# Verschiedene Probleme Teil VI

## Aufgabe 1

### a.)

Die Zwangsbedingungen sind gegeben durch

$|z_1| + |z_2| + \pi R - L = 0$, $y_1 = y_2 = 0$ und $x_1 = -R = -x_2$

Wir wollen die Bewegung der beiden Massepunkte beschreiben. Damit ergeben sich $3 \cdot 2 - 5 = 1$ generalisierte Koordinate, für die wir $z_1$ wählen. (3 steht für drei Raumdimensionen, 2 für die Anzahl der Massepunkte und 5 für die Anzahl der Zwangsbedingungen.) Aus $z_1 < 0$ und $z_2 < 0$ ergibt sich $|z_1| = -z_1$ und $|z_2| = -z_2$. Damit geht die Zwangsbedingung für $z_1$ und $z_2$ über in $-z_1 - z_2 + \pi R - L = 0$, woraus folgt:

$z_2 = -z_1 + \pi R - L$ und $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$

Die kinetische und potentielle Energie ist gegeben durch:

$$T_{kin} = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}_1^2 \text{ und } T_{rot} = \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}MR^2 \cdot \frac{\dot{z}_1^2}{R^2} = \frac{1}{4}M\dot{z}_1^2$$

Für die potentielle Energie folgt:

$$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = m_1 g z_1 - m_2 g z_1 + m_2 g \pi R - m_2 g L = (m_1 - m_2) g z_1 + C$$

Damit folgt die Lagrangefunktion:

$$\mathcal{L} = T_{kin} + T_{rot} - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{z}_1^2 + \frac{1}{4}M\dot{z}_1^2 - (m_1-m_2)gz_1 - C$$

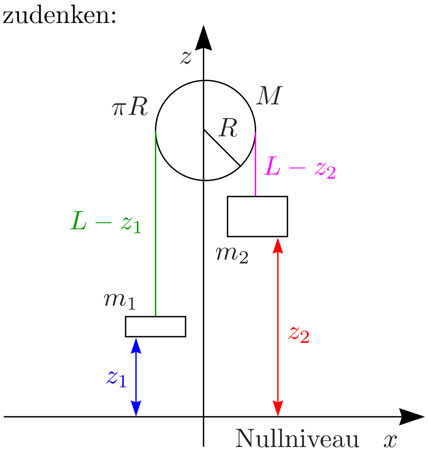
Zur Berechnung der Lagrangegleichung 2.Art benötigen wir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} = (m_1+m_2)\dot{z}_1 + \frac{1}{2}M\dot{z}_1 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1} = (m_1+m_2)\ddot{z}_1 + \frac{1}{2}M\ddot{z}_1 \text{ und } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_1} = (m_1-m_2)g$$

Daraus ergibt sich $\ddot{z}_1$:

$$\boxed{\ddot{z}_1 = -\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{M}{2}}}$$

Man kann die Koordinaten auch folgendermaßen definieren, wenn man keine Lust hat, über Vorzeichen nachzudenken:




Hier ist die eine Zwangsbedingung zwischen $z_1$ und $z_2$ gegeben durch:

$L - z_1 + L - z_2 + \pi R = L \Leftrightarrow -z_1 - z_2 + \pi R + L = 0$

Man sieht hieraus, dass $\dot{z}_1 = -\dot{z}_2$ gilt. Für die potentielle Energie folgt, wenn man das Nullniveau auf die $x$-Achse legt:

$V = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 = m_1 g z_1 - m_2 g z_1 + C = (m_1 - m_2) g z_1 + C$

Die Lagrangefunktion unterscheidet sich dann nur von der vorherigen durch eine irrelevante Konstante, die bei Bildung der Ableitungen sowieso herausfällt. Die Bewegungsgleichung ist also dieselbe.

### b.)

Um die Zwangskräfte zu berechnen, gehen wir aus von der LAGRANGEgleichung 1.Art:

$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{phys} + \lambda_1 \vec{\nabla}_{z_1} Z$

Relevant für uns ist die $z$-Komponente $m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g - \lambda_1$. Hieraus folgt:

$$K_1 = -\lambda_1 = m_1 g + m_1\ddot{z}_1 = m_1 g - \frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{M}{2}} \cdot m_1 = \boxed{\frac{2m_1m_2 + \frac{m_1 M}{2}}{m_1+m_2+\frac{M}{2}} g}$$

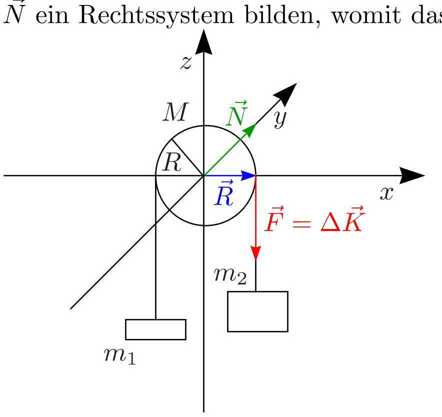
Analog ergibt sich:

$$K_2 = -\lambda_2 = m_2 g + m_2\ddot{z}_2 = m_2 g - m_2\ddot{z}_1 = m_2 g + \frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{M}{2}} \cdot m_2 = \boxed{\frac{2m_1m_2 + \frac{m_2 M}{2}}{m_1+m_2+\frac{M}{2}} g}$$

