Die Heavisidesche Sprungfunktion alias θ-Funktion

Die θ-Funktion ist auch unter dem Namen Heavisidesche Sprungfunktion bekannt. Sie ist definiert durch:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ c & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

Oft setzt man $c = 1/2$. Man kann den Sprungpunkt auch auf ein beliebiges Argument x' legen. Dann gilt:

$$\theta(x - x') = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < x' \\ c & \text{für} \quad x = x' \\ 1 & \text{für} \quad x > x' \end{cases}$$

Die θ-Funktion kann mal schreiben als Integral über die δ-Funktion wie folgt:

$$\theta(x - x') = \int_{-\infty}^{x} \delta(x'' - x')\,\mathrm{d}x''$$

Dies ist klar, weil es einen Beitrag von $\delta(x'' - x')$ nur dann gibt, wenn die obere Integralgrenze $x > x'$ ist. Im Falle von $x' = 0$ erhält man:

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x'')\,\mathrm{d}x''$$

Für Integrale über die θ-Funktion gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\theta(x - x')\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x'} g(x) \cdot 0\,\mathrm{d}x + \int_{x'}^{+\infty} g(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x = \int_{x'}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

weil es einen Beitrag von der θ-Funktion nur für $x > x'$ gibt.

Die Funktion $f(x)$ als Argument der δ-Funktion

Um $\theta(f(x))$ auszuwerten, gibt es keine geschlossene Formel wie bei der δ-Funktion. Was man machen muss, ist, die Nullstellen von $f(x)$ zu bestimmen. Zur Integration tragen dann nur die Intervalle bei, für die $f(x) > 0$ ist.

Beispiel

Wir betrachten $\theta(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$. Die Nullstellen der Argumentfunktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x -$ sind gegeben durch $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = 3$. Damit gilt:

$$\theta(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = \theta((x-1)(x-2)(x-3))$$

Nun muss festgestellt werden, wann $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ ist. Dies ist entweder der Fall, wenn alle drei Klammern größer als Null sind oder zwei Klammern negativ und die dritte positiv sind. Also gibt es Beiträge für

$$(x-1) > 0 \wedge (x-2) > 0 \wedge (x-3) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \wedge x > 2 \wedge x > 3 \Rightarrow x > 3$$

$$(x-1) < 0 \wedge (x-2) < 0 \wedge (x-3) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x < 2 \wedge x > 3 \Rightarrow \text{kein Beitrag}$$
$$(x-1) < 0 \wedge (x-2) > 0 \wedge (x-3) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x > 2 \wedge x < 3 \Rightarrow \text{kein Beitrag}$$
$$(x-1) > 0 \wedge (x-2) < 0 \wedge (x-3) < 0 \Leftrightarrow x > 1 \wedge x < 2 \wedge x < 3 \Rightarrow 1 < x < 2$$

Also gilt

$$\theta((x-1)(x-2)(x-3)) = \theta(x-3) + \theta(x-1)\theta(2-x)$$

und somit:

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-1)\theta(2-x) g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-3) g(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{1} g(x)\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} g(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{+\infty} g(x)\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-\infty}^{3} g(x)\cdot 0\,\mathrm{d}x + \int\limits_{3}^{+\infty} g(x)\cdot 1\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_{1}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{3}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Darstellung der θ-Funktion

Da die θ-Funktion aus der Definition der δ-Funktion heraus folgt, kann man ja von dieser ausgehen. Beispielsweise lässt sich die δ-Funktion folgendermaßen darstellen:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \mapsto 0} \left(\frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} \right)$$

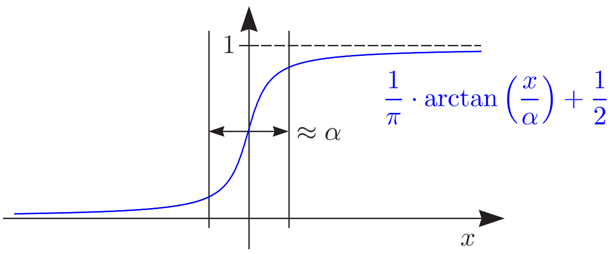
Da jetzt

$$\theta(x - x') = \int_{-\infty}^{x} \delta(x'' - x')\,\mathrm{d}x''$$

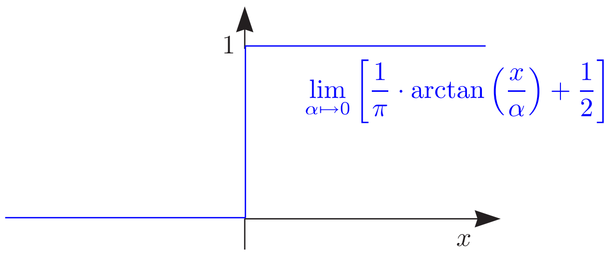
gilt, ergibt sich eine entsprechende Darstellung der θ-Funktion:

