Das Levi-Civita-Symbol alias ε-Tensor

Wir gehen aus vom Kreuzprodukt und schreiben dieses auf eine zunächst komplex anmutende Art:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}
\end{aligned}$$

Im Prinzip ist das seltsam ausschauende Objekt vor $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der ε-Tensor in überanschaulicher Schreibweise. In ihm stecken alle Eigenschaften drin, die das Kreuzprodukt so mit sich bringt. Beispielsweise ist dessen Antisymmetrie dadurch erkennbar, dass die drei auftretenden Matrizen selbst antisymmetrisch sind.

Bis jetzt ist zwar alles richtig, doch ist in praktischen Rechnungen das monströse Objekt nicht sehr hilfreich weil zu unhandlich. Infolgedessen betrachtet man immer nur eine einzige Komponente des Kreuzprodukts und schreibt dieses dann in folgender Form:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i=1} \sum_{j=1} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

Der erste Index i steht hierbei für die laufende Nummer der drei obigen Matrizen und die letzten beiden Indizes für die Zeilen bzw. Spalten einer solchen Matrix. (Zur Information für besonders Motivierte: Die drei auftretenden Matrizen sind die Generatoren der Lie-Algebra SO(3), also der dreidimensionalen reellen orthogonalen Matrizen ($AA^\intercal = A^\intercal A = \mathbf{1}$) mit Determinante 1. Das hat damit zu tun, dass das Kreuzprodukt selbst die Eigenschaften einer Liealgebra ausweist.) Summiert wird über die doppelt vorkommenden Indizes. Da diese im Endergebnis nicht mehr auftauchen, werden sie auch als stumme Indizes bezeichnet. Indizes, über die nicht summiert wird, müssen im Endergebnis wieder auftreten (Erhaltung der Indexstruktur); solche tragen die Bezeichnung freie Indizes. Da über doppelte Indizes sowieso summiert wird, kann man die Summenzeichen eigentlich auch gleich weglassen. Diese sind unnötiger Ballast, den man nicht explizit hinschreiben muss. Theoretische Physiker sind wie Mathematiker nämlich faul. Also schreiben wir:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

Natürlich muss man die Summenzeichen immer im Hinterkopf behalten. Mit der Zeit bekommt man jedoch den Dreh raus. Diese berühmte Notation stammt von Albert Einstein persönlich. In der Relativitätstheorie treten nämlich auch sehr viele Summen auf und dann ist es besonders lästig, die Summenzeichen immer mitschleppen zu müssen.

Es ist sinnvoll, auf den Begriff der totalen Antisymmetrie einzugehen. Dies bedeutet, dass sich das Vorzeichen von ε_{ijk} ändert, sobald man zwei Indizes vertauscht:

$$\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk},\ \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$$

Setzen wir zwei Indizes gleich (also beispielsweise $i = j$), so gilt $\varepsilon_{iik} = -\varepsilon_{iik}$, was nur für $\varepsilon_{iik} = 0$ erfüllt ist. Analog funktioniert dies für die anderen Indizes. Sind also zwei oder mehr Indizes gleich, so verschwindet das Levi-Civita-Symbol. Setzt man $\varepsilon_{123} = 1$, so gilt:

$$\varepsilon_{123} = 1,\ \varepsilon_{231} = 1,\ \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{321} = -1,\ \varepsilon_{213} = -1,\ \varepsilon_{132} = -1$$

$$\varepsilon_{111} = 0,\ \varepsilon_{112} = 0,\ \varepsilon_{113} = 0,\ \varepsilon_{121} = 0,\ \varepsilon_{131} = 0,\ \varepsilon_{311} = 0,\ \ldots$$

Die Antisymmetrie des Kreuzprodukts spiegelt sich in der Antisymmetrie des ε-Tensors wieder. Zusammenfassend kann man sagen:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } (i,j,k) \text{ zyklisch aus } (1,2,3) \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ antizyklisch aus } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst (zwei oder drei Indizes gleich)} \end{cases}$$

Erleben wir nun das Levi-Civita-Symbol in seiner Anwendung:

1.) Kreuzprodukt:

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist wieder ein Vektor (der auf diesen beiden Vektoren senkrecht steht). Die k-te Komponente dieses neuen Vektors $\vec{c}$ lässt sich mit dem Levi-Civita-Symbol schreiben:

$$c_k = (\vec{a} \times \vec{b})_k = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j$$