Die beiden Zwangskräfte wirken entlang des Seils in entgegengesetzter Richtung und somit auch die Drehmomente. Das gesamte Drehmoment ergibt sich damit als Differenz:

$$N = \Delta K \cdot R = (K_2 - K_1)\cdot R = \boxed{\frac{\frac{M}{2} g(m_2-m_1)}{m_1+m_2+\frac{M}{2}} R}$$

Um sich das Vorzeichen von $N$ zu überlegen, muss man wissen, dass $\vec{N} = \vec{R}\times\vec{F}$ gilt, womit $\vec{R}$, $\vec{F}$ und $\vec{N}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Ist $m_2 > m_1$, so ist $N$ nach obiger Formel $> 0$ und zeigt in die Papierebene hinein. Die Rolle dreht sich dann im Uhrzeigersinn. Man kann dann überprüfen, dass $\vec{R}$, $\vec{F}$ und $\vec{N}$ ein Rechtssystem bilden, womit das Vorzeichen von $N$ stimmt.




## Aufgabe 2

### a.)

Wir berechnen den Trägheitstensor $T_{ij}$ in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned}
T &= M\left(\mathbf{1}_3(\vec{b}^{(1)})^2 - \vec{b}^{(1)}(\vec{b}^{(1)})^\intercal\right) + m\left(\mathbf{1}_3(\vec{b}^{(2)})^2 - \vec{b}^{(2)}(\vec{b}^{(2)})^\intercal\right) + M\left(\mathbf{1}_3(\vec{b}^{(3)})^2 - \vec{b}^{(3)}(\vec{b}^{(3)})^\intercal\right) + \\
&\quad + m\left(\mathbf{1}_3(\vec{b}^{(4)})^2 - \vec{b}^{(4)}(\vec{b}^{(4)})^\intercal\right) = \\
&= 2(a^2+b^2)\mathbf{1}_3(M+m) - M\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & 0\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & -b & 0\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a & -b & 0\end{pmatrix} - \\
&\quad + m\begin{pmatrix} -a \\ b \\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a & b & 0\end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 2(a^2+b^2)(M+m) & 0 & 0 \\ 0 & 2(a^2+b^2)(M+m) & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2)(M+m)\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \\
&\quad + m\begin{pmatrix} a^2 & -ab & 0 & \\ -ab & b^2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} a^2 & ab & 0 \\ ab & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} a^2 & -ab & 0 \\ -ab & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2(a^2+b^2)(M+m) - 2Ma^2 - 2ma^2 & -2Mab + 2mab & 0 \\ -2Mab + 2mab & 2(a^2+b^2)(M+m) - 2Mb^2 - 2mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2)(M+m) \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 2b^2(M+m) & 2ab(m-M) & 0 \\ 2ab(m-M) & 2a^2(M+m) & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2)(M+m) \end{pmatrix}}$$

## b.)

Die Hauptträgheitsmomente sind durch die Eigenwerte der Matrix $T$ gegeben, welche den Trägheitstensor beschreibt. Diese Eigenwerte wollen wir nun berechnen:

$$\det(I - \lambda \mathbf{1}_3) = \det \begin{pmatrix} 2b^2(M+m) - \lambda & 2ab(m-M) & 0 \\ 2ab(m-M) & 2a^2(M+m) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2)(M+m) - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \left[2(a^2+b^2)(M+m) - \lambda\right] \cdot \left[\left(2b^2(M+m) - \lambda\right) \cdot \left(2a^2(M+m) - \lambda\right) - 4a^2b^2(m-M)^2\right] \stackrel{!}{=} 0$$

Den ersten Eigenwert kann man sofort ablesen. Es handelt sich dabei um das Hauptträgheitsmoment bezüglich der $z$-Achse:

$$I_3 = 2(a^2+b^2)(M+m)$$

Die beiden anderen Eigenwerte erhält man aus der zweiten Klammer:

$$4a^2b^2(M+m)^2 - 2\lambda(a^2+b^2)(M+m) + \lambda^2 - 4a^2b^2(m-M)^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda^2 - 2(a^2+b^2)(M+m)\lambda + 16a^2b^2 mM \stackrel{!}{=} 0$$

Damit ergibt sich weiter:

$$I_{x,y} = \frac{2(a^2+b^2)(M+m) \pm \sqrt{4(a^2+b^2)^2(M+m)^2 - 64a^2b^2mM}}{2} =$$

$$= \boxed{(a^2+b^2)(M+m) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2(M+m)^2 - 16a^2b^2mM}}$$