$$\theta(x - x') = \lim_{\alpha \mapsto 0} \frac{\alpha}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{(x'' - x')^2 + \alpha^2} \right) \mathrm{d}x'' = \lim_{\alpha \mapsto 0} \left[\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x - x'}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \right]$$

Anschaulich wird das Ganze noch klarer (wobei der Einfachheit halber $x' = 0$ gewählt wird):



Für den Grenzübergang $\alpha \mapsto 0$ wird das Schaubild der Heavisidschen Sprungfunktion erkennbar:



Berechnung der Fourierreihe für die Sägezahnfunktion

Die Fourierreihe einer periodischen Funktion $f(t)$ mit der Periode T und $\omega = 2\pi/T$ ist gegeben durch:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\text{mit } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega n t)\,\mathrm{d}t \text{ und } b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Wir wollen die Fourierreihe der Sägezahnfunktion

$f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi]$ mit 2π-periodischer Fortsetzung

berechnen. Hier gilt also $T = 2\pi$ und $\omega = 1$. Schauen wir uns nun die Koeffizienten an. Dass die a_n verschwinden müssen, ist klar, weil die Funktion $f(x)$ ungerade ist. Nichts desto trotz berechnen wir das Integral explizit durch Parameterdifferentiation:

$$\int t \cdot \cos(n \cdot t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \cdot \int \sin(n \cdot t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot t)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \cos(n \cdot t) + \frac{1}{n} \cdot t \cdot \sin(n \cdot t)$$

Durch Einsetzen der Grenzen ergibt sich dann weiter:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2} \cdot \cos(n \cdot t) + \frac{1}{n} \cdot t \cdot \sin(n \cdot t)\Big|_{-\pi}^{+\pi}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\pi\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\pi\sin(n\pi)\right] = 0 \end{aligned}$$

Kommen wir nun zu den Koeffizienten b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(n \cdot t)\,\mathrm{d}t$$

Das Integral über $t \cdot \sin(n \cdot t)$ kann man wieder geschickt durch Parameterdifferentiation lösen:

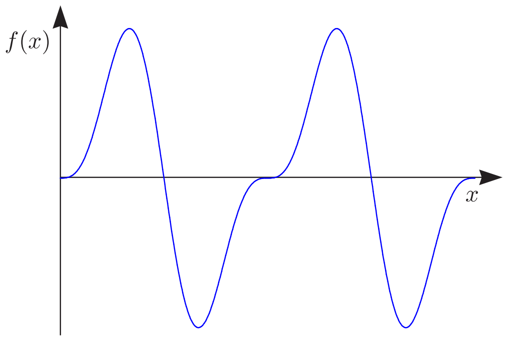
$$\int t \cdot \sin(n \cdot t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} \int \cos(n \cdot t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[\frac{1}{n} \cdot \sin(n \cdot t)\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot t) - \frac{1}{n} \cdot t \cdot \cos(n \cdot t)$$

Durch Einsetzen der Grenzen folgt:

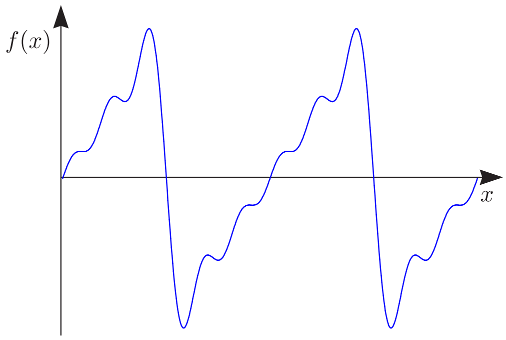
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2} \cdot \sin(n \cdot t)\Big|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n} \cdot t \cdot \cos(n \cdot t)\Big|_{-\pi}^{+\pi}\right] = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\pi\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\pi\cos(n\pi)\right] = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Somit gilt also:

