Verschiedene Probleme Teil V

Aufgabe 1

b.)

Man kann sich die Drehmatrix in zwei Dimensionen folgendermaßen überlegen. Hier wird – anders als in der Vorlesung – die Notation verwendet, dass sich das Koordinatensystem im mathematisch positiven Sinn (also gegen den Uhrzeiger) gedreht wird (weil ich es so gelernt habe).
Der ursprüngliche Vektor ist gegeben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Wir drehen das Koordinatensystem im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ; also dreht sich der Vektor im Uhrzeigersinn und geht in den neuen Vektor $\vec{x}'$ über, der gegeben ist durch:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \varphi) \\ \sin(\alpha - \varphi) \end{pmatrix}$$

Unter Ausnutzung der Additonstheoreme für die trigonometrischen Funktionen folgt:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\varphi) + \sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ \sin(\alpha)\cos(\varphi) - \cos(\alpha)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Wir suchen nun die Drehmatrix D, die den Vektor $\vec{x}$ in den Vektor $\vec{x}'$ überführt.

$$\vec{x}' = D\vec{x} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}\cos(\alpha) + D_{12}\sin(\alpha) \\ D_{21}\cos(\alpha) + D_{22}\sin(\alpha) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\varphi) + \sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ \sin(\alpha)\cos(\varphi) - \cos(\alpha)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Durch Vergleich beider Seiten ergibt sich $D_{11} = \cos(\varphi)$, $D_{12} = \sin(\varphi)$, $D_{21} = -\sin(\varphi)$ und $D_{22} = \cos(\varphi)$:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}}$$

Die jeweiligen Drehmatrizen in drei Dimensionen erhalten wir nun, indem wir diese 2×2-Matrix an die richtige Stelle setzen, beispielsweise gilt:

$$D^{(z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\; D^{(y)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ und } D^{(x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Bei einer Drehung um die z-Achse ändert sich die z-Komponente des Vektors nicht, womit $D^{(z)}$ die angebene Form haben muss, wie man überprüfen kann. Bei der Drehung um die z-Achse dreht man von y nach x und bei der Drehung um die x-Achse von y nach z. Bei der Drehung um die y-Achse dreht man jedoch von z nach x, so dass das Minuszeichen oben rechts stehen muss.

Aufgabe 2

Wir benötigen die Produktregel für ein Produkt aus drei Funktionen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)B(x)C(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)B(x))C(x) + A(x)B(x)C'(x) = A'(x)B(x)C(x) + A(x)B'(x)C(x) + A(x)B(x)C'(x)$$

Als erstes berechnen wir damit die zeitlichen Ableitungen der Matrixelemente der Matrix aus Aufgabe 1a.

$$\dot{D}_{11} = -\sin(\phi)\dot{\phi}\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\psi} - \cos(\phi)\dot{\phi}\cos(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\sin(\theta)\dot{\theta}\sin(\psi) - \sin(\psi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi}$$

$$\dot{D}_{12} = \sin(\phi)\dot{\phi}\sin(\psi) - \cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - \cos(\phi)\dot{\phi}\cos(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\theta)\dot{\theta}\cos(\psi) + \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}$$

$\dot{D}_{13} = \cos(\phi)\dot{\phi}\sin(\theta) + \sin(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}$

$\dot{D}_{21} = \cos(\phi)\dot{\phi}\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\psi} - \sin(\phi)\dot{\phi}\cos(\theta)\sin(\psi) - \cos(\phi)\sin(\theta)\dot{\theta}\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi}$

$\dot{D}_{22} = -\cos(\phi)\dot{\phi}\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - \sin(\phi)\dot{\phi}\cos(\theta)\cos(\psi) - \cos(\phi)\sin(\theta)\dot{\theta}\cos(\psi) - \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}$

$\dot{D}_{23} = \sin(\phi)\dot{\phi}\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}$

$\dot{D}_{31} = \cos(\theta)\dot{\theta}\sin(\psi) + \sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi}$