## c.)

- <u>Eigenvektor zum Eigenwert $I_3 = 2(a^2+b^2)(M+m)$:</u>

  Zu lösen ist folgendes Gleichungssystem:

  $$\begin{pmatrix} 2b^2(M+m) - I_3 & 2ab(m-M) & 0 \\ 2ab(m-M) & 2a^2(M+m) - I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a^2+b^2)(M+m) - I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{o}$$

  $$\begin{pmatrix} -2a^2(M+m) & 2ab(m-M) & 0 \\ 2ab(m-M) & -2b^2(M+m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{o}$$

  Als freien Parameter wählen wir $s := z$. Man erhält außerdem, wenn man die erste Zeile mit $2ab(m-M)$ und die zweite Zeile mit $2a^2(M+m)$ multipliziert, $x = y = 0$. Damit erhalten wir folgenden Eigenraum:

  $$\mathrm{ER}_{I_3 = 2(a^2+b^2)(M+m)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s \right\}$$

  Der Eigenraum ist eindimensional, was auch so sein muss. Wir haben nämlich eine symmetrische Matrix und einen Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit 1, womit auch die geometrische Vielfachheit 1 sein muss. Der zum Eigenwert gehörende Eigenraum muss also eindimensional sein. Anschaulich ist das klar, denn die vier Massepunkte befinden sich alle in einer Ebene, womit die Hauptträgheitsachse zum Trägheitsmoment $I_3$ die Achse sein muss, die senkrecht zu dieser Ebene verläuft.

✳ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $I_{1/2} = (a^2+b^2)(M+m) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2(M+m)^2 - 16a^2b^2mM}$:

$$\begin{pmatrix} 2b^2(M+m) - I_k & 2ab(m-M) \\ 2ab(m-M) & 2a^2(M+m) - I_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{o} \text{ für } k = 1,\, 2$$

Jeder Eigenwert besitzt algebraische Vielfachheit 1. Damit ist auch die geometrische Vielfachheit der zugehörigen Eigenvektoren gleich 1; zu zugehörigen Eigenräume sind also wieder eindimensional. Damit hat die obige Matrix den Rang 1. Die beiden Vektoren im obigen Gleichungssystem sind also linear abhängig, womit wir nur die erste Gleichung $(2b^2(M+m) - I_k) \cdot x + 2ab(m-M) \cdot y = 0$ betrachten müssen. Damit erhalten wir folgenden Eigenraum:

$$\mathrm{ER}_{I_{1/2}=(a^2+b^2)(M+m)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2(M+m)^2-16a^2b^2mM}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2b^2(m+M)-I_{1/2}}{2ab(M-m)} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot s \right\}$$

Durch Einsetzen können wir dies direkt überprüfen. Die erste Gleichung ist erfüllt, wie man sofort sieht. Für die zweite Gleichung gilt:

$$2ab(m-M) - \frac{\left(2b^2(m+M) - I_{1/2}\right) \cdot \left(2a^2(m+M) - I_{1/2}\right)}{2ab(m-M)} =$$
$$= \frac{4a^2b^2(m-M)^2 + (b^2-a^2)^2(m+M)^2 - (a^2+b^2)(M+m)^2 + 16a^2b^2mM}{2ab(m-M)} = 0$$

Damit berechnen wir den Tangens des Winkels, welchen der Eigenvektor mit der $x$-Achse einschließt:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2b^2(m+M) - I_k}{2ab(M-m)} = \boxed{\frac{(b^2-a^2)(m+M) \mp \sqrt{(a^2+b^2)^2(M+m)^2 - 16a^2b^2mM}}{2ab(M-m)}}$$

Wir betrachten nun die beiden Spezialfälle:

a.) $M \neq m$, $a = b$:

$$\tan\alpha = \frac{\mp\sqrt{4a^4(M+m)^2 - 16a^4mM}}{2a^2(M-m)} = \frac{\mp\sqrt{4a^4M^2 + 8a^4Mm + 4a^4m^2 - 16a^4mM}}{2a^2(M-m)} =$$
$$= \frac{\mp\sqrt{4a^4(M-m)^2}}{2a^2(M-m)} = \boxed{\pm 1}$$

b.) $M = m$, $a \neq b$:

$$\tan\alpha = \frac{2m(b^2-a^2) \mp \sqrt{(a^2+b^2)^2 \cdot 4m^2 - 16a^2b^2m^2}}{2a^2(M-m)} = \frac{2m(b^2-a^2) \mp (a^2-b^2) \cdot 2m}{2a^2(M-m)}$$

Für das Minuszeichen folgt $\tan\alpha = \infty$; für das Pluszeichen haben wir den unbestimmten Fall „0/0“. Diesen Fall behandeln wir mit der Regel von de l'Hospital, indem wir $M$ als konstant betrachten und den Limes $m \mapsto M$ anschauen:

$$\lim_{m\mapsto M} \frac{b^2 - a^2 + \frac{1}{2\sqrt{(a^2+b^2)^2(M+m)^2-16a^2b^2mM}} \cdot \left[2(a^2+b^2)^2(M+m) - 16a^2b^2M\right]}{-2ab} =$$
$$= \lim_{m\mapsto M} \frac{b^2 - a^2 + \frac{1}{2\cdot(a^2-b^2)\cdot 2M} \cdot \left[(a^2-b^2)^2 \cdot 4M\right]}{-2ab} = \frac{b^2 - a^2 + (a^2-b^2)}{-2ab} = 0$$

Man kann dies auch ohne Nachrechnen aus der Symmetrie des Objekts erkennen. Ist $a = b$, so sind die Hauptträgheitsachsen, die diagonalen Achsen, welche die gegenüberliegenden Massen verbinden. Im Falle $M = m$ sind die Hauptträgheitsachsen durch $x$- und $y$-Achse gegeben.

