

---

## Einführung in die Methoden der speziellen (allgemeinen) Relativitätstheorie oder „Wie rechnete Einstein?: Teil III“

### Lie-Algebren

Eine **Lie-Algebra** ist ein Vektorraum  $\mathcal{G}$  über einem Körper  $K$  mit der Verknüpfung  $[\bullet, \bullet]: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ ,  $(x, y) \mapsto [x, y]$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Bilinearität (Linearität bezüglich beider Argumente):

$$[ax+by, z] = a[x, z]+b[y, z] \text{ und } [z, ax+by] = a[z, x]+b[z, y] \text{ für } a, b \in K \text{ und } x, y, z \in \mathcal{G}.$$

- Jacobi-Identität:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ für } x, y, z \in \mathcal{G}.$$

- Es gilt  $[x, x] = 0$  für  $x \in \mathcal{G}$ .

Man bezeichnet die Verknüpfung  $[\bullet, \bullet]$  auch als **Lie-Klammer**. Man kann zeigen, dass der die Verknüpfung (bereits bekannt als Kommutator)

$$[a, b] := ab - ba,$$

die obigen Eigenschaften erfüllt. Eine Lie-Algebra mit Elementen  $A_i$  ist dann charakterisiert durch

$$[A_i, A_j] = \sum_k f_{ijk} A_k,$$

wobei man die  $f_{ijk}$  **Strukturkonstanten** der Lie-Algebra nennt.

### Lie-Algebra der Lorentzgruppe

Die Lie-Algebra der Lorentzgruppe  $O(3,1)$  ist charakterisiert durch die Vertauschungsrelationen

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k,$$

$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} J_k.$$

### Lie-Gruppen

Die Elemente  $U$  einer Lie-Gruppe folgen durch Exponentieren der Elemente einer Lie-Algebra. (Genauer ist eine Lie-Gruppe eine Gruppe mit einer topologischen Struktur.)

---

Darauf wollen wir doch jetzt nicht näher eingehen.) Diese Elemente werden in dem Zusammenhang dann als **Generatoren** der jeweiligen Gruppe bezeichnet. Man sagt auch, dass die Generatoren den **Tangentialraum der Lie-Gruppe** aufspannen. Infinitesimal gilt also

$$U(\omega_n) = \mathbb{1} - i \sum_n \omega_n A_n,$$

wobei  $A_n$  die Generatoren und  $\omega_n$  Körperelemente sind. Sei nun  $\omega_n = \frac{\omega_n}{N} \cdot N$ . Durch  $N$ -maliges Hintereinanderausführung folgt:

$$U(\omega) = \left[ U\left(\frac{\omega_n}{N}\right) \right]^N = \left( \mathbb{1} - i \sum_n \frac{\omega_n}{N} A_n \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp\left(i \sum_n \omega_n A_n\right) = \exp(i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}).$$

Umgekehrt folgen daraus wieder die Generatoren:

$$A_n = \left. \frac{\partial}{\partial \omega_n} U(\omega) \right|_{\omega_n=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \omega_n} \exp(i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{A}) \right|_{\omega_n=0}.$$

### Lie-Gruppe der Drehungen

Im Allgemeinen werden Lie-Algebren mit kleinen Buchstaben und die zugehörige Lie-Gruppe mit großen Buchstaben bezeichnet. Die Lie-Gruppe der Drehungen kennen wir bereits; es handelt sich dabei um die Drehgruppe  $SO(3)$ . Die Bezeichnung bedeutet **spezielle orthogonale Gruppe**:

$$SO(3) = \{ \mathcal{O} \in \text{Mat}(3, \mathbb{R}) : \mathcal{O}\mathcal{O}^\top = \mathcal{O}^\top\mathcal{O} = \mathbb{1} \text{ und } \det(\mathcal{O}) = 1 \}.$$

Dies ist also die Gruppe aller reellen orthogonalen  $3 \times 3$ -Matrizen mit Determinante 1. Aus den Gruppeneigenschaften folgen die Eigenschaften der Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra  $so(3)$ . Stellen wir nämlich ein Element von  $SO(3)$  dar als

$$\mathcal{O} = \exp(-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{o}),$$

so muss mit

$$\mathcal{O}^\top = \exp(-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{o})^\top = \left\{ \sum_{n=0} \frac{1}{n!} (-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{o})^\top \right\} = \exp(-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{o}^\top),$$

also gelten:

$$\mathcal{O}\mathcal{O}^\top = \mathcal{O}^\top\mathcal{O} = \mathbb{1} \Leftrightarrow \mathbf{o}_n + \mathbf{o}_n^\top = 0 \Leftrightarrow \mathbf{o}_n = -\mathbf{o}_n^\top$$

Dies bedeutet gerade, dass die Generatoren  $\mathbf{o}_n$  antisymmetrisch sind. Aus der **Orthogonalität der Gruppenelemente** folgt also die **Antisymmetrie der Generatoren**.