$\dot{D}_{32} = \cos(\theta)\dot{\theta}\cos(\psi) - \sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}$

$\dot{D}_{33} = -\sin(\theta)\dot{\theta}$

Ich entscheide mich dafür, zuerst Ω_3 zu berechnen (weil ich danach so fertig bin, dass ich keine Lust mehr habe). Spaß beiseite:

$$\Omega_3 = D_{12}\dot{D}_{11} + D_{22}\dot{D}_{21} + D_{32}\dot{D}_{31}$$

$$\begin{aligned}
D_{12}\dot{D}_{11} &= (-\cos(\phi)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)) \cdot (-\sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\phi} - \cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\psi} - \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} + \\
&\quad + \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta} - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi}) = \\
&= \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\phi} + \cos^2(\phi)\sin^2(\psi)\dot{\psi} + \cos^2(\phi)\cos(\theta)\sin^2(\psi)\dot{\phi} - \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\sin^2(\psi)\dot{\theta} + \\
&\quad + \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi} + \sin^2(\phi)\cos(\theta)\cos^2(\psi)\dot{\phi} + \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi} + \\
&\quad + \sin(\phi)\cos(\phi)\cos^2(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\phi} - \sin^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\theta} + \sin^2(\phi)\cos^2(\theta)\cos^2(\psi)\dot{\psi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22}\dot{D}_{21} &= (-\sin(\phi)\sin(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)) \cdot (\cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\phi} - \sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\psi} - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} - \\
&\quad + \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta} + \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi}) = \\
&= -\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\phi} + \sin^2(\phi)\sin^2(\psi)\dot{\psi} + \sin^2(\phi)\cos(\theta)\sin^2(\psi)\dot{\phi} + \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\sin^2(\psi)\dot{\theta} - \\
&\quad + \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi} + \cos^2(\phi)\cos(\theta)\cos^2(\psi)\dot{\phi} - \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\psi} - \\
&\quad + \sin(\phi)\cos(\phi)\cos^2(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\phi} - \cos^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\phi)\dot{\theta} + \cos^2(\phi)\cos^2(\theta)\cos^2(\psi)\dot{\psi}
\end{aligned}$$

$$D_{32}\dot{D}_{31} = (\sin(\theta)\cos(\psi)) \cdot (\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta} + \sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi}) = \sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\cos(\psi)\dot{\theta} + \sin^2(\theta)\cos^2(\psi)\dot{\psi}$$

Durch Addition dieser drei Ausdrücke ergibt sich dann:

$$\boxed{\Omega_3 = \dot{\psi} + \cos(\theta)\dot{\phi}}$$

Alle anderen Terme heben sich gegenseitig weg, wie man überprüfen kann. Sehr wichtig bei dieser Berechung ist es, dass man den trigonometrischen PYTHAGORAS ausnutzt, nämlich $\cos^2(\psi) + \sin^2(\psi) = 1$ (und analog für θ und ϕ). Nun kommen wir zu Ω_1

$$\Omega_1 = D_{13}\dot{D}_{1^2} + D_{23}\dot{D}_{22} + D_{33}\dot{D}_{32}$$

Auch hier berechnen wir wieder alle drei Terme:

$$\begin{aligned}
D_{13}\dot{D}_{12} &= (\sin(\phi)\sin(\theta)) \cdot (\sin(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} - \cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} + \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} + \\
&\quad + \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}) = \\
&= \sin^2(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} - \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi} - \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} + \\
&\quad + \sin^2(\phi)\sin^2(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} + \sin^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{23}\dot{D}_{22} &= (-\cos(\phi)\sin(\theta)) \cdot (-\cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\phi} - \sin(\phi)\cos(\psi)\dot{\psi} - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} - \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} - \\
&\quad + \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}) = \\
&= \cos^2(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} + \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\psi} + \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} + \\
&\quad + \cos^2(\phi)\sin^2(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} + \cos^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta(\sin(\psi)\dot{\psi}
\end{aligned}$$

$$D_{33}\dot{D}_{32} = \cos(\theta) \cdot (\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} - \sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}) = \cos^2\theta\cos(\psi)\dot{\theta} - \sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi}$$