# Aufgabe 3

## a.)

Wir berechnen die Hamiltonschen Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} = \begin{pmatrix} \frac{p_x}{m} + ap_y \\ \frac{p_y}{m} + ap_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{r}} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

### b.)

Wir führen die LEGENDRE-Transformation rückwärts durch:

$$\mathcal{H} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} - \mathcal{H}$$

Wir verwenden die Matrixschreibweise und drücken $\vec{p}$ durch $\dot{\vec{r}}$ aus:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & a \\ a & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & a \\ a & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \vec{p}$$

Wir lösen also nach $\vec{p}$ auf, indem wir beide Seiten von links mit der inversen Matrix multiplizieren. Es lohnt sich, folgende Formel für die Inverse einer $2 \times 2$-Matrix (gelbes Rechenbuch auf Seite 55) auswendig zu lernen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$\vec{p} = \frac{1}{\frac{1}{m^2} - a^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & -a \\ -a & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \dot{\vec{r}} = \frac{1}{1 - m^2 a^2} \begin{pmatrix} m & -am^2 \\ -am^2 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

Weiter folgt:

$$p_x = \frac{1}{1 - m^2 a^2} (m\dot{x} - am^2 \dot{y}) \text{ und } p_y = \frac{1}{1 - m^2 a^2} (-am^2 \dot{x} + m\dot{y})$$

So erhalten wir $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{1 - m^2 a^2} \left[ m\dot{x}^2 - am^2 \dot{y}\dot{x} - am^2 \dot{x}\dot{y} + m\dot{y}^2 \right] - \frac{1}{2m(1 - m^2 a^2)^2} \left( m\dot{x} - am^2 \dot{y} \right)^2 - \\
&\quad + \frac{1}{2m(1 - m^2 a^2)} \left( -am^2 \dot{x} + m\dot{y} \right)^2 - \frac{a}{(1 - m^2 a^2)^2} \left( -am^3 \dot{x}^2 + m^2 \dot{x}\dot{y} + a^2 m^4 \dot{x}\dot{y} - am^3 \dot{y}^2 \right) - U(x, y) = \\
&= \dot{x}^2 \left[ \frac{m}{1 - m^2 a^2} - \frac{m}{2(1 - m^2 a^2)^2} - \frac{m^3 a^2}{2(1 - m^2 a^2)^2} + \frac{a^2 m^3}{(1 - m^2 a^2)^2} \right] + \\
&\quad + \dot{y}^2 \left[ \frac{m}{1 - m^2 a^2} - \frac{a^2 m^3}{2(1 - m^2 a^2)^2} - \frac{m}{2(1 - m^2 a^2)^2} + \frac{a^2 m^3}{(1 - m^2 a^2)^2} \right] + \\
&\quad + \dot{x}\dot{y} \left[ -\frac{2am^2}{1 - m^2 a^2} + \frac{m^2 a}{(1 - m^2 a^2)^2} + \frac{m^2 a}{(1 - m^2 a^2)^2} - \frac{am^2 + a^3 m^4}{(1 - m^2 a^2)^2} \right] - U(x, y) = \\
&= \boxed{\frac{m\dot{x}^2}{2(1 - m^2 a^2)} + \frac{m\dot{y}^2}{2(1 - m^2 a^2)} - \frac{am^2 \dot{x}\dot{y}}{1 - m^2 a^2} - U(x, y)}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

### a.)

Wir gehen aus vom infinitesimalen Längenquadrat in Polarkoordinaten aus, das gegeben ist durch $\mathrm{d}l^2 = r^2 \,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}z^2$. Allgemein (also nicht nur auf der euklidischen Ebene) ist nämlich ein Skalarprodukt definiert durch den metrischen Tensor $g_{ij}$: $x_j y^j = g_{ij} x^i x^j$. In Matrixschreibweise lautet dies $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^\mathsf{T} \cdot (g_{ij}) \cdot \vec{y}$. Den metrischen Tensor $g_{ij}$ kann man also als Matrix schreiben, wobei die Einträge durch Skalarprodukte durch die partiellen Ableitungen der Parametrisierung nach den Parametern gegeben ist. Man kann nun einen Zylinder parametrisieren durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich:

$$\vec{x}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

So berechnet sich der metrische Tensor wie folgt:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \vec{x}_r \cdot \vec{x}_r & \vec{x}_r \cdot \vec{x}_\varphi & \vec{x}_r \cdot \vec{x}_z \\ \vec{x}_\varphi \cdot \vec{x}_r & \vec{x}_\varphi \cdot \vec{x}_\varphi & \vec{x}_\varphi \cdot \vec{x}_z \\ \vec{x}_z \cdot \vec{x}_r & \vec{x}_z \cdot \vec{x}_\varphi & \vec{x}_z \cdot \vec{x}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt das Längenquadrat:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}l^\intercal \cdot (g_{ij}) \cdot \mathrm{d}l = \begin{pmatrix} \mathrm{d}r & \mathrm{d}\varphi & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}r \\ \mathrm{d}\varphi \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$$