Summiert wird über die beiden Indizes i und j. Der Index k ist frei, über diesen wird nicht summiert. Führen wir also die Summationen aus:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= (\vec{a} \times \vec{b})_1 = \\
&= \underbrace{\varepsilon_{111}}_{=0} a_1 b_1 + \underbrace{\varepsilon_{121}}_{=0} a_1 b_2 + \underbrace{\varepsilon_{131}}_{=0} a_1 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{211}}_{=0} a_2 b_1 \\
&\quad + \underbrace{\varepsilon_{311}}_{=0} a_3 b_1 + \underbrace{\varepsilon_{221}}_{=0} a_2 b_2 + \underbrace{\varepsilon_{231}}_{=1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{321}}_{=-1} a_3 b_2 = \\
&= a_2 b_3 - a_3 b_2
\end{aligned}
$$

Für die anderen beiden Komponenten gilt (wobei wir nun die ε_{ijk} mit zwei oder drei gleichen Indizes sofort gleich null setzen):

$$c_2 = (\vec{a} \times \vec{b})_2 = \varepsilon_{132} a_1 b_3 + \varepsilon_{312} a_3 b_1 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = (\vec{a} \times \vec{b})_3 = \varepsilon_{123} a_1 b_2 + \varepsilon_{213} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Zusammenfassend gilt also (wie wir aus der Schule wissen):

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}}$$

2.) Determinante einer Matrix:

a.) 2×2-Matrix:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Hier haben wir also das zweidimensionale ε-Symbol verwendet, das analog zum dreidimensionalen definiert ist. Es gilt also:

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji},\ \varepsilon_{ii} = 0$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0,\ \varepsilon_{12} = 1,\ \varepsilon_{21} = -1$$

b.) 3×3-Matrix:

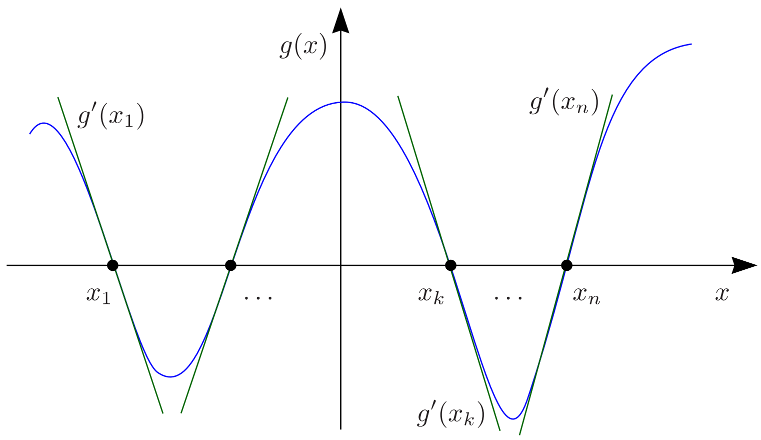
$$\begin{aligned}\det(A) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k} &= \\ &= \varepsilon_{123}a_{11}a_{21}a_{31} + \varepsilon_{231}a_{12}a_{23}a_{31} + \varepsilon_{312}a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad + \varepsilon_{132}a_{11}a_{23}a_{32} + \varepsilon_{321}a_{13}a_{22}a_{31} + \varepsilon_{213}a_{12}a_{21}a_{33} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

Das ist nichts anderes als die bekannte Sarrussche Regel.

Determinanten höherdimensionaler Matrizen kann man mit einem entsprechenden höherdimensionalen Levi-Civita-Symbol definieren, das dieselben Eigenschaften hat. Damit wollen wir uns jedoch jetzt nicht beschäftigen.

Wie behandelt man eine δ-Funktion, deren Argument selbst wieder eine Funktion ist?

Wir führen als erstes den allgemeinen Beweis für eine beliebige Funktion $g(x)$. Dazu nehmen wir an, $g(x)$ habe n Nullstellen $x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n$. Die Steigungen in den jeweiligen Nullstellen bezeichnen wir mit $g'(x_1), \ldots, g'(x_k), \ldots, g'(x_n)$.