Mit  $\det(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$  gilt außerdem:

$$\det(\mathcal{O}) = \det(\exp(-i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})) = \exp\left(-i \sum_n \omega_n \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma}_n)\right) = 1 \Leftrightarrow \text{Sp}(\boldsymbol{\sigma}_n) = 1$$

Die Bedingung, dass die Determinante gleich 1 ist, führt zur **Spurfreiheit** der Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra.

## Ein Wurmloch

Das infinitesimale Längenquadrat (und damit die Metrik) für die Wurmloch-Lösung der Einstein-Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 dt^2 + dr^2 + (b_0^2 + r^2)(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) = \\ &= (c dt, dr, d\vartheta, d\varphi) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0^2 + r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b_0^2 + r^2) \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um einen vierdimensionalen Raum, der in unserem Geiste nicht zu erfassen ist. Man kann jedoch einen zweidimensionalen Schnitt des Raumes anschaulich darstellen und zwar setzen wir dazu  $t = \text{const.}$  und  $\vartheta = \text{const.} = \pi/2$ . Damit ergibt sich  $dt = 0$  bzw.  $d\vartheta = 0$ . und wir erhalten für das differentielle Wegelement zum Quadrat:

$$ds^2 = dr^2 + (b_0^2 + r^2) d\varphi^2 = \begin{pmatrix} dr & d\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_0^2 + r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus Teil I, dass für einen Raum mit einer Parametrisierung  $\mathbf{x}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , wobei  $u_n$  die Koordinaten sind, gilt:

$$g^{ij} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j}.$$

Damit sind für die Parametrisierung  $\mathbf{x}$  der Fläche folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = b_0^2 + r^2.$$

Wir machen folgenden Ansatz für die Parametrisierung, womit die dritte Bedingung sofort erfüllt ist:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{b_0^2 + r^2} \cos \varphi \\ \sqrt{b_0^2 + r^2} \sin \varphi \\ z(r) \end{pmatrix}.$$

Es gilt damit:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sqrt{b_0^2 + r^2} \sin \varphi \\ \sqrt{b_0^2 + r^2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi / \sqrt{b_0^2 + r^2} \\ r \sin \varphi / \sqrt{b_0^2 + r^2} \\ z'(r) \end{pmatrix}.$$

Damit ist ersichtlich, dass

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = b_0^2 + r^2,$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} = 0,$$

sofort erfüllt sind. Es bleibt also noch

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = \frac{r^2}{b_0^2 + r^2} + z'(r)^2 \stackrel{!}{=} 1,$$

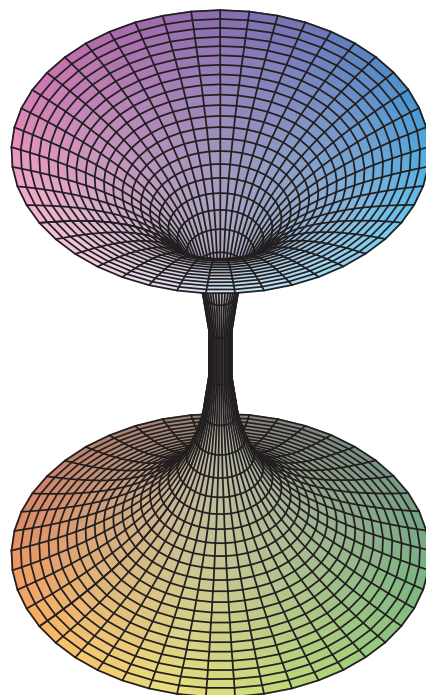
zu erfüllen. Daraus folgt:

$$z'(r) = \frac{b_0}{\sqrt{b_0^2 + r^2}} \Rightarrow z(r) = b_0 \int \frac{1}{\sqrt{b_0^2 + r^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{b_0}\right)^2}} = b_0 \operatorname{arsinh} \left( \frac{r}{b_0} \right) + C.$$

Wir setzen der Einfachheit halber die Integrationskonstante  $C = 0$  und erhalten somit die Parameterdarstellung einer Fläche mit der obigen zweidimensionalen Metrik:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{b_0^2 + r^2} \cos \varphi \\ \sqrt{b_0^2 + r^2} \sin \varphi \\ b_0 \operatorname{arsinh}(r/b_0) \end{pmatrix}.$$

Natürlich soll zu guter letzt ein Bild dieser Fläche nicht vorenthalten werden:

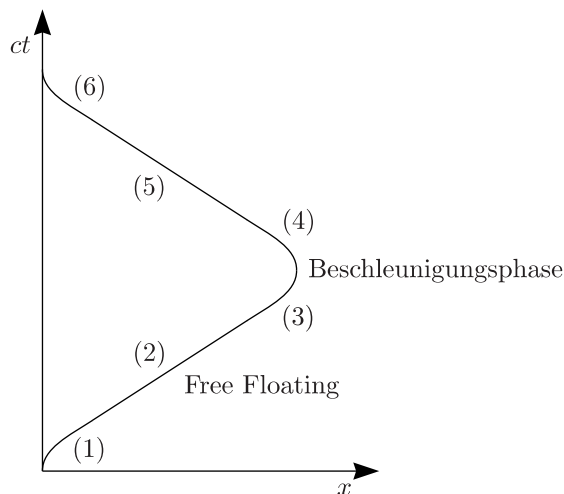


### Das Zwillingsparadoxon

Das eigentliche Paradoxon rührt übrigens von folgender Überlegung her: Prinzipiell dürfte nämlich kein Zwilling älter sein als der andere, wenn beide Bezugssysteme gleichberechtigt sind. Aus der Sicht des ruhenden Zwillings geht die bewegte Uhr im Bezugssystem des reisenden Zwillings langsamer, womit dieser also auch langsamer altert. Man kann jedoch das ganze Spielchen auch umgekehrt durchführen. Aus der Sicht des reisenden Zwillings ruht er ja in seinem Bezugssystem und die Erde bewegt sich von ihm weg. Damit gehen aus seiner Sicht die Uhren auf der Erde langsamer und der ruhende Zwilling müsste dann auch langsamer altern. (Man spricht dabei von **relativer Zeitdilatation**.)

Genau durch diese Überlegung versuchten Zweifler die Relativitätstheorie zu ihren anfänglichen Zeiten zu widerlegen. Den Widerspruch löste Einstein mit dem Hinweis auf, dass beide Bezugssysteme wegen der Beschleunigungsphasen (1), (3), (4) und (5) nicht gleichberechtigt seien:

---



In den Phasen (1), (3), (4) und (5) tritt nämlich eine sogenannte **absolute Zeitdilatation** auf. Das heißt, der Gang der Uhren wird wirklich verlangsamt und dann wieder beschleunigt. Mathematisch gesehen ist die Ursache dafür die Krümmung in der Kurve im Minkowski-Raum.

In beliebigen Räumen ist nämlich (im Gegensatz zum  $\mathbb{R}^n$ ) der kleinste Abstand zwischen zwei Punkten (geodätische Kurve) nicht unbedingt durch eine geradelinige Verbindung gegeben. Genauso ist es auch hier. Genauso ist es auch im obigen Schaubild. Die Erde befinde sich bei  $x = 0$ . Der ruhende Zwilling „bewegt“ sich nur auf der Zeitachse. Der reisende Zwilling nimmt einen bestimmten Abstand zur Erde ein und kehrt dann wieder zu  $x = 0$  zurück. Dann ist für ihn jedoch weniger Zeit vergangen als für den ruhenden Zwilling, auch wenn die Verbindungslinie zwischen Anfangs- und Endpunkt (in der obigen Zeichnung ist dies ja nur eine Veranschaulichung im  $\mathbb{R}^2$ ) größer scheint.

### Auswertung von $\delta$ -Funktionen in verschiedenen Koordinaten

In kartesischen Koordinaten  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$  wissen wir schon, dass

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0),$$

gilt. In beliebigen Koordinaten  $\mathbf{r} = (u, v, w)^\top$  machen wir den Ansatz

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \gamma(u, v, w)\delta(u - u_0)\delta(v - v_0)\delta(w - w_0),$$

mit einer zunächst noch unbekanntem Funktion  $\gamma(u, v, w)$ . Dann gilt, falls  $\mathbf{r}_0 \in V$ :

$$\begin{aligned} \int_V d^3 \mathbf{x}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \\ &= \iiint_V \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \gamma(u, v, w) \delta(u - u_0) \delta(v - v_0) \delta(w - w_0) du dv dw \stackrel{!}{=} 1, \\ \Rightarrow \gamma &= \left( \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \Big|_{\mathbf{r}_0} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Somit gilt beispielsweise bei Zylinder- bzw. Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \frac{1}{\varrho_0} \delta(\varrho - \varrho_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0), \\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \frac{1}{\varrho_0^2 \sin \vartheta_0} \delta(r - r_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \end{aligned}$$

Manchmal sieht man auch bei Kugelkoordinaten die folgende Darstellung:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{\varrho_0^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0),$$

Diese ist jedoch äquivalent zur vorherigen, denn es ist wegen

$$\delta(f(x)) = \sum_{\substack{\text{Nullstelle} \\ x_0 \text{ von } f(x)}} \frac{1}{|f'(x)|_{x=x_0}} \delta(x - x_0)$$

für den Spezialfall  $f(\vartheta) = \cos \vartheta - \cos \vartheta_0$ :

$$\delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) = \frac{1}{|-\sin \vartheta_0|} \delta(\vartheta - \vartheta_0) = \frac{1}{\sin \vartheta_0} \delta(\vartheta - \vartheta_0).$$