Die Geodäte kann durch $r = r(\varphi)$ parametrisiert werden. Damit können wir $\mathrm{d}r$ ausdrücken durch:

$$\mathrm{d}r = \frac{\partial r(\varphi)}{\partial \varphi}\,\mathrm{d}\varphi = r'(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Für $\mathrm{d}z$ ergibt sich, da wie die Geodäte auf einem Paraboloid der Form $z(r) = ar^2$ suchen:

$$\mathrm{d}z = 2ar\,\mathrm{d}r = 2arr'\,\mathrm{d}\varphi$$

Damit folgt das infinitesimale Längenquadrat:

$$\mathrm{d}l^2 = r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + r'^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + 4a^2r^2r'^2\,\mathrm{d}\varphi^2$$

Somit folgt das Bogenlängenfunktional:

$$L = \int_{l_a}^{l_b} \mathrm{d}l = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \sqrt{r^2 + r'^2 + 4a^2r^2r'^2}\,\mathrm{d}\varphi$$

wir wenden die zweite Euler-Lagrange-Gleichung an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r(1+4a^2r'^2)}{\sqrt{r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{r'(1+4a^2r^2)}{\sqrt{r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)}}$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{r'(1+4a^2r^2)}{\sqrt{r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)}}\right) = \frac{r(1+4a^2r'^2)}{\sqrt{r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)}}}$$

Wir vereinfachen diese Gleichung und führen die totale Ableitung nach $\varphi$ auf der linken Seite aus:

$$\frac{\sqrt{r^2 + r'^2(1+a^2r^2)} \cdot \left[r''(1+4a^2r^2) + r \cdot 8a^2rr'\right] - r'(1+4a^2r^2) \cdot \frac{2rr' + r'^2 \cdot 8a^2rr' + 2r'r''(1+4a^2r^2)}{2\sqrt{r^2+r'^2(1+4a^2r^2)}}}{r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)} =$$

$$= \frac{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)) \cdot (r''(1+4a^2r^2) + 8a^2rr'^2) - r'(1+4a^2r^2) \cdot (rr' + 4a^2rr'^3 + r'r''(1+4a^2r^2))}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}} \cdot \big[r^2r'' \cdot (1+4a^2r^2) + 8a^2r^3r'^2 + r'^2r'' \cdot (1+4a^2r^2)^2 + 8a^2rr'^4 \cdot (1+4a^2r^2) -$$
$$+ rr'^2 \cdot (1+4a^2r^2) - 4a^2rr'^4 \cdot (1+4a^2r^2) - r'^2r'' \cdot (1+4a^2r^2)^2\big] =$$

$$= \frac{r^2r'' \cdot (1+4a^2r^2) + 8a^2r^3r'^2 + 4a^2rr'^4 \cdot (1+4a^2r^2) - rr'^2 \cdot (1+4a^2r^2)}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{r^2r'' \cdot (1+4a^2r^2) + 4a^2rr'^4 + 16a^4r^3r'^4 - rr'^2 + 4a^2r^3r'^2}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung formen wir analog um, indem wir mit $r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)$ erweitern:

$$\frac{r(1+4a^2r'^2)}{\sqrt{r^2 + r'^2(1+4a^2r^2)}} = \frac{r(1+4a^2r'^2) \cdot (r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{r^3 + 4a^2r^3r'^2 + rr'^2 \cdot (1+4a^2r^2) + 4a^2rr'^4 \cdot (1+4a^2r^2)}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{r^3 + rr'^2 + 8a^2r^3r'^2 + 4a^2rr'^4 + 16a^4r^3r'^4}{(r^2 + r'^2(1+4a^2r^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Indem wir alles auf eine Seite bringen, erhalten wir:

$$\boxed{\frac{r\left[rr''\cdot(1+4a^2r^2)-2r'^2\cdot(1+2a^2r^2)-r^2\right]}{\left(r^2+r'^2(1+4a^2r^2)\right)^{\frac{3}{2}}}=0}$$