Auszuwerten ist nun folgendes:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x)) f(x)\,\mathrm{d}x$$

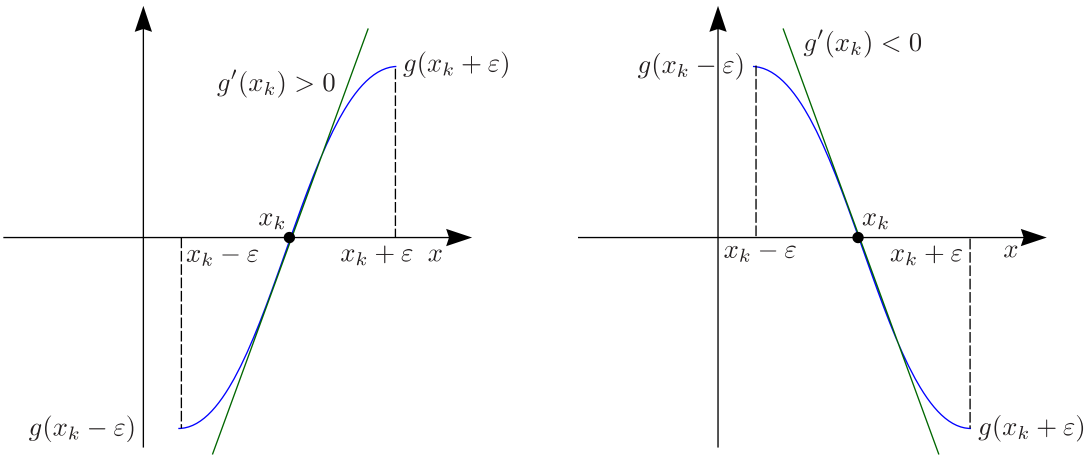
Wir machen die Substitution $y = g(x)$ mit $\mathrm{d}y = g'(x)\,\mathrm{d}x$ und erhalten:

$$I = \int\limits_{g(-\infty)}^{g(\infty)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x)} \delta(y) f(g^{-1}(y))$$

An dieser Stelle teilen wir die Funktion bei der Integration in verschiedene Intervalle ein; in einem einzigen dieser Intervalle liege eine Nullstelle. Wie die Intervallgrenzen genau gewählt werden, ist hierbei egal.

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(g(x)) f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{g(x_0-\varepsilon)}^{g(x_0+\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_1)} \delta(y) f(g^{-1}(y)) + \ldots$$
$$+ \int\limits_{g(x_k+\varepsilon)}^{g(x_k-\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_k)} \delta(y) f(g^{-1}(y)) + \ldots + \int\limits_{g(x_n-\varepsilon)}^{g(x_n+\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_n)} \delta(y) f(g^{-1}(y))$$

Nun müssen wir jedoch noch beachten, ob die erste Ableitung in der jeweiligen Nullstelle > 0 oder < 0 ist.



Ist sie > 0 wie im ersten Bild, so können wir einfach die Integration ausführen, wobei wir beachten, dass $g^{-1}(0)$ eine Nullstelle von $g(x)$, also x_k, ist.

$$\int\limits_{g(x_k-\varepsilon)}^{g(x_k+\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_k)} \delta(y) f(g^{-1}(y)) = \frac{1}{g'(x_k)} f(g^{-1}(0)) = \frac{1}{g'(x_k)} f(x_k) \text{ für } g'(x_k) > 0$$

Im Falle $g'(x_k) < 0$, wie auf dem zweiten Bild, müssen wir die Integrationsgrenzen vertauschen, da dann die untere Integrationsgrenze größer ist als die obere:

$$\int\limits_{g(x_k-\varepsilon)}^{g(x_k+\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_k)}\delta(y)f(g^{-1}(y)) = -\int\limits_{g(x_k+\varepsilon)}^{g(x_k-\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_k)}\delta(y)f(g^{-1}(y)) = -\frac{1}{g'(x_k)}f(g^{-1}(0)) =$$
$$= -\frac{1}{g'(x_k)}f(x_k) \text{ für } g'(x_k) < 0$$

Zusammenfassend können wir mittels der Betragsfunktion schreiben;

$$I = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_k)|}f(x_k)$$

Damit ist die Wirkung von $\delta(g(x))$ auf eine Testfunktion $f(x)$ gezeigt und wir schließen daraus:

$$\boxed{\delta(g(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_k)|}\delta(x-x_k) \text{ mit } g(x_k) = 0 \text{ und } g'(x_k) \neq 0}$$