Daraus folgt dann, wobei wir die Terme, welche sich gegenseitig wegheben, sofort weglassen:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} + \sin^2(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} + \sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi} + \cos^2(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} - \sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\psi} = \\
&= \boxed{\sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} + \cos(\psi)\dot{\theta}}
\end{aligned}$$

Nun noch zu Ω_2, was am schnellsten zu zeigen ist:

$$\Omega_2 = D_{11}\dot{D}_{13} + D_{21}\dot{D}_{23} + D_{31}\dot{D}_{33}$$

$$\begin{aligned}
D_{11}\dot{D}_{13} &= (\cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)) \cdot (\cos(\phi)\sin(\theta)\dot{\phi} + \sin(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}) = \\
&= \cos^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} + \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} - \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} - \\
&\quad + \sin^2(\phi)\cos^2(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{21}\dot{D}_{23} &= (\sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi)) \cdot (\sin(\phi)\sin(\theta)\dot{\phi} - \cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\theta}) = \\
&= \sin^2(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} - \sin(\phi)\cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi)\dot{\theta} + \sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi} - \\
&\quad + \cos^2(\phi)\cos^2(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta}
\end{aligned}$$

$$D_{31}\dot{D}_{33} = \sin(\theta)\sin(\psi) \cdot (-\sin(\theta)\dot{\theta}) = -\sin^2(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta}$$

Somit folgt auch hier:

$$\Omega_2 = \sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} - \cos^2(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta} - \sin^2(\theta)\sin(\psi)\dot{\theta} = \boxed{\sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} - \sin(\psi)\dot{\theta}}$$

So, jetzt reicht's mir!

Aufgabe 3

a.)

In der Musterlösung werden die einzelnen Einträge der Matrix I des Trägheitstensors berechnet. Man kann jedoch auch die Matrix als ganzes ausrechnen:

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{\alpha=1,2} m_\alpha \left[\mathbf{1}_3(\vec{b}^{(\alpha)})^2 - \vec{b}^{(\alpha)} \cdot (\vec{b}^{(\alpha)})^\intercal\right] = \\
&= \frac{m \cdot l^2}{8}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 1^2) - \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1&0&1\end{pmatrix}\right] + \\
&\quad + \frac{m \cdot l^2}{8}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \cdot (1^2 + 0^2 + (-1)^2) - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&-1\end{pmatrix}\right] = \\
&= \frac{m \cdot l^2}{4}\left[\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\right] = \boxed{\frac{m \cdot l^2}{4}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

b.)

Wir machen uns noch kurz das Transformationsgesetz plausibel. Dazu gehen wir aus vom Transformationgesetz der Einheitsvektoren, nämlich $\vec{e}_i^{\prime\intercal} = \vec{e}_j^\intercal D_{ji}$, was auch $\vec{e}_i^{\,\prime} = D_{ij}^\intercal \vec{e}_j$ entspricht. Dazu betrachten wir einen Ausdruck der Form $\vec{a}' \cdot \vec{b}'^\intercal$, welche in Aufgabenteil a.) vorkommt:

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}'^\intercal = a_l' \vec{e}_l^{\,\prime} b_k' \vec{e}_k^{\prime\intercal} = a_l' D_{li}^\intercal \vec{e}_i b_k' \vec{e}_j^\intercal D_{jk} = (a_l' D_{li}^\intercal)\vec{e}_i \vec{e}_j^\intercal (D_{jk} b_k') = a_i \vec{e}_i \vec{e}_j b_j = \vec{a} \cdot \vec{b}^\intercal \text{ mit } a_l' D_{li}^\intercal = a_i \text{ und } D_{jk} b_k' = b_j$$

Wir erkennen damit die Form des auf dem Übungsblatt angegebenen Transformationsgesetzes. Dies ist natürlich kein mathematischer Beweis, sondern soll das Gesetz nur plausibel machen.