## b.)

Da die Variable $x$ nicht explizit im Funktional vorkommt, ist

$$r'\frac{\partial F}{\partial r'}-F=\text{const.}$$

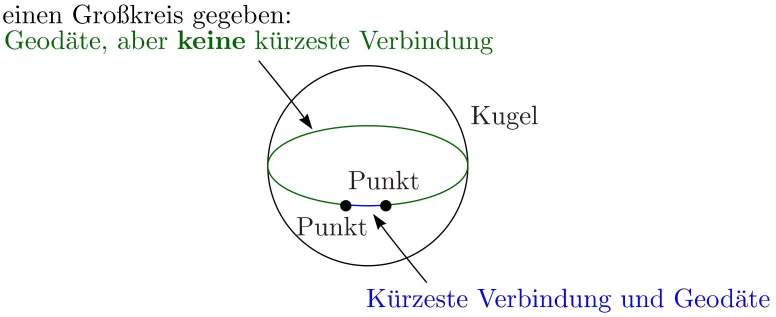
also eine Erhaltungsgröße. Die benötigte Ableitung $\partial F/\partial r'$ haben wir schon beim Aufgabenteil a.) berechnet, womit sich ergibt:

$$\frac{r'^2(1+4a^2r^2)}{\sqrt{r^2+r'^2(1+4a^2r^2)}}-\sqrt{r^2+r'^2(1+4a^2r^2)}=C\Leftrightarrow\boxed{-\frac{r^2}{\sqrt{r^2+r'^2(1+4a^2r^2)}}=C}$$

Diese Differentialgleichung ist auf jeden Fall einfacher als die von Aufgabenteil a.)!

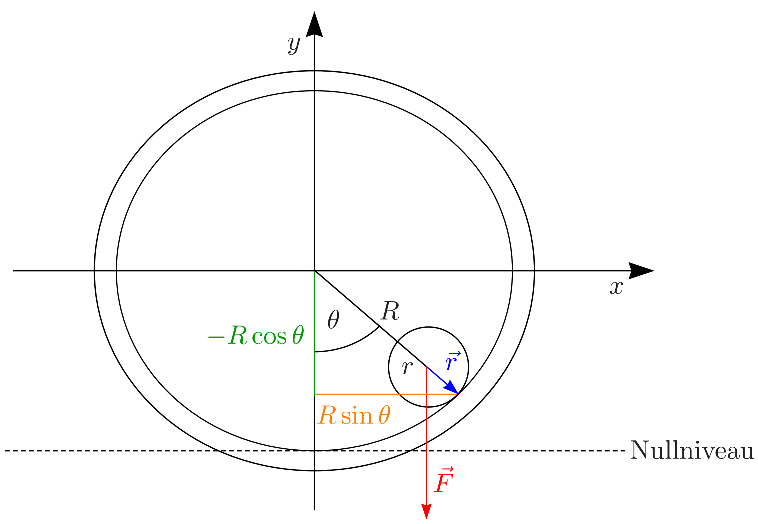
**Bemerkung:**

Dass Geodäten kürzeste Verbindungen sind, gilt jedoch **nicht** global (also auf der ganzen Fläche), sondern nur lokal (innerhalb einer Umgebung). Beispielsweise kann man ausrechnen, dass auf einer Kugel Geodäten durch Großkreise gegeben sind. Nimmt man nun zwei Punkte auf der Kugel, so ist die kürzeste Verbindung durch einen Großkreis gegeben:




Die kürzeste Verbindung ist die blaue Linie. Die grüne Linie jedoch ist selbst auch Geodäte, aber keine kürzeste Verbindung! (Man bezeichnet Geodäten übrigens auch als „Geodätische“.) Mehr hierzu findet man in Büchern über Differentialgeometrie.

# Aufgabe 5



## a.)

Der Schwerpunkt des kleinen Zylinders wird beschrieben durch:

$$\vec{r}(t) = (R-r)\begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$

Für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ergibt sich:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot\theta(R-r)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die kinetische Energie des Schwerpunkts:

$$T_{kin} = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 = \frac{m}{2}\dot\theta^2(R-r)^2$$

Außerdem müssen wir die Rotationsenergie des kleinen Zylinders berücksichtigen. Dabei ist dessen Winkelgeschwindigkeit nach Aufgabenstellung gegeben durch $v/r$, wobei $v = |\dot{\vec{r}}|$ der Betrag der Schwerpunktsgeschwindigkeit ist:

$$T_{rot} = \frac{I}{2}\dot\varphi^2 = \frac{m}{4}r^2\cdot\frac{\dot\theta^2(R-r)^2}{r^2} = \frac{m}{4}\dot\theta^2(R-r)^2$$

Damit folgt die gesamte kinetische Energie:

$$T = T_{kin} + T_{rot} = \boxed{\frac{3}{4}m\dot\theta^2(R-r)^2}$$

Für die potentielle Energie des kleinen Zylinders ergibt sich, wenn wir das Nullniveau auf den inneren Rand des großen Zylinders legen:

$$V = mgh = mg\left(R-(R-r)\cos\theta\right) = \boxed{-mg(R-r)\cos\theta + mgR}$$

Damit folgt die LAGRANGEfunktion:

$$\mathcal{L} = T - V = \boxed{\frac{3}{4}m\dot\theta^2(R-r)^2 + mg(R-r)\cos\theta + C}$$

Zur Berechnung der Bewegungsgleichung benötigen wir:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot\theta \text{ und } \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mg(R-r)\sin\theta$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\frac{3}{2}(R-r)\ddot\theta = -g\sin\theta}$$

