Einführung in die Methoden der speziellen Relativitätstheorie oder „Wie rechnete Einstein?: Teil II“

Der affine Raum

Ein n-dimensionaler **affiner Raum** ist durch folgende Axiomatik gekennzeichnet:

1.) Es gibt wenigstens einen Punkt.

2.) Jedem geordnetem Paar von Punkten A, B (man betrachtet also zwei Punkte immer in einer gewissen festgelegten Reihenfolge) ist genau ein Vektor $\mathbf{AB}$ zugeordnet.

3.) Zu jedem Punkt A und zu jedem Vektor $\mathbf{x}$ gibt es einen und nur einen Punkt B, so dass $\mathbf{AB} = \mathbf{x}$ ist.

4.) Ist $\mathbf{AB} = \mathbf{CD}$, so auch $\mathbf{AC} = \mathbf{BD}$ (Parallelogrammaxiom).

5.) Jedem Vektor $\mathbf{x}$ und jeder Zahl α ist ein bestimmter Vektor zugeordnet. Dieser lautet $\alpha\mathbf{x}$ und heißt Produkt des Vektors $\mathbf{x}$ mit der Zahl α.

6.) Es gilt $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

7.) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

8.) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

9.) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$

Aus diesen Axiomen lassen sich natürlich jetzt weitere Eigenschaften ableiten. Darauf soll aber nicht näher eingegangen werden. Der Begriff des affinen Raumes wurde hier nur aufgerollt, weil er im Folgenen verwendet wird.

Der euklidische Raum

Ein affiner Raum mit einer zugewiesenen Bilinearform $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (das bedeutet, dass die Funktion φ linear bezüglicher der beiden Argumente $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist) mit den Eigenschaften

1.) $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (Symmetrie!)

2.) Zu jedem Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ gibt es einen Vektor $\mathbf{y}$, so dass $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$ ist.

nennt man **euklidischen Raum**. Im Folgenden soll als Bilinearform das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ dienen. Dieses erfüllt die beiden obigen Bedingungen. Dann gilt also

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij} x^i y^j \,,$$

wobei g_{ij} der aus (Teil I) bekannte **metrische Tensor** ist.

Der eigentliche euklidische Raum

Ein euklidischer Raum mit $\mathbf{x}^2 > 0$ für jeden Vektor $\mathbf{x} \neq 0$ heißt **eigentlich**. Dies bedeutet, dass alle Einheitsvektoren reell sind. Es gilt dann

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \ldots = \mathbf{e}_n^2 = 1\,.$$

Außerdem verschwinden alle Nichtdiagonalelemente des metrischen Tensors

$$g_{ij} = 0\,, \text{ für } i \neq j\,,$$

und es gilt außerdem

$$g_{ii} = 1\,.$$

Die Einträger ko- und kontravarianter Vektoren sind gleich

$$x_i = x^i\,,$$

und das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ ist gegeben durch:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n\,.$$

Ein euklidischer Raum mit dieser Eigenschaft ist der uns wohlbekannte $\mathbb{R}^n$. Hier gilt nämlich für einen Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

wie uns ja bekannt ist:

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 > 0\,.$$

Der pseudoeuklidische Raum

Euklidische Räume, bei denen das Skalarprodukt $\mathbf{x}^2$ **sowohl positive als auch negative** Werte annehmen kann, heißen **pseudoeuklidisch**. Dies bedeutet, dass imaginäre Einheitsvektoren existieren. Ein pseudoeuklidischer Raum wird durch die Anzahl seiner imaginären Einheitsvektoren charakterisiert. Man bezeichnet diese Anzahl als **Index** des pseudoeuklidischen Raumes. Der Einfachheit halber beschränken wir uns nun auf den zweidimensionalen pseudoeuklidischen Raum.

Der pseudoeuklische Raum vom Index 0 Der zweidimensionale pseudoeuklidische Raum vom Index 0 entspricht gerade dem zweidimensionalen eigentlichen euklidischen Raum, wird also nicht noch einmal hier aufgerollt.