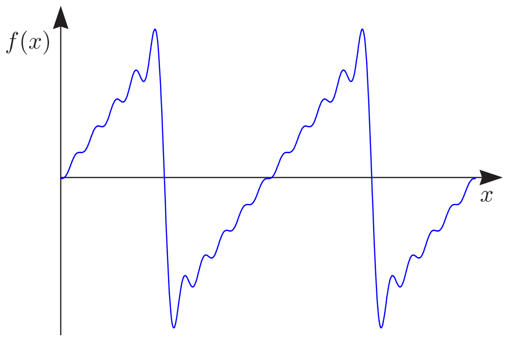
$$\boxed{f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt)}$$



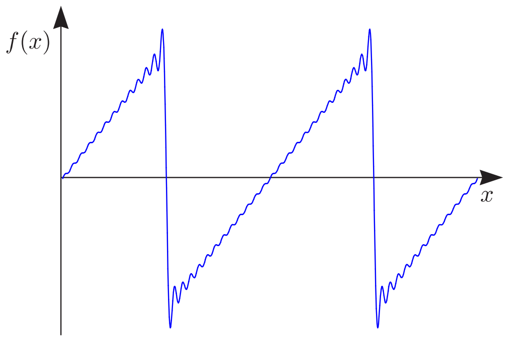
$n = 2$



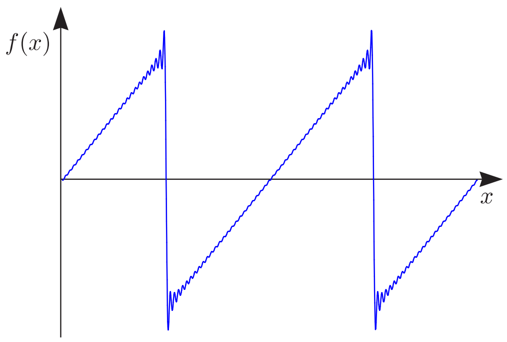
$n = 5$



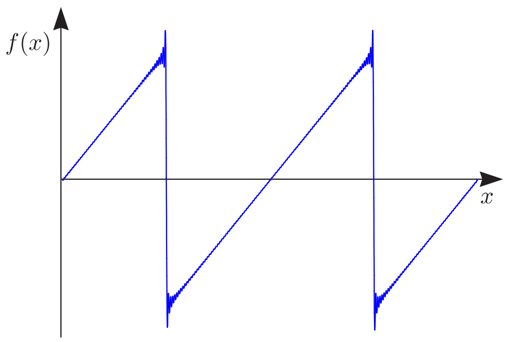
$n = 10$



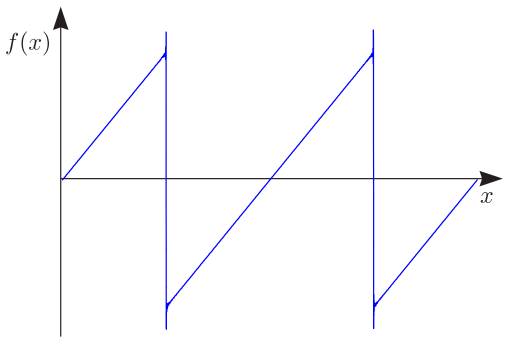
$n = 25$



$n = 50$



$n = 100$



$n = 1000$

Gibbsches Phänomen: Für hinreichend große n überschwingen alle Partialsummen der

Fourierentwicklung den Sprung um 17,89%.

Die Fouriertransformiertion – einige Beispiele

Wir berechnen die Fouriertransformierte von $f(x) = \exp(-|x|)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-|x|)\exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \exp(x+\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \exp(-x+\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{i}k}\exp(x+\mathrm{i}kx)\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1+\mathrm{i}k}\exp(-x+\mathrm{i}kx)\Big|_{0}^{\infty} = \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{i}k} - \frac{1}{-1+\mathrm{i}k} = \frac{-1+\mathrm{i}k-1-\mathrm{i}k}{-1-k^2} = \frac{2}{1+k^2}
\end{aligned}$$

Von der Rechteckfunktion $g(x) = \theta(x^2 - a^2) = \theta((x+a)(x-a))$ ist Fouriertransformierte:

$$\mathcal{F}(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} \exp(\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x = 2\frac{\exp(\mathrm{i}ka) - \exp(-\mathrm{i}ka)}{2\mathrm{i}} = 2\sin(ka)$$