## b.)

Das Trägheitsmoment des kleinen Zylinders bezüglich des Auflagepunkts, welcher im Abstand $r$ zum Schwerpunkt liegt, ergibt sich aus dem STEINERschen Satz:

$$I' = I + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \boxed{\frac{3}{2}mr^2}$$

Damit ist der Drehimpuls in $z$-Richtung gegeben durch:

$$L_z = I\omega = \frac{3}{2}mr^2\cdot\frac{\dot\theta(R-r)}{r} = \boxed{\frac{3}{2}mr(R-r)\dot\theta}$$

Wir berechnen die zeitliche Ableitung des Drehimpulses, wobei wir für $\ddot\theta$ das Ergebnis aus Aufgabenteil a.) einsetzen:

$$\dot L_z = \frac{3}{2}mr(R-r)\ddot\theta = \frac{3}{2}mr(R-r)\cdot\left(-\frac{g\sin\theta}{\frac{3}{2}(R-r)}\right) = -mgr\sin\theta$$

Jetzt berechnen wir noch das Drehmoment $\vec{N}$ bezüglich des Auflagepunkts:

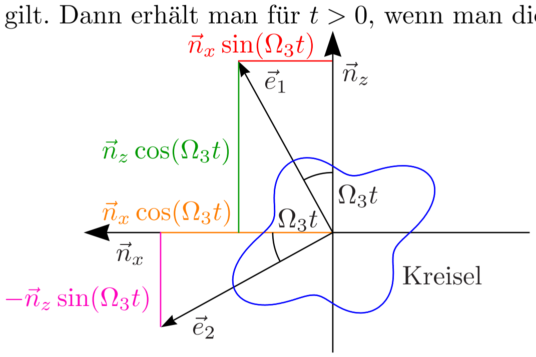
$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{pmatrix}r\sin\theta\\ -r\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ -mg\\ 0\end{pmatrix} = \vec{e}_z(-mgr\sin\theta) = -mgr\sin\theta\,\vec{e}_z \Rightarrow \boxed{N_z = -mgr\sin\theta}$$

Damit gilt also $\dot L_z = N_z$, was man zeigen sollte.

# Aufgabe 6

## a.)

Bei $t = 0$ liegt der Zylinder so wie in der Aufgabe beschrieben, nämlich so dass $\vec{e}_1 = \vec{n}_z$, $\vec{e}_2 = \vec{n}_x$ und $\vec{e}_3 = \vec{n}_y$ gilt. Dann erhält man für $t > 0$, wenn man die Drehung analog zur Vorlesung definiert:




Wir können aus der Zeichnung die Komponenten der $\vec{e}_k$ ablesen:

$$\boxed{\vec{e}_1 = \vec{n}_z \cos(\Omega_3 t) + \vec{n}_x \sin(\Omega_3 t) \text{ und } \vec{e}_2 = -\vec{n}_z \sin(\Omega_3 t) + \vec{n}_x \cos(\Omega_3 t)}$$

Die Schwerkraft ist gegeben durch $\vec{F} = -mg\vec{n}_z$, woraus sich das von der Schwerkraft erzeugte Drehmoment ergibt:

$$\vec{N} = l\vec{n}_y \times \vec{F} = l\vec{n}_y \times (-mg\vec{n}_z) = -mgl\vec{n}_y \times \vec{n}_z = \boxed{-mgl\vec{n}_x}$$

Wir können den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{e}_k$ und $\vec{n}_j$ auch symbolisch in Form einer Matrixgleichung schreiben. Dabei muss man natürlich bedenken, dass die $\vec{e}_k$ und $\vec{n}_j$ selbst Vektoren sind:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_3 t) & \sin(\Omega_3 t) \\ -\sin(\Omega_3 t) & \cos(\Omega_3 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{n}_z \\ \vec{n}_x \end{pmatrix}$$

Wir können dies nach den $\vec{n}_j$ auflösen, indem wir beide Seiten von links mit der inversen Matrix multiplizieren. Für orthogonale Matrizen mit Determinante 1 ist die Inverse gerade gegebenen durch die Transponierte, womit gilt:

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_z \\ \vec{n}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega_3 t) & -\sin(\Omega_3 t) \\ \sin(\Omega_3 t) & \cos(\Omega_3 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

Damit gilt:

$$\boxed{\vec{n}_z = \vec{e}_1 \cos(\Omega_3 t) - \vec{e}_2 \sin(\Omega_3 t) \text{ und } \vec{n}_x = \vec{e}_1 \sin(\Omega_3 t) + \vec{e}_2 \cos(\Omega_3 t)}$$

Also folgt das Drehmoment:

$$\boxed{\vec{N} = -mgl\vec{n}_x = -mgl[\vec{e}_1 \sin(\Omega_3 t) + \vec{e}_2 \cos(\Omega_3 t)]}$$