Der pseudoeuklische Raum vom Index 2 Der pseudoeuklidische Raum vom Index 2 besitzt zwei imaginäre Einheitsvektoren. Dann gilt hier:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = -1\,.$$

Die Komponenten des metrischen Tensors sind gegeben durch

$$g_{11} = g_{22} = -1\,, \quad g_{12} = 0\,,$$

und die Komponenten der ko- und kontravarianten Vektoren über ein Minuszeichen miteinander verknüpft:

$$x_1 = -x^1\,, \quad x_2 = -x^2\,.$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ nimmt folgende Form an:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = -x_1 y_1 - x_2 y_2\,.$$

Wir erkennen die Strukturgleichheit zum eigentlichen euklidischen Raum. Dessen Formeln werden gerade durch ein zusätzliches Minuszeichen versehen.

Der pseudoeuklische Raum vom Index 1 Wirklich interessant ist der pseudoeuklidische Raum vom Index 1, weil er sich von der Struktur her sehr stark von den zuvor betrachteten Räumen abgrenzt. Er wird von einem reellen und einem imaginären Einheitsvektor aufgespannt. Wir treffen o.B.d.A. (obwohl ich diese Abkürzung überhaupt nicht mag ;-)) die Wahl

$$\mathbf{e}_0^2 = 1\,, \quad \mathbf{e}_1^2 = -1\,.$$

Dann besitzt der metrische Tensor in Matrixschreibweise die folgende Form:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,,$$

wodurch ko- und kontravariante Vektoren über $x_i = g_{ij} x^j$ wie folgt miteinander verknüpft sind:

$$x_0 = x^0\,, \quad x_1 = -x^1\,, \text{ also } (x^i) = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}\,, \quad (x_i) = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \end{pmatrix}\,.$$

Dann lautet das Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 \, .$$

Wir wollen uns nun eine Koordinatentransformation anschauen, bei welcher der Ursprung des Koordinatensystems fest bleibt, also eine Drehung. Die Einheitsvektoren transformieren sich als Tensoren erster Stufe wie folgt:

$$\mathbf{e}_0' = {A_0}^0 \mathbf{e}_0 + {A_0}^1 \mathbf{e}_1 \, ,$$

$$\mathbf{e}_1' = {A_1}^0 \mathbf{e}_0 + {A_1}^1 \mathbf{e}_1 \, .$$

In Matrixschreibweise gilt (symbolisch):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0' \\ \mathbf{e}_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {A_0}^0 & {A_0}^1 \\ {A_1}^0 & {A_1}^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \, .$$

Durch Ausnutzung der Orthogonalität der Basisvektoren $\mathbf{e}_0$ und $\mathbf{e}_1$ (und natürlich auch der gedrehten Vektoren $\mathbf{e}_0'$ und $\mathbf{e}_1'$, weil eine Drehung den Winkel zwischen zwei Vektoren nicht ändert) folgt:

$$\mathbf{e}_0' \cdot \mathbf{e}_1' = 0 \Leftrightarrow ({A_0}^0 \mathbf{e}_0 + {A_0}^1 \mathbf{e}_1) \cdot ({A_1}^0 \mathbf{e}_0 + {A_1}^1 \mathbf{e}_1) = 0 \, ,$$

$$\Leftrightarrow {A_0}^0 \cdot {A_1}^0 - {A_0}^1 \cdot {A_1}^1 = 0 \Leftrightarrow \frac{{A_0}^1}{{A_0}^0} = \frac{{A_1}^0}{{A_1}^1} =: \beta$$

Setzen wir darüber hinaus

$${A_0}^1 =: a \, , \quad {A_1}^0 := b \, ,$$

so kommt man auf folgendes Transformationsverhalten:

$$\mathbf{e}_0' = a(\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1) \, ,$$

$$\mathbf{e}_1' = b(\beta \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1) \, .$$

Nutzen wir nun noch aus, dass $\mathbf{e}_1$ ein imaginärer Einheitsvektor ist, können wir noch eine weitere Beziehung ableiten (da sich natürlich auch der Beträg eines Vektors nicht ändert unter Drehungen):

$$\mathbf{e}_1'^2 = -1 = b^2 \beta^2 \mathbf{e}_0^2 + b^2 \mathbf{e}_1^2 = b^2 \beta^2 - b^2 = b^2(\beta^2 - 1) \Rightarrow b = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Da der erste Einheitsvektor reell ist, gilt außerdem:

$$\mathbf{e}_0'^2 = 1 = a^2 \mathbf{e}_0^2 + a^2 \beta^2 \mathbf{e}_1^2 = a^2 - a^2 \beta^2 = a^2(1 - \beta^2) \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Also können wir nun die Transformationen folgendermaßen aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_0 \\ \mathbf{e}'_1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_1 \end{pmatrix} \,, \text{ mit } \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma \,.$$

