt{1+\beta y}}} = \frac{1}{c}\int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+\beta y}\,\mathrm{d}x$$

Damit müssen wir $F(x,y,y') = \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+\beta y}$ untersuchen.

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\sqrt{1+\beta y} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{y'^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\beta y} + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[y''\sqrt{1+\beta y} + y'\frac{\beta y'}{\sqrt{1+\beta y}}\right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \sqrt{1+y'^2}\frac{\beta}{2\sqrt{1+\beta y}}$$

Aus der Lagrangegleichung ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$\sqrt{1+y'^2}\frac{\beta}{2\sqrt{1+\beta y}} = -\frac{y'^2y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\beta y} + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[y''\sqrt{1+\beta y} + \frac{\beta y'^2}{2\sqrt{1+\beta y}}\right]$$

Wir multiplizieren mit $(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\beta y}$ und vereinfachen:

$$(1+y'^2)^2\frac{\beta}{2} = (1+\beta y)\left[-y'^2y'' + y'' + y'^2y''\right] + \left(y'^2 + y'^4\right)\frac{\beta}{2}$$

Daraus erhalten wir schließlich:

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2}y'^2 = (1+\beta y)y'' \Rightarrow \boxed{\beta(1+y'^2) = 2(1+\beta y)y''}$$

b.)

Da x nicht explizit in F auftaucht, gibt es eine Erhaltungsgröße analog zur Energie, die folgende Form besitzt:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y' - F = C$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\sqrt{1+\beta y}y' - \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+\beta y} = C \Rightarrow \sqrt{1+\beta y}\left[\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} - \sqrt{1+y'^2}\right]$$

Wir erhalten damit folgende Differentialgleichung:

$$\sqrt{1+\beta y}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = C \Rightarrow \boxed{1+\beta y = D(1+y'^2)} \text{ mit } D = (-C)^2$$

c.)

Mit der Probefunktion $y(x) = y_0 + C(x-x_0)^2$ (und $y' = 2C(x-x_0)$) erhalten wir:

$$1 + \beta y_0 + \beta C(x-x_0)^2 = D + D\cdot 3C^2(x-x_0)^2$$

Durch Koeffizientenvergleich beider Seiten folgt:

$$\beta C = 4C^2 \cdot D \text{ und } 1 + \beta y_0 = D$$

Setzen wir D in die erste der beiden Gleichungen ein, so erhalten wir eine Bedingung zwischen β, C und y_0: $\beta = 4C(1+\beta y_0)$. Die beiden anderen Gleichungen folgen aus den Randbedingungen $\vec{x}_a = (0,0)$ und $\vec{x}_b = (x_b, y_b)$:

$$\boxed{y_0 + Cx_0^2 = 0 \text{ und } y_b = y_0 + C(x_b - x_0)^2}$$

Aufgabe 6

a.)

Wir verwenden Polarkoordinaten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2\cos^2\varphi - 2\dot{r}r\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\sin^2\varphi + 2r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right] = \\ &= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\dot{\varphi}^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + \dot{z}^2\right] = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right] \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right] - U(r,z)$$

Daraus erhalten wir:

$$p_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = 0$$

Damit ist $L_z = mr^2\dot{\varphi}$ erhalten. Dies folgt daraus, dass das Potential und damit auch $\mathcal{L}$ nicht von φ abhängt.

b.)

Findet man eine infinitesimale Transformation $(\delta r, \delta\varphi, \delta z)$, unter der die LAGRANGEfunktion invariant ist (welche diese also nicht ändert), so gilt nach dem NOETHERtheorem:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\delta r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\delta z\right]$$

F hängt also nicht von der Zeit ab und ist damit eine Erhaltungsgröße. Da das Potential U und damit auch $\mathcal{L}$ nicht vom Winkel φ abhängt, ändert eine Transformation der Form $(\delta r, \delta\varphi, \delta z) = (0, \varepsilon, 0)$ die LAGRANGEfunktion nicht. Damit gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\varepsilon = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const.}$$

Damit ist $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ erhalten.