## b.)

Da $N_3 = 0$ und $I_1 = I_2$ folgt aus der dritten EuLERschen Gleichung, dass $\dot{\Omega}_3 = 0$ ist. Also gilt $\delta\Omega_3 = 0$. Für die zwei anderen EuLERschen Gleichungen ergibt sich:

$$A\Omega_2 + I_1\dot{\Omega}_1 = -mgl \sin(\Omega_3 t) \text{ und } -A\Omega_1 + I_1\dot{\Omega}_2 = -mgl \cos(\Omega_3 t) \text{ mit } A = (I_3 - I_1)\Omega_3$$

$\Omega_3$ ist eine Erhaltungsgröße, womit $A$ nicht von der Zeit abhängt. Da auf den rechten Seiten der beiden Differentialgleichungen Terme mit trigonometrischen Funktionen $\sin(\Omega_3 t)$ und $\cos(\Omega_3 t)$ stehen, versuchen wir es mit einer Linearkombination dieser Funktionen als Ansatz:

$$\Omega_1 = a\cos(\Omega_3 t) + b\sin(\Omega_3 t) \text{ und } \Omega_2 = c\cos(\Omega_3 t) + d\sin(\Omega_3 t)$$

Wir berechnen die zeitlichen Ableitungen davon:

$$\dot{\Omega}_1 = -a\Omega_3 \sin(\Omega_3 t) + b\Omega_3 \cos(\Omega_3 t) \text{ und } \dot{\Omega}_2 = -c\Omega_3 \sin(\Omega_3 t) + d\Omega_3 \cos(\Omega_3 t)$$

Durch Einsetzen ergibt sich dann:

$$A(c\cos(\Omega_3 t) + d\sin(\Omega_3 t)) + I_1\Omega_3(-a\sin(\Omega_3 t) + b\cos(\Omega_3 t)) = -mgl\sin(\Omega_3 t)$$

$$\cos(\Omega_3 t)[Ac + I_1\Omega_3 b] + \sin(\Omega_3 t)[Ad - I_1\Omega_3 a] = -mgl\sin(\Omega_3 t)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $Ac + I_1\Omega_3 b = 0$ und $Ad - I_1\Omega_3 a = -mgl$. Analog verfahren wir mit der zweiten Gleichung:

$$-A(a\cos(\Omega_3 t) + b\sin(\Omega_3 t)) + I_1\Omega_3(-c\sin(\Omega_3 t) + d\cos(\Omega_3 t)) = -mgl\cos(\Omega_3 t)$$

$$\cos(\Omega_3 t)[-Aa + I_1\Omega_3 d] + \sin(\Omega_3 t)[-Ab - I_1\Omega_3 c] = -mgl\cos(\Omega_3 t)$$

Hier folgt durch Koeffizientenvergleich $-Aa + I_1\Omega_3 d = -mgl$ und $-Ab - I_1\Omega_3 c = 0$. Die erste der vier Gleichungen multiplizieren wir mit $A$, die vierte mit $I_3$ und addieren beide:

$$A^2 c + I_1\Omega_3 Ab = 0 \text{ und } -I_1^2 c - I_1\Omega_3 Ab = 0$$

Hieraus folgt $c(A^2 - I_1^2\Omega_3) = 0$ und damit $c = 0$ und auch $b = 0$. Die zweite Gleichung multiplizieren wir mit $I_1$, die dritte mit $A$ und subtrahieren beide:

$$AI_1\Omega_3 d - I_1^2\Omega_3 a = -mglI_1\Omega_3 \text{ und } I_1\Omega_3 Ad - A^2 a = -mglA$$

Daraus folgt $(A^2 - I_1^2\Omega_3)a = mgl(A - I_1)$ und damit:

$$a = \frac{mgl(A - I_1\Omega)}{(A - I_1\Omega_3)(A + I_1\Omega_3)} = \frac{mgl}{A + I_1\Omega_3} = \frac{mgl}{I_3\Omega_3 - I_3\Omega_3 + I_1\Omega_3} = \boxed{\frac{mgl}{I_3\Omega_3}}$$

Für $d$ ergibt sich:

$$d = \frac{-mgl + Aa}{I_1\Omega_3} = \frac{-mgl + (I_3 - I_1)\Omega_3 \cdot \frac{mgl}{I_3\Omega_3}}{I_1\Omega_3} = \boxed{-\frac{mgl}{I_3\Omega_3}}$$

Damit gilt:

$$\delta\Omega_1 = \frac{mgl}{I_3\Omega_3}\cos(\Omega_3 t) \text{ und } \delta\Omega_2 = -\frac{mgl}{I_3\Omega_3}\sin(\Omega_3 t)$$

$$\boxed{\delta\vec{\Omega} = \frac{mgl}{I_3\Omega_3}(\cos(\Omega_3 t)\vec{e}_1 - \sin(\Omega_3 t)\vec{e}_2)}$$

## c.)

Im raumfesten Koordinatensystem gilt:

$$\boxed{\delta\vec{\Omega} = \frac{mgl}{I_3\Omega_3}\vec{n}_z}$$

Der Kreisel vollführt eine Präzession um die $z$-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_3$.