Die Transformation ist nur dann definiert, wenn

$$-1 < \beta < 1 \,,$$

gilt. Cool. Was ist das hier nun? Mancher, der sich nun schon ein bisschen auskennt in der speziellen Relativitätstheorie (bis jetzt ist dieser Begriff nicht gefallen, wir haben „nur“ irgendwelche abstrakten mathematischen Räume betrachtet) wird erkennen, dass diese Transformation nun gerade eine **Lorentztransformation** ist, wenn man $\beta = v/c$ identifiziert, wobei v die Geschwindigkeit ist, mit der sich ein Bezugssystem gegenüber dem anderen bewegt. c ist nichts anderes als die Lichtgeschwindigkeit.

Wir erkennen nun auch, dass der Raum, in dem die spezielle Relativitätstheorie lebt (also der **Minkowski-Raum**) mit dem metrischen Tensor

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1) \,,$$

nicht anderes ist als ein vierdimensionaler pseudoeuklidischer Raum. Dieser Raum wird oft mit $\mathbb{R}^{3+1}$ bezeichnet, wobei die „3“ für die drei Raumdimensionen steht und die „1“ für die Zeitdimension.

Der Begriff der Lorentztransformation

Eine Lorentztransformation ist eine Transformation, welche das Minkowski-Skalarprodukt invariant lässt, also nicht ändert. Jede Lorentztransformation lässt sich als 4×4-Matrix Λ darstellen. Diese Matrizen bilden mathematisch gesehen eine Gruppe und heißt **Lorentzgruppe** O(3,1). Nochmal zur Wiederholung: Unter einer Gruppe $\mathcal{G}$ versteht man eine Menge mit einer Verknüpfung $\times$ (Gruppenmultiplikation), so dass folgendes gilt:

1.) Abgeschlossenheit: Ist $a \in \mathcal{G}$ und $b \in \mathcal{G}$, so ist auch die Verknüpfung $a \times b \in \mathcal{G}$.

2.) Assoziativität: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$

3.) Existenz eines neutralen Elements $\mathbb{1}$: $a \times \mathbb{1} = \mathbb{1} \times a = a$

4.) Existenz eines zu a inversen Elements a^{-1}: $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = \mathbb{1}$

Gilt zusätzlich $a \times b = b \times a$ (Kommutativität), so spricht man einer **kommutativen** oder auch **abelschen Gruppe**. Die Lorentzgruppe ist also:

$$\mathrm{O}(3,1) = \{\Lambda \in \mathrm{Mat}(4,\mathbb{R}) : \langle \Lambda\mathbf{x}, \Lambda\mathbf{y}\rangle_M = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_M \, \forall \, \mathbf{x}, \, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4\} \, .$$

Hierbei versteht man unter $\mathrm{Mat}(4,\mathbb{R})$ die rellen 4×4-Matrizen und $\langle \bullet, \bullet \rangle_M$ ist das bekannte Skalarprodukt im Minkowski-Raum:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \, .$$

Die Lorentzgruppe O(3,1) ist **nicht kommutativ**. Das heißt, dass es auf die Reihenfolge der Transformationen durchaus ankommt.

Klassifikation der Lorentztransformationen

1.) Poincaré-Transformation (inhomogene Lorentz-Transformation)

Diese werden aus den **homogenen Lorentztransformationen** (die, welche wir zuvor besprochen haben) und den **Translationen** gebildet. Die Poincaré-Transformation eines Vierervektors im Minkowski-Raum besitzt die Form $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha$. Diese Transformationen bilden die **Poincaré-Gruppe**.

2.) (Homogene) Lorentztransformation: $x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta$

Dabei handelt es sich um die zuvor besprochenen Transformationen, welche die Lorentzgruppe bilden.

a.) Eigentliche (orthochrone) Lorentztransformation: $\det(\Lambda) = 1$ ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$, Erhaltung der „Zeitrichtung“)

i.) Rotationen $\Lambda^i{}_j = R_{ij}$, $\Lambda^0{}_0 = 1$, $\Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = 0$

Dabei handelt es sich natürlich um die aus Theorie A bekannten Drehungen des dreidimensionalen Raumes. Rotationen wirken nur auf den dreidimensionalen Anschauungsraum; die Zeit wird nicht transformiert.

ii.) Sogenannnte Boosts sind spezielle eigentliche Lorentztransformationen, die keine Drehung enthalten. Es handelt sich dabei um Lorentztransformationen, die zwei Koordinatensysteme, welche sich mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ relativ zueinander bewegen, transformieren.

$$\Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + \widehat{v}_i \widehat{v}_j (\gamma - 1) \, , \qquad \text{mit } \widehat{\mathbf{v}} := \frac{\mathbf{v}}{c} \, ,$$

$$\Lambda^j{}_0 = \Lambda^0{}_j = \gamma v_j \, , \text{ mit } \Lambda^0{}_0 := \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

b.) Uneigentliche Lorentztransformation: $\det(\Lambda) = -1$

i.) Raumspiegelung (Paritätstransformation): ${\Lambda^0}_0 \geq 1$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ii.) Zeitumkehr: ${\Lambda^0}_0 \leq 1$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren der Lorentzgruppe

Die Lorentzgruppe wird von sechs Erzeugenden (sogenannte Generatoren) aufgespannt. Es handelt sich dabei um drei Generatoren J_i für die räumlichen Drehungen und drei Generatoren K_i für die Boosts. Diese Generatoren sind Matrizen, die für J_i wie folgt aussehen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gelten für diese Matrizen die folgenden sogenannten **Vertauschungsrelationen** (**Kommutatorrelationen**)

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k \,,$$

$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} J_k \,,$$

wobei $[\bullet, \bullet]$ für zwei Matrizen A und B definiert ist durch

$$[A, B] := AB - BA \,.$$

Auf der rechten Seite wird über k summiert. $[A, B]$ heißt **Kommutator** und ist eine sehr wichtige mathematische Verknüpfung, die in der Quantenmechanik ständig auftaucht. Prinzipiell prüft man damit, ob zwei Operatoren miteinander vertauschen, also ob diese kommutativ sind. Ist dies der Fall, verschwindet der Kommutator, was weitreichende Folgen hat. Das kommt aber alles in Theorie D/E ;-)

Dass die Kommutatoren für die Matrizen J_i bzw. K_i nicht verschwinden, sagt uns, dass es auf die Reihenfolge der Drehungen bzw. Boosts ankommt. Diese darf man nicht so einfach vertauschen. Beispielsweise gilt für zwei Boosts K_1 und K_2 (entlang der x- bzw. y-Achse):

$$\begin{aligned}[K_1, K_2] &= K_1K_2 - K_2K_1 = -\varepsilon_{12k}J_k = -\varepsilon_{121}J_1 - \varepsilon_{122}J_2 - \varepsilon_{123}J_3 = \\ &= -0 \cdot J_1 - 0 \cdot J_2 - 1 \cdot J_3 = -J_3\end{aligned}$$

Wenden wir diesen Kommutator auf einen Vektor $\mathbf{V}$ an, so gilt:

$$[K_1, K_2]\mathbf{V} = K_1K_2\mathbf{V} - K_2K_1\mathbf{V} \Leftrightarrow K_2K_1\mathbf{V} = K_1K_2\mathbf{V} - [K_1, K_2]\mathbf{V}\,.$$

Multiplikation mit den inversen $K_2^{-1}K_1^{-1}$ (und zwar in dieser Reihenfolge) führt auf:

$$K_2^{-1}K_1^{-1}K_2K_1\mathbf{V} = K_2^{-1}K_1^{-1}K_2K_1\mathbf{V} - K_2^{-1}K_1^{-1}[K_1, K_2]\mathbf{V}\,,$$

$$K_2^{-1}K_1^{-1}K_2K_1\mathbf{V} = \mathbf{V} - K_2^{-1}K_1^{-1}[K_1, K_2]\mathbf{V}\,.$$

Es ist also erkennbar, dass $K_2^{-1}K_1^{-1}K_2K_1 = \mathbb{1}$ gilt, sofern der Kommutator $[K_1, K_2]$ verschwindet. Wir können also anstelle des Kommutators aus den Ausdruck $K_2^{-1}K_1^{-1}K_2K_1$ untersuchen, so wie es auf dem zehnten Übungsblatt in der letzten Aufgabe gemacht werden sollte.